

CONSTRUÇÕES
GEOMÉTRICAS

Célio Pinto de Almeida

CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS

G.Ermakoff CASA EDITORIAL
RIO DE JANEIRO | 2024

Construções Geométricas
Copyright © 2024 by Célio Pinto de Almeida

Coordenação editorial:
George Ermakoff

Capa:
Miriam Lerner

Diagramação:
Marcelo Domingues

Desenhos:
Michelle Bulhões

Digitação:
Gilmar Lessa

Revisão:
Luciana Messeder e Patricia Leal

Imagem da capa:
Cardioide

Primeira edição
Tiragem: 1.000 exemplares – Distribuição gratuita

Este é o sétimo livro que venho escrevendo sobre diversos ramos da Geometria, que tanto me encanta. O próximo já está escrito e mais dois estão em processo de maturação, para completar a série de dez que pensei preparar, quase cinquenta anos depois que, em 1969, passei do magistério para o setor imobiliário.

São, sempre, tiragens gratuitas de mil exemplares, um terço dos quais encaminho a bibliotecas, escolas e universidades. Outra terça parte é destinada a quatro grupos de professores existentes nas regiões Nordeste, Sudeste e Sul, capitaneadas por amantes da Matemática.

Os demais venho enviando a amigos, muitos conhecidos há apenas duas ou três décadas e outros ex-alunos, dos tempos de vestibular.

Pois é a esses amigos, recentes ou antigos, que dedico o presente estudo, desejando que agrade aos interessados na Matemática e que possam ser de alguma utilidade para pessoas das relações dos demais.

CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS

O presente trabalho visa estudar as construções geométricas de figuras planas, complementando toda a teoria desenvolvida no livro *Geometria Plana*, deste autor, publicado em 2018 e apresentado em segunda edição em 2020.

Assim, as definições e as propriedades descritas e desenvolvidas naquelas obras são entendidas como de pleno conhecimento do leitor, que terá, sempre que cabível, referência numérica aos itens correspondentes nos conceitos detalhados naquelas duas edições.

As construções que serão apresentadas terão natural progressão, desde retas e ângulos até curvas de grau superior, contendo proposições práticas e problemas propostos e resolvidos, com as devidas justificativas.

Admite-se, naturalmente, que sejam de amplo conhecimento do leitor os usos dos materiais essenciais, como a régua, o par de esquadros, o compasso e o transferidor.

Nestas construções não estão incluídas as curvas cônicas, objeto de estudo próprio, contido no livro *Cônicas*, deste autor, publicado em 2019.

LISTAGEM DE ASSUNTOS

A listagem abaixo apresenta, em cada capítulo, os principais assuntos abordados, ao invés do habitual sumário de títulos.

| | |
|--------------------------------------|--|
| Capítulo I – Retas e ângulos | Divisão de segmentos 12 |
| | Divisão harmônica 12 |
| | Médias aritmética, geométrica e harmônica 13 |
| | Operações com ângulos 17 |
| | Construção de um ângulo de valor dado 19 |
| Capítulo II – Círculos | Construção do arco capaz 29 |
| | Construção de tangentes a uma circunferência 30 |
| | Construção das tangentes comuns a duas circunferências .. 31 |
| | Eixo radical de duas circunferências 33 |
| | Centro radical de três circunferências 35 |
| Capítulo III – Triângulos | Construção de triângulos em grandeza 46 |
| | Construção de triângulos em posição 69 |
| Capítulo IV – Quadriláteros | Retas antiparalelas 86 |
| | Construção de quadriláteros 88 |
| Capítulo V – Polígonos | Duplicação do gênero 110 |
| | Construção dos polígonos regulares de gênero da forma 2.2^n 111 |
| | Construção dos polígonos regulares de gênero da forma 3.2^n 112 |
| | Construção dos polígonos regulares de gênero da forma 5.2^n 113 |
| | Método de Rinaldini 114 |
| Capítulo VI – Concordâncias | Concordância de duas linhas 125 |
| | Concordâncias simples e compostas 128 |
| | Construção de concordâncias simples por arcos de circunferência 129 |
| | Construção de concordâncias compostas por arcos de circunferência 138 |
| Capítulo VII – Ovais e óvulos | Ovais 144 |
| | Construção de uma oval de quatro centros 146 |
| | Construção de uma oval de oito centros 148 |
| | Tangentes a ovais 148 |

| | | |
|---|---|-----|
| | Óvulos | 149 |
| | Construção do óvulo de quatro centros | 151 |
| | Tangentes a óvulos | 152 |
| Capítulo VIII – Espirais | | |
| | Espiral de Arquimedes | 160 |
| | Espiral hiperbólica | 162 |
| | Espiral logarítmica | 163 |
| | Segmentos áureos | 164 |
| | Média e extrema razão | 164 |
| | Triângulos áureos | 165 |
| | Retângulo áureo | 167 |
| | Pentágonos áureos | 168 |
| | Espiral áurea | 169 |
| | Sequência de Fibonacci | 169 |
| | Espiral de Fibonacci | 169 |
| | Falsas espirais | 171 |
| Capítulo IX – Curvas cíclicas | | |
| | Cicloides | 181 |
| | Determinação aproximada da retificação de uma circunferência | 183 |
| | Construção de tangentes à cicloide normal | 186 |
| | Construção da cicloide normal | 187 |
| | Cicloide alongada | 189 |
| | Construção da tangente à cicloide alongada | 189 |
| | Construção da cicloide alongada | 191 |
| | Cicloide encurtada | 193 |
| | Construção de tangentes à cicloide encurtada | 193 |
| | Construção da cicloide encurtada | 195 |
| | Epicycloides e hipocicloides | 196 |
| | Construção de tangentes a epicycloides e a hipocicloides .. | 197 |
| | Construção de epicycloides normais, alongadas e encurtadas | 197 |
| | Construção de hipocicloides normais, alongadas e encurtadas | 202 |
| | Cardioides | 209 |
| Capítulo X – Transformações geométricas planas | | |
| | Translação | 224 |
| | Rotação | 225 |
| | Simetria axial | 226 |
| | Simetria central | 228 |
| | Homotetia | 229 |
| | Homologia | 231 |
| | Afinidade | 238 |
| | Inversão | 243 |
| Capítulo XI – Problemas gerais | | |
| | Problemas propostos e resolvidos | 269 |

CAPÍTULO I

RETAS E ÂNGULOS

Este capítulo inicial trata das construções básicas, envolvendo retas e ângulos.

1 – Construção da paralela a uma reta dada

Além das naturais construções da reta s paralela a uma reta r dada, por um ponto A , exterior, também dado, pela utilização de régua e um esquadro, ou de dois esquadros, apenas com intuito conceitual, seguem, abaixo, construções com o uso do compasso, apoiadas nas propriedades dos paralelogramos, cujos lados opostos têm de ser paralelos e iguais (*Geometria Plana*, número 72.4), ou nas propriedades dos trapézios isósceles (*Geometria Plana*, número 109).

Assim, para traçar, por A , a paralela s à reta dada r , basta arbitrar dois pontos B e C em r e construir as circunferências (A, BC) e (C, AB) , que se cortam produzindo um segundo ponto D de s (Figura 1), pela formação do paralelogramo $ABCD$, ou, como variante, arbitrado um ponto B de r e marcado C , em r , tal que $BC = AB$, as circunferências (A, AB) e (C, AB) cortam-se no vértice D do losango $ABCD$ (Figura 2), D e A definindo a paralela s .

Outra construção simples consiste em traçar uma circunferência (O, OA) arbitrada e obter o ponto D , por corte com uma segunda circunferência (C, AB) , proporcionando o trapézio isósceles $ABCD$ (Figura 3), de bases BC e AD .

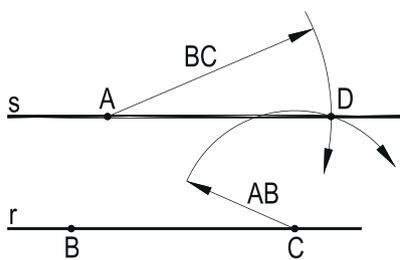


Figura 1

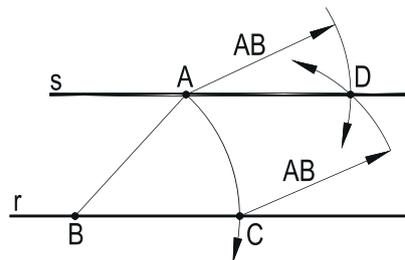


Figura 2

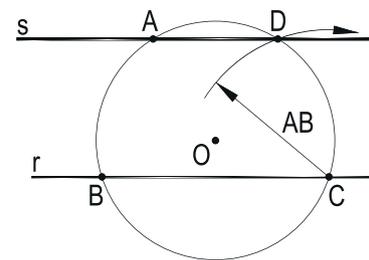


Figura 3

2 – Divisão de um segmento dado em partes iguais ou proporcionais

Para dividir um segmento dado AB em um número conhecido de partes iguais, basta traçar, por A , uma semirreta qualquer, sobre a qual se marcam pontos com a mesma quantidade de segmentos iguais a um valor k , arbitrado, para, então, ligando o último desses pontos a B , operar com paralelas, que proporcionam a divisão pedida (*Geometria Plana*, número 157) (Figura 4).

É idêntico o procedimento para dividir um segmento dado AB em partes proporcionais a valores dados m, n, p, q, t , como apresentado na Figura 5.

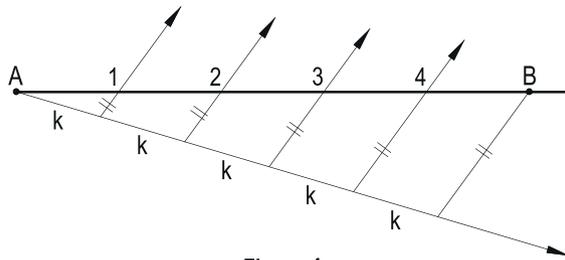


Figura 4

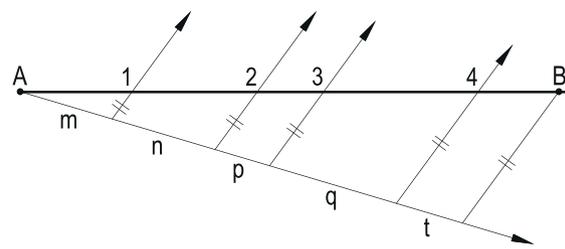


Figura 5

3 – Determinação do conjugado harmônico N de um ponto dado M , M e N sendo divisores harmônicos de um segmento dado AB

Como os conjugados harmônicos M e N devem dividir AB numa mesma razão, em módulo (*Geometria Plana*, número 160), é com paralelas que se resolve a questão, aproveitando as parcelas AM e MB em que M divide AB , rebatendo-as sobre duas paralelas, de direção arbitrada, para, unindo \bar{M} a \bar{M} (Figura 6), obter o conjugado N .

A Figura 7 repete o procedimento, para o caso de o ponto M dado ser exterior a AB , pela utilização de uma reta arbitrada $A\bar{M}$ e das paralelas $A\bar{M}$ e $B\bar{M}$, \bar{M} sendo o simétrico de M' em relação a B , o que assegura que N divida AB na mesma razão que M .

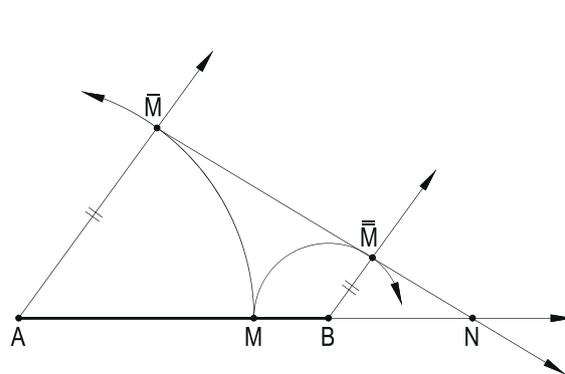


Figura 6

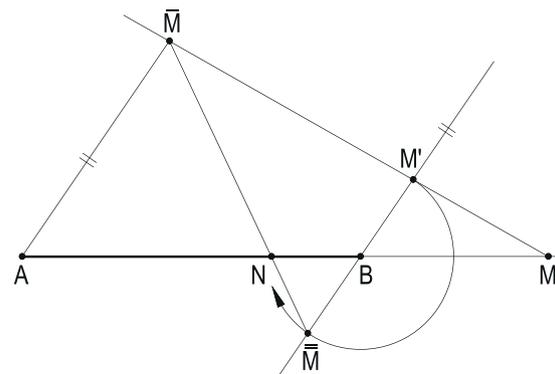


Figura 7

4 – Determinação gráfica da média aritmética de n segmentos dados

Utilizando a própria definição, basta colocar sobre uma reta, sequencialmente, os n segmentos dados e, com paralelas, dividir o total assim obtido pelo número n de segmentos dados.

No exemplo da Figura 8, o segmento XF representa, graficamente, a média aritmética dos cinco segmentos dados a, b, c, d e e, marcados, consecutivamente, com os cinco segmentos AB, BC, CD, DE e EF, sobre uma reta arbitrada r, contendo o ponto A.

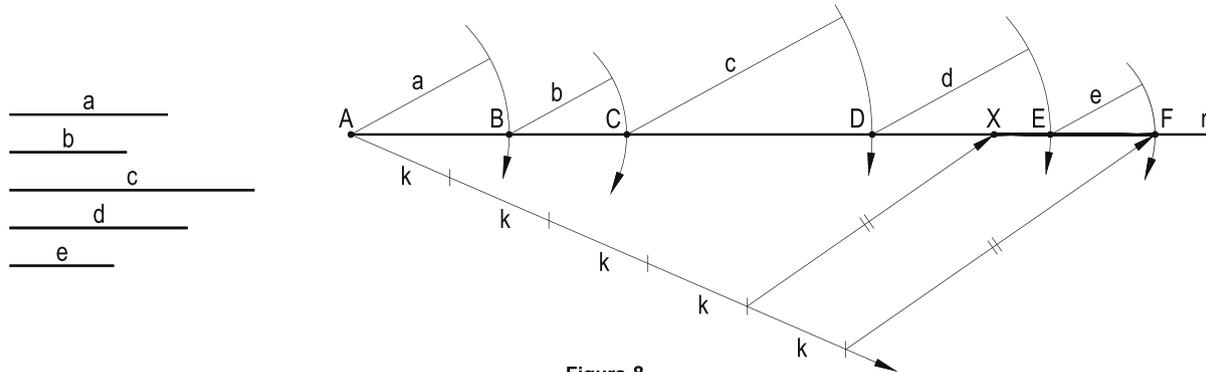


Figura 8

5 – Determinação gráfica da média geométrica de dois valores dados a e b

Obtido o ponto médio O do segmento AC, formado por $AB = a$ e $BC = b$, constrói-se a semicircunferência de diâmetro AC, e, então, o segmento BG, perpendicular a AC, vale a média geométrica procurada (*Geometria Plana*, número 197.2) (Figura 9).

6 – Determinação da média harmônica de dois valores dados a e b

Aplicados sobre uma reta arbitrada r os segmentos $AM = a$ e $AN = b$, no mesmo sentido, a determinação do ponto B, conjugado harmônico de A em relação a MN, traz o segmento AB (Figura 10), cuja medida m é a média harmônica procurada (*Geometria Plana*, número 163).

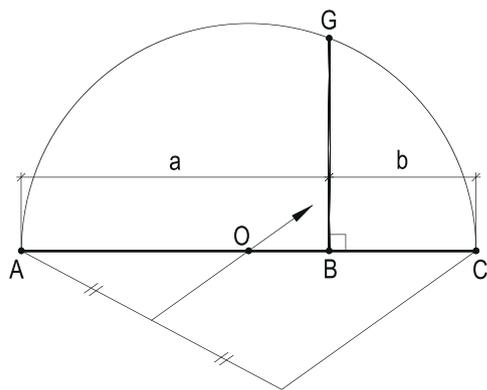


Figura 9

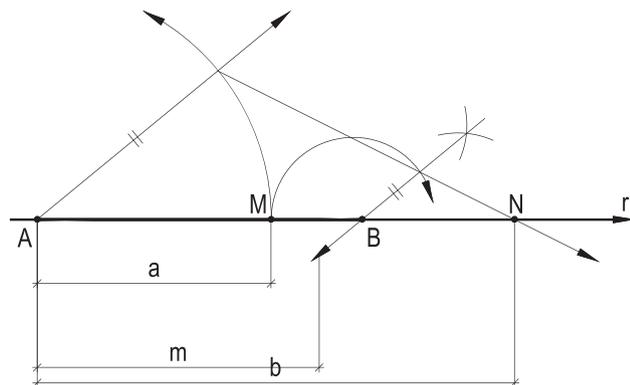


Figura 10

7 – Feixe de retas paralelas

Os problemas habituais tratam da construção de um feixe de retas paralelas equidistantes ou obedecendo a determinada proporção de distâncias.

7.1 – Construção de um feixe de retas paralelas e equidistantes, conhecendo um ponto A da primeira, um ponto J da última, a quantidade de retas do feixe e sua direção d.

Seja, por exemplo, construir o feixe de sete retas paralelas à reta dada d, conhecendo um ponto A da primeira e um ponto J da sétima.

Basta dividir o segmento AJ em seis (sete menos um) partes iguais e conduzir, por todos os pontos dessa divisão, as sete retas r_1, r_2, r_3 , etc. paralelas a d (Figura 11).

Aliás, a divisão do segmento AJ em tantas partes iguais se faz pela determinação, sobre uma semirreta arbitrada, de origem A, de tantos segmentos arbitrados, mas iguais, pelo traçado pelo extremo do último deles da reta que contém J e pelo envio de paralelas a essa reta pelos pontos de divisão assim arbitrados (Figura 11), tal como detalhado no item 2.

7.2 – Construção de um feixe de retas paralelas, guardando determinada proporção de distâncias, conhecendo sua direção d e dois pontos de passagem A e J, da primeira e da última reta do feixe, além da proporção desejada.

Resolução semelhante, utilizando segmentos que guardem a proporção $m : n : p : q : \text{etc.}$ dada, exemplificada na Figura 12 pela construção de um feixe de cinco paralelas à reta dada d, guardando a proporção $3 : 2 : 5 : 4$, com auxílio de uma reta auxiliar genérica AA'.

Naturalmente, os dois pontos dados A e J de passagem de duas das paralelas do feixe poderiam ser de retas que não as extremas, com idêntico procedimento.

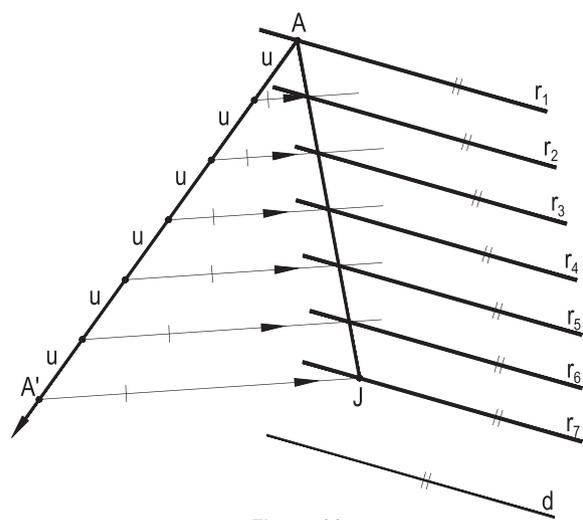


Figura 11

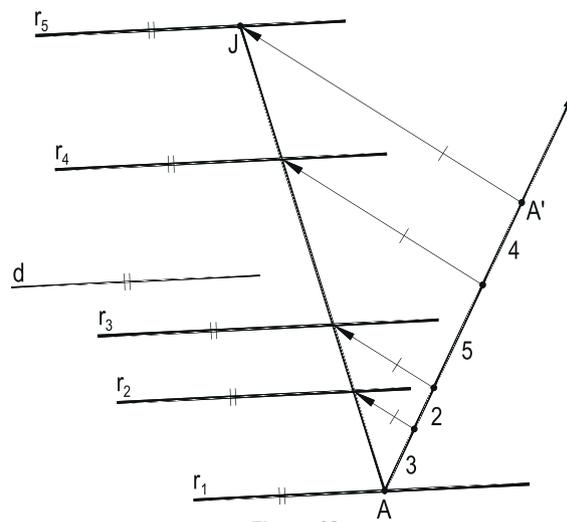


Figura 12

8 – Construção da mediatriz de um segmento de reta dado

A determinação da mediatriz m de um segmento dado AB se faz, habitualmente, pelo traçado de duas circunferências secantes iguais, de centros A e B , com raio R arbitrado, cortando-se nos pontos P e Q que definem m , por equidistarem, ambos, de A e de B (Figura 13).

Como alternativas, usando os dois esquadros, com dois segmentos AA' e BB' paralelos, arbitrados, mas iguais (Figura 14), obtém-se o ponto M , médio de AB , ou, empregando compasso e esquadros (Figura 15), aplicados dois segmentos iguais AA' e $A'A''$, para conduzir, por M , a perpendicular m a AB , que é a mediatriz procurada.

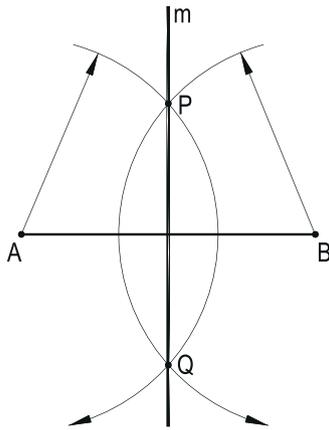


Figura 13

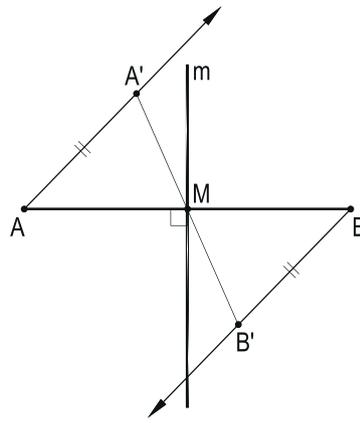


Figura 14

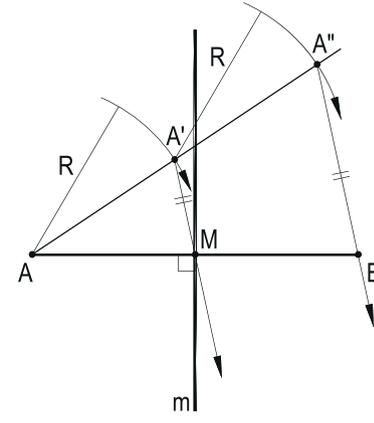


Figura 15

9 – Construção da perpendicular a uma reta dada, por um ponto dado

Com o emprego do compasso, constrói-se a perpendicular p a uma reta dada r , por um ponto dado A , exterior (Figura 16), ou pertencente a r (Figura 17), pelo traçado de uma circunferência de centro A , raio arbitrado R e da mediatriz p do segmento formado em r pelos pontos P e Q , cortes dessa circunferência com r , mesmo em casos desfavoráveis (Figura 18), quando o pé de p em r reste inacessível, arbitrados dois pontos P e Q de r e construída a mediatriz m de PQ , à qual p há de ser paralela.

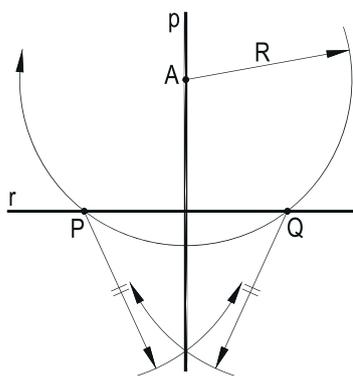


Figura 16

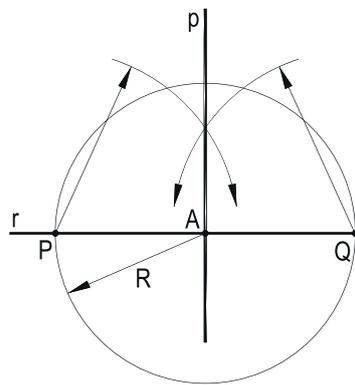


Figura 17

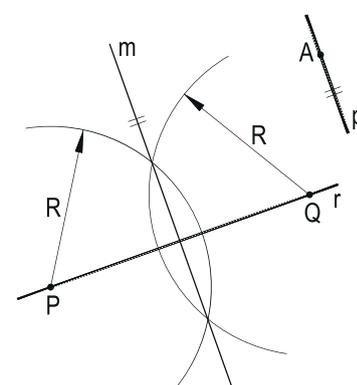


Figura 18

Ainda por interesse conceitual, pode-se utilizar o arco capaz de 90° (*Geometria Plana*, número 128.2), como detalhado a seguir.

Se A exterior a r , arbitra-se uma medida R , marca-se \bar{A} em r , tal que $A\bar{A} = 2R$ e, em $A\bar{A}$, o ponto O , sendo $AO = R$, e constrói-se a circunferência (O, R) que traz, em r , P , pé da perpendicular p , procurada (Figura 19).

Se A pertencente a r , arbitrado um ponto O , a circunferência (O, OA) dá B em r e sua união a O traz \bar{A} , diametralmente oposto a B e, então, $A\bar{A} \equiv p$ (Figura 20).

Quando o pé da perpendicular é inacessível, deve-se arbitrar um ponto \bar{A} de r e repetir a construção anterior. A reta p será a paralela a $\bar{A}\bar{A}$, por A (Figura 21).

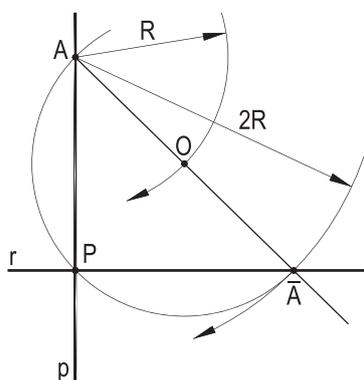


Figura 19

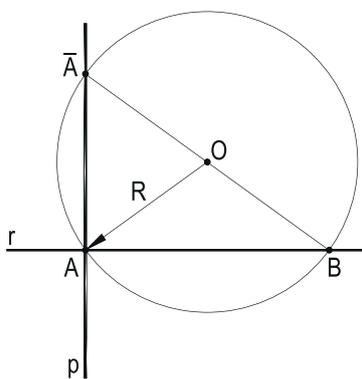


Figura 20

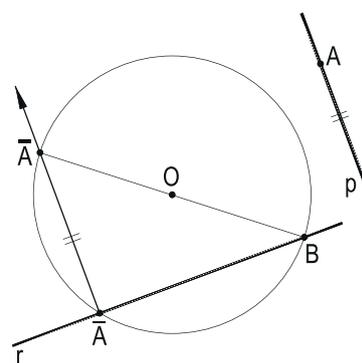


Figura 21

10 – Construção da circunferência circunscrita a um triângulo dado

Por ter que equidistar dos vértices do triângulo ABC , dado, seu circuncentro O , centro da circunferência procurada, é determinado pela construção das mediatrizes de dois quaisquer de seus lados (*Geometria Plana*, número 139), seja o triângulo ABC acutângulo (Figura 22), ou obtusângulo (Figura 23). Para o caso especial em que ABC é retângulo em A (Figura 24), o circuncentro O é o ponto médio da hipotenusa BC (*Geometria Plana*, número 140.2).

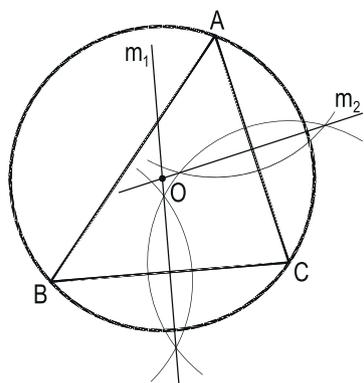


Figura 22

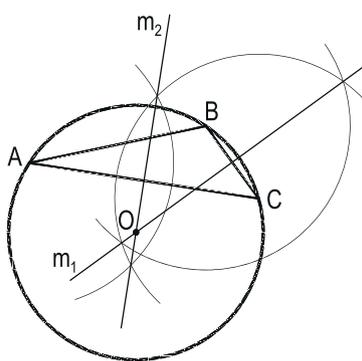


Figura 23

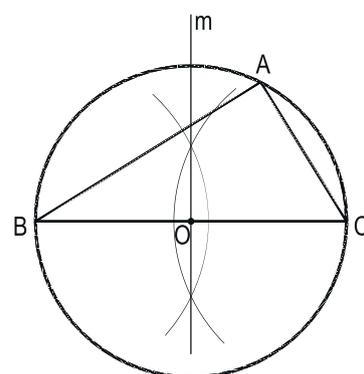


Figura 24

11 – Operações com ângulos

Transportar um ângulo é construir um outro, igual a ele, sob determinadas condições. O transporte sempre se baseia no fato de, em circunferências iguais, arcos iguais corresponderem a ângulos centrais iguais (*Geometria Plana*, número 125).

11.1 – Construção do ângulo β , igual ao dado α , conhecendo um lado Ax .

Com raio arbitrado R são construídos os arcos de círculo BC no ângulo dado e PQ , com centro A , e o transporte do valor do arco BC proporciona, a partir de P , em Ax , o ponto Q (Figura 25) e, então, o ângulo β , com uma segunda solução no sentido oposto.

11.2 – Construção do ângulo β , igual e adjacente ao dado α .

Procedimento idêntico (Figura 26).

11.3 – Construção do ângulo θ , igual à soma dos ângulos dados α , β e γ , conhecendo seu lado Ox .

11.4 – Construção do ângulo θ , igual à diferença entre os ângulos dados α e β , conhecendo seu lado Ox .

A utilização de arcos de raios iguais e os transportes dos ângulos dados proporcionam $\theta = \alpha + \beta + \gamma$ (Figura 27) e $\theta = \alpha - \beta$ (Figura 28), pela obtenção do ponto T , do segundo lado Oy , do ângulo θ pedido. Nos dois casos, há uma segunda solução, com construções simétricas das apresentadas, naturalmente, com os mesmos valores obtidos, respectivamente.

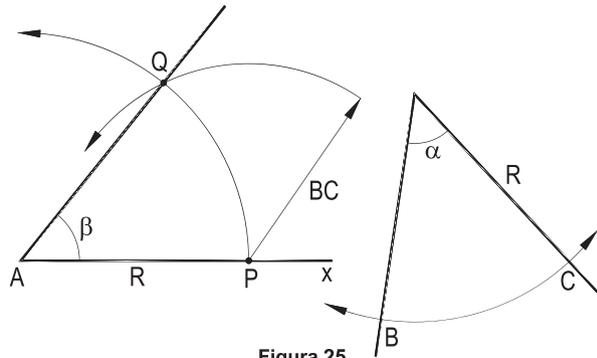


Figura 25

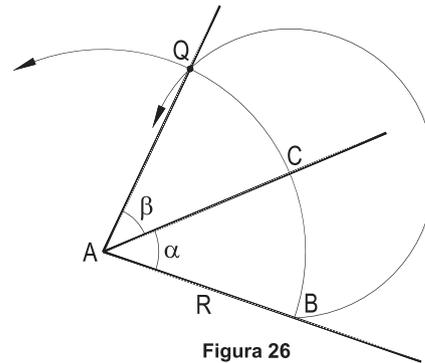


Figura 26

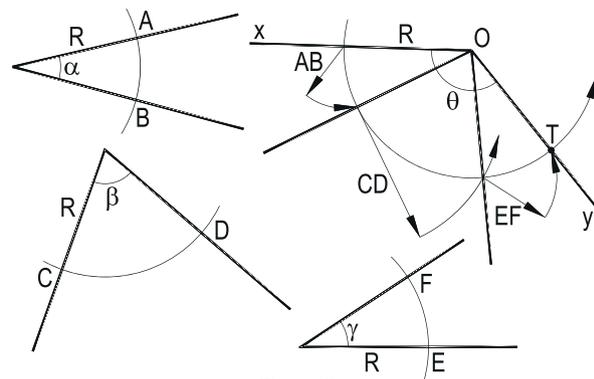


Figura 27

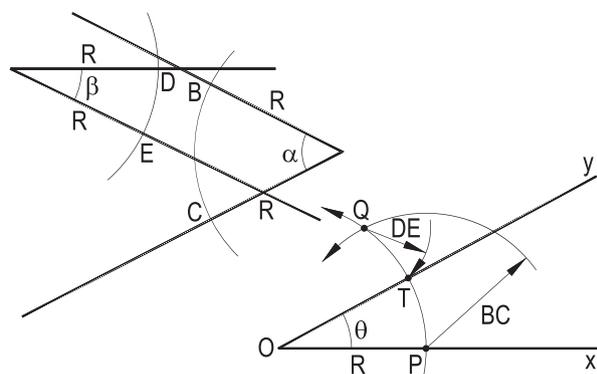


Figura 28

12 – Construção da bissetriz de um ângulo dado

O procedimento tradicional para construir a bissetriz Oz de um ângulo dado $x\hat{O}y$ consiste em utilizar um arco de centro O e raio arbitrado, que produz os pontos B e C nos lados de ângulo dado e determinar um ponto T deles equidistante (Figura 29), já que o triângulo isósceles TBC assim formado garante (*Geometria Plana*, número 148) que O e T definam a bissetriz Oz pedida.

Quando o vértice do ângulo formado por duas retas r e s dadas é inacessível, para obter sua bissetriz t basta determinar dois pontos P e Q que fiquem, cada um, a distâncias iguais de r e de s (Figura 30).

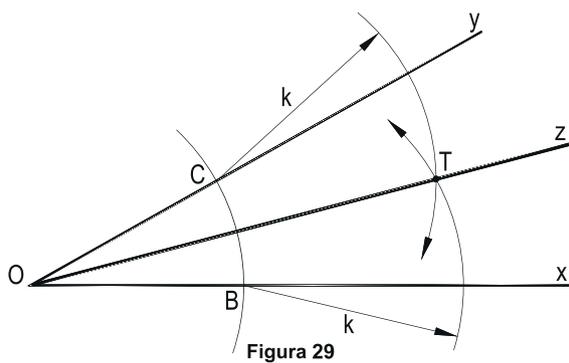


Figura 29

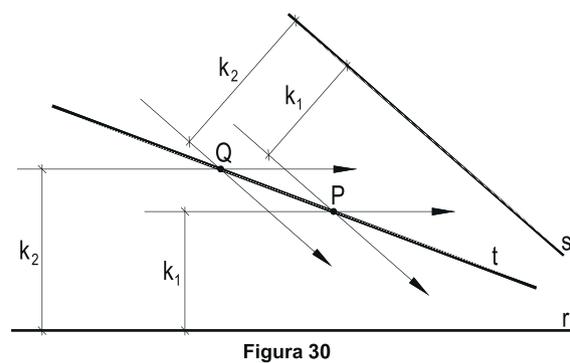


Figura 30

13 – Multiplicação de um ângulo dado α por um número natural, também dado

Tudo se passa como na operação de soma (Figura 31), em que o ângulo dado α foi multiplicado por sete.

14 – Divisão de um ângulo dado α em 2, 4, 8, 16, ..., 2^n partes iguais

A utilização consecutiva de bissetrizes resolve a questão, como na Figura 30, em que o ângulo dado $\alpha = x\hat{O}y$ foi dividido em oito partes iguais, β .

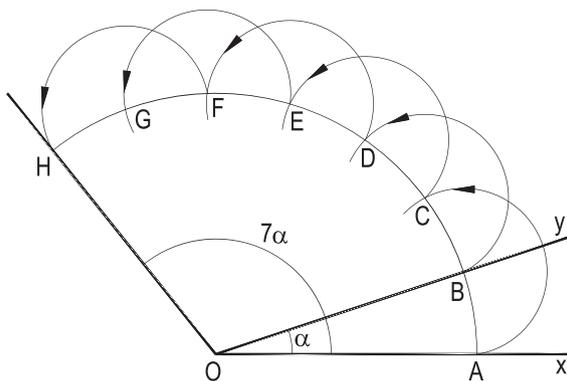


Figura 31

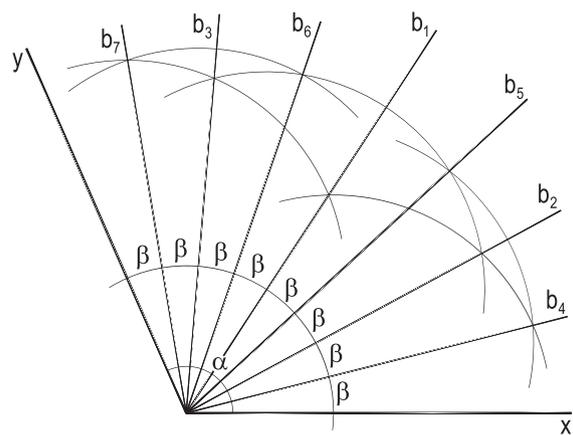


Figura 32

15 – Construção de um ângulo de valor dado

É com a utilização do transferidor que se mede e que se constrói um ângulo qualquer considerado, especialmente aqueles de valores fracionários.

Para casos especiais, utilizando os esquadros, combinados, ou isoladamente, consegue-se, como abaixo indicado, construir ângulos, iguais a 15° , ou múltiplos desse valor (Figuras 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43 e 44), respectivamente, para os ângulos 15° (complemento de 75°), 30° , 45° , 60° , 75° (por soma de 30° e 45°), 90° , 105° (soma de 60° e 45°), 120° , 135° (suplemento de 45°), 150° , 165° (suplemento de 15°) e 180° .

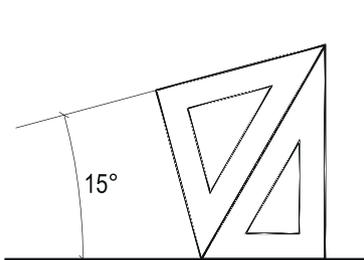


Figura 33

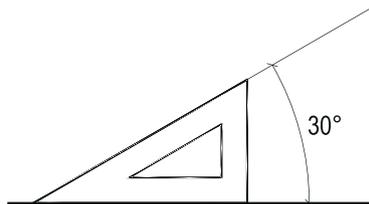


Figura 34

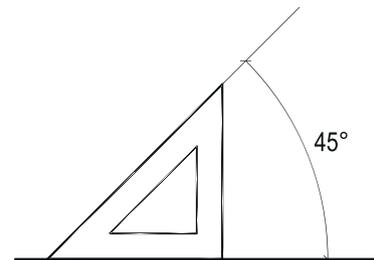


Figura 35

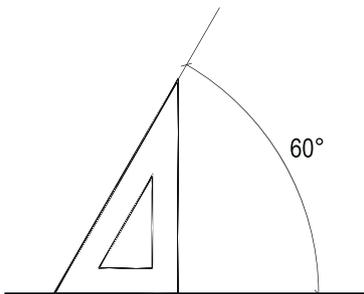


Figura 36

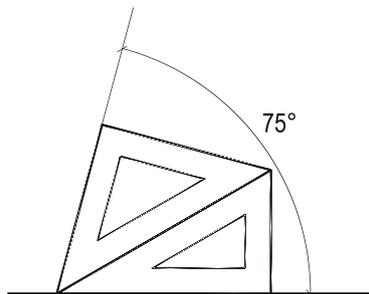


Figura 37

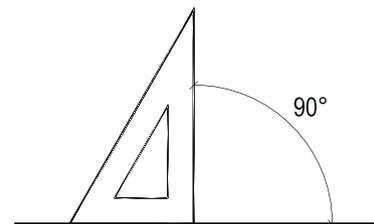


Figura 38

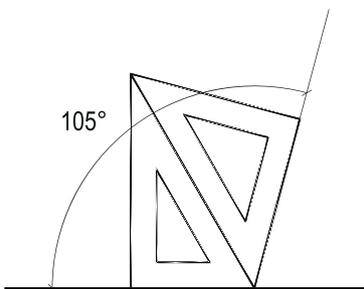


Figura 39

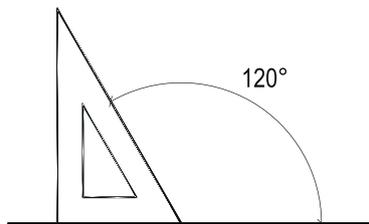


Figura 40

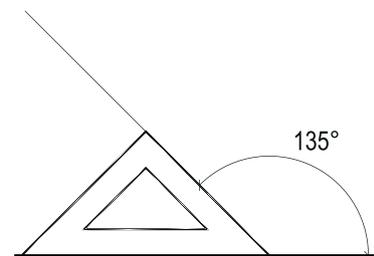


Figura 41

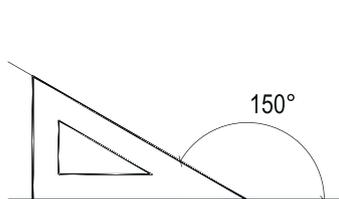


Figura 42

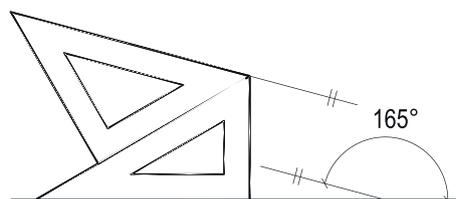


Figura 43

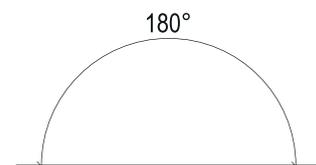


Figura 44

Esses ângulos podem, também, ser construídos apenas com o uso do compasso, como a seguir detalhado (Figuras 48, 49, 50 e 51).

Observe-se que, apenas com intuito conceitual, os ângulos de 30° , 45° e 60° , próprios dos esquadros, podem ser construídos com o uso do compasso, como abaixo indicado (Figuras 45, 46 e 47). E, naturalmente, seus suplementos 150° , 135° e 120° .

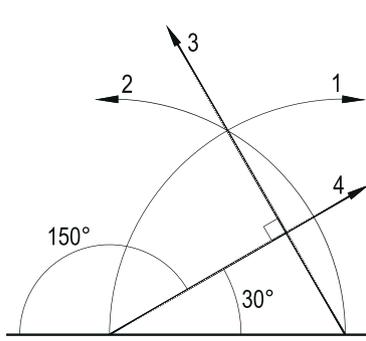


Figura 45

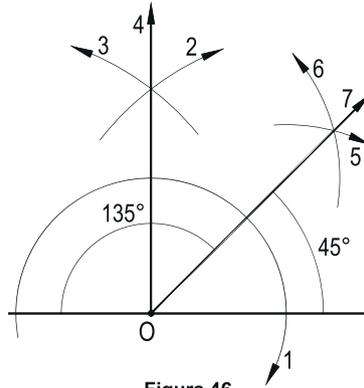


Figura 46

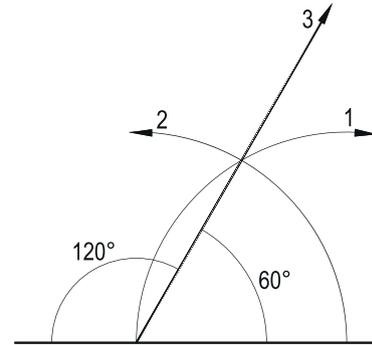
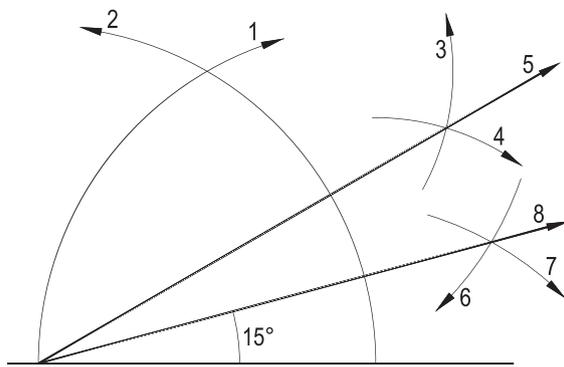


Figura 47



$$15^\circ = 60^\circ / 4$$

Figura 48

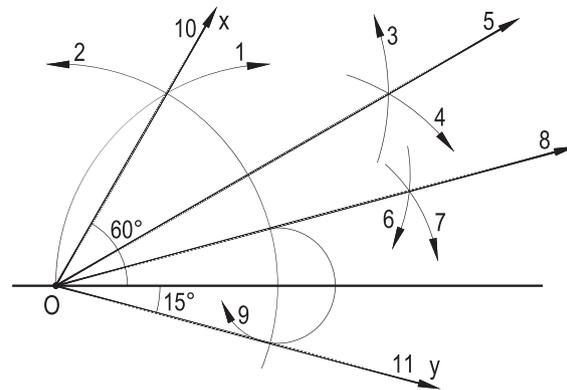
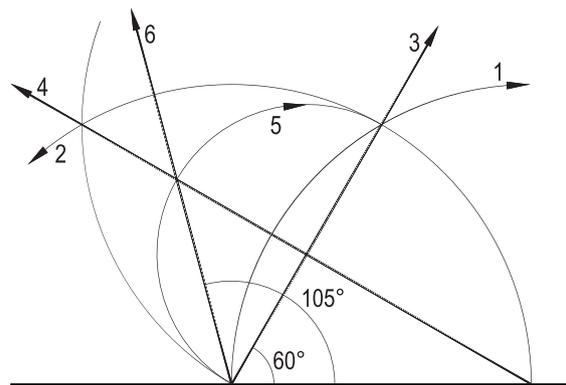


Figura 49



$$105^\circ = 60^\circ + 45^\circ$$

Figura 50

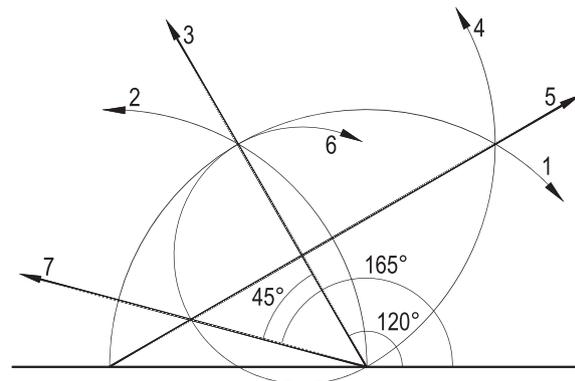


Figura 51

16 – Problemas resolvidos

Em cada capítulo serão apresentados problemas correspondentes aos assuntos desenvolvidos, numerados sequencialmente ao longo de toda a obra, com suas respectivas resoluções.

- 1 – **Dado um triângulo qualquer ABC, pede-se construir um feixe de retas paralelas a, b e c, equidistantes, passando por cada vértice do triângulo, b, por B, entre as outras duas.**

Resolução: Para que a reta b equidiste de A e de C, ela deve conter o ponto M, médio da transversal AC ao feixe pedido. M e B definem a reta b (Figura 52).

- 2 – **Dado o triângulo ABC, retângulo em A, pede-se construir o triângulo isósceles JAB, de base AB, com o mesmo perímetro que ABC.**

Resolução: Basta determinar a soma \overline{AB} de AC e BC e sua metade AM, que será o valor dos lados iguais JA e JB (Figura 53).

- 3 – **Construir um triângulo equilátero isoperímetro com o paralelogramo dado ABCD.**

Resolução: Obtida a soma \overline{AC} de dois lados consecutivos do paralelogramo, seus $2/3$, representados pelo segmento AJ, hão de medir o lado do triângulo equilátero pedido, apresentado na Figura 54, como AJK, com posição arbitrada.

- 4 – **Mesma questão para o quadrilátero ABCD, dado.**

Resolução: Determinado o perímetro \overline{CD} do quadrilátero, sua terça parte $J\overline{D}$ mede o lado do triângulo pedido JKD, mais uma vez em posição arbitrada (Figura 55).

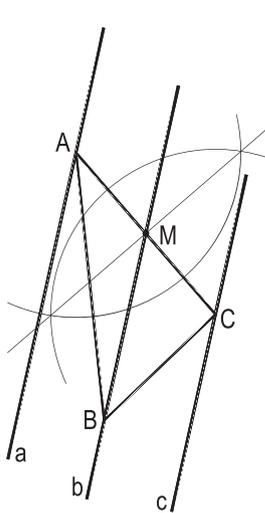


Figura 52

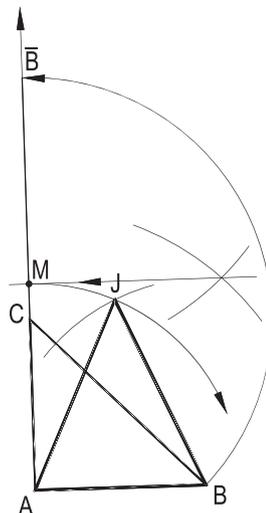


Figura 53

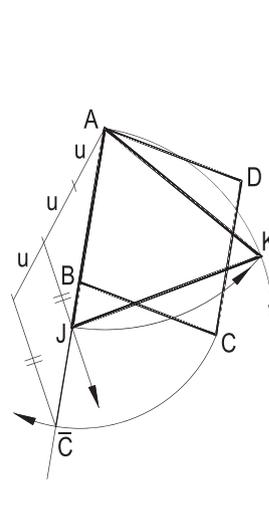


Figura 54

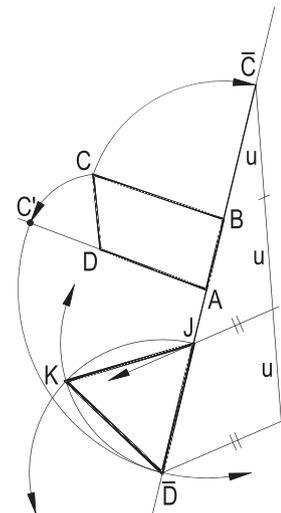


Figura 55

- 5 – Dividir o segmento XY, dado, em partes proporcionais aos lados a, b, c, d e e do pentágono ABCDE, também dado.

Resolução: Imediata (número 2) (Figura 56).

- 6 – Determinar a posição do ponto I, pé da bissetriz interna AI do triângulo dado ABC, sem construí-la.

Resolução: Trata-se de dividir o lado BC em partes proporcionais aos lados AB e AC (*Geometria Plana*, número 164), o que se faz com duas paralelas arbitradas, por B e por C (Figura 57).

- 7 – Determinar a posição do pé E da bissetriz externa AE do triângulo ABC, conhecendo seu lado BC e a posição do pé I da bissetriz interna AI.

Resolução: I e E devem dividir harmonicamente o lado BC (*Geometria Plana*, número 166). Simples (número 3), então, a determinação de E (Figura 58).

- 8 – Construir o triângulo isósceles ABC, dada sua base BC, sabendo que seus lados iguais medem a média geométrica de dois valores dados x e y.

Resolução: Aplicadas as medidas dadas x e y sobre uma reta qualquer, vem (número 5) o valor k de sua média geométrica e, então, o triângulo ABC, com duas soluções (Figura 59).

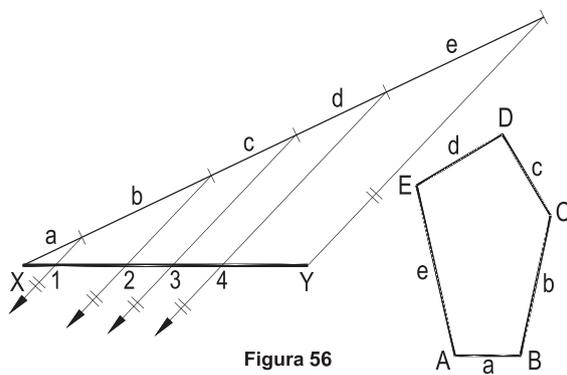


Figura 56

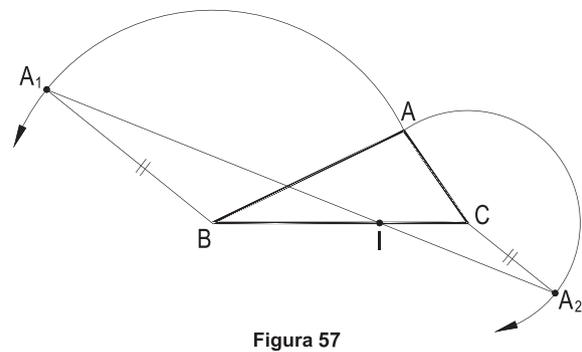


Figura 57

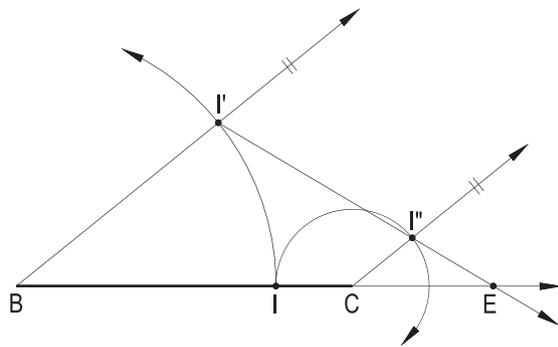


Figura 58

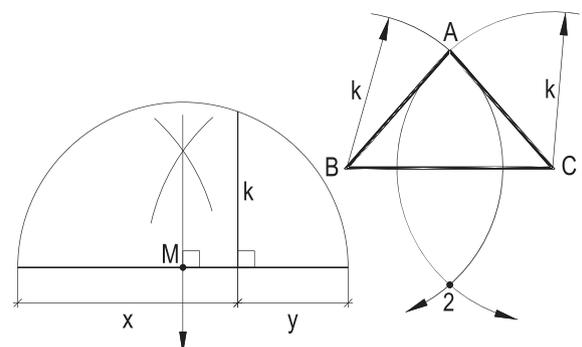


Figura 59

- 9 – Dadas as retas r , s e t , pede-se determinar todos os pontos que, equidistando de r e de s , distem de t um valor igual à terça parte da distância do ponto J , comum a r e s , à reta t , informando a natureza do polígono convexo que os pontos procurados formam.

Resolução: Para equidistar de r e de s , cada ponto procurado deve pertencer a uma das bissetrizes b_1 ou b_2 dos ângulos que elas formam.

E, para distar a terça parte da distância JL de J a t , devem pertencer a uma das paralelas t_1 e t_2 a t , distantes desta reta um valor igual à terça parte de JL , representada pelo segmento LK na Figura 60.

Assim, trata-se de um trapézio o quadrilátero formado pelos pontos A , B , C e D , interseções de b_1 e de b_2 com as retas t_1 e t_2 (Figura 60), já que as retas AD e BC são paralelas entre si e AB e CD oblíquas àquelas.

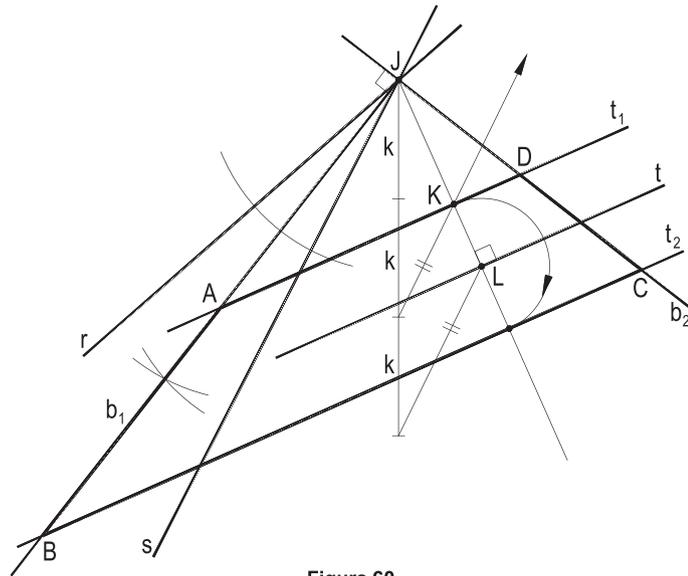


Figura 60

- 10 – Dados o ângulo \widehat{xOy} e os pontos A e C , C em Ox , pede-se construir o quadrilátero convexo $ABCD$, sabendo que BC é perpendicular a Ox , que AB é paralelo a Ox e que AD é perpendicular a Oy e igual a AB .

Resolução: Construídas as perpendiculares p_1 e \bar{p}_2 , respectivamente a Ox e a Oy , pelos pontos C e A (ver número 9), além da paralela AB a Ox , vem o vértice B , em p_1 , e, marcando-se, sobre \bar{p}_2 , $AD = AB$, completa-se o quadrilátero pedido, com apenas uma solução, para que $ABCD$ seja convexo (Figura 61).

De fato, para os elementos dados, a segunda posição para o vértice D , indicada pelo número 2 na Figura 61, proporciona um quadrilátero $ABC2$ entrecruzado.

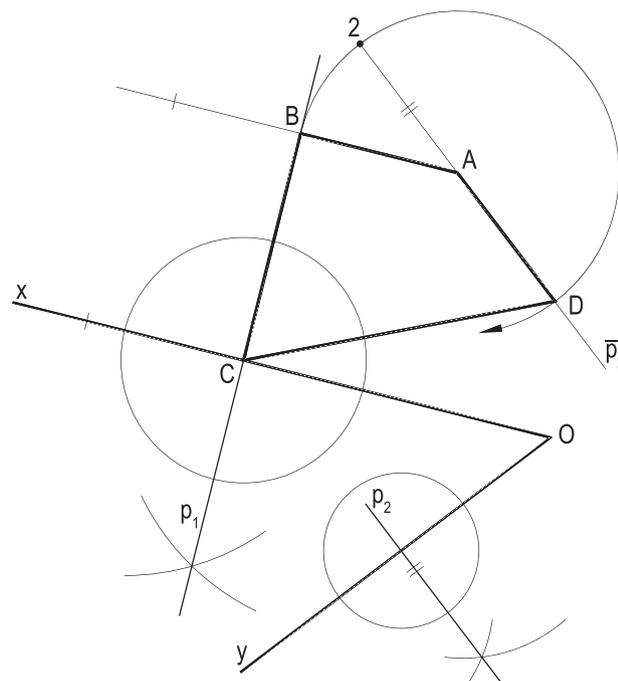


Figura 61

11 – Instituir o lugar geométrico dos pontos P, cujas razões entre as distâncias a duas retas secantes r e s, dadas, tenham valor constante $k = \frac{m}{n}$, também dado.

Resolução: A determinação de um ponto P que atenda à razão dada $k = \frac{m}{n}$ entre suas distâncias às retas r e s é imediata (Figura 62), com duas possibilidades P e \bar{P} , conforme se analise os espaços dos ângulos agudos de r e s, ou os obtusos.

E as homotetias de centro J, para P e para \bar{P} , mantendo essa razão constante, trazem, como conclusão, que o lugar geométrico procurado consiste em um par de retas a e b (Figura 62), concorrentes com as dadas no mesmo ponto J a elas comum, exceto J.

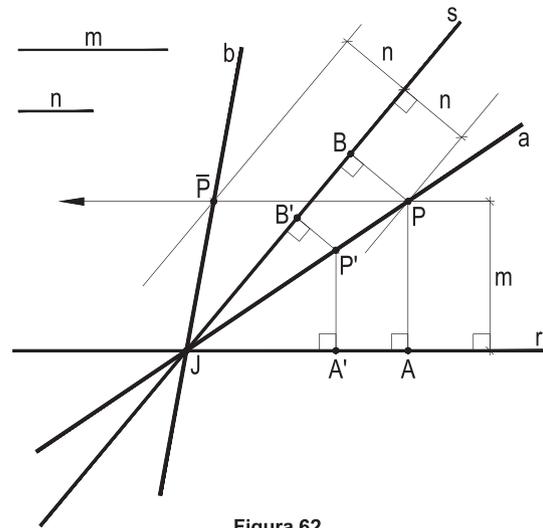


Figura 62

12 – Instituir o lugar geométrico dos pontos P, que guardem constante a razão $k = \frac{m}{n}$, dada, nesta ordem, a duas retas paralelas, r e s, também dadas.

Resolução: A aplicação de um segmento AB nas paralelas dadas, A em s e B em r, tal que $AB = m + n$, permite obter um ponto I, de AB, guardando a razão $k = \frac{m}{n}$ estabelecida entre as distâncias a r e a s (Figura 63), assim como a do ponto E, conjugado harmônico de I, para AB com auxílio dos rebatimentos I' e I'' de I sobre r e s (ver número 3).

Assim, o lugar geométrico consiste no par de retas paralelas a e b, também paralelas às retas dadas e pertencentes, respectivamente, aos pontos I e E, pela organização do feixe de quatro paralelas assim formado (Figura 63).

Cabe observar que quando a razão estabelecida $k = \frac{m}{n}$ iguala a unidade, o lugar geométrico procurado reduz-se a uma reta e, paralela às dadas e delas equidistante (Figura 64).

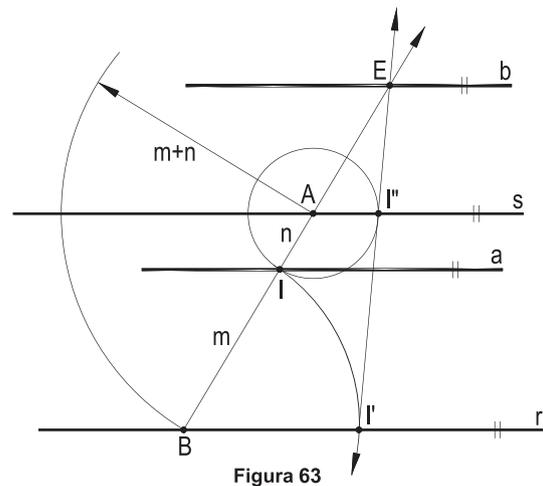


Figura 63

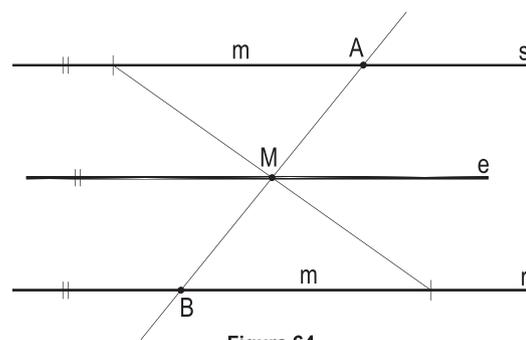


Figura 64

CAPÍTULO II

CÍRCULOS

17 – Definições e propriedades

Assume-se que sejam do conhecimento do leitor as principais definições referentes aos círculos, a suas circunferências e a suas partes, tais como setor circular, segmento circular, semicírculo, coroa circular, arco, corda, flecha, raio, diâmetro, pontos diametralmente opostos, ângulo central, ângulo inscrito, ângulo de segmento, circunferências concêntricas, secantes e tangentes, recomendando-se consultar o livro *Geometria Plana*, deste autor, edição de 2020, em seus capítulos VI e VII.

Além disso, cabe, como suporte para as construções adiante apresentadas e para resolver problemas propostos, rever alguns conceitos e importantes propriedades, como se passa a listar.

17.1 – A distância d de um ponto A a uma circunferência (O, R) se mede sobre a reta AO , limitada ao menor dos dois segmentos formados sobre essa reta entre o ponto A e seu ponto de corte B com a curva, seja o ponto A exterior (Figura 65) ou interior (Figura 66).

Naturalmente, é nula tal distância quando o ponto A pertence à circunferência (Figura 67).

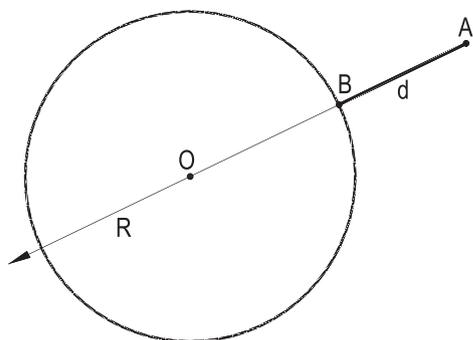


Figura 65

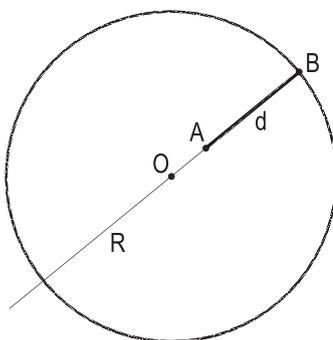


Figura 66

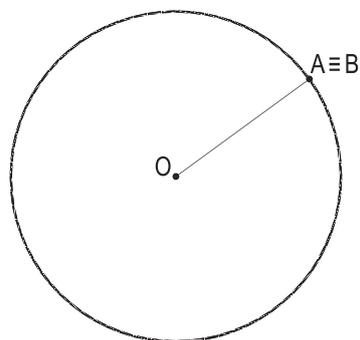


Figura 67

17.2 – O lugar geométrico dos pontos que distam um valor constante d de uma circunferência (O, R) é um par de circunferências concêntricas $(O, R + d)$ e $(O, R - d)$, quando d é menor que R (Figura 68), ou uma circunferência $(O, 2R)$ e seu centro O (Figura 69), quando d é igual a R , ou, enfim, apenas uma circunferência $(O, R + d)$ quando (Figura 70) d é maior que R .

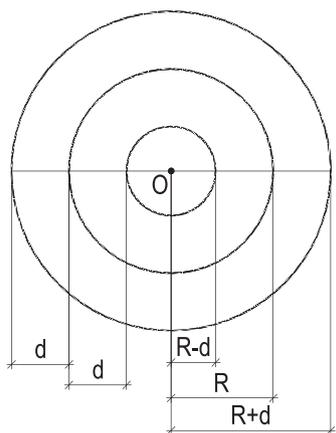


Figura 68

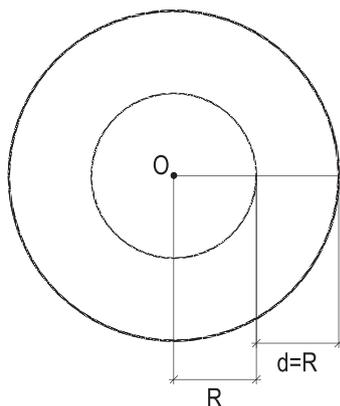


Figura 69

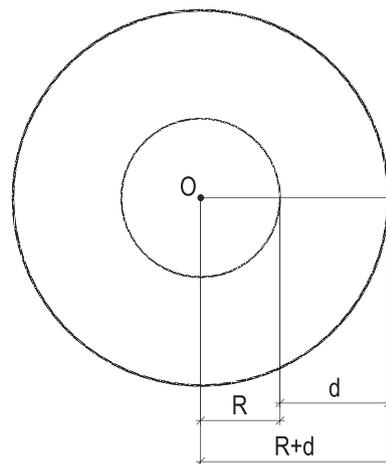


Figura 70

17.3 – Há uma infinidade de circunferências pertencentes a dois pontos fixos A e B e o lugar geométrico de seus centros O é a mediatriz m do segmento AB (Figura 71); três pontos não colineares A, B e C definem uma única circunferência e , seu centro O , comum às mediatrizes dos três lados do triângulo ABC , é o circuncentro desse triângulo (Figura 72); uma circunferência (O) fica precisamente definida a partir do conhecimento de seu centro O e de uma reta t a ela tangente, visto que o raio OT referente ao ponto de contato T dessa tangente é a ela perpendicular (Figura 73).

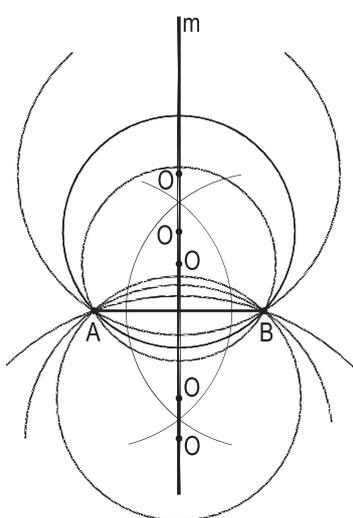


Figura 71

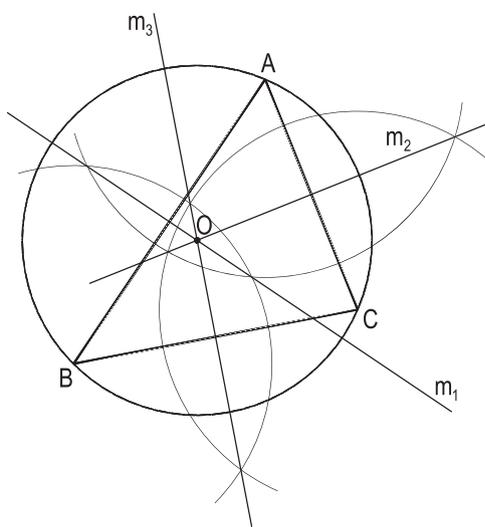


Figura 72

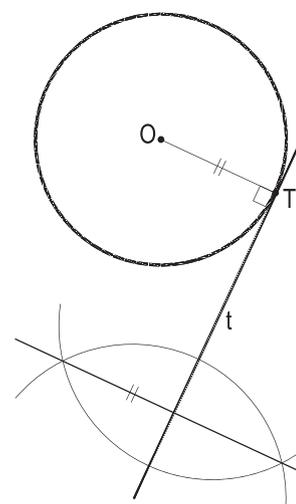


Figura 73

17.4 – Numa circunferência, ou em circunferências iguais, cordas de comprimentos diferentes afastam-se desigualmente do centro (Figura 74); cordas iguais afastam-se igualmente do centro (Figura 75), o que implica em que seus pontos médios pertençam a uma circunferência concêntrica àquela e que, por isso, tais cordas AB , iguais, sejam tangentes a essa circunferência, lugar geométrico dos pontos médios dessas cordas iguais (Figura 76).

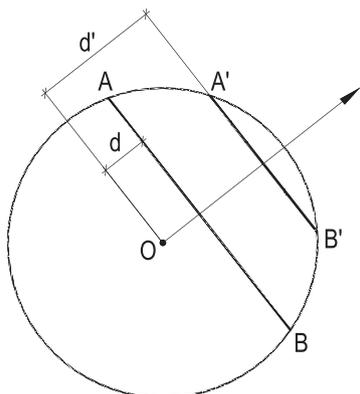


Figura 74

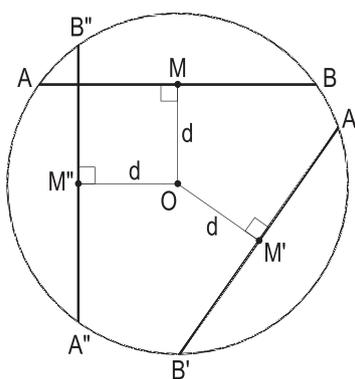


Figura 75

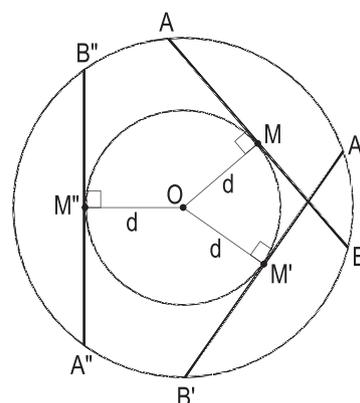


Figura 76

17.5 – Os dois segmentos de tangentes AT e AT' de um ponto A , exterior, a uma circunferência (O), limitados a seus pontos de contato T e T' , são iguais e, por isso, a reta AO que une o ponto A ao centro da circunferência é a bissetriz do ângulo $\widehat{TAT'}$ (Figura 77).

Então, o lugar geométrico dos pontos A , dos quais se pode traçar tangentes iguais a um valor dado (limitadas a seus pontos de contato) a uma circunferência, é uma outra circunferência concêntrica com a primeira (Figura 78), que é, também, o lugar geométrico dos pontos A , dos quais se vê a circunferência dada sob um ângulo constante α (Figura 79).

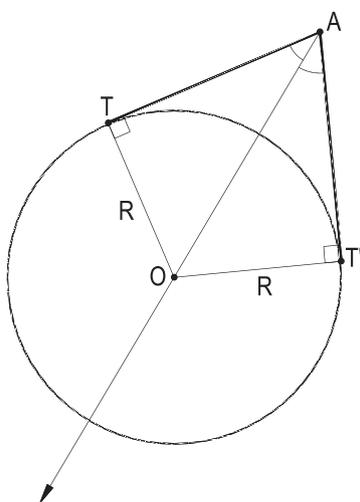


Figura 77

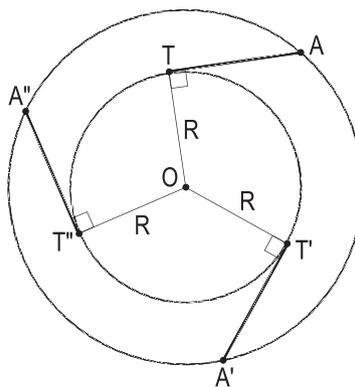


Figura 78

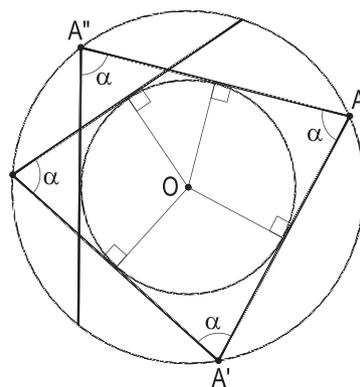


Figura 79

17.6 – Os pontos de corte de duas circunferências secantes são simétricos em relação à linha dos centros (Figura 80); o ponto de contato T de duas circunferências tangentes (O) e (O') pertence à linha dos centros OO', sejam elas exteriores (Figura 81) ou uma interior à outra (Figura 82).

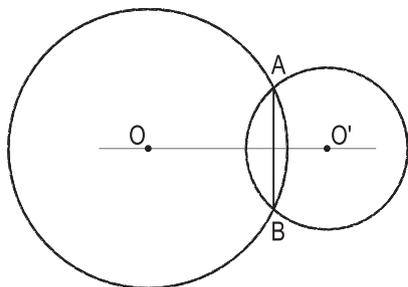


Figura 80

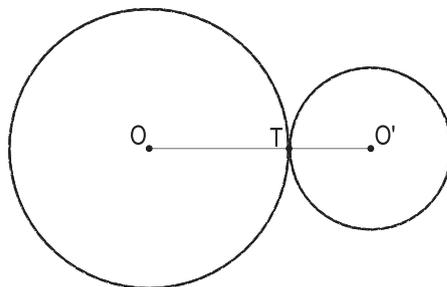


Figura 81

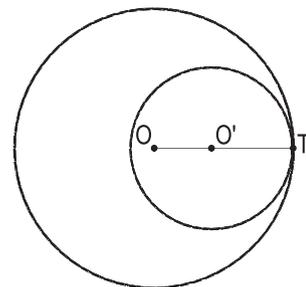


Figura 82

17.7 – Um ângulo inscrito vale a metade do ângulo central correspondente (Figura 83), assim como um ângulo de segmento (Figura 84); o ângulo formado por duas secantes a uma circunferência vale a semissoma (Figura 85) ou a semidiferença (Figura 86) dos ângulos centrais correspondentes; o ângulo formado por uma tangente e por uma secante a uma circunferência (Figura 87), ou por duas tangentes a ela (Figura 88), vale, também, a semidiferença dos ângulos centrais correspondentes.

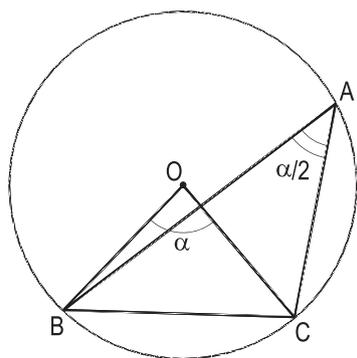


Figura 83

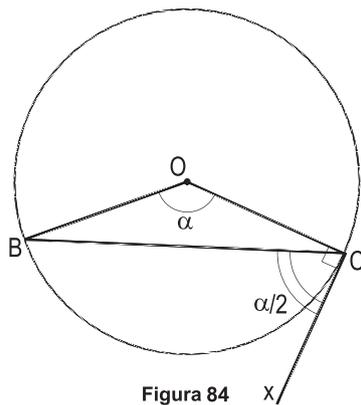


Figura 84

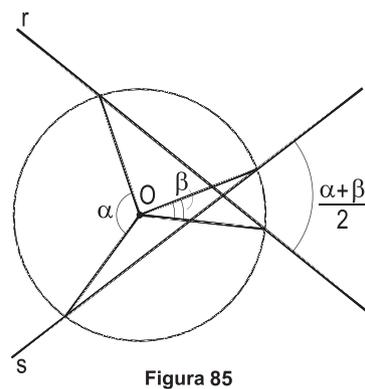


Figura 85

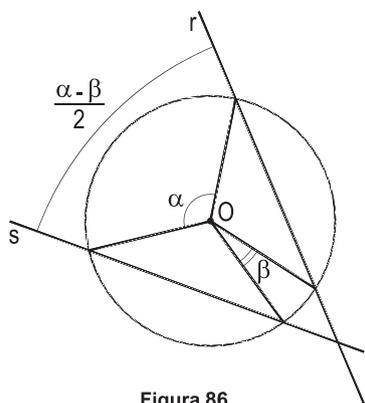


Figura 86

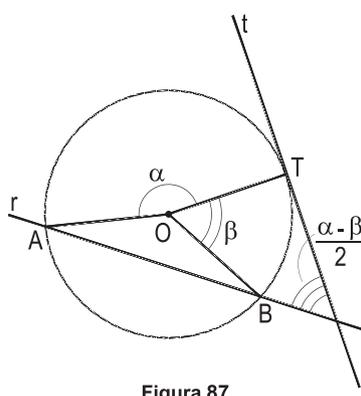


Figura 87

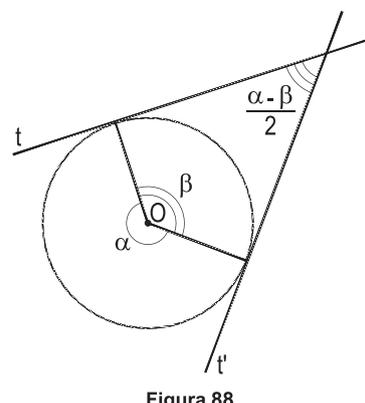


Figura 88

18 – Arco capaz

Sabe-se (*Geometria Plana*, número 131) que o lugar geométrico dos pontos J dos quais se vê um segmento fixo AB sob um ângulo constante α é um par de arcos de circunferência simétricos em relação a AB , exceto os pontos A e B , seja α um ângulo agudo (Figura 89), obtuso (Figura 90) ou reto (Figura 91), quando, neste caso muito particular, AB é o diâmetro do par de arcos e, portanto, da própria circunferência que eles formam.

São os arcos capazes de ver AB sob um ângulo constante α .

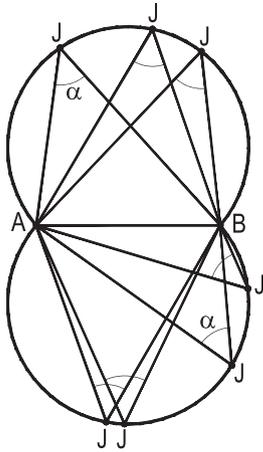


Figura 89

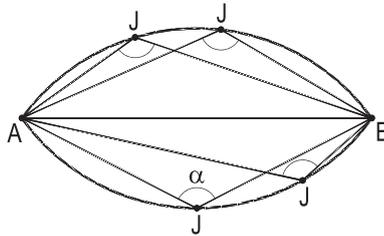


Figura 90

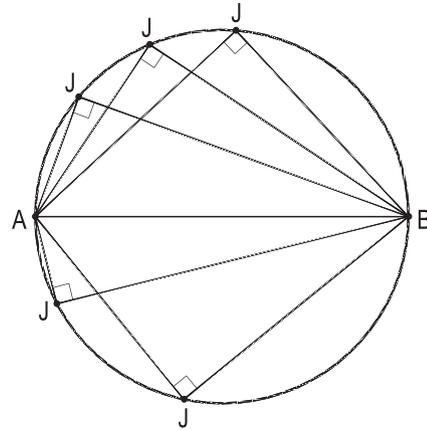


Figura 91

19 – Construção do arco capaz

Há dois processos imediatos para construir um arco capaz de um ângulo dado α , para um segmento AB , também dado: o primeiro, utilizando o ângulo de segmento $A\hat{B}x$ (Figura 92); o segundo, o ângulo central 2α (Figura 93). E, no caso particular de α ser reto, basta determinar o ponto O , médio de AB (Figura 94).

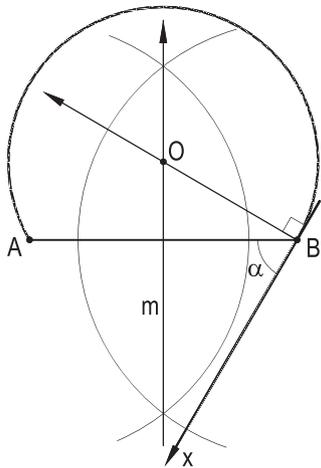


Figura 92

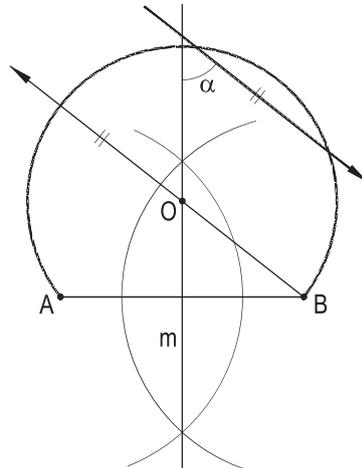


Figura 93

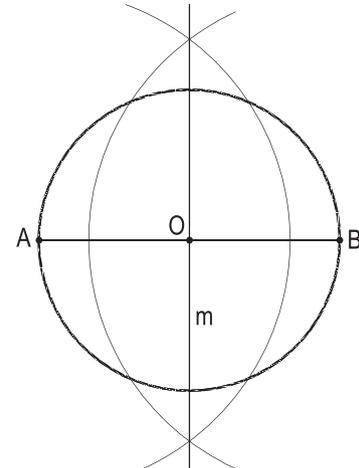


Figura 94

20 – Construção de reta tangente a uma circunferência

Simples as construções das retas t tangentes a uma circunferência dada (O), seja por um ponto corrente A (Figura 95), seja paralela a uma reta dada r (Figura 96), seja por um ponto exterior J (Figura 97), sempre garantindo a perpendicularidade das tangentes construídas a seus raios OT , nos pontos T de contato.

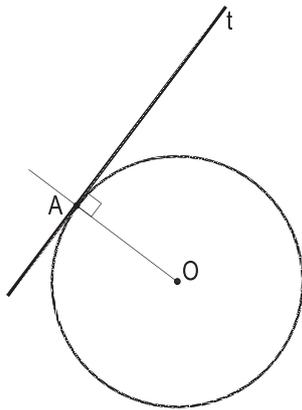


Figura 95

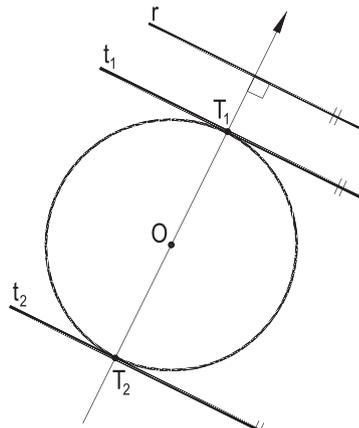


Figura 96

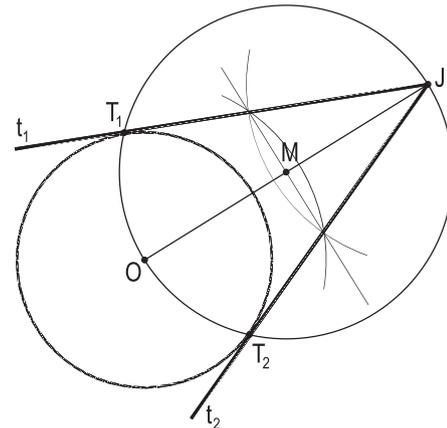


Figura 97

Para situações mais desfavoráveis, em que se busca construir tangentes a um arco dado AB de uma circunferência que tenha seu centro O fora dos limites do desenho, deve-se ter em conta a propriedade da simetria dos dois pontos de corte de duas circunferências secantes em relação à linha de seus centros (número 17.6), utilizando-se, sempre, circunferências auxiliares secantes ao arco AB , dado, como no caso (Figura 98) da construção da tangente por um ponto corrente J , ou paralela a uma reta dada r (Figura 99), quando foram utilizadas, respectivamente, uma circunferência auxiliar de centro J e raio arbitrado e a mediatriz m de uma corda arbitrada EF , paralela a r .

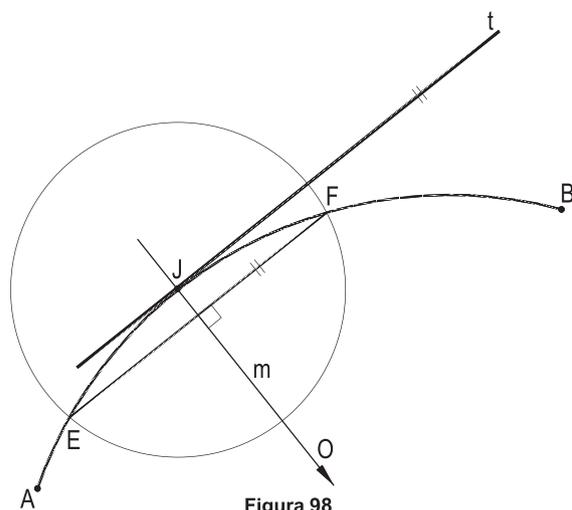


Figura 98

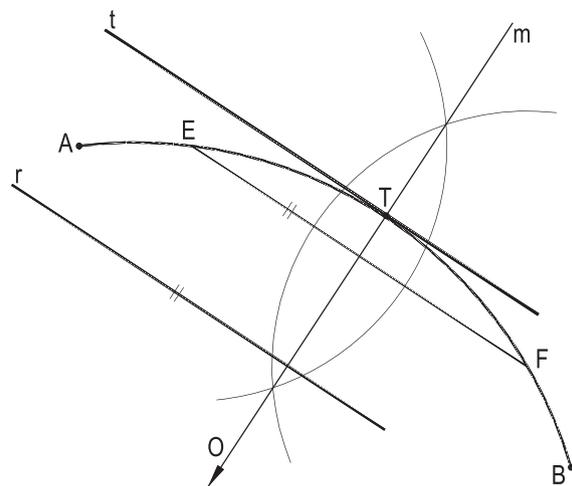


Figura 99

E, para o caso da construção das tangentes a uma circunferência de centro O inacessível, dada por um arco AB , a partir de um ponto P , também dado, é com o traçado de uma circunferência auxiliar de centro P e raio arbitrado, cortando AB nos pontos E e F , que se obtém a reta m , perpendicular, por P , à corda formada EF , que, por ser a mediatriz de EF , há de conter o ponto O e o ponto M , médio do arco EF .

Uma simples homotetia de polo P proporciona a corda $E'M'$, homotética da EM (Figura 100), e, em seguida, o centro O' da circunferência homotética da dada, utilizada a mediatriz m' de $E'M'$, para, então, traçar as tangentes t_1 e t_2 , por P , a essa circunferência (O'), que são as próprias soluções, já que pertencem ao polo dessa homotetia. Naturalmente pode ser impossível determinar os pontos de contato.

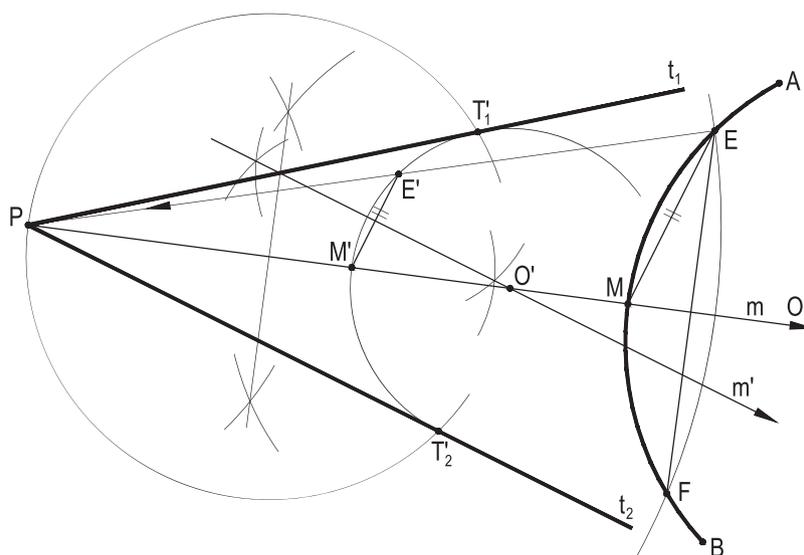


Figura 100

21 – Construção das tangentes comuns a duas circunferências

Observe-se, inicialmente, que, conforme as posições relativas das duas circunferências em estudo, podem existir 4, 2, 1, ou até nenhuma, tangentes comuns a elas (Figuras 101, 102, 103 e 104).

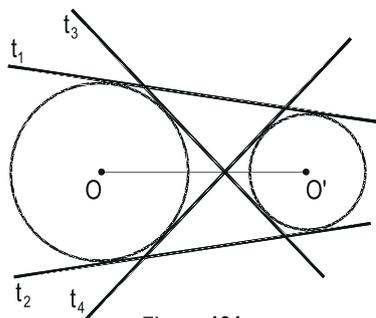


Figura 101

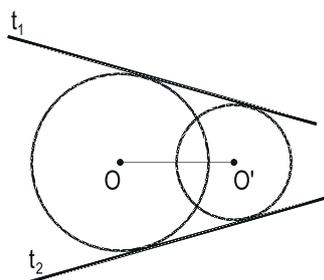


Figura 102

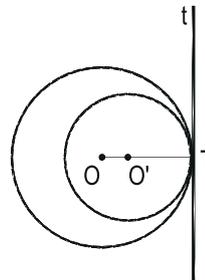


Figura 103

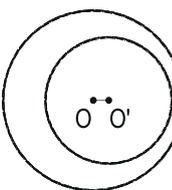


Figura 104

Para analisar a construção, na situação mais genérica, consideremos duas circunferências exteriores (O, R) e (O', R') e observemos que a paralela $O'E_1$ à tangente comum externa t_1 proporciona o triângulo retângulo OE_1O' , que garante que $O'E_1$ seja tangente, por O' , à circunferência $(O, R - R')$ (Figura 105).

Da mesma forma, a paralela $O'F_1$ à tangente comum interna t_4 é tangente à circunferência $(O, R + R')$ (Figura 106).

Assim, para construir as tangentes comuns externas a duas circunferências dadas (O, R) e (O', R') , deve-se traçar a circunferência concêntrica com a maior e com raio $R - R'$ igual à diferença dos raios das dadas e, então, determinar as tangentes $O'E_1$ e $O'E_2$, do centro O' da menor a essa terceira circunferência, as quais definem as direções das tangentes comuns pedidas, obtidas com os raios a elas perpendiculares, que determinam os pontos de contato T_1, T_2 e T'_1, T'_2 (Figuras 105 e 107).

A construção das tangentes comuns internas t_3 e t_4 a duas circunferências dadas (O, R) e (O', R') segue o mesmo roteiro, utilizando-se uma terceira circunferência concêntrica com a maior das dadas e com raio $R + R'$, igual à soma de seus raios, para traçar as tangentes $O'F_1$ e $O'F_2$ a essa circunferência e, com as direções delas, obter as tangentes procuradas (Figura 106).

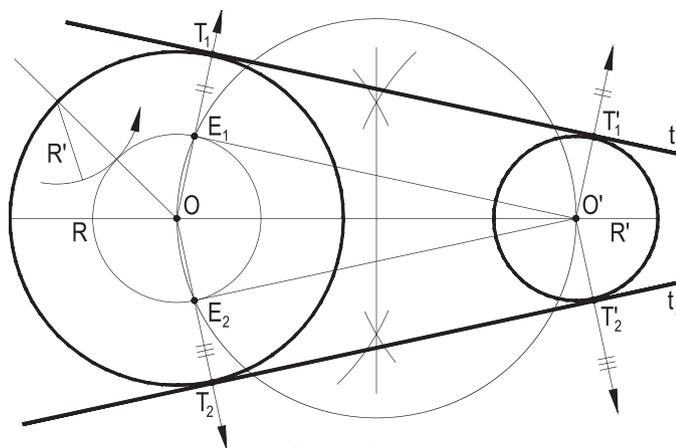


Figura 105

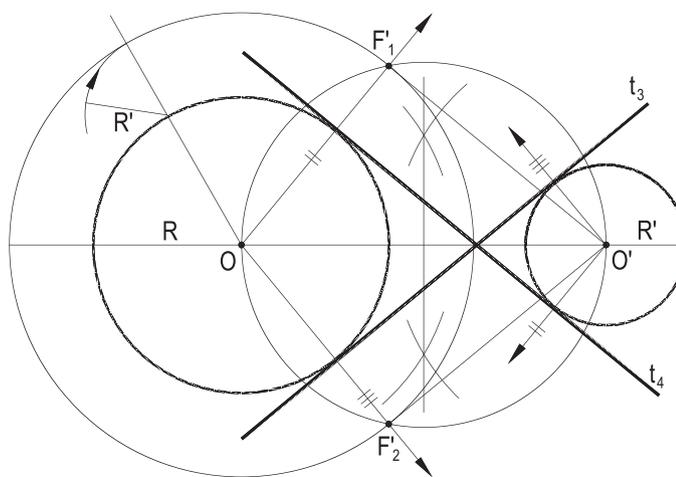


Figura 106

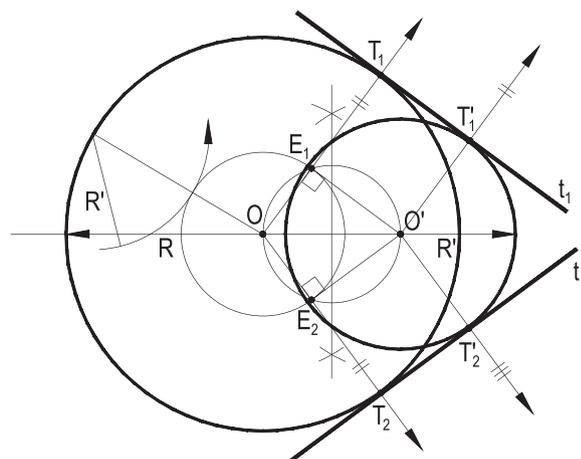


Figura 107

22 – Eixo radical de duas circunferências

Para ideal acompanhamento do que se passa a desenvolver, referente aos eixos radicais de pares de circunferências, cabe repassar alguns conceitos e várias propriedades detalhadas nos capítulos VI e XIV do livro *Geometria Plana* deste autor, tais como:

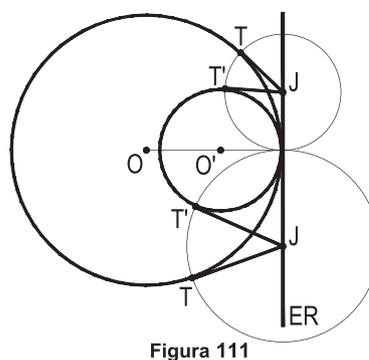
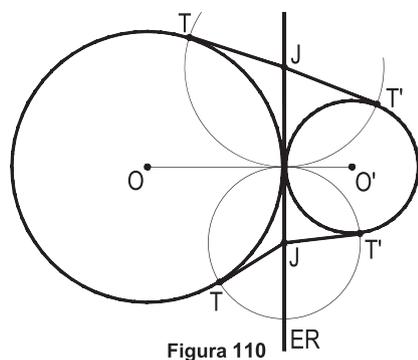
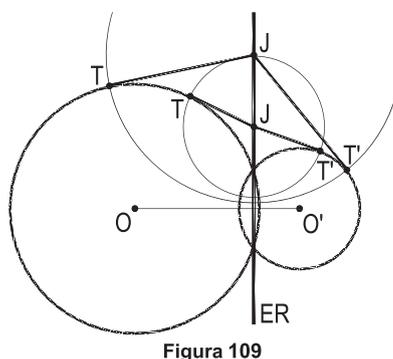
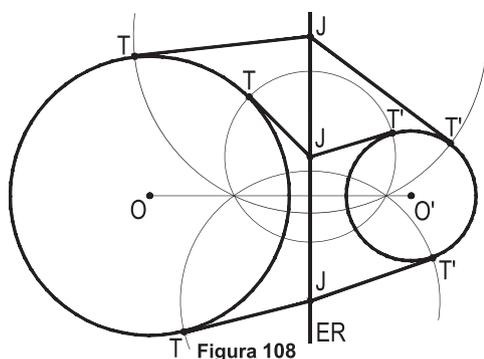
1 – Ângulo de duas curvas (número 121).

2 – Circunferências ortogonais (número 122).

3 – Potência de um ponto em relação a uma circunferência (números 242, 244, 245, 249, 250, 251, 252 e 253).

Assim, o eixo radical ER de duas circunferências (O, R) e (O', R') , não concêntricas, uma reta perpendicular à linha dos centros OO' , além de ser o lugar geométrico dos pontos equipotentes em relação às duas circunferências é, também, em suas partes exteriores a elas, o conjunto de pontos dos quais se pode enviar tangentes iguais, limitadas aos pontos de contato, a elas, e também dos centros das circunferências ortogonais a (O, R) e a (O', R') (*Geometria Plana*, número 254).

As Figuras 108, 109, 110 e 111 apresentam pontos J, dos quais se pode enviar tangentes JT e JT' iguais às circunferências (O, R) e (O', R') , pontos esses que são centros de circunferências ortogonais a essas duas.



23 – Construção do eixo radical de duas circunferências

Quando as duas circunferências dadas (O) e (O') são secantes ou tangentes, a determinação de seu eixo radical ER é imediata, pelo aproveitamento dos pontos a elas comuns e pela obrigatória direção de ER , perpendicular à linha dos centros OO' (Figuras 112, 113 e 114).

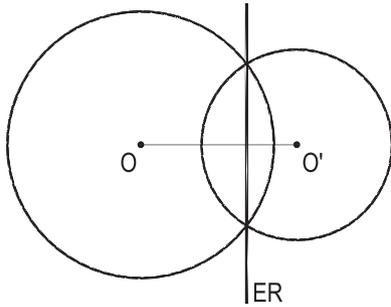


Figura 112

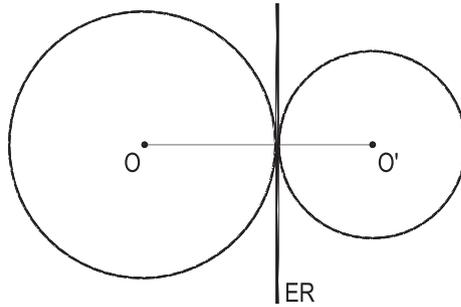


Figura 113

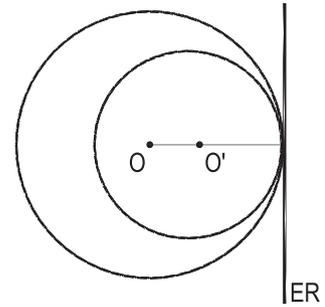


Figura 114

Quando, ao contrário, as circunferências dadas (O) e (O') não têm ponto comum, para a obtenção de um ponto P do eixo radical procurado, ou se utiliza uma terceira circunferência auxiliar (J) arbitrada, mas secante às dadas, e seus eixos radicais com estas (Figuras 115 e 116), para determinar a posição do eixo radical ER , por P e perpendicular a OO' , ou um par de tangentes às circunferências dadas, com valores arbitrados, mas iguais (Figuras 117 e 118).

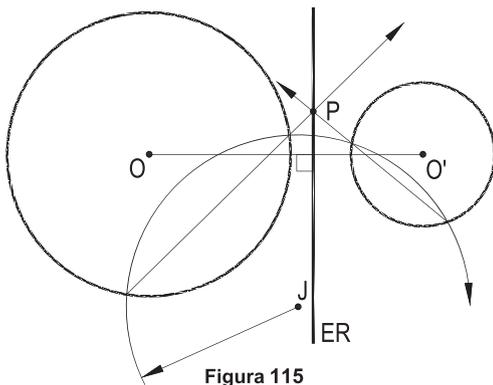


Figura 115

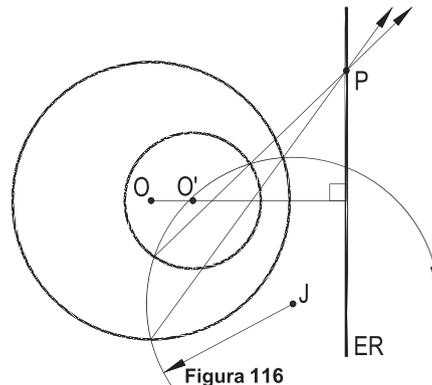


Figura 116

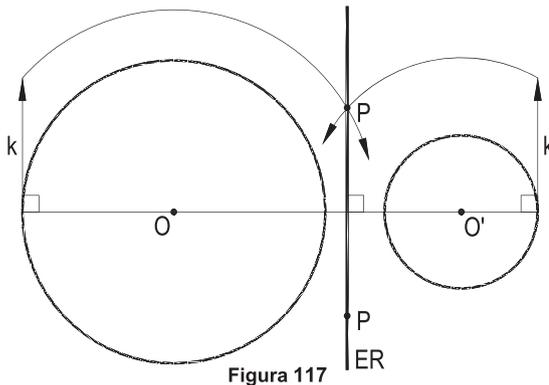


Figura 117

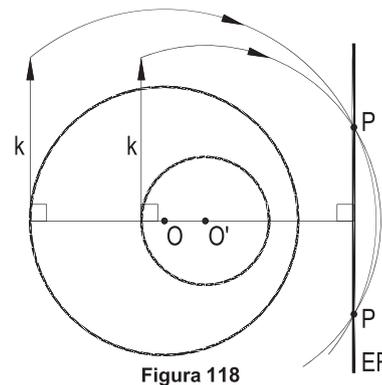


Figura 118

24 – Centro radical de três circunferências

Tal como visto (*Geometria Plana*, números 255, 256, 257 e 258), o centro radical CR de três circunferências, cujos centros formem um triângulo, é o ponto, único, equipotente em relação a elas e do qual se pode conduzir tangentes iguais (limitadas aos seus pontos de contato) a elas, sendo centro, por isso, da única circunferência ortogonal às três iniciais (Figura 119), desde que ele não pertença a essas três circunferências (Figura 120), quando é nula sua potência em relação a elas.

25 – Construção do centro radical de três circunferências

A determinação do centro radical CR de três circunferências dadas, para as situações mais genéricas em que elas não possuem ponto(s) comum(ns), se faz pela utilização de uma circunferência auxiliar (J), a elas secante, e pelo aproveitamento dos eixos radicais que ela provoca com as dadas (Figura 121), sendo muito mais simples as construções para posições especiais em que haja tangências ou secâncias de algumas das circunferências dadas (Figura 122).

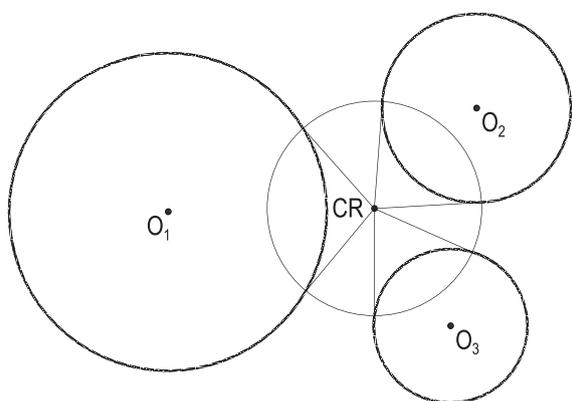


Figura 119

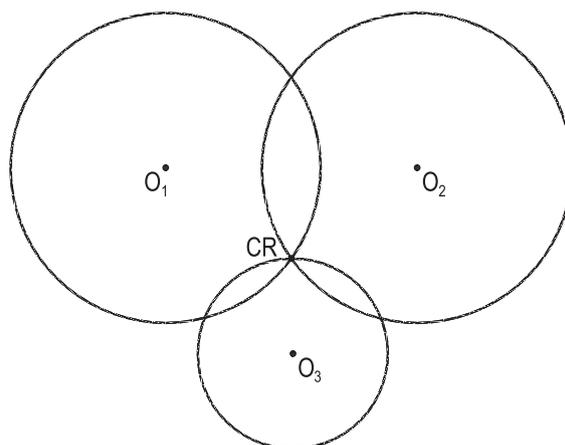


Figura 120

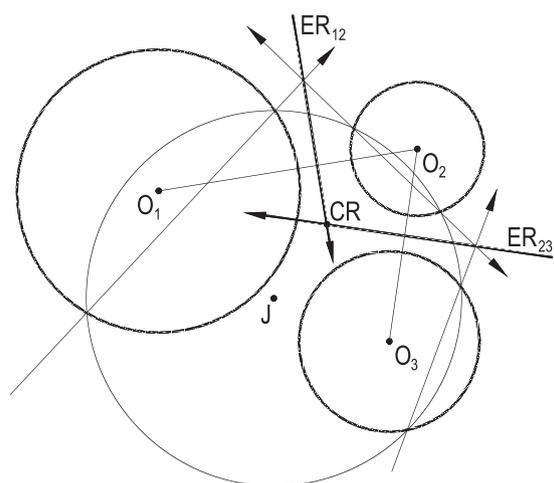


Figura 121

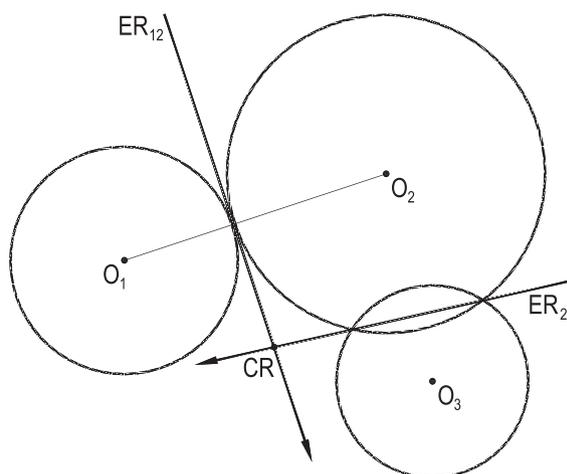


Figura 122

26 – Problemas resolvidos

- 13 – Completar o quadrilátero $OA O' B$, dadas as circunferências (O, R) e (O', R') , sabendo que as distâncias de A e de B às duas circunferências igualam o valor do raio R .**

Resolução: As circunferências $(O, 2R)$ e $(O', R' + R)$ trazem os vértices A e B , em ordem arbitrada (número 17.1) (Figura 123).

- 14 – Construir o segmento AB , cujos extremos distem o mesmo valor R da circunferência dada (O, R) , ambos equidistando das retas dadas r e s .**

Complete apenas uma solução.

Resolução: A e B são os pontos de corte da circunferência $(O, 2R)$ com cada uma das bissetrizes b_1 e b_2 dos ângulos formados por r e s , com ordem de denominação arbitrada (Figura 124). Os segundos pontos de corte A' e B' são indicados, mas apenas uma solução AB foi completada.

- 15 – De uma circunferência dada (O) é também dado um segmento circular ABC , de corda AC e arco CBA .**

Pede-se traçar as secantes r e s , pelo ponto dado J , que produzem na circunferência dada (O) segmentos circulares iguais ao dado, de corda AC e arco ABC .

Resolução: As retas pedidas r e s devem (número 17.4) ser tangentes à circunferência (O, OM) concêntrica à dada e tangente à corda AC (Figura 125), construídas com o auxílio da circunferência de diâmetro JO (ver número 20).

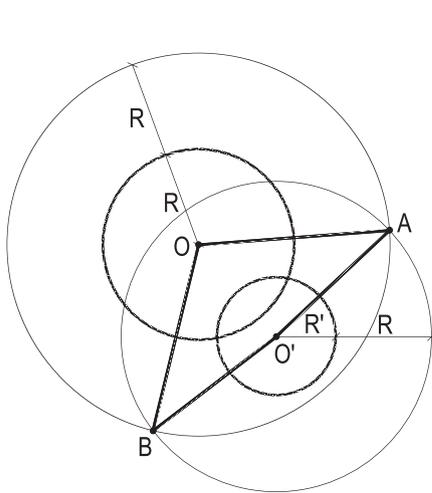


Figura 123

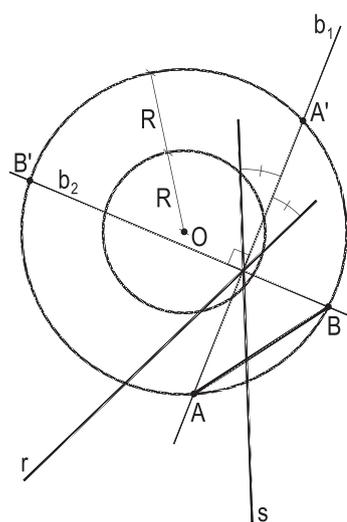


Figura 124

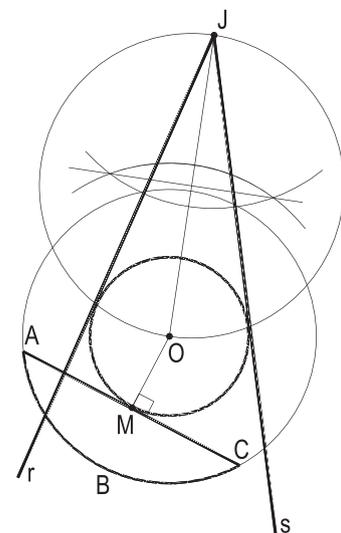


Figura 125

16 – Dados o quadrado ABCD e a reta r, exteriores, pede-se construir a circunferência (O) pertencente aos pontos A e B e tangente à reta CD e determinar seus pontos P e Q distantes, respectivamente, de r, do menor e do maior valores possíveis.

Resolução: O centro O há de pertencer à mediatriz m de AB (número 17.3), à qual também tem que pertencer o ponto do contato T da circunferência pedida com CD (número 20).

Assim, a mediatriz n do segmento AT corta m, produzindo o ponto O (Figura 126), já que AT é uma corda sua, e, então, a circunferência (O) pedida.

Seus pontos P e Q, o mais próximo e o mais distante, respectivamente, da reta dada r, vêm com a perpendicular, por O, a r (Figura 126).

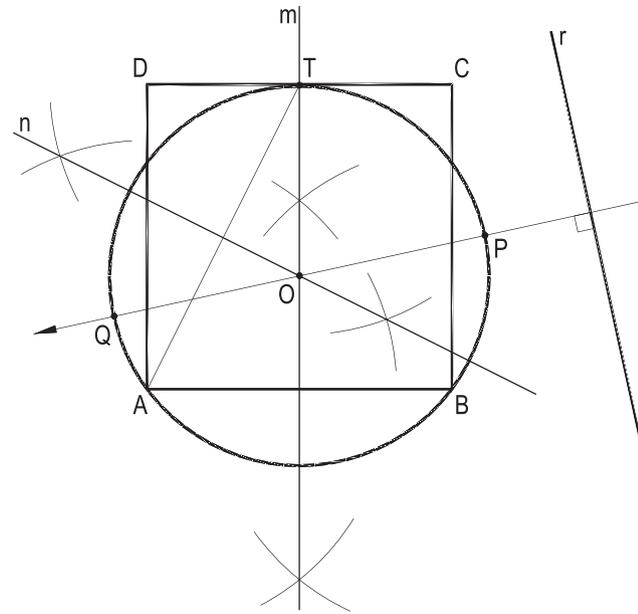


Figura 126

17 – Dadas a reta r e a circunferência (O, 5R), pede-se construir todas as cordas dessa circunferência paralelas a r, cujas flechas meçam respectivamente R e 3R.

Resolução: Dividido um raio qualquer OL em cinco partes iguais, pela utilização de uma unidade arbitrária u, obtêm-se os pontos 1 e 3, que definem os valores L1 e L3 das flechas estabelecidas, permitindo construir as circunferências (O, 4R) e (O, 2R), às quais as cordas pedidas devem ser tangentes, o que se consegue, com a perpendicular, por O, à reta dada r (Figura 127).

As cordas procuradas são então A_1B_1 e A_2B_2 , que têm flechas R, e C_1D_1 e C_2D_2 , de flechas 3R (Figura 127).

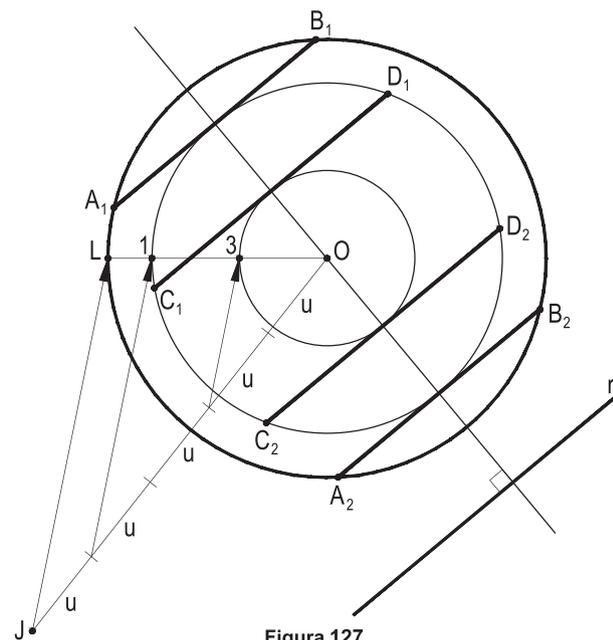


Figura 127

- 18 – Na circunferência dada (O), pede-se construir o setor circular de arco AJ, cujo ângulo central valha o quádruplo do ângulo central correspondente ao arco AB, dado, deixando o ponto B entre A e J e, ainda, construir a circunferência (O'), igual à dada e a ela tangente exteriormente, sabendo que o ponto O' equidista das retas OA e OJ.**

Resolução: Marcado o ponto J como pedido (ver número 13) e construídas as bissetrizes b e \bar{b} dos ângulos formados pelas retas OA e OJ, obtêm-se, com repetições do raio da circunferência dada, os pontos C_1, C_2, C_3 e C_4 , de contato das circunferências de centros O'_1, O'_2, O'_3 e O'_4 , que resolvem o problema, das quais apenas a primeira (O'_1) foi completada (Figura 128).

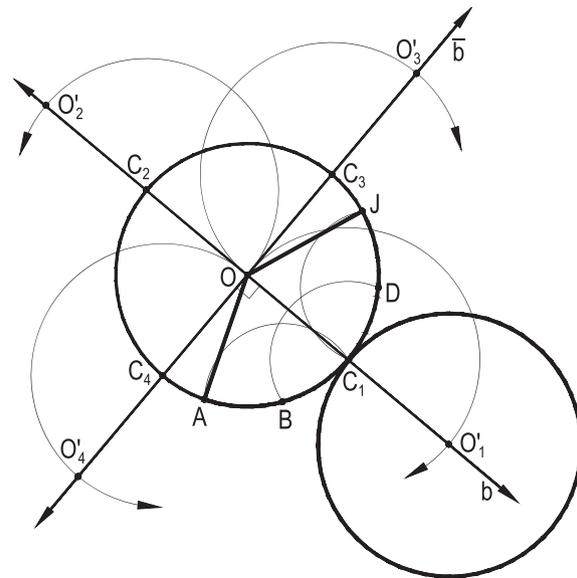


Figura 128

- 19 – O ponto J é centro da circunferência que, pertencendo aos pontos dados A e B, tem raio igual ao quádruplo da largura da coroa circular de centro L, também dada, limitada pelas circunferências c_1 e c_2 .**

Pede-se determinar o ponto J.

Resolução: Conhecida a largura d da coroa dada, representada pelo segmento 12 na Figura 129, e construído seu quádruplo (segmento 14), basta traçar as circunferências de centros A e B e raios $4d$, para determinar as posições dos pontos J_1 e J_2 pedidos (Figura 129).

Observe-se que, conforme os dados, função do valor da largura d e da distância entre os pontos A e B, o problema poderia ter apenas uma solução, caso $4d$ igualasse a metade do segmento AB, ou seja, se $d = AB/8$, ou até nenhuma, se d fosse menor que um oitavo de AB, o que deixaria as circunferências (A, $4d$) e (B, $4d$) exteriores uma à outra.

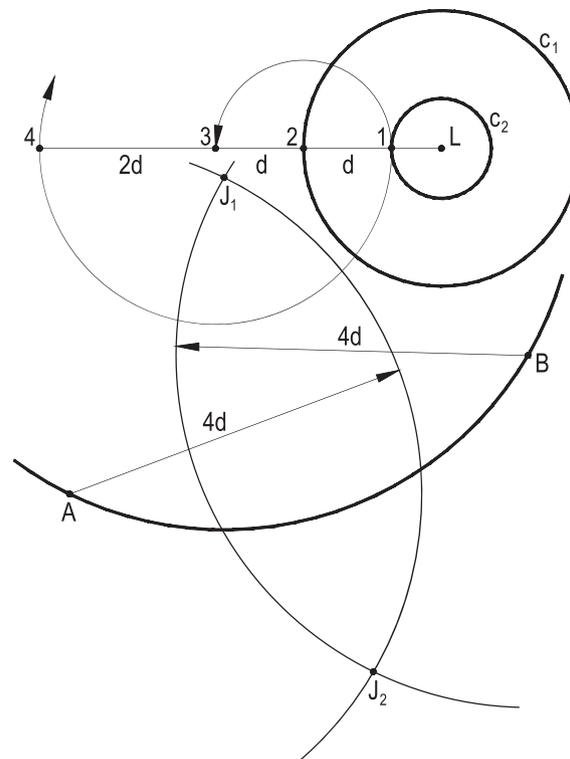


Figura 129

20 – Sendo dados o círculo (A) e a circunferência (B), exteriores, pede-se determinar, com precisão, o conjunto de pontos do círculo (A) dos quais seja possível enviar tangentes à circunferência (B) que meçam, até seus respectivos pontos de contato com (B), o dobro do raio de (B).

Resolução: Sabe-se (número 17.5) que o lugar geométrico dos pontos dos quais se pode traçar tangentes iguais a uma circunferência é outra, concêntrica com aquela.

Assim, construída uma tangente TL igual ao dobro do raio r da circunferência (B, r), pode-se traçar a segunda (B, R), lugar geométrico em questão, que produz, no círculo dado (A), o arco JK, conjunto dos pontos procurados (Figura 130).

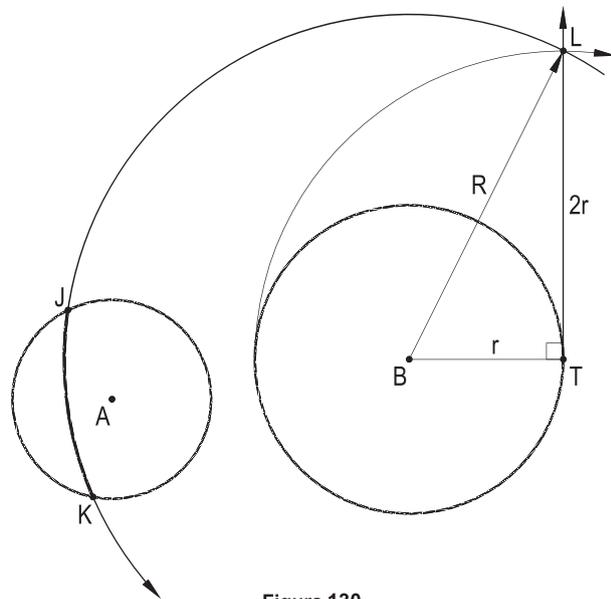


Figura 130

É claro que, conforme as posições relativas, fossem (A) e (B, R) exteriores, tal conjunto resultaria vazio.

21 – Dados dois pontos A e B e uma circunferência (O), pede-se construir duas circunferências ortogonais de centros A e B, de modo tal que o centro radical dessas duas circunferências e da dada tenha potência nula em relação a todas três.

Resolução: Sabe-se (*Geometria Plana*, número 122) que os pontos comuns a duas circunferências ortogonais (A) e (B) pertencem à circunferência de diâmetro AB.

Mais: que o centro radical, com potências nulas em relação às três circunferências, tem de ser o ponto comum às três (número 24).

Assim, os pontos J_1 e J_2 (Figura 131), interseções da circunferência dada (O) com a de diâmetro AB, possibilitam construir as duas circunferências pedidas (A, AJ_1) e (B, BJ_1), com uma segunda solução, para J_2 , não completada.

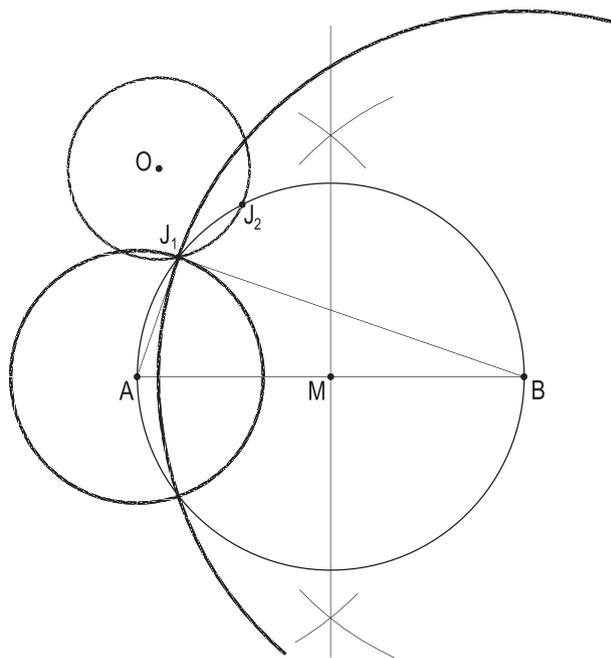


Figura 131

22 – São dados uma reta r , um ponto T a ela pertencente, uma circunferência (O) e um ponto P , exterior a todos.

Pede-se determinar o centro J da circunferência tangente a r em T , sabendo que as tangentes de J à circunferência dada (O) , limitadas a seus pontos de contato, têm o mesmo comprimento que as de P a ela.

Resolução: Como visto no item 17.5, deve-se construir a circunferência de centro O e raio OP , lugar geométrico dos pontos J , dos quais se pode traçar tangentes a (O) iguais às de P , todas limitadas a seus respectivos pontos de contato, para obter os pontos J_1 e J_2 em que ela corta a normal n , por T , perpendicular à reta dada r , pontos esses que resolvem a questão (Figura 132).

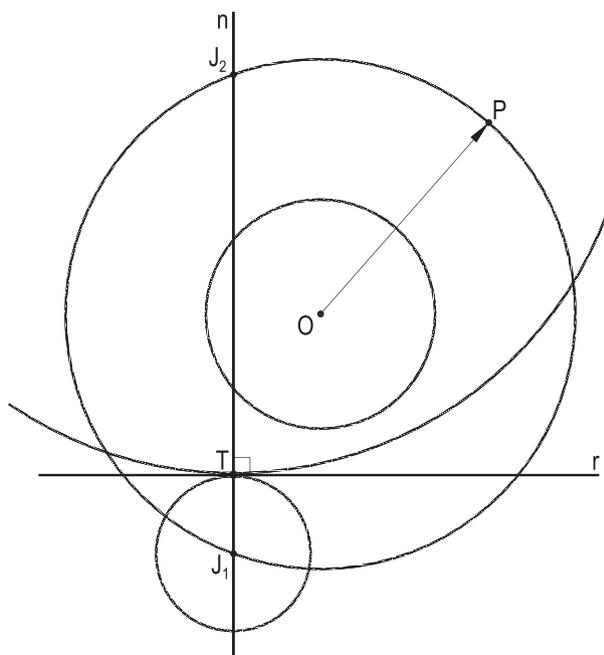


Figura 132

23 – São dadas duas circunferências exteriores (O) e (O') e uma corda AB de (O) .

Pede-se construir as cordas da circunferência (O') , que sejam paralelas a AB e que possuam flechas iguais às de AB .

Resolução: Determinado o valor f da flecha da corda AB , já que as cordas procuradas devem ser paralelas a AB , aproveita-se a mediatriz m de AB , para, com sua direção, traçar o diâmetro de (O') , sobre o qual se aplica aquele valor f (Figura 133), obtendo-se o ponto T_1 , que traz a primeira solução, a corda P_1Q_1 da circunferência (O') e, com o auxílio da circunferência a ela concêntrica e tangente a P_1Q_1 (número 17.4), consegue-se obter a segunda solução, a corda P_2Q_2 (Figura 133).

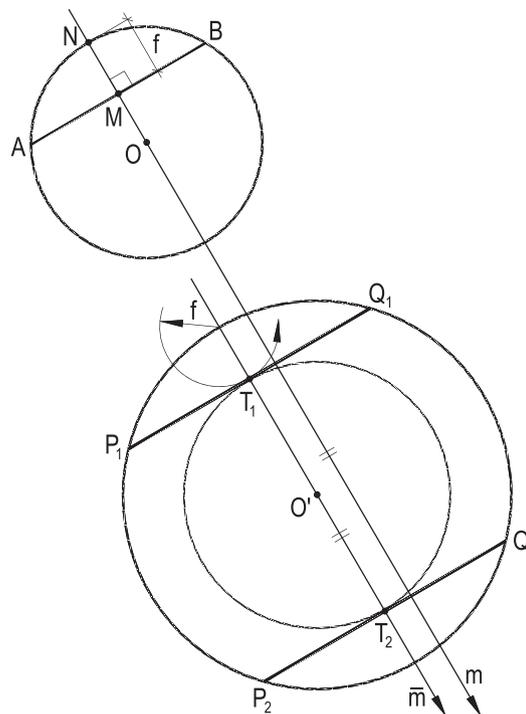


Figura 133

24 – Construir as circunferências ortogonais de centros dados A e B, sabendo que um de seus pontos comuns equidista das retas r e s, também dadas.

Resolução: O ponto J, um dos dois comuns às duas circunferências procuradas, deve pertencer à bissetriz b de um dos ângulos formados pelas retas r e s, para delas equidistar, e à circunferência de diâmetro AB, para garantir o ângulo reto entre os raios AJ e BJ.

Assim, obtido J (Figura 134), fica imediato construir as circunferências pedidas (A, AJ) e (B, BJ).

Há uma segunda solução, não completada, indicada pelo segundo ponto \bar{J} , comum à bissetriz b e à circunferência de diâmetro AB, valendo observar que, para as posições dadas, não há mais soluções, visto que a segunda bissetriz \bar{b} resta exterior à circunferência de diâmetro AB (Figura 134).

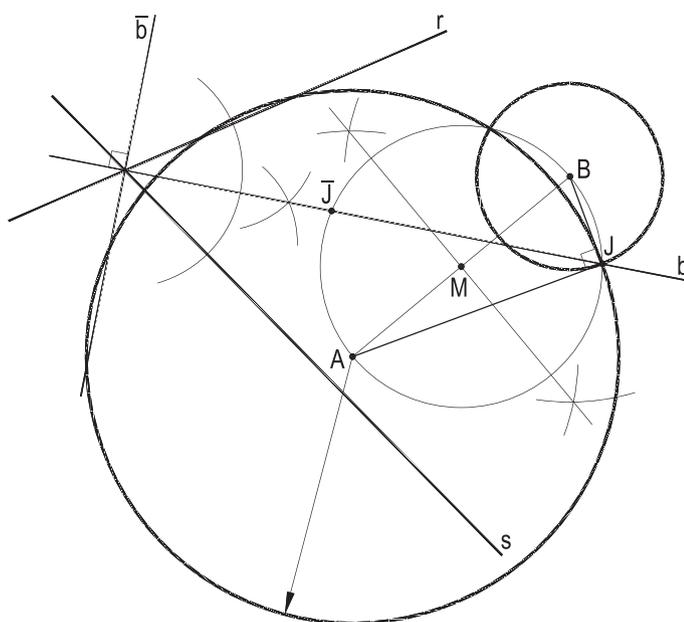


Figura 134

25 – Determinar graficamente o valor do ângulo α , sob o qual o ponto J vê a circunferência dada (O), sabendo que J equidista das retas paralelas r e s, dadas, situando-se o mais próximo possível do centro O da circunferência dada.

Resolução: Traçada a reta e, equidistante das dadas r e s, com auxílio de uma transversal arbitrada AB, a perpendicular a essas paralelas, por O, determina, em e, o ponto J procurado (Figura 135).

E as tangentes t_1 e t_2 de J à circunferência dada (O), construídas com precisão, trazem, graficamente, a medida do ângulo α , sob o qual o ponto J vê a circunferência (O).

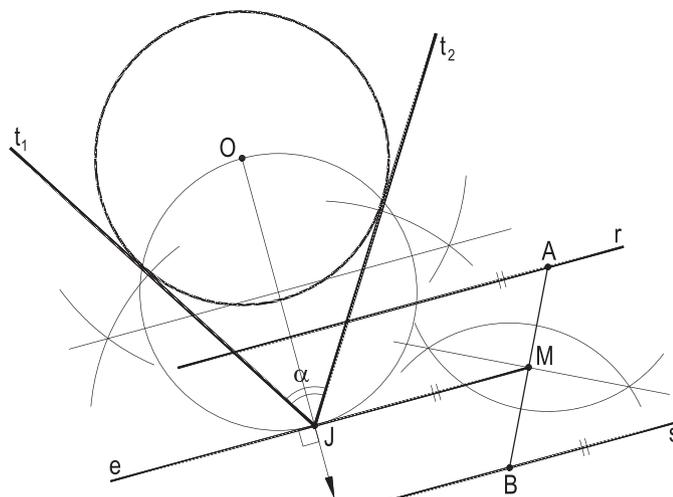


Figura 135

26 – Determinar as posições do ponto J, que veem as circunferências dadas (A) e (B) sob os ângulos 30° e 60° , respectivamente.

Resolução: Determinados dois pontos A' e B' , dos quais se veem as circunferências dadas (A) e (B) sob 30° e 60° , respectivamente, com auxílio de tangentes a elas, fica simples construir as circunferências (A, AA') e (B, BB'), lugares geométricos procurados (número 17.5), que, por interseção, proporcionam os pontos pedidos J_1 e J_2 (Figura 136).

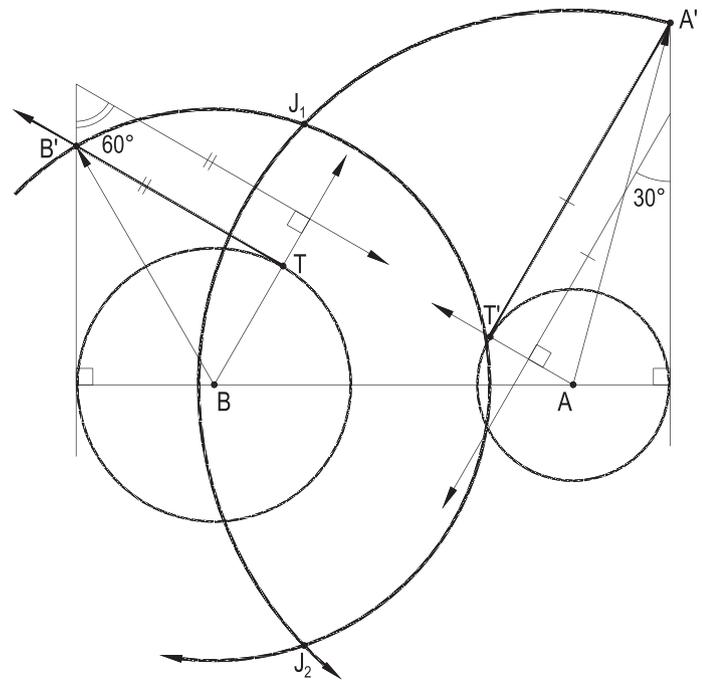


Figura 136

27 – Construir as tangentes comuns às duas circunferências tangentes (O, R) e (O', R'), dadas.

Resolução: Operando tal como o detalhado no número 21, constroem-se a circunferência auxiliar ($O', R' - R$) e as tangentes r e s , por O , a ela, para, aproveitando as direções dos raios $O'T$ e $O'T'$ (Figura 137), obter, nas duas circunferências dadas, os pontos de contato 1, 2, 3 e 4 das tangentes externas comuns t_1 e t_2 .

A tangente interna comum t_3 é de traçado imediato, por serem as circunferências dadas tangentes exteriormente no ponto J . Assim, t_3 é a perpendicular, por J , a OO' .

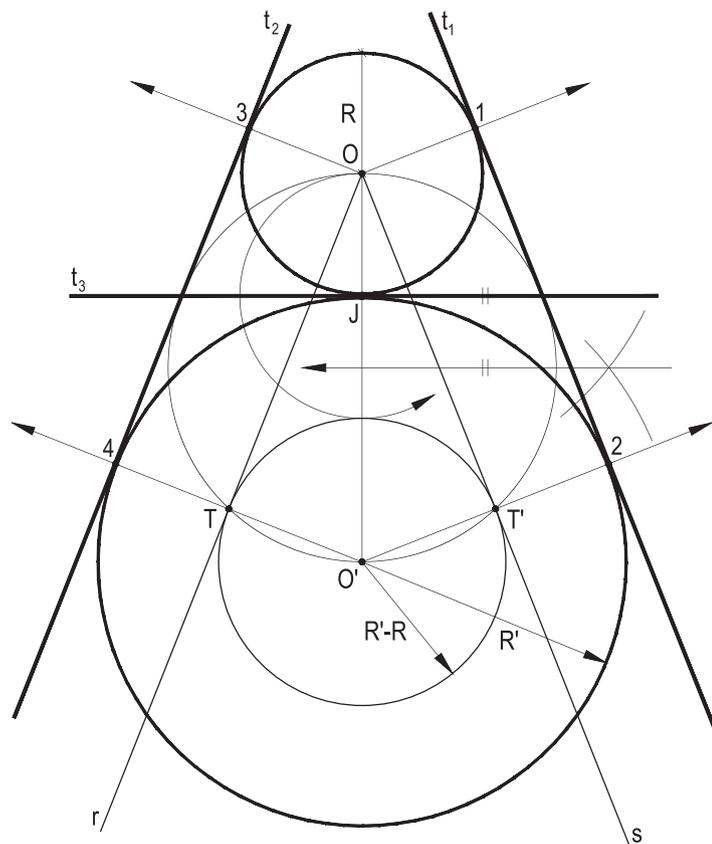


Figura 137

28 – Determinar a posição do ponto J distante um valor dado R da circunferência dada (O, 2R) e da reta r, também dada.

Resolução: Construídas as retas r_1 e r_2 paralelas a r e dela distantes o valor R, metade do raio da circunferência dada, assim como as circunferências de centro O e raios R e 3R, lugar geométrico dos pontos distantes R da circunferência (O, 2R), as interseções de cada uma dessas duas circunferências com cada uma das paralelas r_1 e r_2 construídas são os pontos J pedidos.

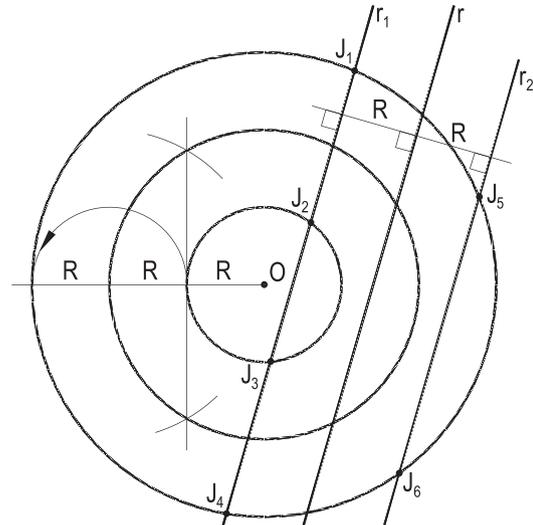


Figura 138

Para as posições dadas (Figura 138) há seis posições para tal ponto J, porque a paralela r_2 à reta r resta exterior à circunferência (O, R), atingindo apenas a segunda (O, 3R).

29 – Determinar a posição do centro radical CR das três circunferências (O_1), (O_2) e (O_3), dadas.

Resolução: O eixo radical ER_{12} de (O_1) e (O_2) é imediato, por serem elas secantes e, com o auxílio de uma quarta circunferência (J), arbitrada, vem o eixo radical ER_{23} e, então, o centro radical CR pedido (Figura 139).

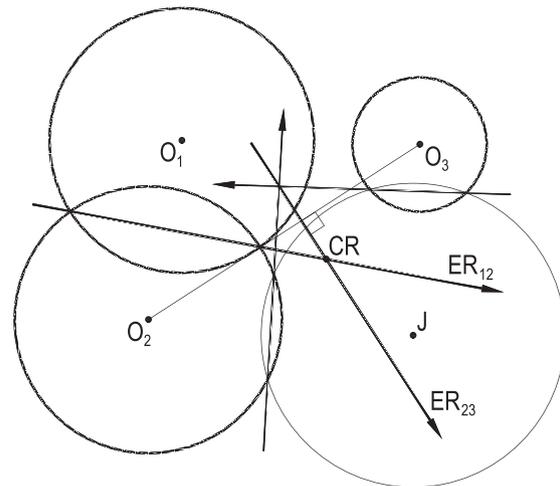


Figura 139

30 – Construir a circunferência ortogonal às três circunferências (O_1), (O_2) e (O_3), dadas.

Resolução: Imediata a obtenção do centro radical CR, centro da circunferência pedida (números 24 e 25), por serem tangentes, duas a duas, as circunferências dadas, e por se ter, automaticamente, o valor $CRA = CRB = CRC$ de seu raio (Figura 140).

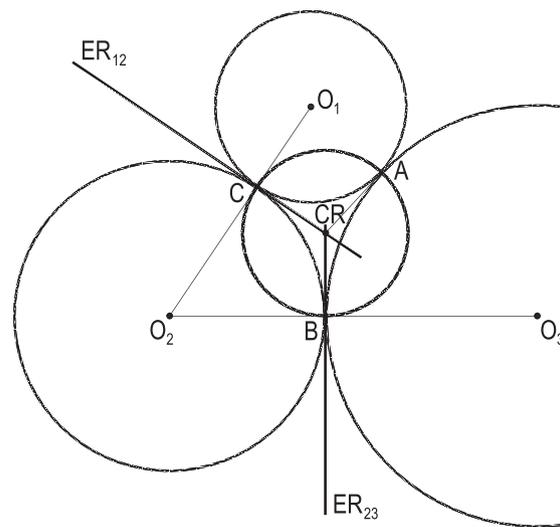


Figura 140

31 – Dados os pontos A e B e a reta r, pede-se considerar duas circunferências (A) e (B), tangentes, exteriormente, sabendo que seu ponto de tangência pertence a r.

Construir as circunferências iguais a (B) e tangentes às duas primeiras.

Resolução: O ponto de contato T de (A) e (B) há de ser o traço de AB com r (número 17.6), o que define as duas circunferências (A, AT) e (B, BT).

Os centros das duas circunferências pedidas (J) e (L) vêm com as interseções das circunferências (A, AB) e (B, 2.BT) (Figura 141).

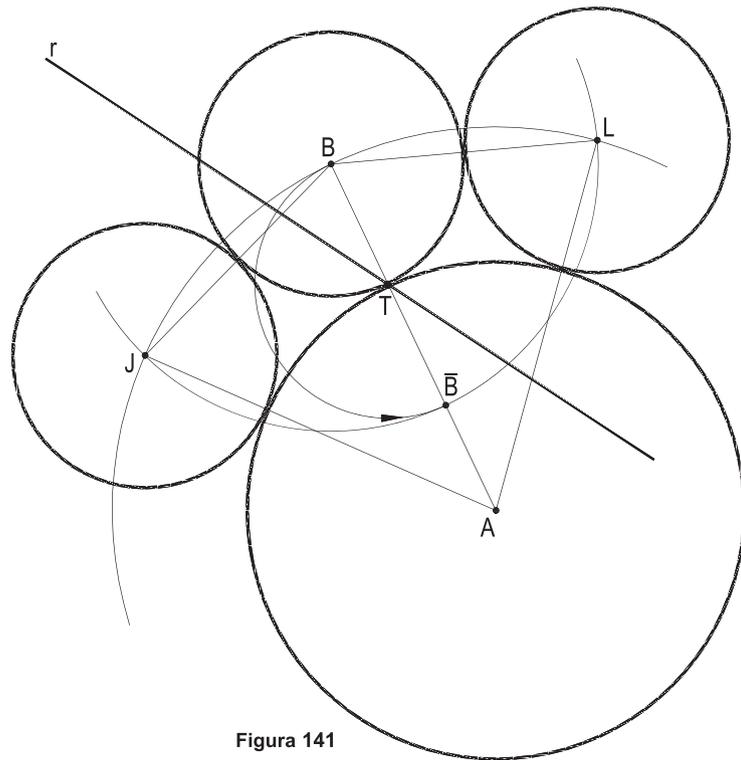


Figura 141

32 – Construir a circunferência ortogonal a três circunferências exteriores e iguais (O_1), (O_2) e (O_3), dadas.

Resolução: Arbitrado um ponto J e traçada uma circunferência auxiliar de centro J, secante às dadas, vêm os eixos radicais ER_{12} e ER_{23} , que se cortam proporcionando o centro CR da circunferência pedida, ortogonal às três dadas (números 24 e 25).

A tangente CRT, de CR à circunferência (O_3), traçada com exatidão (Figura 142), define o raio CRT da circunferência pedida, o que permite traçá-la.

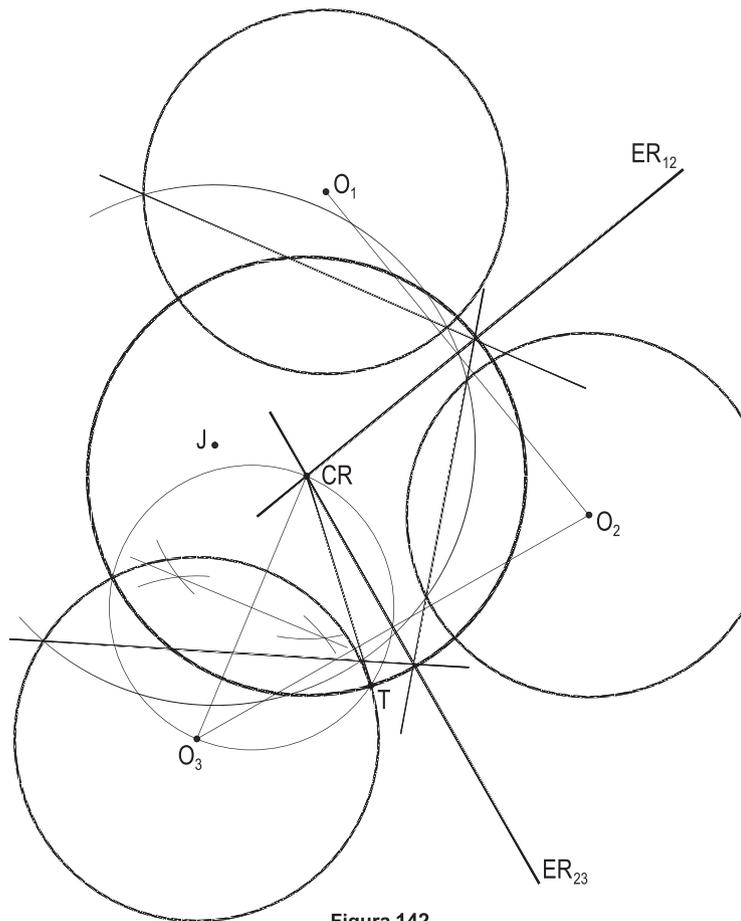


Figura 142

CAPÍTULO III

TRIÂNGULOS

27 – Definições e propriedades

Tal como no capítulo anterior, fica, para o leitor, a sugestão de consulta à obra *Geometria Plana*, edição de 2020, deste autor, em seus capítulos III e VIII, para rever definições, conceitos, teoremas e propriedades dos triângulos, dentre as quais passamos a listar as mais importantes para as construções que, em seguida, serão apresentadas.

1 – Classificação quanto às medidas dos lados: escaleno, isósceles e equilátero.

2 – Classificação quanto aos valores dos ângulos internos: acutângulo, retângulo e obtusângulo.

3 – Principais cevianas: medianas, alturas e bissetrizes, internas e externas.

4 – Casos de igualdade (número 37).

5 – Pontos notáveis: circuncentro (O, na Figura 143), ortocentro (H, na Figura 144), baricentro (G, na Figura 145), incentro (I, na Figura 146) e exincentros (E_1 , E_2 e E_3 , na Figura 147).

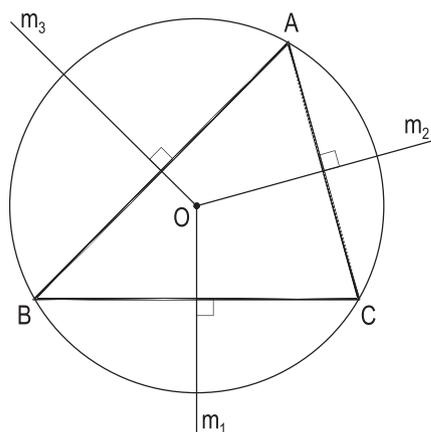


Figura 143

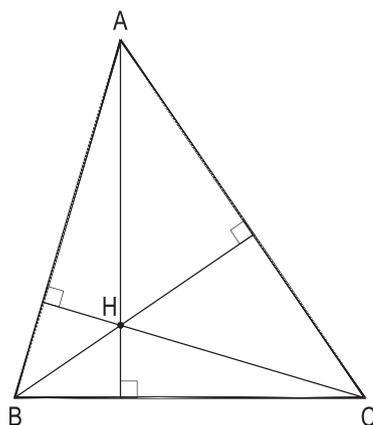


Figura 144

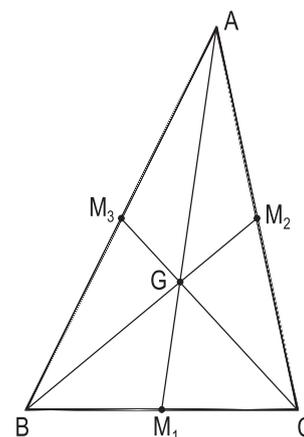


Figura 145

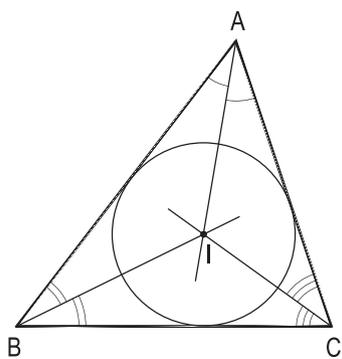


Figura 146

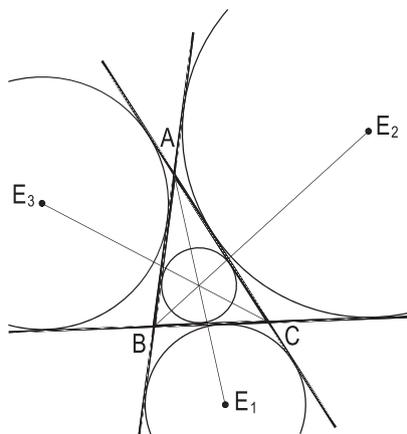


Figura 147

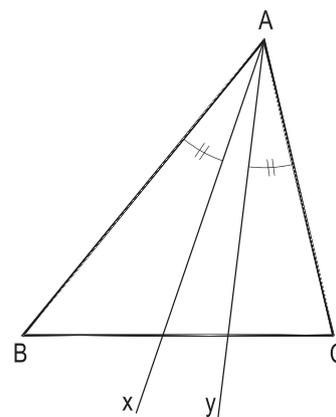


Figura 148

6 – Cevianas isogonais (Figuras 148 e 149) (número 211).

7 – Triângulo órtico $A'B'C'$ de um triângulo dado ABC (Figuras 150 e 151) (número 145).

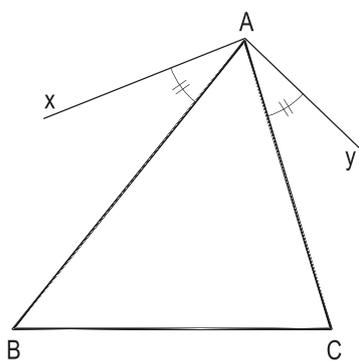


Figura 149

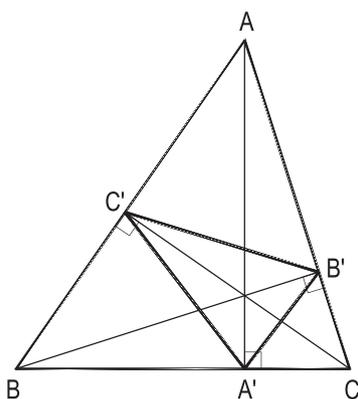


Figura 150

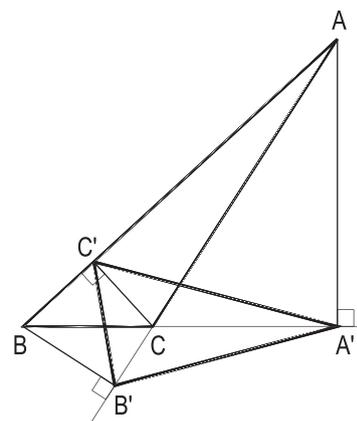


Figura 151

28 – Construção de triângulos em grandeza

As construções dos triângulos podem se interessar apenas pela determinação de suas grandezas, de seus lados, ângulos, cevianas, ou dos círculos a eles associados, sem se importarem com suas posições, sendo, por isso, ditos problemas de grandeza.

São os que trataremos nesta parte, quando, caso a caso, serão indicados os elementos dados, que poderão combinar lados, perímetros, ângulos, cevianas, raios dos círculos circunscritos, inscritos, exinscritos, ou, até, alguns de seus pontos notáveis (baricentro, ortocentro, incentro e exincentros).

Seguem mais que sete dezenas de exemplos, obedecendo à numeração do capítulo anterior.

33 – Dadas as medidas dos três lados a , b e c .

Resolução: Marcado $BC = a$, as circunferências (B, c) e (C, b) cortam-se, proporcionando o vértice A (Figura 152).

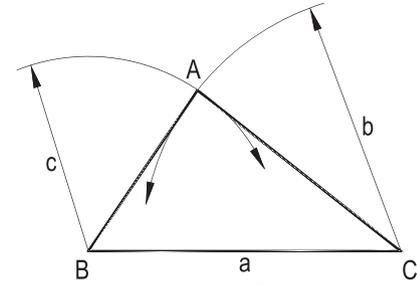


Figura 152

34 – Dadas as medidas de dois lados a e b e do ângulo B .

Resolução: Marcado $BC = a$, traça-se a reta r , por B , usando o ângulo B , e determina-se sua interseção com a circunferência (C, b) , produzindo o vértice A (Figura 153), com duas soluções de grandezas diferentes A_1BC e A_2BC , para os valores dados.

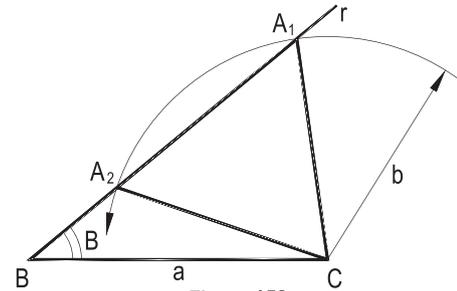


Figura 153

35 – Dadas as medidas dos lados a e b e do ângulo C , obtuso.

Resolução: Desenhados $BC = a$ e a reta r , por C , obedecido o ângulo C , a interseção de r com a circunferência (B, b) proporciona o vértice A (Figura 154).

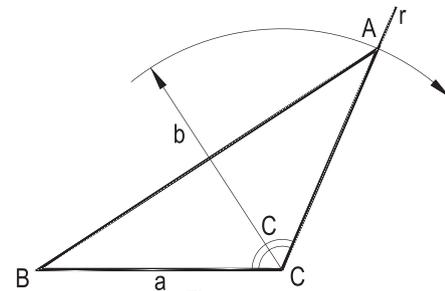


Figura 154

Há uma única solução, para respeitar a imposição do ângulo C ser obtuso, já que o segundo ponto de corte atingiria o prolongamento de r , tornando o ângulo C agudo.

36 – Dados o cateto $AB = c$ e o valor do cateto AC , igual ao triplo de c .

Resolução: Marcados o ângulo reto A e as medidas $AB = c$ e $AC = 3c$, vem o vértice C na interseção da perpendicular a AB , por A , com a circunferência $(A, 3c)$ (Figura 155).

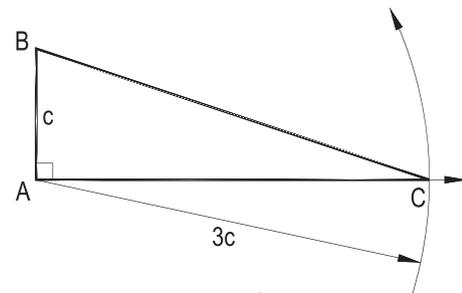


Figura 155

37 – Dados a hipotenusa a e o valor do ângulo B .

Resolução: Traçados $BC = a$ e a reta r , inclinada de B em relação a BC , A vem com a perpendicular a r , por C (Figura 156).

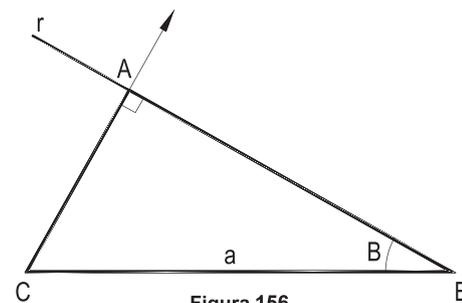


Figura 156

38 – Dados o lado a e os ângulos B e C que o compreendem.

Resolução: Basta traçar as retas r e s , por B e C , formando, respectivamente, os ângulos B e C dados, para obter o vértice A (Figura 157).

39 – Dados os lados a e b e o ângulo A .

Resolução: Basta utilizar o arco capaz do ângulo A , para BC , e a circunferência (C , b), para, por interseção, determinar o vértice A , com duas soluções de grandezas distintas, a segunda indicada pelo número 2 na Figura 158.

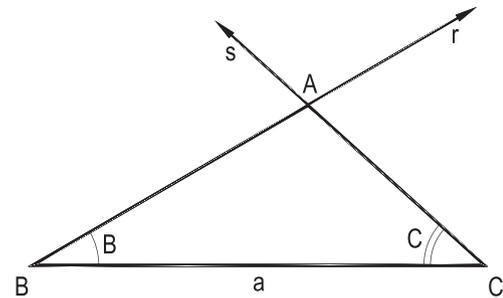


Figura 157

40 – Dados o lado a e os ângulos A e B .

Resolução: A partir de $BC = a$, traçada a reta r , por B , respeitado o ângulo B , basta construir uma reta s , que forme o ângulo dado A com r , para, com a paralela s_1 a ela, por C , obter o vértice A (Figura 159).

Outra construção para resolver o problema consiste em utilizar o arco capaz do ângulo A , para o segmento BC , e aplicar o ângulo B com BC (Figura 160).

Para os exemplos seguintes, além de lados e ângulos do triângulo pedido, serão dados os valores de alguma de suas alturas h_a , h_b , ou h_c , ou de uma de suas medianas m_a , m_b , ou m_c .

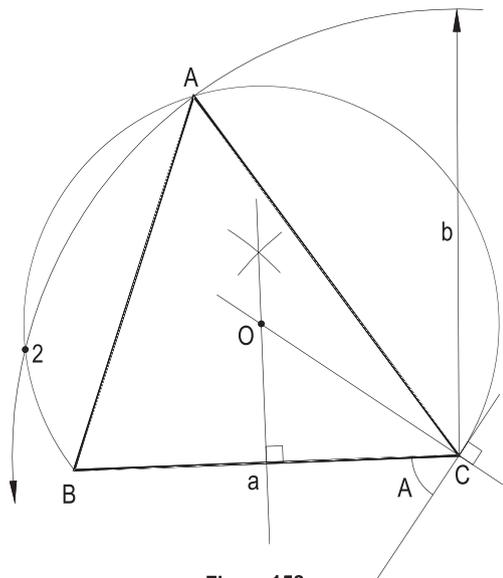


Figura 158

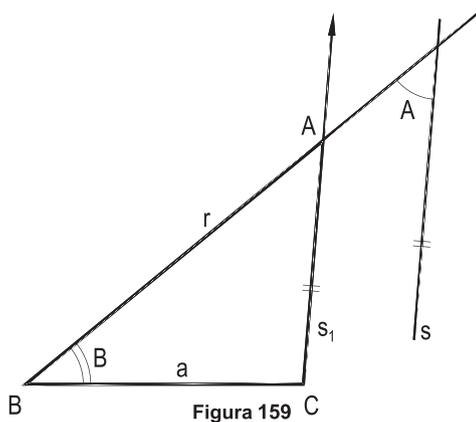


Figura 159

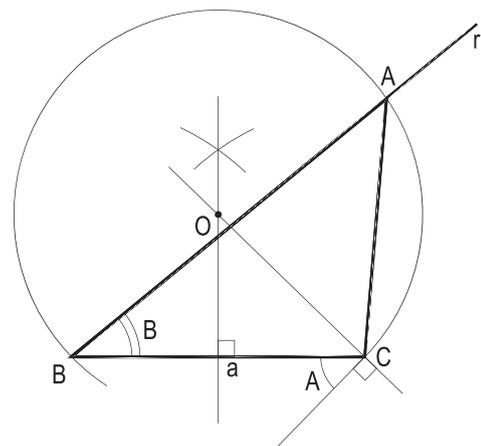


Figura 160

41 – Dados a , b e h_a .

Resolução: Traçados $BC = a$ e a paralela r a BC , dela distante h_a , sua interseção com a circunferência (C, b) traz o vértice A , com duas soluções de grandezas diferentes A_1BC e A_2BC (Figura 161).

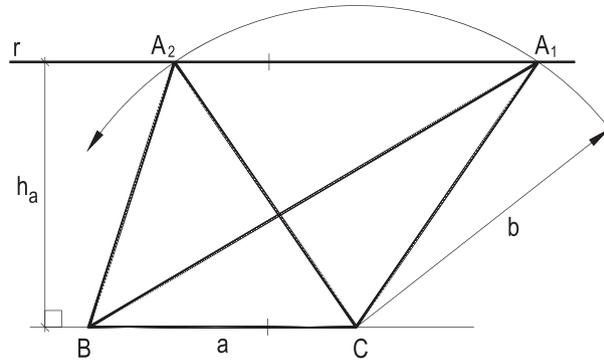


Figura 161

42 – Dados a , b e h_b .

Resolução: Construída a tangente t , por C , à circunferência (B, h_b) , que assegura o ângulo reto entre a altura h_b e o lado CA , a aplicação, sobre ela, a partir de C , do valor do lado b , proporciona A , com duas soluções de grandezas distintas, a segunda indicada pelo número 2 na Figura 162.

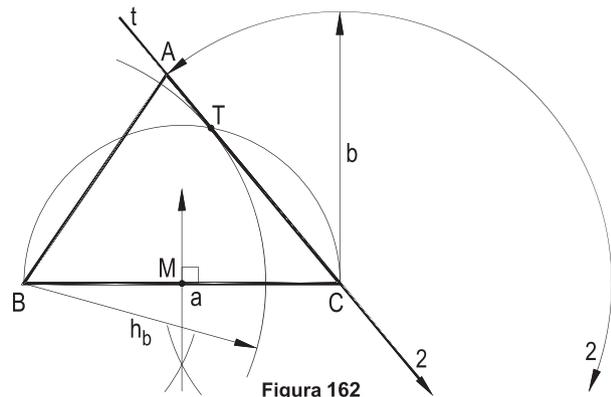


Figura 162

43 – Dados a , h_a e h_b .

Resolução: Combinação dos dois exemplos anteriores, pela utilização da paralela r a BC e da tangente t , por C , à circunferência (B, h_b) (Figura 163), também com duas soluções de grandezas diferentes, a segunda indicada pelo número 2.

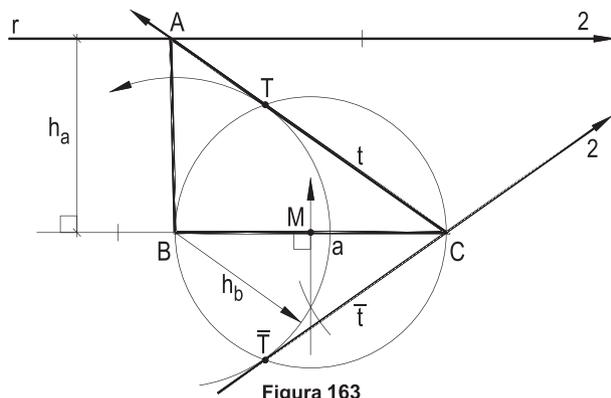


Figura 163

44 – Dados a , A e h_a .

Resolução: Marcado $BC = a$ e construídos o arco capaz de A para BC e a paralela r a BC dela distante h_a (Figura 164), por corte, obtém-se o vértice A , com duas posições, mas apenas uma solução, em grandeza, tal a igualdade que as duas posições proporcionam ao triângulo pedido, simétricas que são em relação à mediatriz de BC .

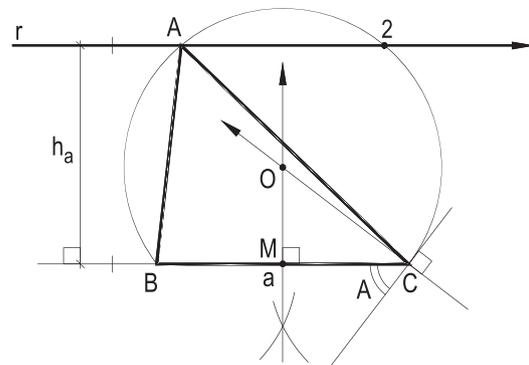


Figura 164

45 – Dados a , h_a e m_a .

Resolução: A reta r , paralela a BC , guardando a distância h_a , e a circunferência de centro no ponto M , médio de BC e raio m_a , proporcionam o vértice A procurado (Figura 165), com duas posições de grandezas iguais para o triângulo, simétricas em relação à mediatriz de BC .

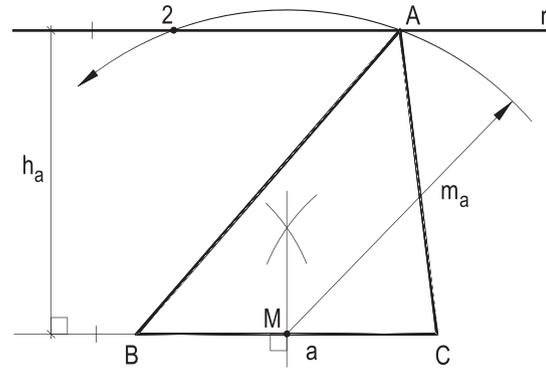


Figura 165

46 – Dados a , h_a e m_b .

Resolução: Marcado $BC = a$, a paralela r' a BC , distante dela de um valor igual à metade de h_a , e a circunferência (C, m_b) trazem duas soluções para o ponto N , médio de AB , e, por sua união com B , o vértice A (Figura 166).

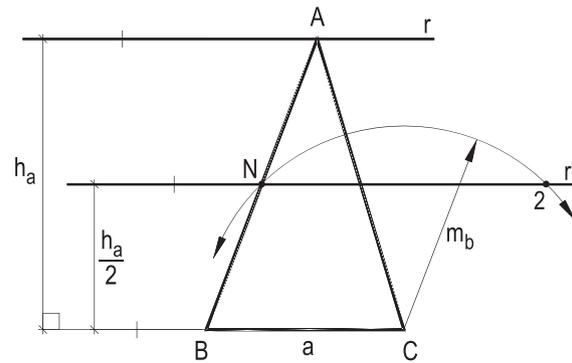


Figura 166

A segunda solução indicada pelo número 2 para o ponto N não foi completada na Figura 166.

47 – Dados a , b e m_a .

Resolução: A partir de $BC = a$ e determinado seu ponto médio M , as circunferências (M, m_a) e (C, b) trazem o vértice A (Figura 167).

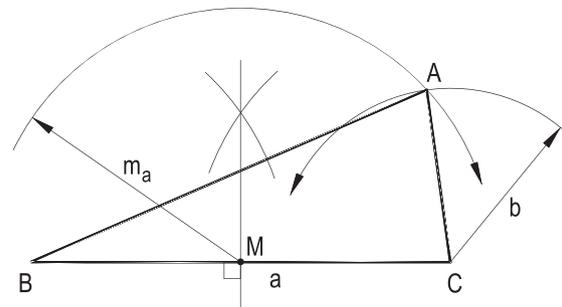


Figura 167

48 – Dados a , b e m_b .

Resolução: O ponto chave é N , médio de CA , pé da mediana $BN = m_b$, obtido, a partir do traçado de $BC = a$, pela interseção das circunferências (B, m_b) e $(C, b/2)$.

Com a união de C a N , a duplicação de CN proporciona o terceiro vértice A , com só uma solução, em grandeza (Figura 168).

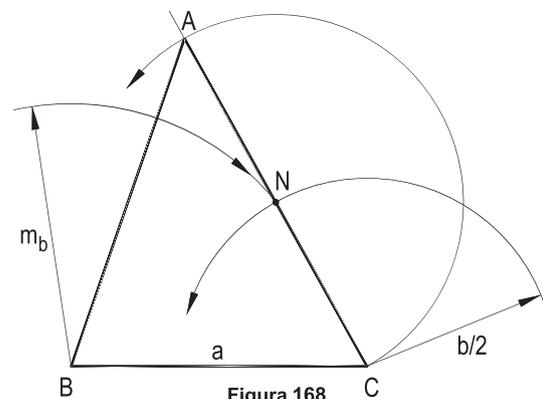


Figura 168

49 – Dados a , m_b e m_c .

Resolução: Marcado $BC = a$, com $\frac{2}{3}$ de cada mediana dada, as circunferências $(B, \frac{2}{3} m_b)$ e $(C, \frac{2}{3} m_c)$ proporcionam, por interseção, o baricentro G do triângulo. Com a união de M , médio de BC a G , a construção da mediana MA , medindo o triplo de MG , resolve a questão (Figura 169), trazendo o vértice A .

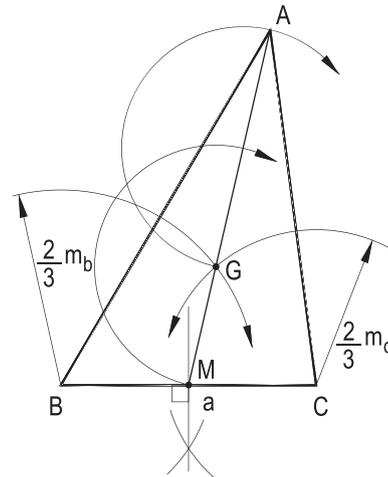


Figura 169

50 – Dados a , m_a e m_b .

Resolução: Variação do anterior, sendo a chave o baricentro G do triângulo ABC , obtido pela interseção das circunferências $(B, \frac{2}{3} m_b)$ e $(M, \frac{1}{3} m_a)$, sendo M o ponto médio de BC , com a triplicação de MG , para a construção da mediana AM (Figura 170).

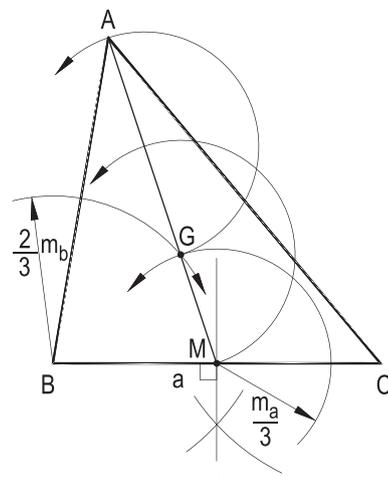


Figura 170

51 – Dados a , B e m_a .

Resolução: Simples, pela construção da circunferência de centro M , médio de BC , e raio m_a , que corta a reta r , inclinada do ângulo B em relação a BC , proporcionando o vértice A (Figura 171).

Apenas uma solução, para os valores dados, visto que a circunferência (M, m_a) tem seu segundo ponto de corte no prolongamento de r , indicado pelo ponto 2, de modo tal que torne o ângulo B obtuso, contrariando, assim, a imposição estabelecida no enunciado.

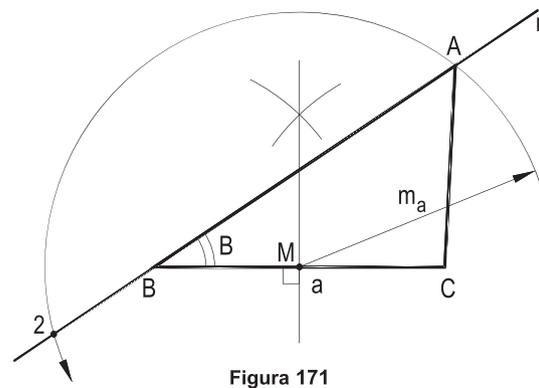


Figura 171

52 – Dados a , B e h_a .

Resolução: Construído o ângulo B , pelo vértice B , a paralela r a BC , distante h_a de BC , dá o vértice A (Figura 172).

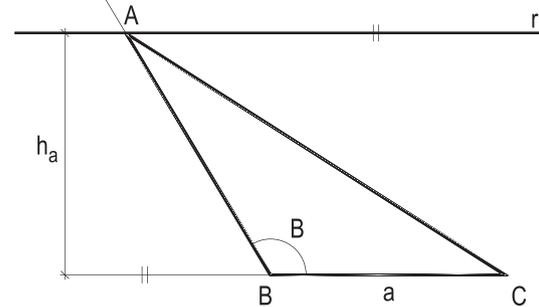


Figura 172

53 – Dados a , B e m_b .

Resolução: A chave é o ponto M , médio de AC e pé da mediana dada, que se determina pela interseção da reta r' , homotética de r , na razão $1/2$, para o polo C , com a circunferência (B, m_b) (Figura 173).

Observe-se que r' foi traçada paralela a r , pelo ponto N , médio de uma transversal CP , arbitrada.

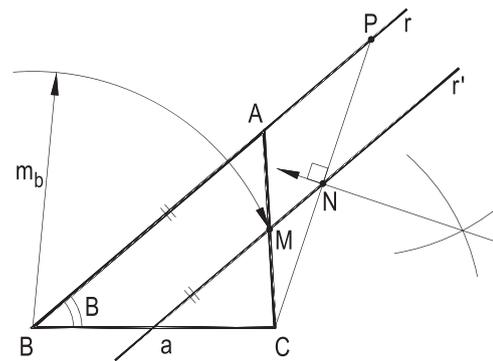


Figura 173

54 – Dados a , B e m_c .

Resolução: O ponto chave, agora, é o baricentro G de ABC , obtido com o corte da reta r' , homotética de r para o polo C , na razão $2/3$ com a circunferência $(C, \frac{2}{3} m_c)$ (Figura 174).

A união de C a G traz N , médio de BA , e, então, o vértice A . Duas soluções, a segunda, não completada, indicada pelo ponto 2, para o baricentro.

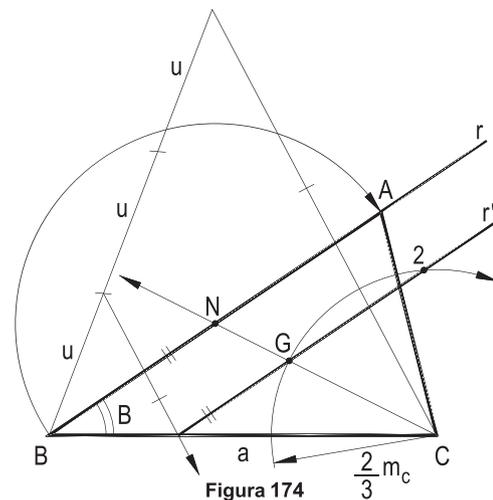


Figura 174

55 – Dados a , A e m_b .

Resolução: Busca-se o ponto N , médio do lado AC e pé da mediana dada, que se determina pela interseção da circunferência (B, m_b) com o arco capaz homotético do construído para o lado BC , com o ângulo A , a partir do polo C , na razão $1/2$ (Figura 175).

Para os dados, o problema oferece duas soluções de grandezas diferentes, a segunda, não completada, correspondendo à segunda posição para o ponto N , indicada, na Figura 175, pelo ponto N' , que, ligado a C , proporciona outra posição para o vértice, anotada por A' .

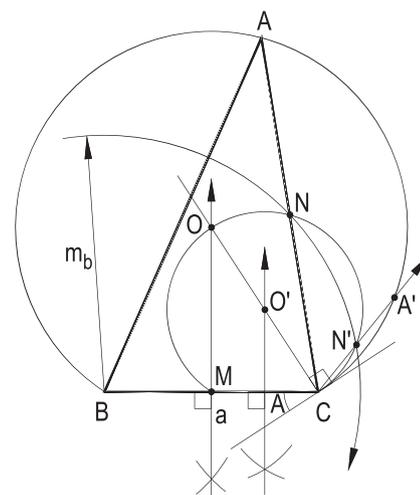


Figura 175

56 – Dados o lado a , o ângulo B e o valor R do raio do círculo circunscrito.

Resolução: As circunferências (B, R) e (C, R) cortam-se, determinando o circuncentro O . E, com a circunferência (O, R) , obtém-se o vértice A (Figura 176).

57 – Dados o lado a , o valor de mediana m_a , relativa a ele, e a medida R do raio do círculo circunscrito.

Resolução: Determinado o circuncentro O , construído o círculo (O, R) circunscrito, com a circunferência de centro no ponto M , médio de BC e raio m_a , vem o vértice A , em duas posições para soluções iguais em grandeza (Figura 177).

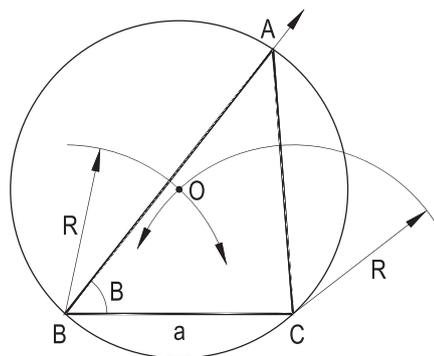


Figura 176

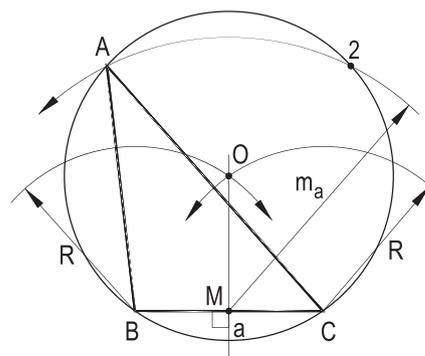


Figura 177

58 – Dados um lado a , a altura h_a e o raio R do círculo circunscrito.

Resolução: Construída a circunferência (O, R) , como acima, suas interseções com a reta r , paralela a BC e dela distante h_a , trazem duas posições para triângulos iguais (Figura 178).

59 – Dados dois lados a e b e o raio R do círculo circunscrito.

Resolução: As interseções da circunferência circunscrita (O, R) com a circunferência (C, b) são as duas soluções para o último vértice do triângulo pedido (Figura 179).

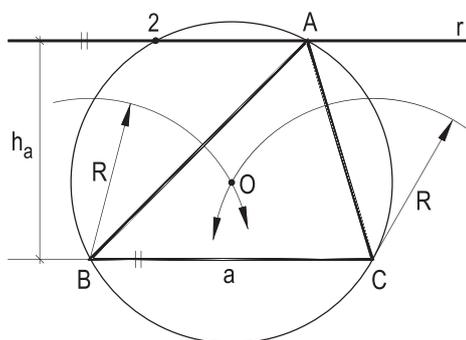


Figura 178

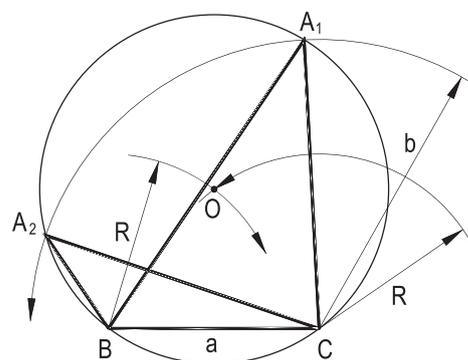


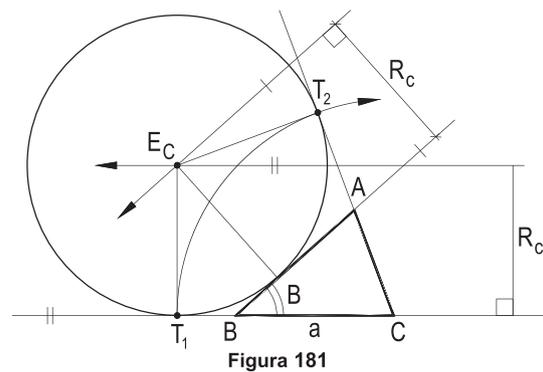
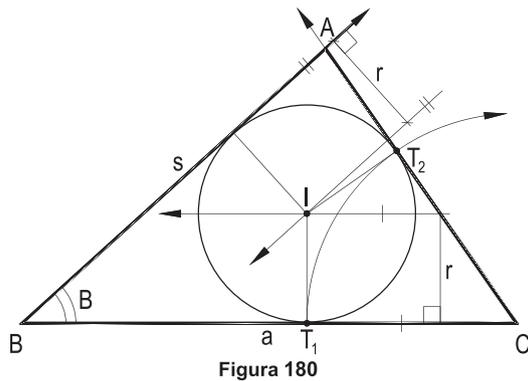
Figura 179

60 – Dados um lado a , um ângulo B e o raio r do círculo inscrito.

Resolução: Marcados o lado $BC = a$ e a reta s , obediente ao ângulo dado B , as paralelas aos lados desse ângulo, interiores a ele e distantes r de seus lados, trazem o incentro I e o círculo inscrito (I, r), ao qual CA deve ser tangente, o que se consegue marcando $CT_2 = CT_1$ (Figura 180) e com a união de C a T_2 .

61 – Dados um lado a , um ângulo B e o raio R_c do círculo exinscrito relativo ao vértice C .

Resolução: Análoga à do exemplo anterior, operando-se com o ângulo externo relativo ao vértice B (Figura 181).

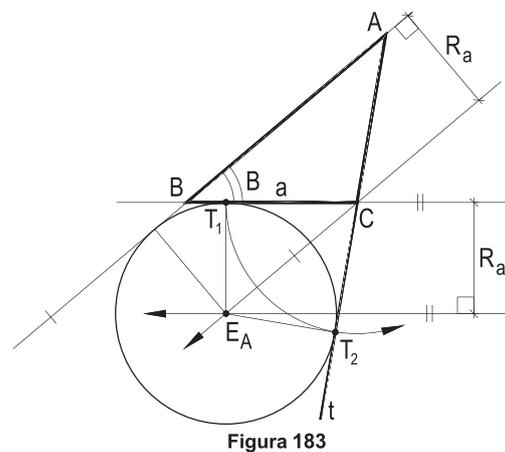
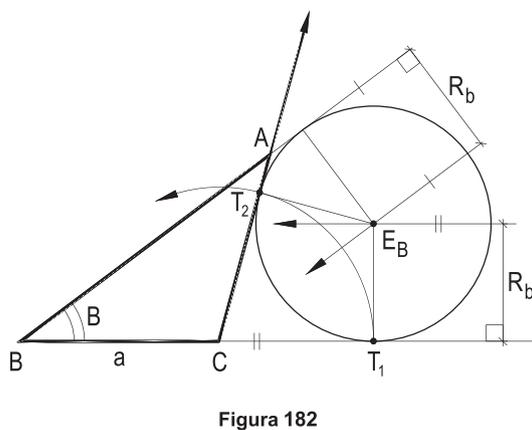


62 – Dados um lado a , um ângulo B e o raio R_b do círculo exinscrito relativo ao vértice B .

Resolução: Mais uma variante dos exemplos anteriores, determinando-se o exincentro E_B e, com $CT_2 = CT_1$, vem a tangente CA a esse círculo exinscrito, que dá o vértice A (Figura 182).

63 – Dados um lado a , um ângulo B e o raio R_a do círculo exinscrito relativo ao vértice desconhecido A .

Resolução: Outra variação, agora com a obtenção do exincentro E_A relativo ao vértice procurado A e, com $CT_2 = CT_1$, vem a tangente t que determina A (Figura 183).



64 – Dados um ângulo B e os raios r e R_b dos círculos inscrito e exinscrito relativo ao vértice B.

Resolução: Desenhado o ângulo B, marcados os valores r e R_b , com paralelas aos lados desse ângulo e em seu interior, ficam determinados o incentro I e o exincentro E_B , relativo ao vértice B, sendo, então, imediatas as construções dos círculos inscrito e exinscrito relativo a esse vértice, aos quais o lado AC deverá ser tangente.

Assim, como detalhado no item 21, são construídas as tangentes comuns internas às circunferências (I, r) e (E_B , R_b), que proporcionam as duas soluções, iguais, para o triângulo ABC pedido, das quais apenas uma foi completada na Figura 184.

A ordem de escolha para nominar os vértices A e C, permutáveis, foi arbitrada.

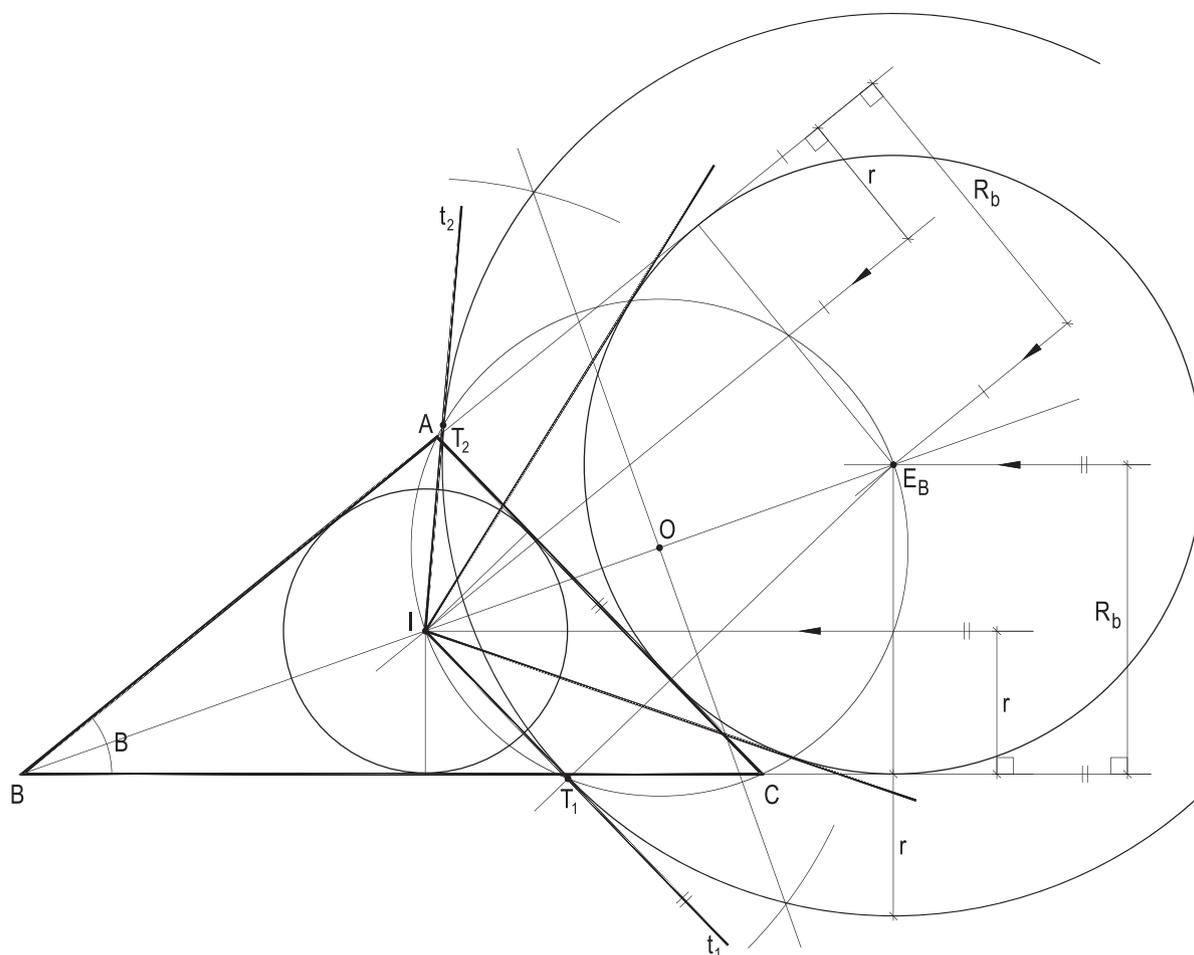


Figura 184

Uma segunda posição corresponde à tangente interna comum com a direção t_2 , da tangente do incentro I à circunferência auxiliar (E_B , $R_b + r$), igual, em grandeza, à completada na Figura 184.

65 – Dados um ângulo B e os raios r e R_a dos círculos inscrito e exinscrito relativo a um dos vértices não dados do triângulo.

Resolução: Desenhado o ângulo B e, pelo prolongamento de um de seus lados, o ângulo externo B' , adjacente a B, com paralelas a seus lados, determina-se o incentro I e um exincentro, que designamos E_A , correspondente, pois, a A, um dos vértices procurados.

A seguir são construídos o círculo inscrito (I, r) e o exinscrito (E_A , R_a), o primeiro no interior do ângulo dado B e o segundo no ângulo B' , adjacente a B, portanto um dos exinscritos ao triângulo ABC, no caso, o relativo ao vértice A.

O lado AC procurado há de pertencer, então, à segunda tangente externa, comum a essas duas circunferências, construída (Figura 185) como detalhado no item 21.

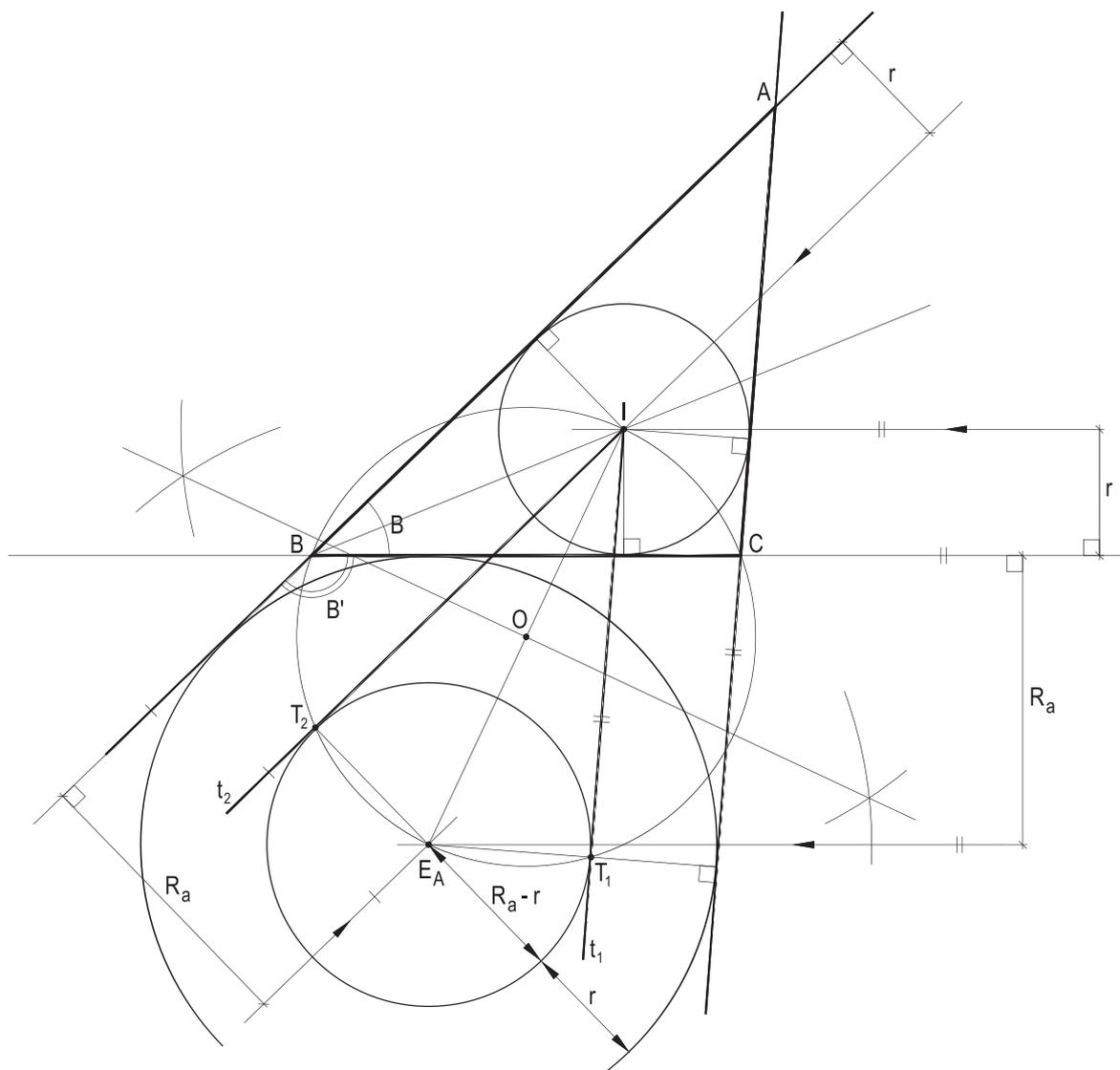


Figura 185

66 – Dados um ângulo B e as medidas R_A e R_B dos raios dos círculos exinscritos relativos respectivamente aos vértices A e B.

Resolução: Variação dos dois anteriores. Inicia-se determinando as posições dos exincentros E_A e E_B , pela utilização de paralelas aos lados do ângulo dado B, o primeiro exterior e o segundo interior a esse ângulo (Figura 186), para, em seguida, traçar os círculos (E_A, R_a) e (E_B, R_b) .

A reta suporte do lado procurado AC será, então, a tangente interna comum a esses dois círculos, com apenas uma solução, visto que a segunda tangente interna comum é o próprio lado do ângulo B, dado, que contém os pontos de contato T_1 e T_2 .

A tangente AC é obtida rapidamente, pela marcação do vértice C, nesse lado e na linha dos centros $E_A E_B$ dos dois círculos, e com os rebatimentos de T_1 e de T_2 , em torno de C, para as obtenções de \bar{T}_1 e \bar{T}_2 (Figura 186), que, unidos, definem a tangente comum AC procurada.

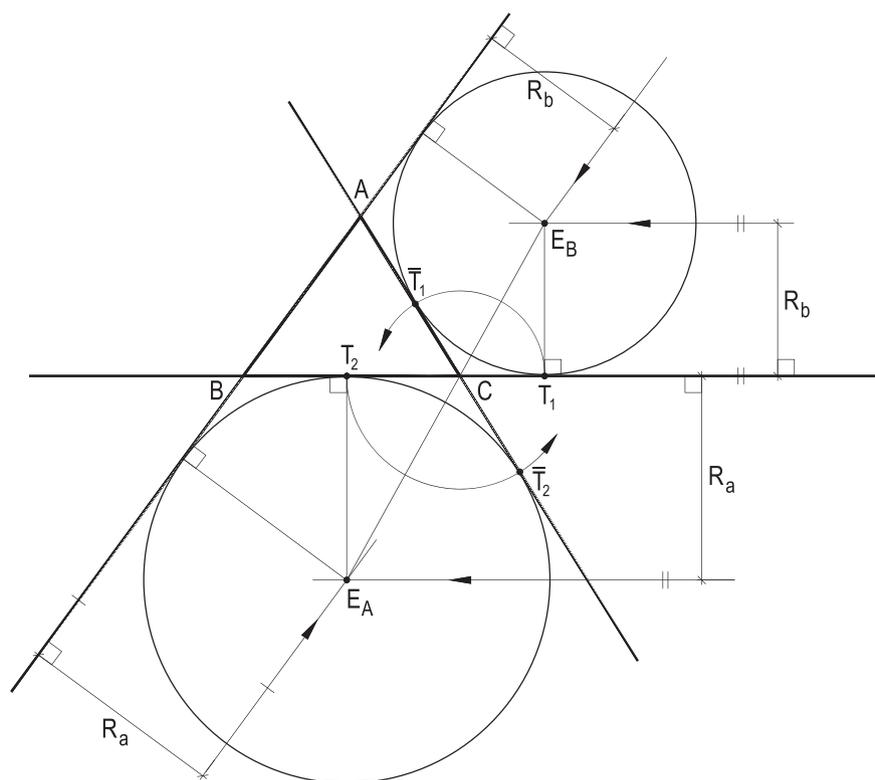


Figura 186

O próximo conjunto trata da construção de triângulos isósceles ABC, de base $BC = b$, lados iguais $AB = AC = \ell$, altura h , medianas, m_b e m_ℓ , relativas à base e aos lados iguais, respectivamente, ângulos A e $B = C$ e raios r , R , R_b e R_ℓ , respectivamente, dos círculos inscrito, circunscrito e exinscritos em relação à base e aos lados iguais.

67 – Dados $BC = b$ e o ângulo B .

Resolução: O transporte de $C = B$ basta (Figura 187).

68 – Dados $BC = b$ e o ângulo A .

Resolução: Construído o complemento B da metade de A , retorna-se à situação anterior (Figura 188).

69 – Dados ℓ e o ângulo A .

Resolução: Simples, pelo rebatimento de AB sobre r (Figura 189).

70 – Dados $BC = b$ e ℓ .

Resolução: Marcado BC , obtém-se o vértice A com as circunferências de centros B e C e raios ℓ (Figura 190).

71 – Dados h e ℓ .

Resolução: Marcada a altura AH e traçada a perpendicular r a ela, por H , a circunferência (A, ℓ) traz B e C (Figura 191), permutáveis.

72 – Dados $BC = b$ e m_ℓ .

Resolução: Construída a mediatriz m de BC , marcado $C\bar{C} = m_\ell$, a circunferência ($C, \frac{2}{3} m_\ell$) traz o baricentro G e, em seguida, o vértice A (Figura 192).

73 – Dados $BC = b$ e r .

Resolução: Construído o círculo inscrito (I, r), as tangentes B_1 e C_2 dão A (Figura 193).

74 – Dados $BC = b$ e R .

Resolução: As circunferências (B, R) e (C, R) trazem o circuncentro O , a circunferência circunscrita (O, R) e, na mediatriz de BC , duas soluções A_1 e A_2 para o vértice procurado (Figura 194).

75 – Dados m_b e m_ℓ .

Resolução: Traçada a reta r e, por um ponto M seu, $MG = \frac{m_b}{3}$, na perpendicular à reta r , vem o baricentro G . Com $GA = 2 MG$ obtém-se A , e, com centro em G e raio $\frac{2}{3} m_\ell$, os vértices B e C (Figura 195), em ordem arbitrada.

67

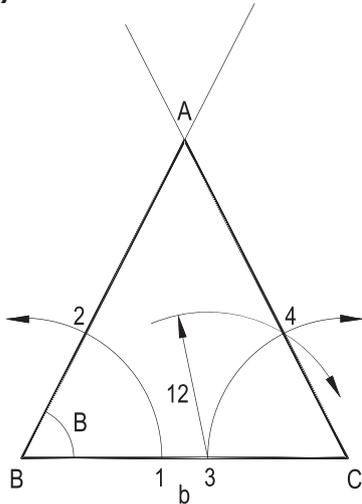


Figura 187

68

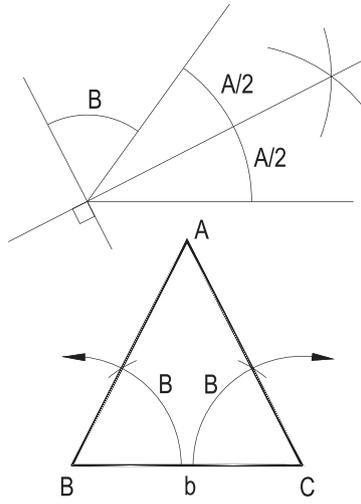


Figura 188

69

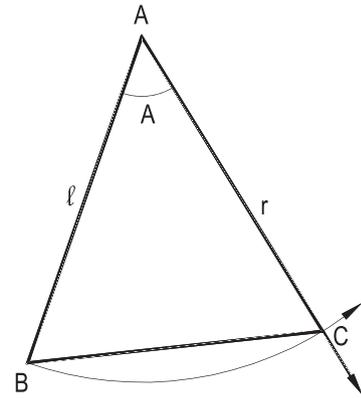


Figura 189

70

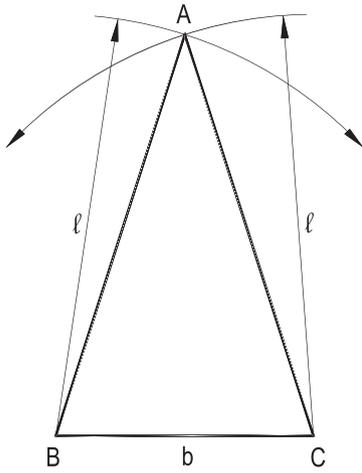


Figura 190

71

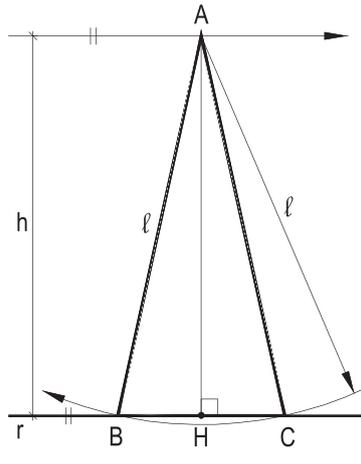


Figura 191

72

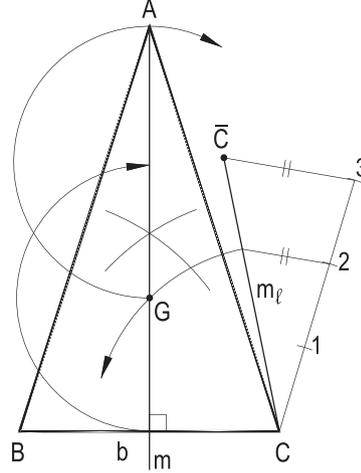


Figura 192

73

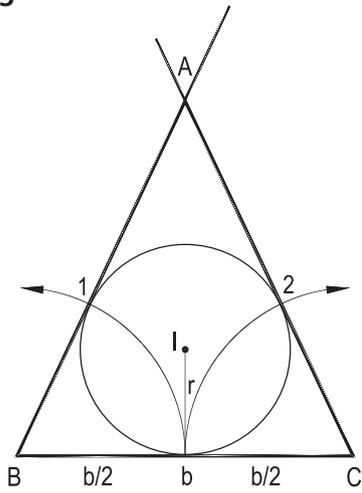


Figura 193

74

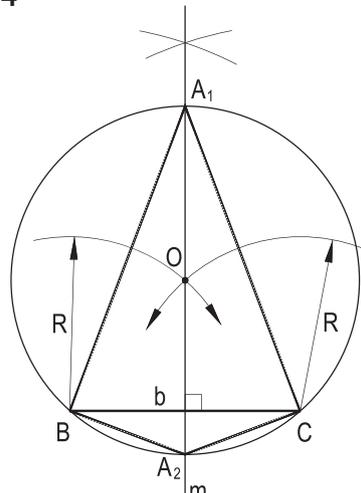


Figura 194

75

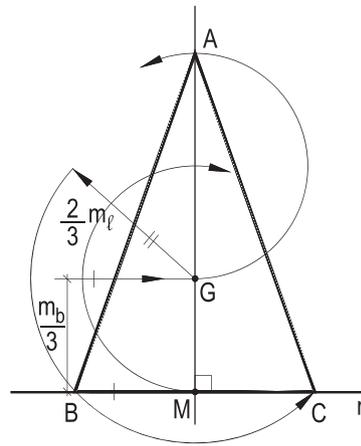


Figura 195

O próximo conjunto, ainda para triângulos, trata dos equiláteros, de lado a , altura h , raios r , R e R_a dos círculos respectivamente inscrito, circunscrito e exinscrito e dos triângulos retângulos ABC , de catetos $AB = c$ e $AC = b$ e hipotenusa $BC = a$, de suas cevianas principais e dos raios r , R , R_a , R_b e R_c , respectivamente, inscrito, circunscrito e exinscritos relativos às suas hipotenusas ou catetos.

76 – Triângulo equilátero ABC de lado a (Figura 196).

77 – Triângulo equilátero ABC , dada a altura h (Figura 197).

78 – Triângulo equilátero ABC , dado o raio R do círculo circunscrito.

Resolução: A divisão da circunferência em seis partes iguais e a escolha de três pontos de divisão alternados trazem o triângulo ABC (Figura 198).

79 – Triângulo equilátero ABC , dado o raio r do círculo inscrito.

Resolução: Sua divisão em seis partes iguais e as tangentes por pontos de divisão alternados resolvem a questão (Figura 199).

80 – Triângulo equilátero ABC , dado o raio R de um círculo exinscrito.

Resolução: Mesma construção, utilizando três pontos consecutivos de divisão da circunferência para o traçado das tangentes (Figura 200).

81 – Triângulo retângulo. Dadas a hipotenusa a e a altura h_a , relativa à hipotenusa.

Resolução: O arco capaz de 90° para BC e a paralela r a BC resolvem (Figura 201). Apenas uma solução, quanto à grandeza.

82 – Triângulo ABC , retângulo em A . Dados a e m_b .

Resolução: Sendo O o ponto médio de BC , as circunferências de diâmetro OC e (B, m_b) cortam-se, produzindo o ponto N , médio de CA , que traz A na perpendicular, por B , à reta CN (Figura 202).

83 – Dados o cateto AB e o raio R_b do círculo exinscrito relativo ao vértice B , do triângulo ABC , retângulo em A .

Resolução: Prolongado AB e construído o círculo (E_B, R_b) , a tangente BT_2 a ele, por B , proporciona o vértice C (Figura 203).

84 – Triângulo ABC , retângulo em A . Dados o cateto AB e o raio R_a do círculo exinscrito relativo à hipotenusa.

Resolução: Semelhante à do exemplo anterior (Figura 204).

76

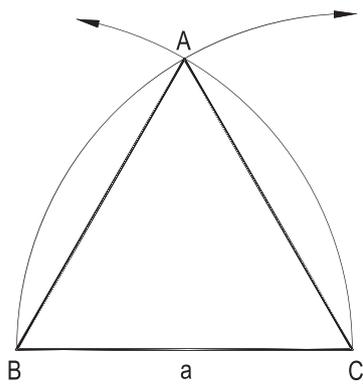


Figura 196

77

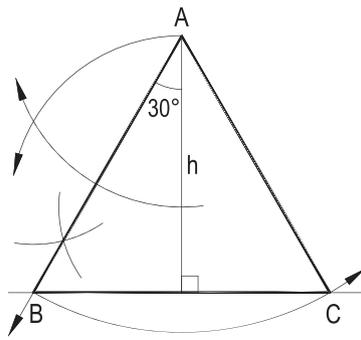


Figura 197

78

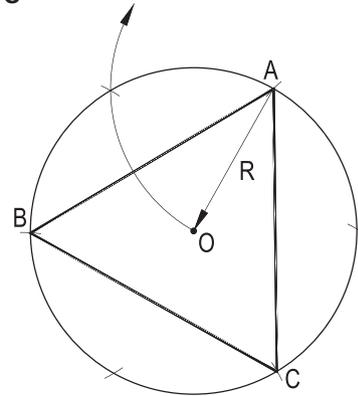


Figura 198

79

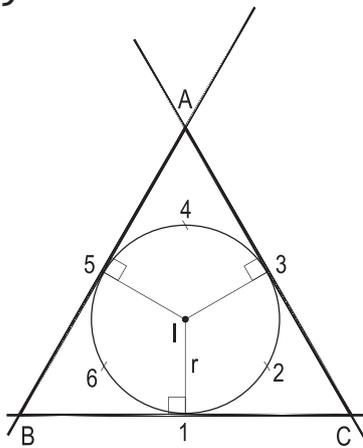


Figura 199

80

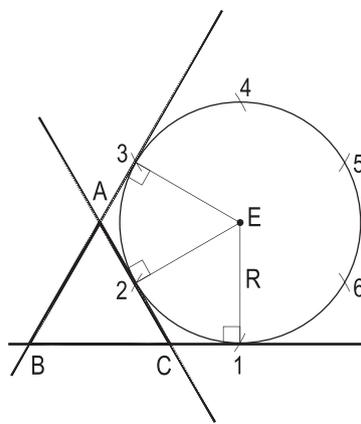


Figura 200

81

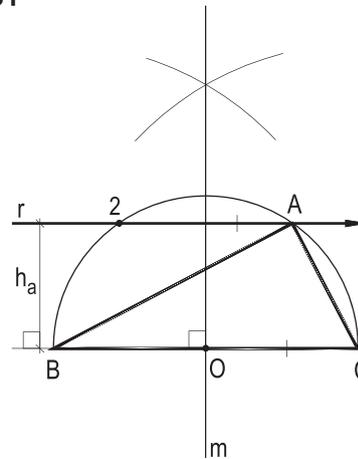


Figura 201

82

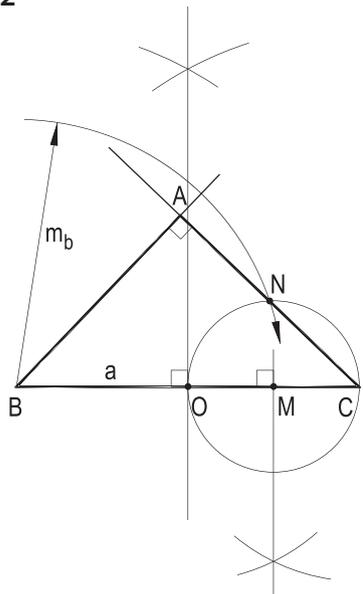


Figura 202

83

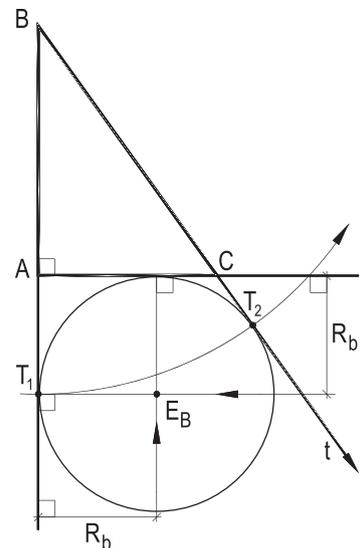


Figura 203

84

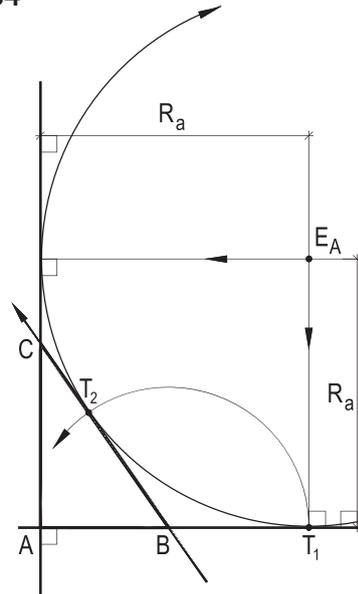


Figura 204

Nos exemplos que seguem serão incluídos pontos notáveis dos triângulos, combinados com elementos já antes abordados.

85 – Dados o lado $BC = a$ e o ortocentro H .

Resolução: Traçada BH , a perpendicular a ela, por C , traz A (Figura 205).

86 – Dados o lado $BC = a$ e o incentro I .

Resolução: As tangentes por B e C ao círculo inscrito resolvem (Figura 206).

87 – Dados o lado $BC = a$ e o exincentro E_B .

Resolução: Semelhante, com tangentes por B e C ao círculo exinscrito (E_B) (Figura 207).

88 – Dados o lado $BC = a$ e o exincentro E_A .

Resolução: Mais uma resolução com tangentes por B e C (Figura 208).

89 – Dados os pés A' , B' e C' das três alturas, ou, o que é o mesmo, o triângulo órtico $A'B'C'$ do pedido.

Resolução: Os lados do triângulo ABC , o fundamental do dado, são as bissetrizes de seus ângulos externos (*Geometria Plana*, número 145.2) (Figura 209).

90 – Dados os pés, \bar{A} , \bar{B} e \bar{C} das três medianas.

Resolução: As paralelas aos lados do triângulo $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$, por seus vértices, proporcionam o triângulo pedido ABC (Figura 210).

91 – Dados os três exincentros E_A , E_B e E_C .

Resolução: Os vértices do triângulo ABC pedido são (*Geometria Plana*, número 145.4) os pés das alturas do triângulo dado $E_A E_B E_C$ (Figura 211).

92 – Dados o lado $BC = a$, o ângulo B e o valor $2p$ do perímetro.

Resolução: Marcados BC e a reta r , obedecendo ao ângulo dado B , aplicado, sobre r , $BJ = 2p - a$, a mediatriz m de CJ traz o vértice A (Figura 212).

93 – Triângulo retângulo isósceles. Dado o perímetro $2p$.

Resolução: Construído um triângulo $A'B'C'$, também retângulo isósceles, de cateto $A'B'$ arbitrado e determinado seu perímetro $2p' = \bar{B}\bar{B}$, por serem obrigatoriamente semelhantes os dois triângulos, por proporção entre $2p'$ e $2p$, obtém-se o triângulo ABC procurado, com o auxílio de paralelas como indicado na Figura 213.

85

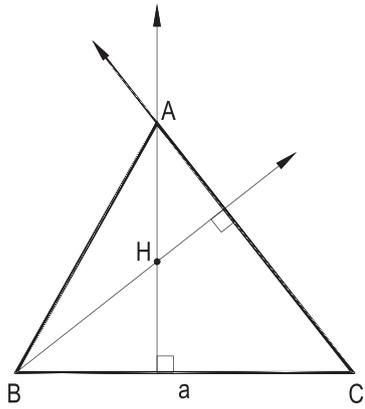


Figura 205

86

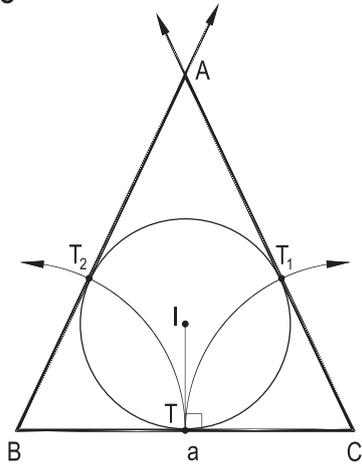


Figura 206

87

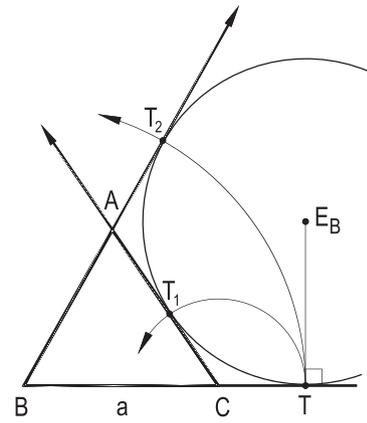


Figura 207

88

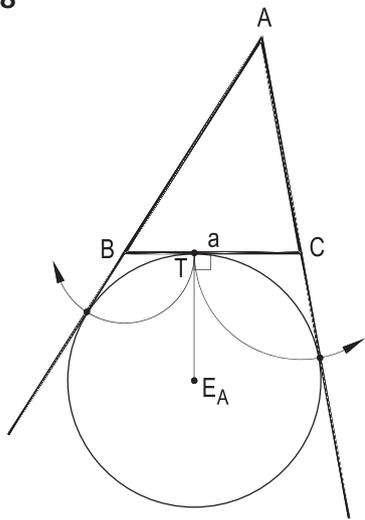


Figura 208

89

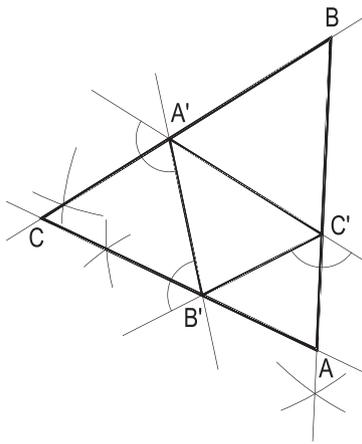


Figura 209

90

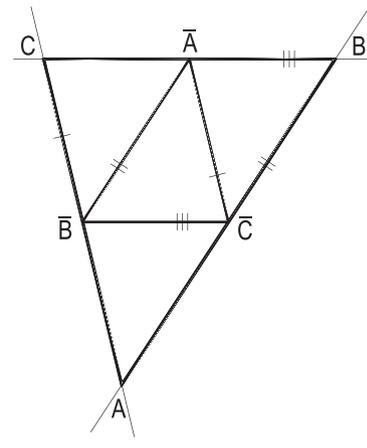


Figura 210

91

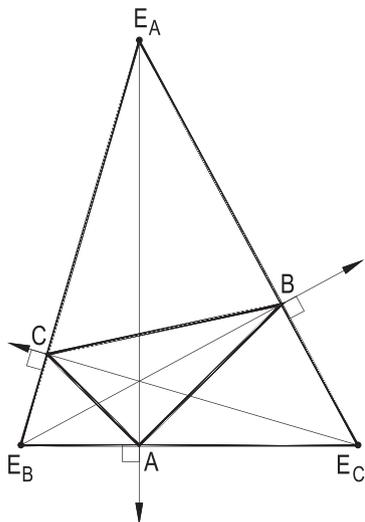


Figura 211

92

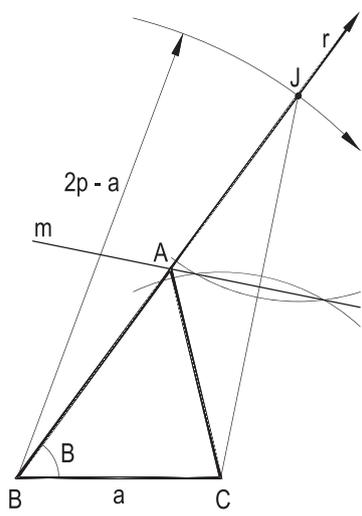


Figura 212

93

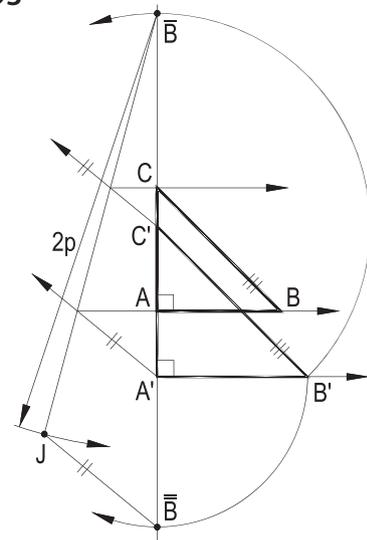


Figura 213

94 – Triângulo retângulo isósceles. Dado o raio r do círculo inscrito.

Resolução: Construído o círculo (I, r) e o quadrado AT_1IT_2 e sua diagonal AI , a tangente por T_3 proporciona a solução ABC (Figura 214).

95 – Triângulo retângulo isósceles. Dado o raio R_a do círculo exinscrito referente à hipotenusa.

Resolução: Idêntica, com o quadrado $AT_1E_AT_2$ e a tangente ao círculo pelo ponto T_3 da diagonal AE_A (Figura 215).

96 – Triângulo retângulo isósceles. Dado o raio R_c do círculo exinscrito relativo a um dos catetos.

Resolução: Mais uma construção idêntica, com o quadrado $AT_1E_CT_2$ e, agora, com E_CT_3 paralelo à diagonal T_1T_2 e a tangente BC por T_3 (Figura 216).

97 – Triângulo retângulo isósceles. Dado o raio R do círculo circunscrito.

Resolução: Imediata, com a mediatriz m de BC (Figura 217).

98 – Triângulo ABC . Dados $BC = a$, o ângulo A e o pé P da bissetriz interna do ângulo A .

Resolução: Construído o arco capaz de A para BC , a bissetriz interna do ângulo A deve passar pelo ponto M , médio do arco BC oposto a A (*Geometria Plana*, número 134) (Figura 218).

99 – Triângulo ABC . Dados $BC = a$, o ângulo A e o pé Q da bissetriz externa do ângulo A .

Resolução: Mesma construção, mas, agora, a bissetriz externa do ângulo A deve conter o ponto médio M do arco BC ao qual A pertence (*Geometria Plana*, número 135) (Figura 219).

Observação: os dois últimos problemas podem, também, ter como resolução a construção do arco capaz de A , para BC , a determinação do conjugado harmônico Q , de P , ou, inversamente, do conjugado P , de Q , com o traçado do arco capaz de 90° para PQ , que, por interseção com o primeiro arco capaz, entrega o vértice A (Figura 220), já que as bissetrizes interna e externa, relativas a qualquer vértice, têm de ser perpendiculares entre si.

100 – Triângulo isósceles ABC , de base BC e baricentro G . Dados $BC = a$ e o ângulo $\alpha = \widehat{BGC}$.

Resolução: Determinada a metade de α , sua aplicação a partir da mediatriz m de BC , por um ponto J arbitrado, e a paralela, por B , a ela, traz o baricentro G e, em seguida, o vértice A , com $GA = 2.MG$ (Figura 221).

94

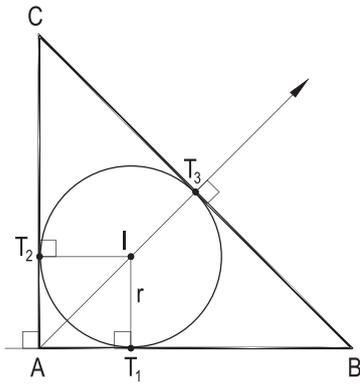


Figura 214

95

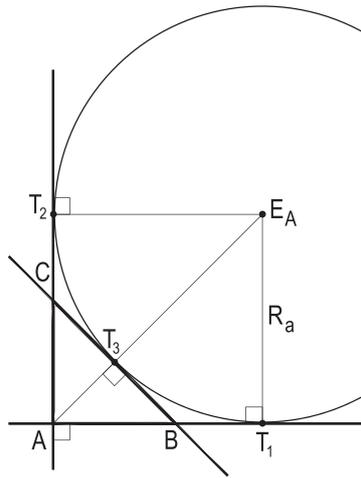


Figura 215

96

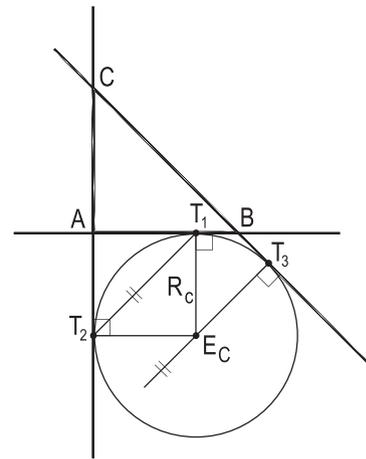


Figura 216

97

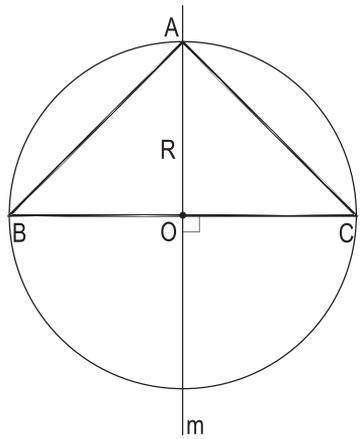


Figura 217

98

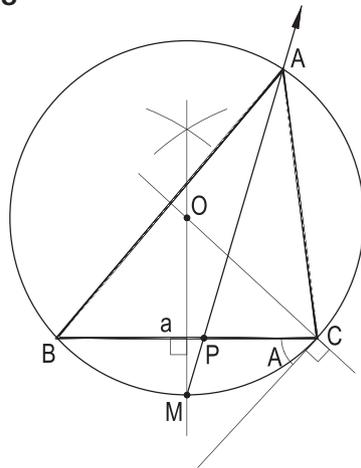


Figura 218

99

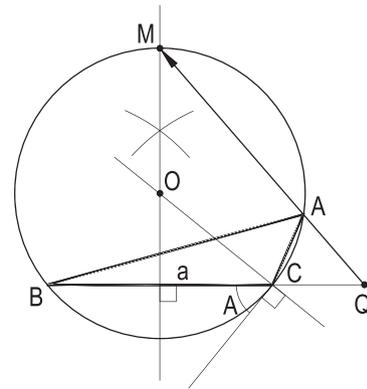


Figura 219

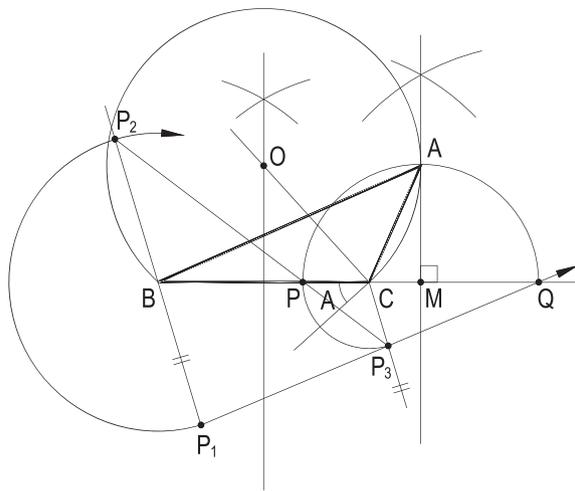


Figura 220

100

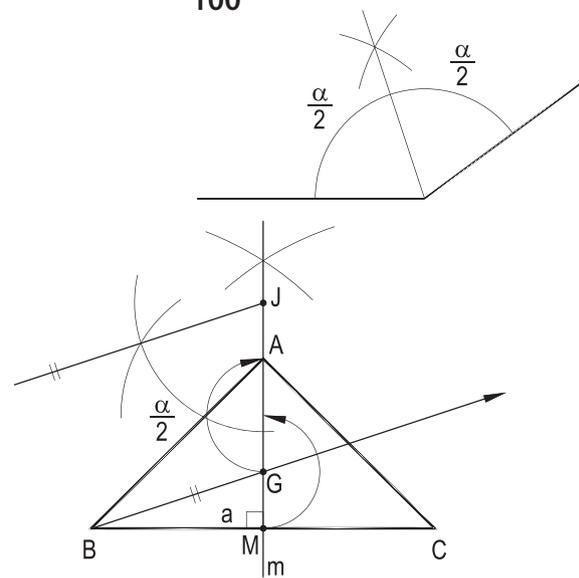


Figura 221

101 – Triângulo isósceles ABC, retângulo em A. Dada a medida da mediana m_b .

Resolução: Conhecida a razão $AM/AB = 1/2$, basta construir um triângulo retângulo auxiliar $BA'M'$, com catetos BA' e $A'M'$ obedientes a tal razão, para, com uma homotetia de polo B, resolver a questão, pela aplicação, sobre a reta BM' do valor dado da mediana m_b (Figura 222).

102 – Triângulo ABC, que não possui triângulo órtico. Dados o maior lado $BC = a$ e o menor $AB = c$.

Resolução: Por não possuir triângulo órtico, ABC tem de ser retângulo (*Geometria Plana*, número 145), o que resolve a questão, com os traçados do cateto dado $AB = c$ e da circunferência (B, a) , que corta a perpendicular p , a AB , por A, proporcionando o vértice C (Figura 223).

103 – Triângulo ABC, retângulo em A. Dadas as medidas, iguais a y , de duas cevianas isogonais, internas ao triângulo, relativas ao vértice A, sabendo que o ângulo entre elas formado vale 30° .

Resolução: Por serem iguais as cevianas isogonais AP e AQ , o triângulo ABC tem de ser isósceles, como também tem de ser isósceles o triângulo APQ, de base PQ.

Valendo 30° o ângulo formado pelas cevianas isogonais, os ângulos iguais que cada uma delas forma com o cateto mais próximo têm também que valer 30° e, então, elas dividem o ângulo reto A em três partes iguais. Assim, construído APQ, com as medidas $AP = AQ = y$, vem a hipotenusa BC (Figura 224).

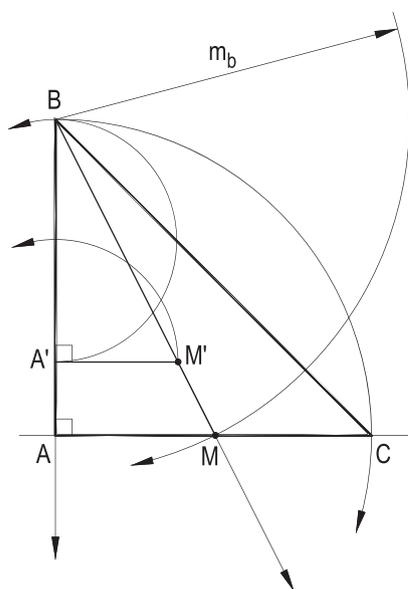


Figura 222

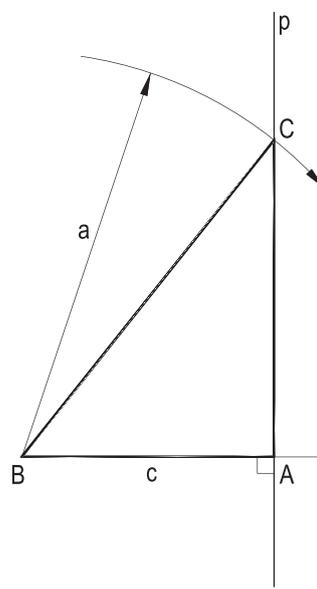


Figura 223

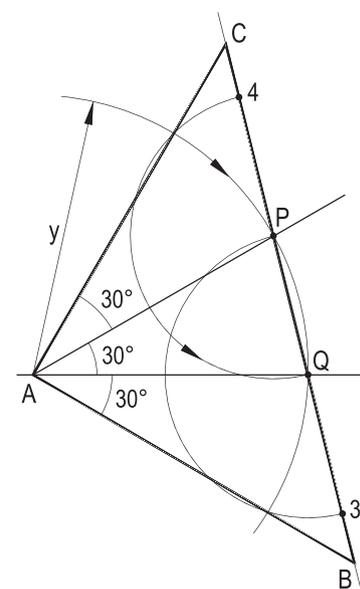


Figura 224

104 – Construir o triângulo ABC, dadas as medidas de suas três medianas m_a , m_b e m_c .

Análise: Considerados um triângulo qualquer ABC, suas três medianas AA', BB' e CC', seu baricentro G e as paralelas $\overline{B\bar{A}}$ e $\overline{C\bar{A}}$ respectivamente a CG e a BG, que completam o paralelogramo BGC \bar{A} , observa-se que o triângulo BGC \bar{A} tem seus lados medindo os dois terços de cada uma das três medianas e que seu homotético BMA', na razão 3/2, para o polo B, tem seus lados respectivamente iguais a cada uma das medianas do triângulo (Figura 225).

E que, além disso, o ponto N, centro do paralelogramo BGC \bar{A} , é o médio de G \bar{A} e de BC.

Resolução: Constrói-se inicialmente o triângulo BMA', com lados medindo m_a , m_b e m_c , marca-se o ponto G, terço do lado BM mais próximo de M e, com a paralela, por G, ao lado MA', obtém-se \bar{A} em BA', possibilitando determinar o ponto N, médio de G \bar{A} , também médio do lado BC, o que permite obter o vértice C, simétrico de B em relação a N.

Finalmente, chega-se ao terceiro vértice A, fazendo $GA = \bar{A}G$, ou unindo C a M, o que completa o triângulo ABC pedido (Figura 226).

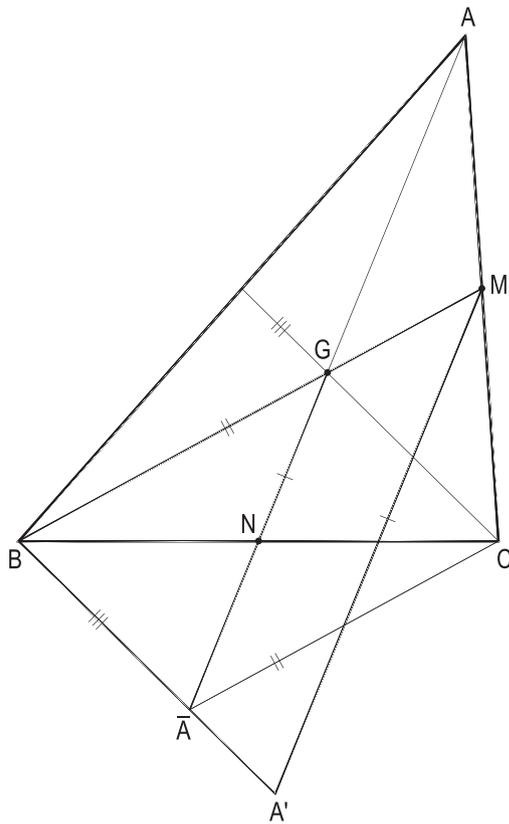


Figura 225

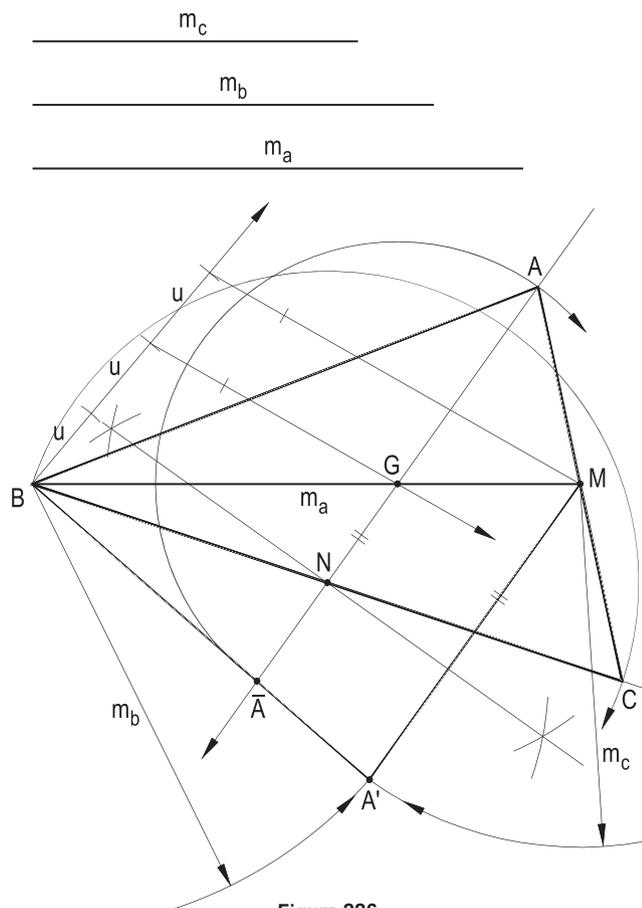


Figura 226

105 – Construir o triângulo ABC, dadas as medidas de suas três alturas h_a , h_b e h_c .

Resolução: Sabe-se (*Geometria Plana*, número 210.2) que todo triângulo é semelhante a um outro, cujos lados sejam respectivamente iguais ou proporcionais aos inversos das alturas do primeiro.

Então, para resolver o problema, deve-se determinar graficamente os inversos das alturas dadas, construir com elas, ou com múltiplos delas, um triângulo ao qual o pedido há de ser semelhante e obtê-lo, mediante uma simples homotetia que garanta o valor de uma das alturas dadas.

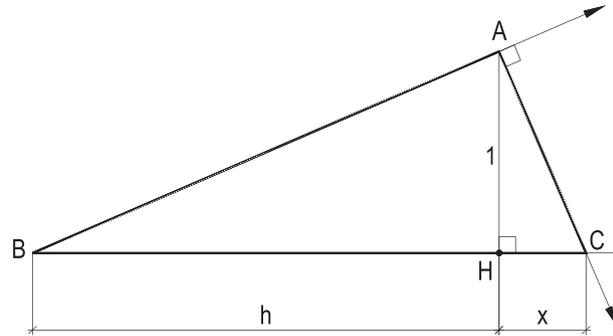


Figura 227

A determinação do inverso x de um valor conhecido h se faz pela construção de um triângulo retângulo de altura, relativa à hipotenusa, com valor unitário e a projeção de um cateto sobre ela medindo h , ou seja, marcando $BH = h$ e, na perpendicular por H a BH , o valor unitário para obter C e, então, o inverso de h sobre BH (Figura 227).

De fato, para o triângulo ABC da Figura 227, temos (*Geometria Plana*, número 197.2):

$$AH^2 = BH \cdot HC \quad \therefore \quad 1^2 = hx \quad \therefore \quad x = \frac{1}{h}$$

Resolução: Assim, obtidos os inversos a' , b' e c' das três alturas dadas (Figura 228), para maior precisão, constrói-se o triângulo $AB'C'$ com lados múltiplos desses inversos (utilizados os triplos, na Figura 229) e, pela aplicação da altura h_a , numa homotetia de polo A , chega-se à solução, o triângulo ABC .

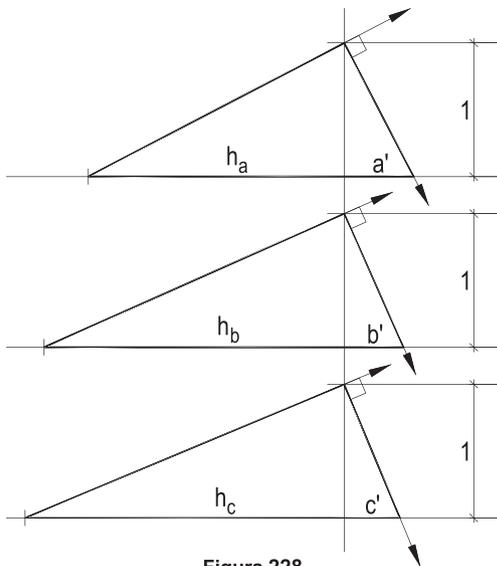


Figura 228

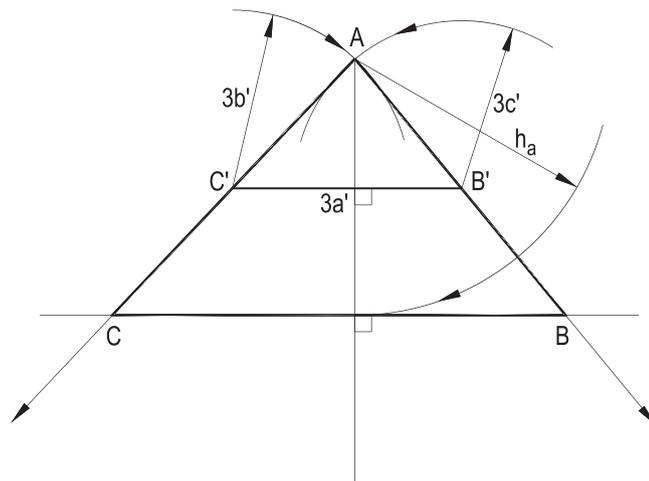


Figura 229

29 – Construção de triângulos em posição

Nesta parte será detalhada a construção de um triângulo, dadas algumas de suas grandezas e sempre condições que determinem sua posição perante os dados.

Deste modo, mesmo triângulos iguais, construídos a partir dos dados, mas ocupando posições distintas, serão considerados soluções diferentes.

Seguem algumas dezenas de exemplos, continuando a numeração anterior.

106 – Triângulo ABC. Dados os vértices B e C e as retas paralelas r e s. Sabe-se que o lado AB mede os $\frac{3}{2}$ do lado BC e que o vértice A equidista de r e de s.

Resolução: Construindo $\overline{B\bar{B}} = (\frac{3}{2}) BC$ e a reta t equidistante de r e de s, A há de ser o ponto de corte de t com a circunferência (B, $\overline{B\bar{B}}$), com uma segunda solução, para o vértice A, indicada, na Figura 230, pelo número 2.

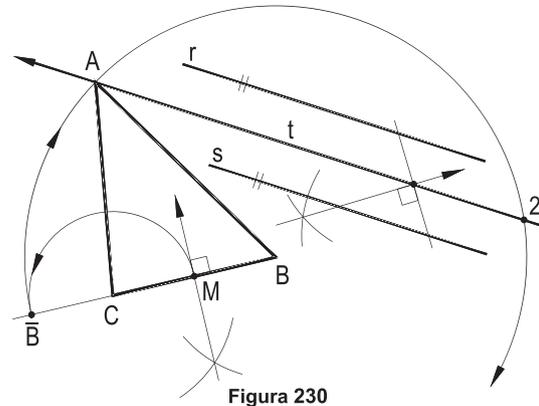


Figura 230

107 – Triângulo ABC. Dados o lado BC e o ângulo B, sabendo que A equidista das retas r e s, também dadas.

Resolução: Marcado o ângulo B, com as semirretas Bx e By, e construindo as bissetrizes b_1 e b_2 dos ângulos formados entre r e s, o vértice A procurado é o corte de Bx, ou de By, com cada uma dessas bissetrizes, outras três soluções indicadas pelos números 2, 3 e 4 (Figura 231).

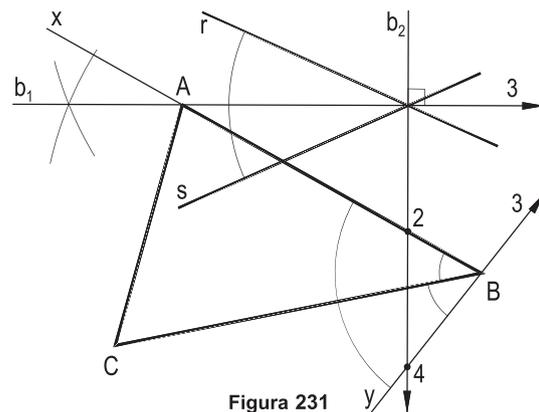


Figura 231

108 – Triângulo ABC. Dados o lado BC, o valor b do lado AC e a coroa circular (O), sabendo que A equidista de suas circunferências limítrofes.

Resolução: A é a interseção da circunferência (C, b) com a circunferência equidistante das duas que formam a coroa (Figura 232). Duas soluções.

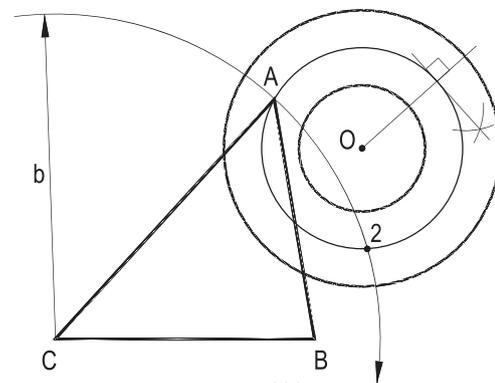


Figura 232

109 – Triângulo ABC. Dados os vértices B e C, o ponto O e o valor m_a da mediana relativa ao lado BC, sabendo que o vértice A dista m_a de O.

Resolução: Determinado o ponto M, médio de BC, o vértice A procurado é a interseção das circunferências (M, m_a) e (O, m_a) , com duas soluções, a segunda indicada pelo número 2 na Figura 233.

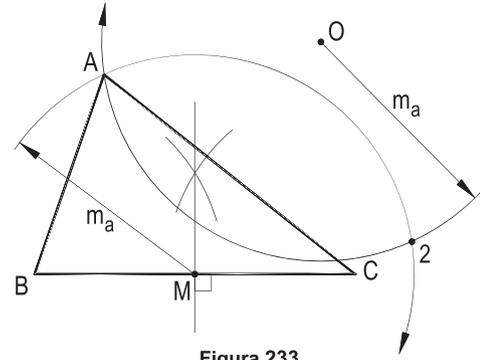


Figura 233

110 – Triângulo ABC, cujo ângulo A mede 60° , o vértice A pertencendo à reta r. Dados B, C e r.

Resolução: As interseções do arco capaz de 60° , para o segmento BC, com a reta r são as duas soluções A_1 e A_2 para o terceiro vértice do triângulo (Figura 234). O segundo arco capaz resta exterior à reta r, não proporcionando novas soluções.

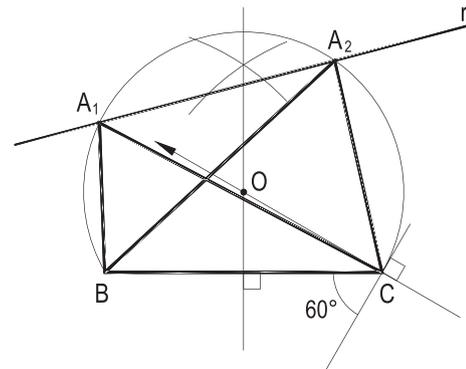


Figura 234

111 – Triângulo ABC, cujo ângulo interno A mede 45° , o vértice A estando o mais próximo possível do círculo (O, r) . Dados B, C e (O, r) .

Resolução: Construído o arco capaz de 45° , o vértice procurado A há de estar sobre a reta que une o centro O' desse arco capaz ao centro O do círculo dado (*Geometria Plana*, número 98), sendo inútil o segundo arco capaz, por ter todos os seus pontos mais distantes de (O, r) (Figura 235).

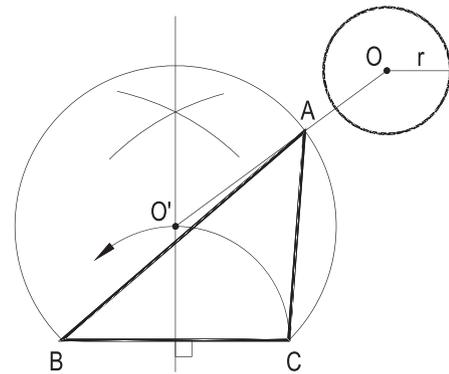


Figura 235

112 – Triângulo ABC, cujo vértice A equidista dos pontos P e Q. Dados os pontos B, C, P e Q e a medida m_a da mediana relativa ao vértice A.

Resolução: Determinado o ponto M, médio do lado dado BC, o vértice procurado A é a interseção da circunferência (M, m_a) com a mediatriz m do segmento PQ, oferecendo, para os dados, duas soluções A_1BC e A_2BC para o triângulo pedido (Figura 236).

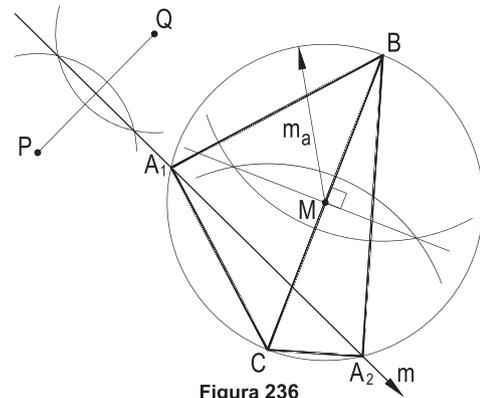


Figura 236

113 – Triângulo ABC, cujo baricentro G equidista dos pontos J, K e L. Dados os pontos B, C, J, K e L.

Resolução: O baricentro G do triângulo pedido há de ser o circuncentro do triângulo dado JKL (*Geometria Plana*, número 139), e, a partir do ponto M, médio de BC, com $GA = 2MG$, vem o vértice procurado A (Figura 237).

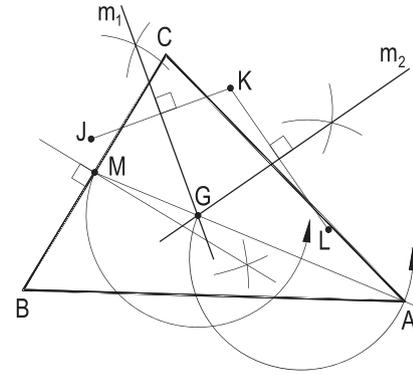


Figura 237

114 – Construir o triângulo ABC, conhecendo as semirretas Ax e Ay, suportes de seus lados AB e AC, assim como seu baricentro G.

Resolução: Determinado o ponto \bar{G} , médio de AG, obtém-se M, médio do lado BC, com $GM = \bar{G}G$ e, apoiado em Ay um segmento genérico $\bar{E}\bar{E}$, com M como seu ponto médio, a simétrica $\bar{E}z$ de Ay, em relação a M, traz, no corte com Ax, o vértice B completando o triângulo ABC (Figura 238).

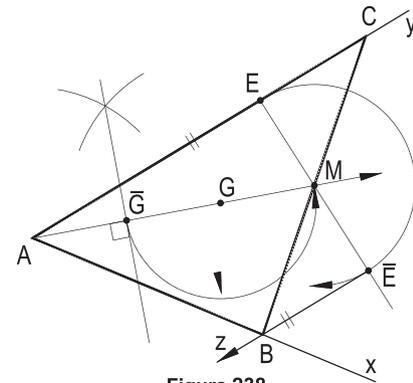


Figura 238

115 – Triângulo ABC, de incentro I, com o lado BC paralelo à reta r, B e C pertencendo, respectivamente, às semirretas Ax e Ay e I à reta r. Dadas Ax, Ay e r.

Resolução: O incentro I há de ser o ponto comum à bissetriz b do ângulo formado pelas semirretas dadas e à reta r. O terceiro lado BC, tangente ao círculo inscrito (I), com a direção de r, se determina por seu ponto de contato T (Figura 239).

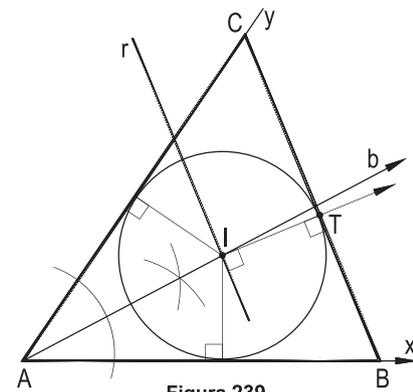


Figura 239

116 – Triângulo isósceles ABC de base BC, sendo AB e AC tangentes a cada um dos círculos dados (O) e (O'), sendo B e C os pontos de contato. A pertence à reta dada r e a base é a maior possível.

Resolução: Para poder enviar tangentes iguais aos dois círculos dados, A deve pertencer a seu eixo radical ER.

Construída a tangente AB a (O), com seu próprio comprimento, obtém-se C, escolhendo-se as posições que proporcionem o maior valor para BC (Figura 240).

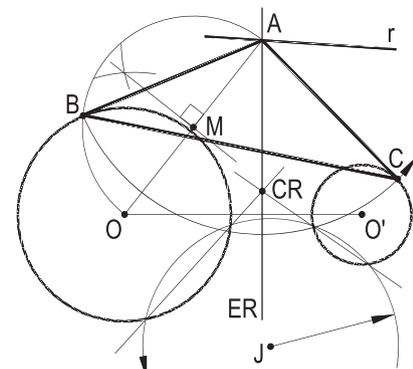


Figura 240

117 – Triângulo retângulo ABC de hipotenusa BC dada, A equidistante das retas dadas r e s.

Resolução: O vértice A será uma das interseções da circunferência de diâmetro BC com uma das bissetrizes b_1 e b_2 dos ângulos formados pelas retas r e s. Para as posições dadas, duas soluções A_1BC e A_2BC (Figura 241).

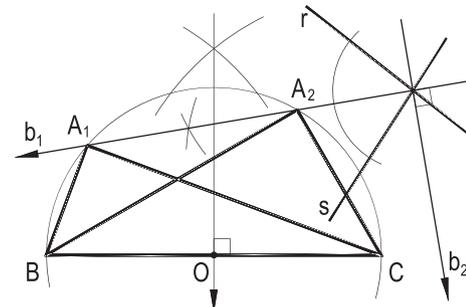


Figura 241

118 – Dados a circunferência (I, r) e o ponto A, exterior, construir o triângulo ABC circunscrito a (I, r), sabendo que $AB = 4r$.

Resolução: As tangentes A_1 e A_2 a (I, r) são os suportes dos lados AB e AC. Assim, aplicado o valor $4r$ numa delas, obtém-se o vértice B e, rebatendo B_1 para B_3 , vem o lado BC, completando o triângulo pedido (Figura 242), observado que há uma segunda solução para B, indicada pela letra B' .

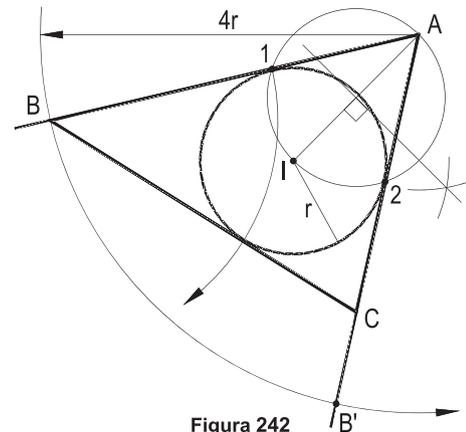


Figura 242

119 – Triângulo ABC. Dados os vértices B e C, o pé P, da bissetriz interna relativa ao vértice A, e o valor h_a da altura referente ao lado BC.

Resolução: Determinado o conjugado harmônico Q, de P, em relação a BC, pé da bissetriz externa (*Geometria Plana*, número 166), a circunferência de diâmetro PQ traz as quatro soluções, duas a duas simétricas em relação à reta BC (Figura 243).

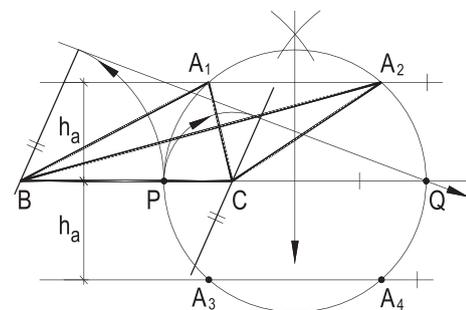


Figura 243

120 – Triângulo isósceles ABC, cuja base BC pertence à reta r, dados r, o baricentro G e o valor m_b da mediana relativa a um dos lados iguais.

Resolução: A perpendicular, por G, a r traz A, com $GA = 2.GM$ (Figura 244) e, com centro em G e raio igual a $(2/3) m_b$, vêm os vértices B e C, permutáveis, para uma única solução, quanto à grandeza.

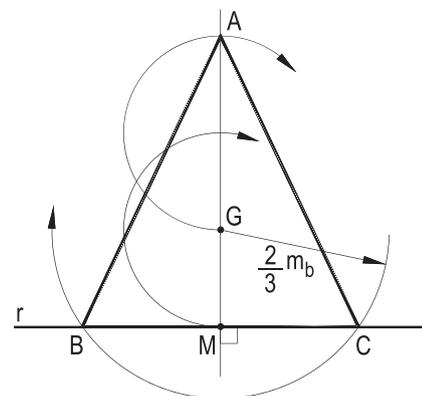
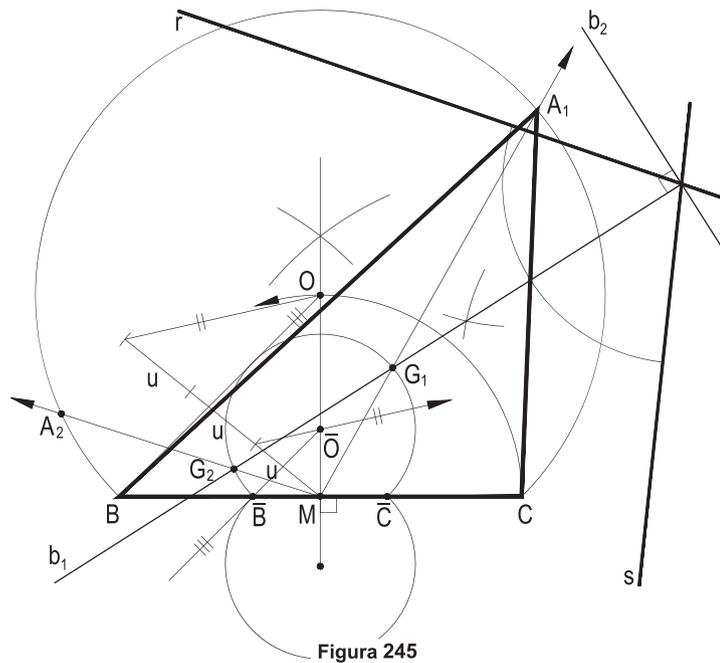


Figura 244

121 – Triângulo ABC, cujo baricentro G equidista das retas r e s. Dados $A = 45^\circ$, B, C, r e s.

Resolução: Traçados os arcos capazes de 45° para BC e as bissetrizes b_1 e b_2 dos ângulos formados pelas retas r e s, uma homotetia de polo M, médio de BC, na razão $1/3$, do arco capaz para A, traz, nos cortes com b_1 , as duas posições G_1 e G_2 possíveis para o baricentro do triângulo pedido, apenas uma tendo sido completada na Figura 245.



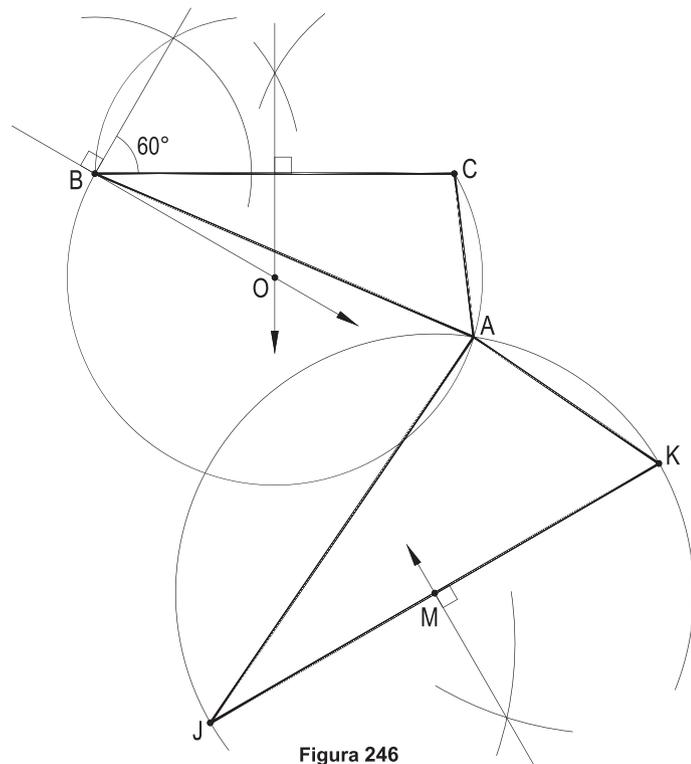
A segunda bissetriz b_2 é inútil por não atingir os arcos capazes.

122 – Triângulos ABC e AJK, o primeiro com ângulo interno A medindo 60° e o segundo retângulo em A, com o cateto AJ maior que AK. Dados os pontos B, C, J e K.

Resolução: O vértice A comum aos dois triângulos tem de ser um ponto de corte do arco capaz de 60° para BC com a circunferência de diâmetro JK.

Há apenas dois pontos assim, pois a circunferência circunscrita ao triângulo retângulo AJK não atinge o segundo arco capaz de 60° para BC.

Foi escolhida a posição para o vértice A que atenda a ser o cateto AJ maior que AK (Figura 246), o que proporciona a única solução do problema.



123 – Os lados AB e AC do triângulo ABC pertencem às semirretas Ax e Ay. Os lados EF e EG do triângulo EFG pertencem às semirretas Ez e Ew. Os terceiros lados BC e FG são paralelos à reta d.

Construir os dois triângulos, sabendo eles têm o mesmo incentro I. Dadas as quatro semirretas e a direção d.

Resolução: O incentro comum I há de ser o ponto de interseção das bissetrizes b_1 e b_2 dos ângulos dados, o que permite traçar as duas circunferências de centro I tangentes a cada par de semirretas dadas.

E a perpendicular à reta d, por I, proporciona as tangentes t_1 e t_2 aos dois círculos inscritos nos triângulos, desprezadas as tangentes t_3 e t_4 , que fariam de I exincentro e não incentro dos triângulos ABC e EFG pedidos (Figura 247).

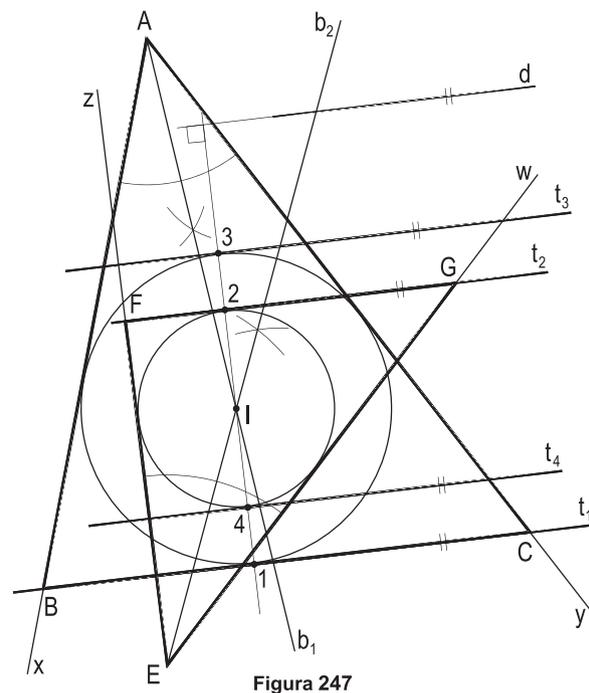


Figura 247

124 – Dados três círculos (O_1), (O_2) e (O_3), exteriores, pede-se determinar o centro O do círculo ortogonal aos três e construir um dos diversos triângulos formados pelos pontos de contato das tangentes de O cada uma a cada um dos círculos dados.

Resolução: O ponto O procurado é o centro radical dos três círculos dados, determinado com os eixos radicais ER_{12} e ER_{23} de dois pares deles (*Geometria Plana*, números 258.2 e 260) e, traçadas, por O, as tangentes O_1 e O_2 , que, replicadas, dão as outras quatro O_3 , O_4 , O_5 e O_6 (Figura 248) aos círculos dados, tomadas três delas, obtém-se um dos oito triângulos ABC possíveis.

Na Figura 248, foram utilizados os pontos de contato 1, 3 e 6, para serem, respectivamente, os vértices A, B e C.

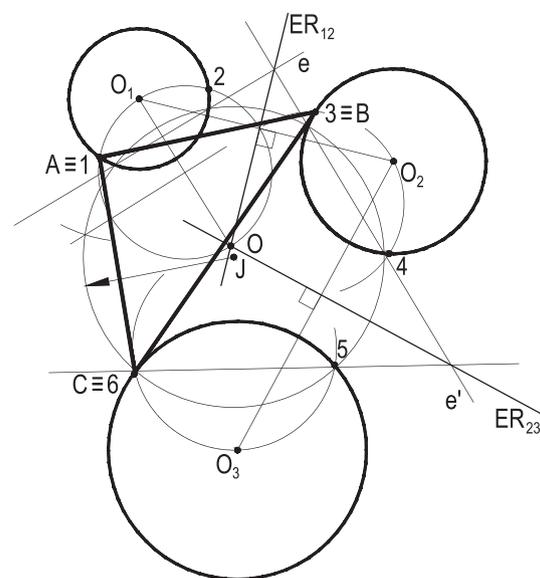


Figura 248

125 – Construir o triângulo ABC, sabendo que as tangentes do vértice A às circunferências (B, R_1) e (C, R_2), limitadas aos pontos de contato, são iguais e que o ponto A vê a circunferência (O, R_3) sob o ângulo de 60° .

Dadas as três circunferências.

Resolução: Para poder enviar tangentes iguais às circunferências (B, R_1) e (C, R_2), o vértice A deve pertencer ao eixo radical ER_{BC} dessas circunferências (*Geometria Plana*, número 254.1).

E, para ver a circunferência (O, R_3) sob ângulo de 60° , A tem que pertencer à circunferência (O, OJ), assim construída, proporcionando as duas soluções A_1BC e A_2BC (Figura 249).

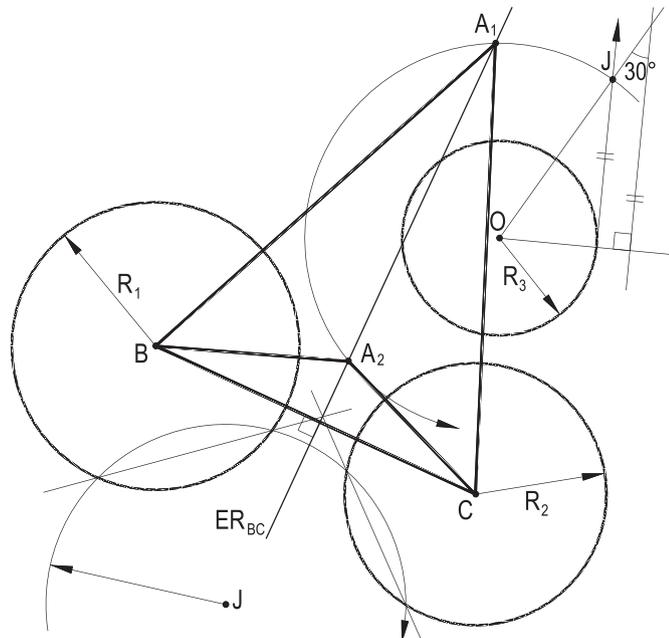


Figura 249

126 – As circunferências exteriores dadas, (I) e (E), tangentes à reta r , também dada, são a inscrita e a exinscrita, referente ao vértice A, do triângulo ABC, que se pede construir, sabendo que o ângulo B é maior que C.

Resolução: A interseção de r com a linha dos centros IE é o vértice A e, com o rebatimento \bar{T} de T, em torno de A, obtém-se a segunda tangente comum externa \bar{r} (Figura 250), que há de ser o suporte do segundo lado do triângulo, convergente no vértice A com o lado situado em r .

Construídas as duas tangentes internas comuns (ver número 21), ficam determinados os vértices B e C, dando as duas soluções AB_1C_1 e AB_2C_2 ao problema, respeitado, em ambas, ser B maior que C.

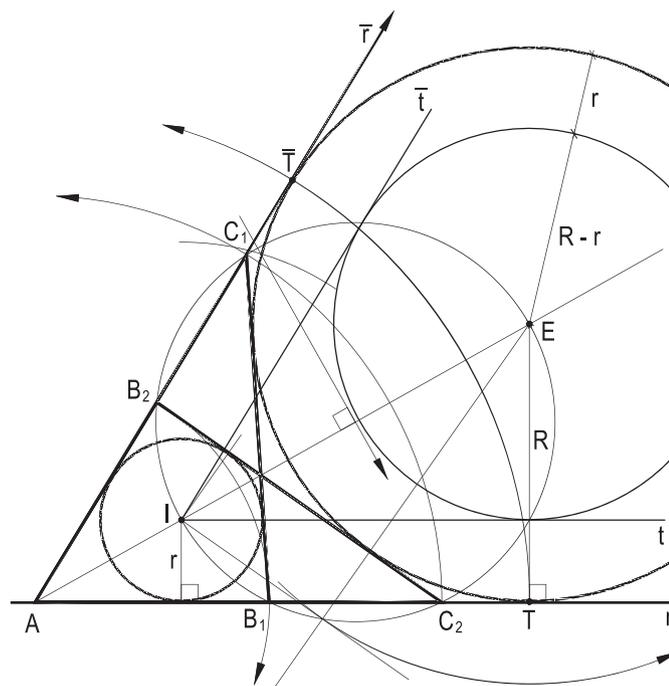


Figura 250

127 – Triângulo ABC inscrito no círculo dado (O, r), dadas as direções d_1, d_2 e d_3 de seus lados.

Resolução: Determinado o circuncentro O' do triângulo $A'B'C'$ formado com as três retas dadas, que há de ser homotético do pedido, mesmo que com polo inacessível, a paralela OA a $O'A'$ resolve a questão. Duas soluções (Figura 251).

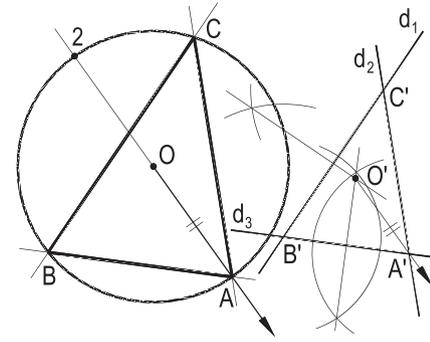


Figura 251

128 – Triângulo retângulo ABC, dados o suporte Bx do cateto AB e os valores do ângulo B e da mediana m_b relativa ao cateto AC.

Resolução: Marcado o ângulo B, construído um triângulo auxiliar $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$ e marcado o ponto \bar{M} , médio de $\bar{A}\bar{C}$, uma homotetia de polo B dá o ponto M, médio de AC, resolvendo o problema (Figura 252). Duas soluções iguais, simétricas em relação a Bx.

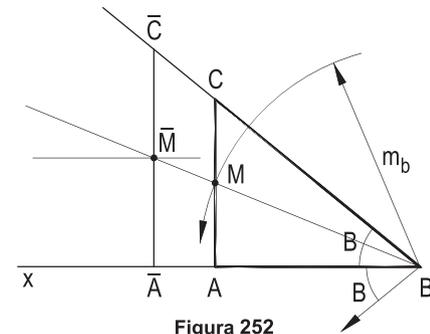


Figura 252

129 – Triângulo ABC, cujo lado BC pertença à reta dada r, dados seu incentro I e seu baricentro G, numa perpendicular a r.

Resolução: Visto ser ABC isósceles, de base BC, sobre a reta IG dada, marca-se o vértice A com $GA = 2.MG$ e, construído o círculo inscrito (I, IM), as tangentes AT e AT' a ele entregam os vértices B e C, com ordenação arbitrada (Figura 253).

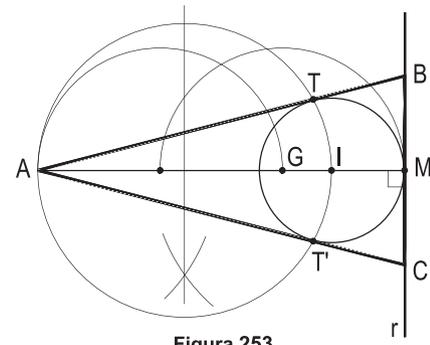


Figura 253

130 – Construir o triângulo ABC de perímetro mínimo, sabendo que B equidista das retas a e b e que C equidista das retas r e s. Dados A, a, b, r e s.

Resolução: Construídas, com auxílio de uma transversal genérica w, as retas c, equidistante de a e b, e t, equidistante de r e s, os simétricos A_1 e A_2 , do ponto A, respectivamente, em relação a c e a t (Figura 254), proporcionam a reta A_1A_2 que dá os vértices B e C procurados, com suas interseções com as retas c e t (ver *Geometria Descritiva, 1000 Problemas Resolvidos*, número 659).

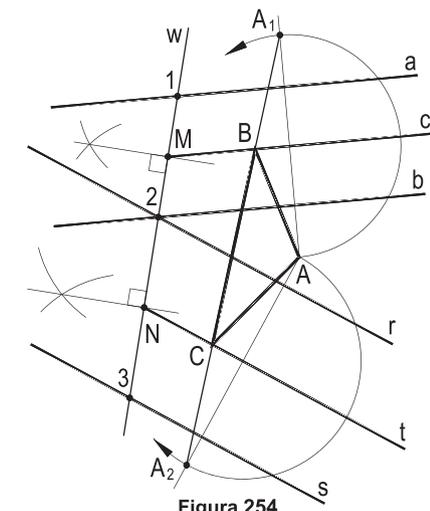


Figura 254

131 – Dados dois segmentos RS e TU, pede-se construir o triângulo equilátero ABC, sabendo que tanto do vértice A, quanto de B, se avista o segmento RS sob o ângulo de 60° e o segmento TU sob o ângulo 45° .

Resolução: As interseções dos arcos capazes de 60° para RS e de 45° para TU proporcionam os vértices A e B, com denominações permutáveis e, então, a solução ABC_1 (Figura 255).

Observe-se que há uma segunda solução ABC_2 , não completada, simétrica da primeira em relação ao lado AB.

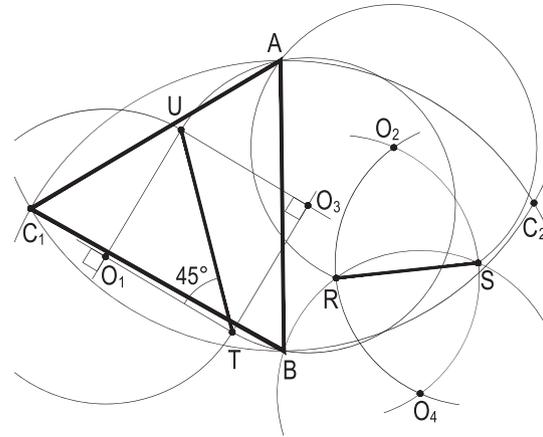


Figura 255

132 – Construir o triângulo isósceles ABC, conhecendo seu círculo exinscrito (E_A), o valor do ângulo A e a direção d de sua base BC.

Resolução: Construída a circunferência (E_A, E_AJ), lugar dos pontos que veem (E_A) sob o ângulo dado A, o vértice A vem na perpendicular a d por E_A , com duas soluções (Figura 256). As bases B_1C_1 e B_2C_2 são obtidas com seus pontos de contato M_1 e M_2 , na perpendicular por E_A a d.

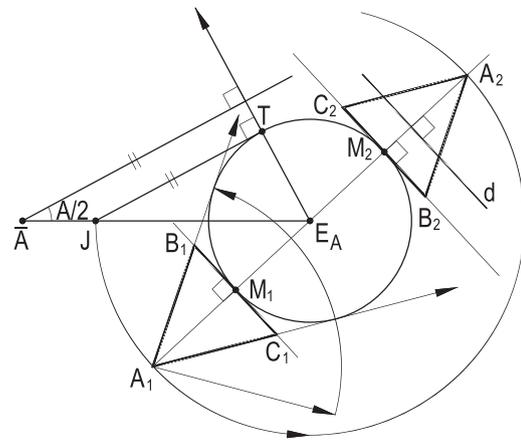


Figura 256

133 – Triângulo equilátero, conhecendo seu incentro I e um de seus exincentros E.

Resolução: Sabe-se (*Geometria Plana*, número 217) que, em todo triângulo equilátero, o raio do círculo inscrito vale um terço do raio do exinscrito. Assim, basta obter o ponto Q, quarto de IE, mais próximo de I, e marcar A, simétrico de E em relação a Q (Figura 257), para obter o triângulo ABC, solução do problema.

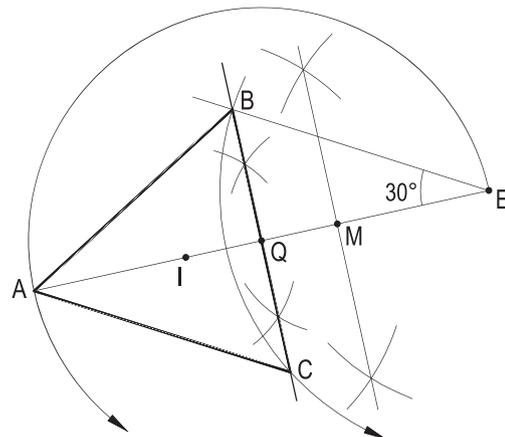


Figura 257

134 – Triângulo retângulo ABC de hipotenusa BC, dada, conhecendo o valor m_b da mediana relativa ao vértice B.

Resolução: Construídas as circunferências de diâmetros BC e OC, O médio de BC, lugares geométricos do vértice A e do ponto M, médio do cateto AC, a circunferência de centro B e raio m_b proporciona o ponto médio de CA (duas posições M_1 e M_2 , simétricas em relação à hipotenusa) e, então, as soluções A_1BC e A_2BC (Figura 258).

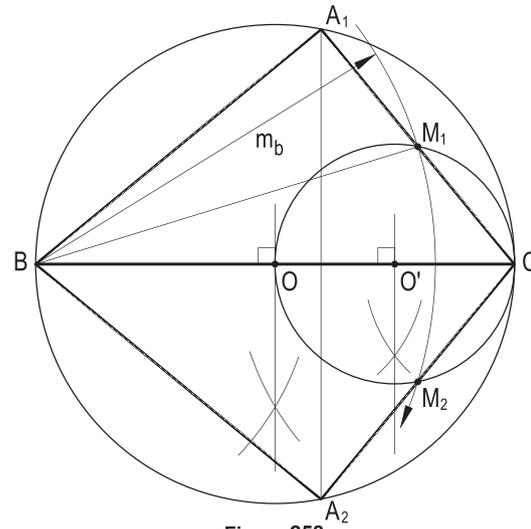


Figura 258

135 – Triângulo retângulo ABC de hipotenusa BC dada, sabendo que seu baricentro G pertence à reta dada r.

Resolução: Dividido o raio OC em três partes iguais, a circunferência de centro O, médio de BC, e raio OT, terça parte de OC, corta a reta dada r, proporcionando duas posições G_1 e G_2 para o baricentro e, pelas uniões de O a elas, as duas soluções A_1BC e A_2BC (Figura 259).

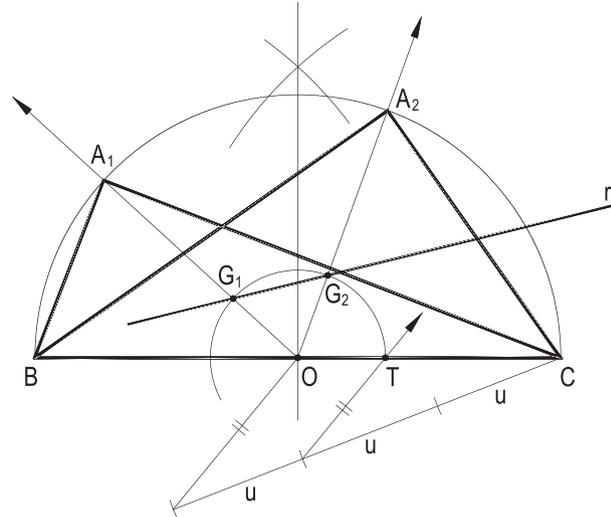


Figura 259

136 – Triângulo retângulo ABC de hipotenusa BC dada, sabendo que seu ortocentro equidista das retas r e s, também dadas.

Resolução: Como em todo triângulo retângulo o ortocentro coincide com o vértice do ângulo reto, a bissetriz b_1 de um dos ângulos formados por r e s proporciona as duas soluções A_1 e A_2 (Figura 260).

A segunda bissetriz b_2 resta externa à circunferência de diâmetro BC.

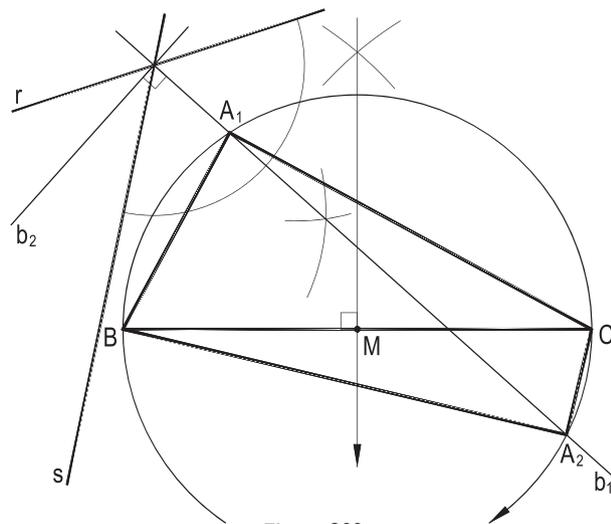


Figura 260

137 – Triângulo equilátero ABC. A equidista das duas circunferências concêntricas dadas e C pertence à semirreta dada Bx.

Resolução: O vértice A há de pertencer à circunferência (O, OM), sendo M o ponto médio da largura PQ da coroa circular dada. E, além disso, A tem que estar na reta r, por B, inclinada de 60° com Bx, proporcionando, para os dados, duas soluções A_1BC_1 e A_2BC_2 (Figura 261). A segunda reta, por B, inclinada de 60° com Bx, simétrica de r, em relação a Bx, não traz novas soluções, por ser exterior à coroa.

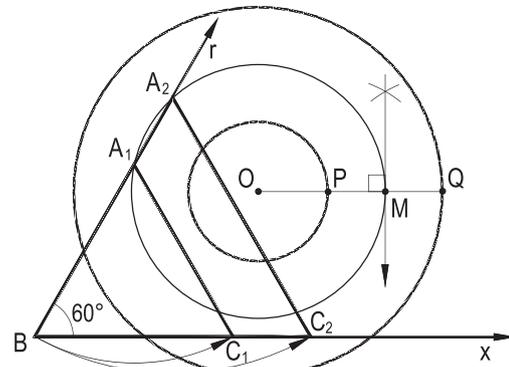


Figura 261

138 – Triângulo isósceles ABC, de base BC, dados seu baricentro G e o valor m_a da mediana relativa à base, sabendo que a distância do vértice A à reta dada r é mínima e que B pertence à reta dada s.

Resolução: As circunferências de centro G e raios $(2/3)$ e $(1/3)$ da medida da mediana m_a dada, servem, respectivamente, ao vértice A, na perpendicular por G à reta r, e ao ponto M, médio de BC, entregando, na tangente t, o vértice B, traço com s (Figura 262).

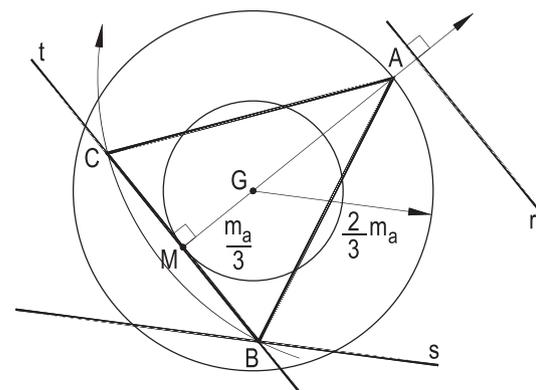


Figura 262

139 – Num sistema cartesiano, para o triângulo equilátero ABC, sabe-se que tanto o vértice A quanto B têm por soma de abscissa e ordenada a metade da distância do vértice C (9, 12) à origem. Desenhar o triângulo, dando a B a menor cota.

Resolução: Sabe-se que o lugar geométrico dos pontos que têm a mesma soma k de abscissa e ordenada é a reta r formada pelos pontos $(0, k)$ e $(k, 0)$, onde k, no caso, vale a metade do segmento CO, distância de C à origem.

Assim, as retas inclinadas de 30° com a reta CM, perpendicular a r, trazem os vértices A e B procurados (Figura 263).

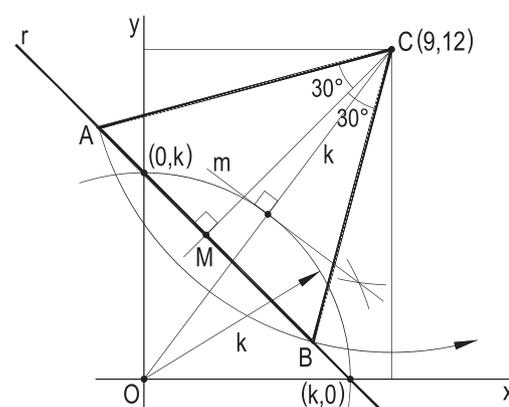


Figura 263

140 – Construir os triângulos isósceles ABC, de base dada BC, e AJK, de base dada JK.

Resolução: A há de pertencer tanto à mediatriz de BC quanto à mediatriz de JK (Figura 264).

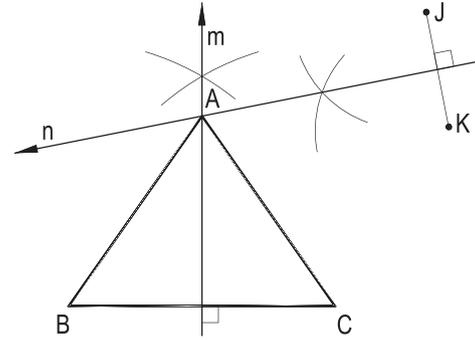


Figura 264

141 – Completar o triângulo ABC, dado o lado AB, sabendo que C pertence à semirreta dada Bx e que a ceviana dada AJ é isogonal da altura relativa ao lado BC.

Resolução: Basta traçar a altura AH e transportar o ângulo \widehat{JAB} a partir da altura AH, com o arco PQ igual a LK (Figura 265), numa circunferência de centro A e raio arbitrado.

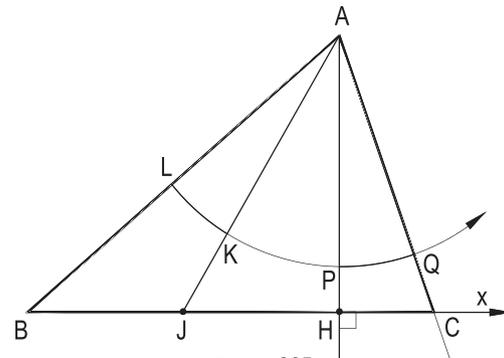


Figura 265

142 – Construir o triângulo ABC, cujo incentro I pertença à reta r, o lado BC sobre s, dados A, r e s, além das cevianas isogonais Ax e Ay. B à esquerda de C.

Resolução: Como a bissetriz do ângulo \widehat{xAy} é também a bissetriz do ângulo A, o incentro I é a interseção de r com essa bissetriz Az, permitindo o traçado da circunferência inscrita no triângulo procurado, para, com tangentes de A, obter B e C (Figura 266).

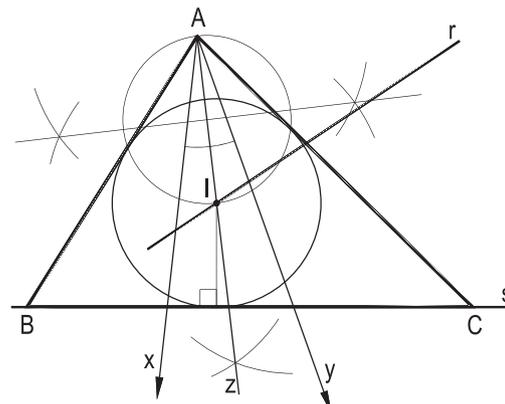


Figura 266

143 – Construir o triângulo ABC, cujo lado BC, pertencente à reta r, tangencia seu círculo inscrito no ponto dado K, sabendo que o ponto L, pertencente à reta s, pertence, também, a essa circunferência inscrita. Dados r, s, K, L e C.

Resolução: Obtido o incentro I, no corte da perpendicular p, por K, a r com a mediatriz de LK, vêm a circunferência (I, IK), inscrita no triângulo e, então, os lados BA e CA tangentes àquela circunferência (Figura 267).

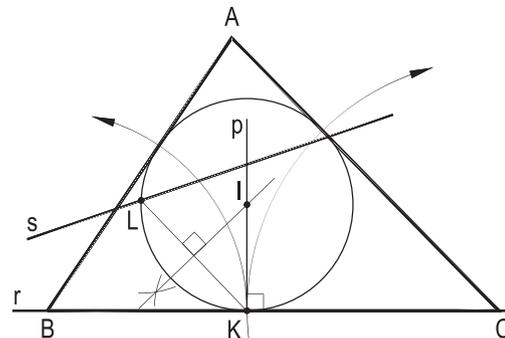


Figura 267

144 – Desenhar o triângulo ABC, retângulo em A, sabendo que C pertence à semirreta dada Bx e que AC passa pelo ponto dado P, dadas também as cevianas isogonais By e Bz.

Resolução: Basta transportar o ângulo α que By forma com Bx (Figura 268), para obter o suporte do cateto BA, A na perpendicular a ele por P.

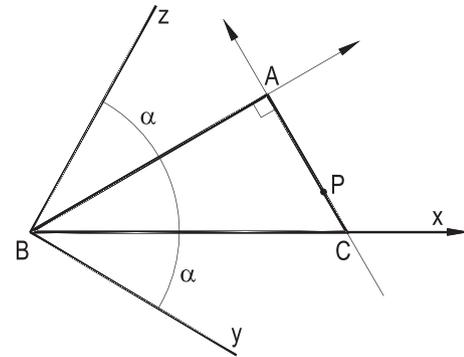


Figura 268

145 – Completar o triângulo isósceles ABC, conhecendo os suportes Ax e Ay dos lados iguais AB e AC e a medida k da base BC.

Resolução: A construção de um triângulo isósceles auxiliar AB'C', de base B'C', arbitrada, e a marcação do valor k da base sobre o suporte de B'C' dão o ponto J — e uma translação de B'J para BC (Figura 269) resolve a questão.

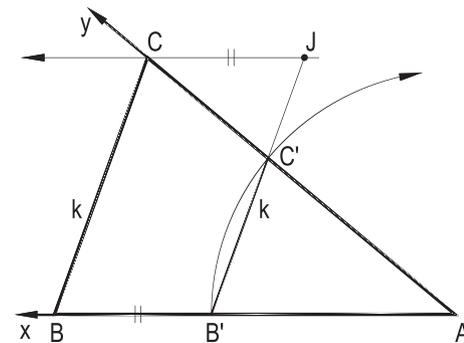


Figura 269

146 – Triângulo ABC, dados o lado BC, o valor α do ângulo interno A e a direção d da bissetriz interna relativa a A.

Resolução: Construído o arco capaz de α para BC, a paralela a d, pelo ponto médio M do arco replemter daquele, traz A (*Geometria Plana*, número 134), com duas soluções, a segunda para o segundo arco capaz, apenas uma completada na Figura 270.

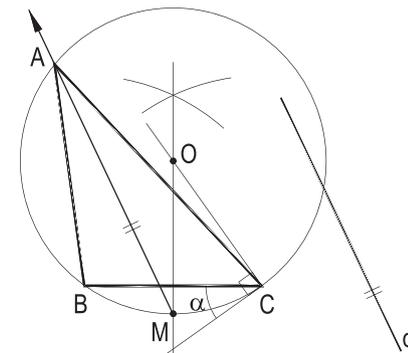


Figura 270

147 – Triângulo isósceles ABC, a base BC apoiada, por seus extremos, nas circunferências dadas (O) e (O'), A na reta r, também dada, de modo tal que BC tenha comprimento mínimo.

Resolução: Imediata, por B e C terem que pertencer à linha dos centros OO' (*Geometria Plana*, número 98), para que a base BC tenha a menor medida possível, B e C permutáveis, A, naturalmente, na mediatriz de BC (Figura 271).

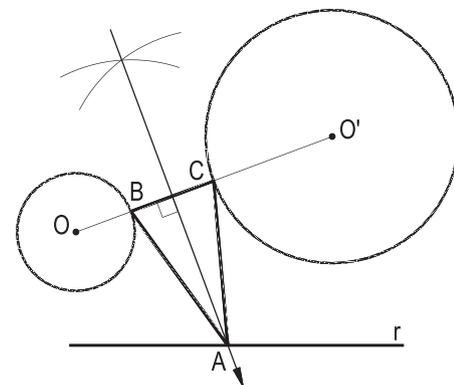


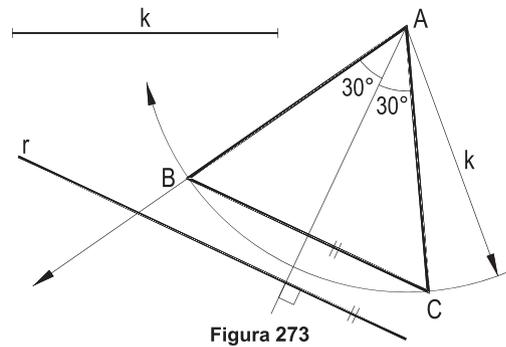
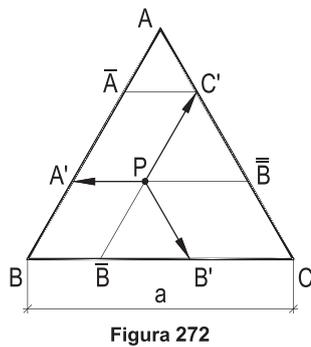
Figura 271

148 – O ponto P, interior ao triângulo equilátero ABC, permite traçar os segmentos $PA' = x$, $PB' = y$ e $PC' = z$, respectivamente, paralelos aos lados BC, AC e AB e igualmente orientados, de modo tal que $x + y + z = k$. Dados o vértice A, a reta r, paralela ao lado BC, e o valor gráfico de k, pede-se construir o triângulo.

Resolução: Considerado, para análise, um triângulo equilátero ABC de lado a, um ponto P, qualquer, de seu interior, e os segmentos $PA' = x$, $PB' = y$ e $PC' = z$, conforme os dados, os triângulos equiláteros $\overline{A\overline{A}C'}$, $\overline{P\overline{B}B'}$ e os paralelogramos $\overline{A\overline{C}'PA'}$, $\overline{P\overline{B}CB'}$ e $\overline{A'P\overline{B}B}$ permitem anotar (Figura 272):

$$PA' + PB' + PC' = k \quad \therefore \quad \overline{B\overline{B}} + \overline{B\overline{B}'} + B'C = k \quad \therefore \quad a = k$$

Assim, o valor dado k é igual ao lado a, o que, prontamente, resolve a questão (Figura 273).

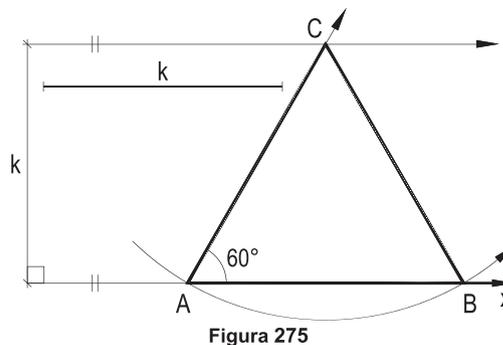
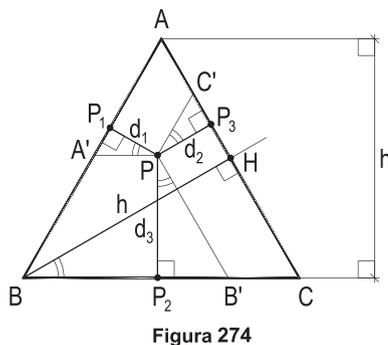


149 – As distâncias de um ponto P, genérico, interior ao triângulo equilátero ABC, a seus lados, somam um valor k, dado graficamente.

Pede-se construir o triângulo, conhecendo a semirreta Ax, à qual pertence o vértice B.

Resolução: A semelhança dos triângulos retângulos PP_1A' , PP_2B' , PP_3C' e BHC (Figura 274) permite concluir, com base no provado no problema anterior, que: $d_1 + d_2 + d_3 = h$.

Sendo $h = k$, a construção do triângulo ABC é simples, com duas soluções iguais, simétricas em relação a Ax, só uma completada na Figura 275.



CAPÍTULO IV

QUADRILÁTEROS

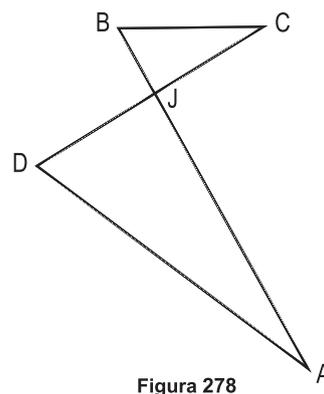
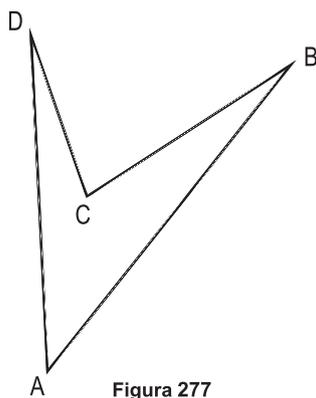
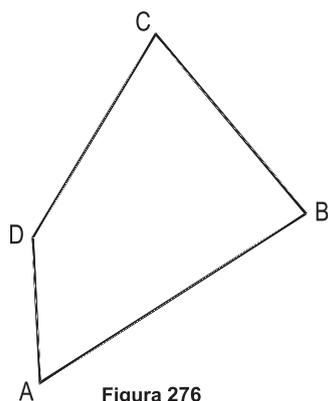
30 – Definições e propriedades

Repassando toda a teoria detalhada nos capítulos V, VII e XIII do livro *Geometria Plana*, edição de 2020, deste autor, vão listadas, a seguir, as principais definições e propriedades dos quadriláteros, como preparação para os problemas propostos e resolvidos, numerados em sequência aos anteriormente apresentados.

31 – Quadriláteros

1 – Classificação quanto à convexidade: convexos (Figura 276), côncavos (Figura 277) e entrecruzados (Figura 278).

O ponto de interseção dos dois lados que provocam o cruzamento (J, na Figura 278) é denominado nó do quadrilátero.



2 – Classificação quanto aos lados: equiláteros, quando têm os quatro lados iguais.

3 – Classificação quanto aos ângulos: equiângulos, quando têm os ângulos internos iguais e, então, também os externos iguais, todos retos.

4 – Regulares (os quadrados), quando são simultaneamente equiláteros e equiângulos.

32 – Paralelogramos – propriedades

- 1 – Quadriláteros com lados opostos paralelos.
- 2 – Lados opostos iguais.
- 3 – Ângulos internos consecutivos suplementares, aos pares.
- 4 – Ângulos internos opostos iguais.
- 5 – Diagonais cortando-se mutuamente ao meio (Figura 279).

33 – Retângulos – propriedades

- 1 – Quadriláteros equiângulos, com ângulos internos retos (Figura 280).
- 2 – Todo retângulo é um paralelogramo.
- 3 – Diagonais iguais, cortando-se mutuamente ao meio (Figura 280).

34 – Losangos – propriedades

- 1 – Quadriláteros equiláteros (Figura 281).
- 2 – Todo losango é um paralelogramo.
- 3 – Diagonais perpendiculares, cortando-se mutuamente ao meio (Figura 281).

35 – Quadrados – propriedades

- 1 – Quadriláteros regulares (equiláteros e equiângulos) (Figura 282).
- 2 – Todo quadrado é um paralelogramo, um retângulo e um losango.
- 3 – Diagonais iguais e perpendiculares, cortando-se mutuamente ao meio (Figura 282).

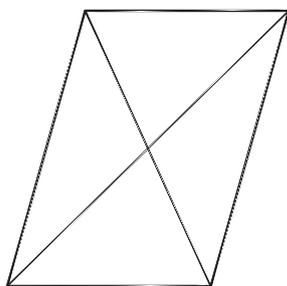


Figura 279

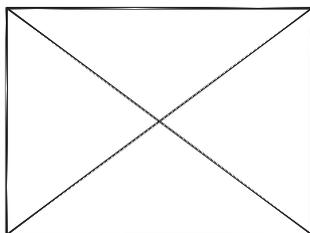


Figura 280

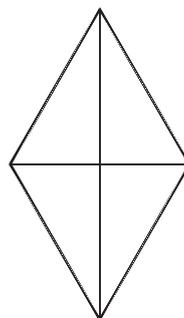


Figura 281

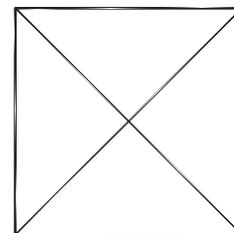


Figura 282

36 – Trapézios – elementos e propriedades

1 – Trapézio é o quadrilátero que possui dois lados paralelos e outros dois não.

2 – Elementos: bases, lados, altura, diagonais (Figura 283).

3 – Base média é o segmento formado pelos pontos médios dos lados oblíquos. MN na Figura 286. A base média mede a semissoma das bases.

4 – Mediana de Euler é o segmento formado pelos pontos médios das diagonais. XY, na Figura 286. A mediana de Euler mede a semidiferença das bases.

5 – Quanto aos lados não paralelos, os trapézios são ditos isósceles (Figura 284) ou escalenos (Figura 283), conforme sejam eles iguais ou diferentes. As diagonais dos trapézios isósceles são iguais (Figura 284).

6 – Quando um lado é perpendicular às bases, o trapézio é denominado retângulo (Figura 285), sendo, naturalmente, escaleno.

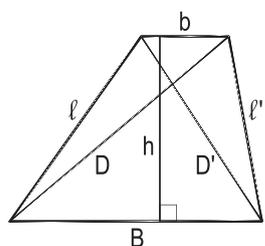


Figura 283

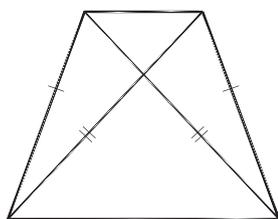


Figura 284

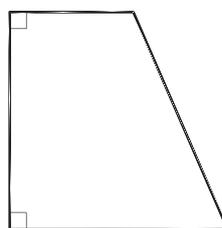


Figura 285

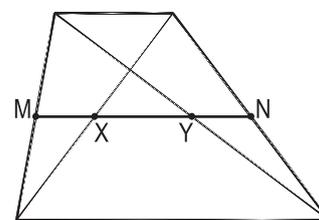


Figura 286

37 – Quadriláteros inscritíveis e circunscritíveis a um círculo

1 – Todo quadrilátero convexo inscritível num círculo tem os ângulos internos opostos suplementares (*Geometria Plana*, número 128.5) (Figura 287). Assim, são iguais qualquer ângulo interno e o externo a ele oposto.

2 – Todo quadrilátero convexo circunscritível a um círculo tem as somas dos lados opostos iguais (Teorema de Pitot, *Geometria Plana*, número 223) (Figura 288).

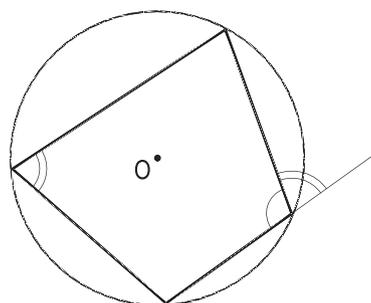


Figura 287

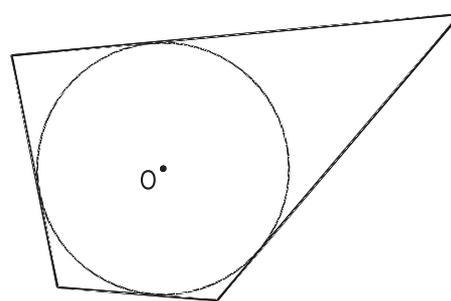


Figura 288

38 – Retas antiparalelas

Duas retas r e s são ditas antiparalelas em relação a uma terceira reta w , quando formam com w ângulos iguais, mas com sentidos opostos (Figura 289).

Duas retas não paralelas a e b , cortadas por duas secantes r e s , são, então, antiparalelas em relação a essas secantes quando o ângulo que a forma com r é igual ao ângulo que b forma com s (Figura 290).

Daí, as seguintes propriedades:

1 – As antiparalelas a_1, a_2, a_3 , etc. a uma reta dada b , em relação a duas secantes r e s , são paralelas entre si (Figura 291).

2 – Consideradas duas retas não paralelas a e b , antiparalelas a duas secantes r e s , os quatro pontos de corte de a e b em r e s definem um quadrilátero necessariamente inscrito numa circunferência (ver número 37.1) (Figura 292).

3 – Reciprocamente, quando duas retas r e s não paralelas cortam uma circunferência, os quatro pontos de corte A, B, C e D definem duas retas AB e CD antiparalelas de r e de s (Figuras 293 e 294).

4 – Traçada a ceviana AJ de um triângulo genérico ABC , antiparalela do lado AC em relação a BA e BC , o lado AB vale a média geométrica entre os segmentos BJ e BC (Figura 295) formados no lado oposto ao vértice A .

De fato, isso acontece porque os triângulos semelhantes ABJ e ABC permitem anotar a relação:

$$\frac{AB}{BJ} = \frac{BC}{AB} \quad \therefore \quad AB^2 = BJ \cdot BC$$

5 – Uma decorrência da propriedade acima é a que assegura que a altura relativa à hipotenusa de qualquer triângulo retângulo vale a média geométrica entre as projeções dos catetos sobre a hipotenusa (*Geometria Plana*, número 197.2), já que são iguais os ângulos \widehat{BAH} e \widehat{BCA} , como complementos de \widehat{ABC} .

Assim, para a Figura 296, temos: $h^2 = m \cdot n$

6 – Sendo a e b duas antiparalelas, em relação a duas retas secantes r e s , são perpendiculares as bissetrizes dos ângulos formados por a e b e por r e s , como as bissetrizes \overline{b} e \overline{b} na Figura 297.

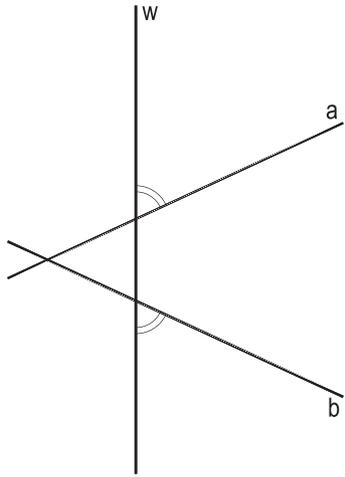


Figura 289

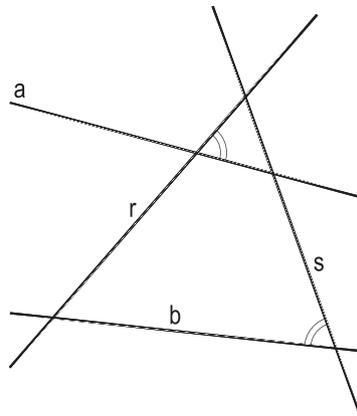


Figura 290

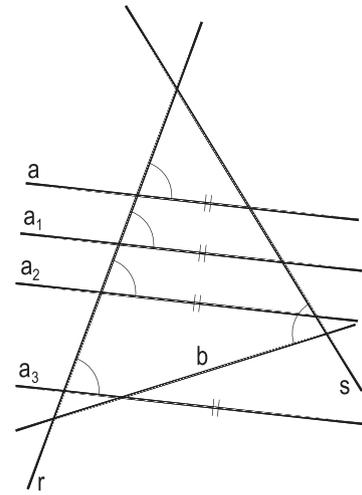


Figura 291

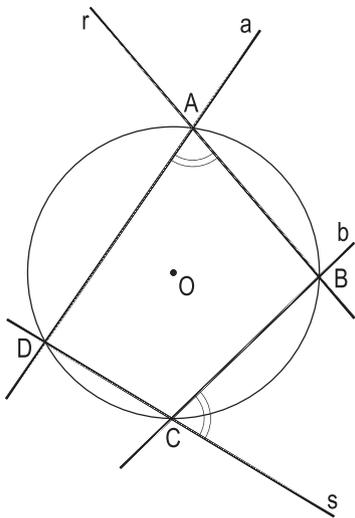


Figura 292

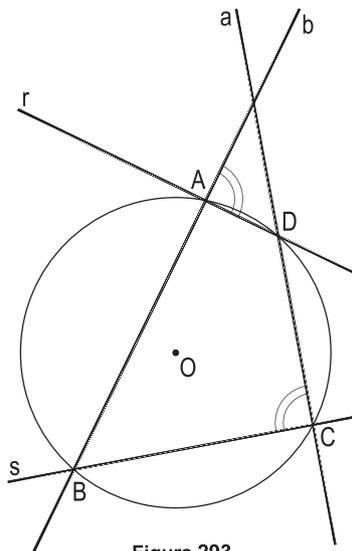


Figura 293

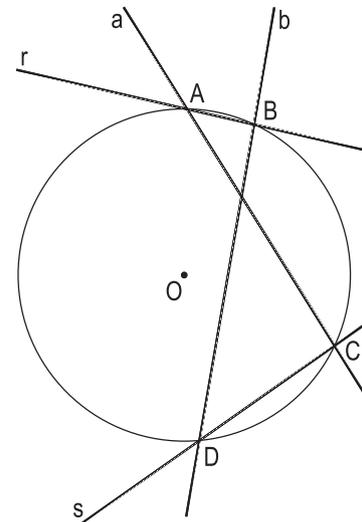


Figura 294

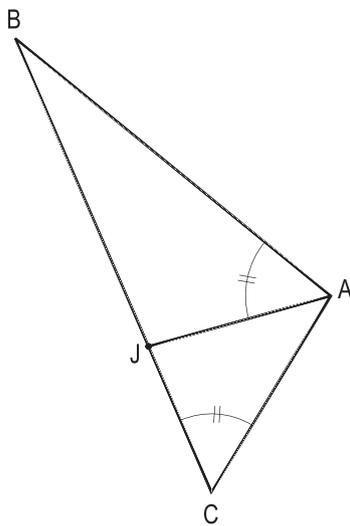


Figura 295

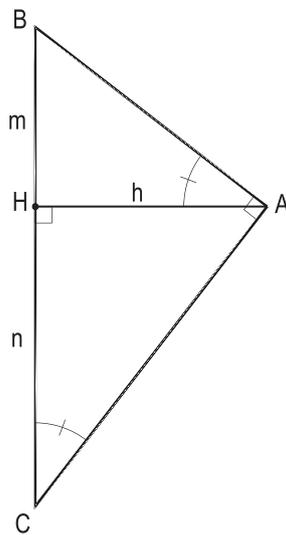


Figura 296

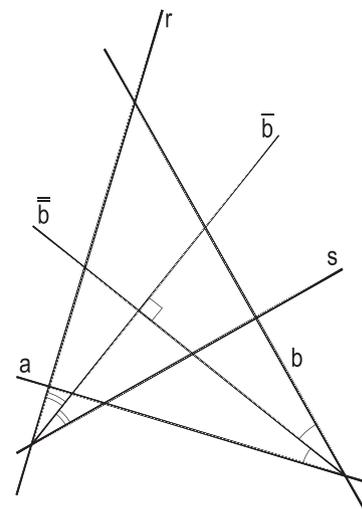


Figura 297

39 – Construção de quadriláteros

As construções que serão desenvolvidas poderão se interessar apenas pelas determinações das grandezas dos quadriláteros, ou, também, além disso, por suas posições. E serão decompostas conforme as naturezas dos quadriláteros, dando sequência à numeração anterior.

40 – Construção de paralelogramos em grandeza

Busca-se determinar as grandezas de paralelogramos ABCD de bases $AB = CD = b$, lados $AD = BC = \ell$, altura h , diagonais $AC = d_1$ e $BD = d_2$, ângulos internos A, B, C e D, ângulos externos A', B', C' e D' , ângulo α entre as diagonais, perímetro $2p$ e centro O, combinando adequadamente esses dados, como indicado nos problemas que seguem.

Os primeiros seis problemas, nesta página, são bem simples, a ponto de dispensarem explicações.

O último com uma segunda solução, indicada pelo número 2.

150 – Dados b, ℓ, h .

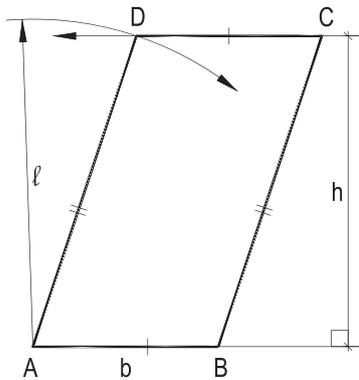


Figura 298

151 – Dados b, ℓ e o valor do ângulo A.

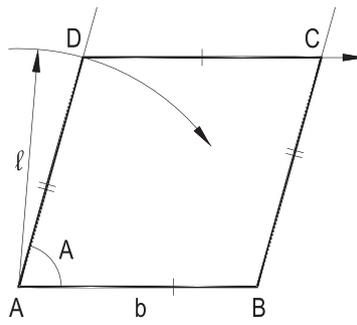


Figura 299

152 – Dados b, h e o valor do ângulo A.

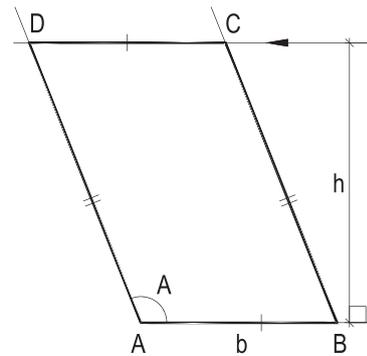


Figura 300

153 – Dados b, ℓ, d_2 .

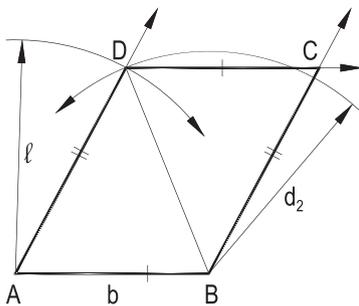


Figura 301

154 – Dados b, d_2 e o valor do ângulo A.

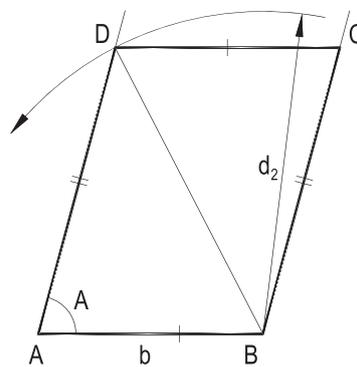


Figura 302

155 – Dados b, h, d_1 .

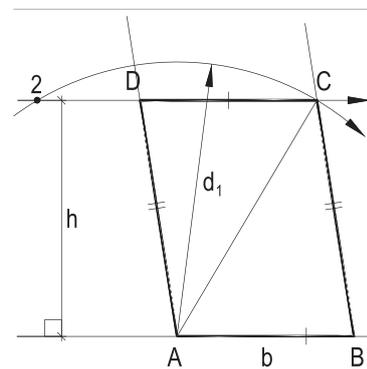


Figura 303

41 – Construção de retângulos em grandeza

Este conjunto visa determinar as grandezas de retângulos ABCD com bases $AB = CD = b$, altura h , diagonais D , inscritos em círculos de raio R , O sendo o próprio centro do quadrilátero, perímetro $2p$ e ângulo α formado por suas diagonais, elementos esses devidamente combinados, os primeiros exemplos muito simples. Dados informados caso a caso.

160 – b, D .

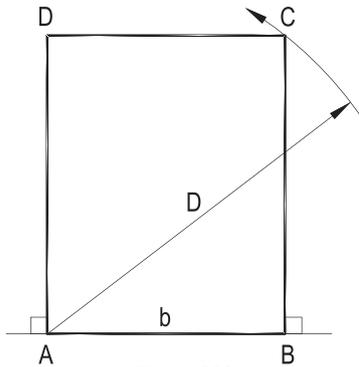


Figura 309

161 – b, R .

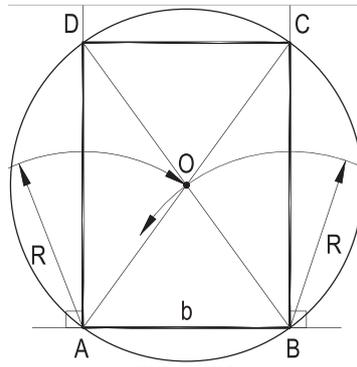


Figura 310

162 – D, α .

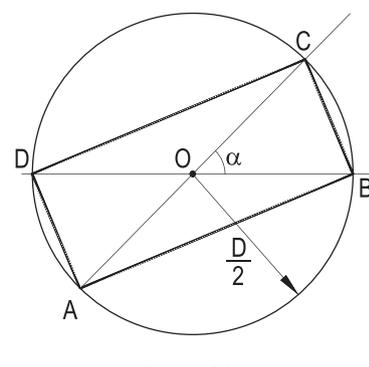


Figura 311

163 – $h, 2p$.

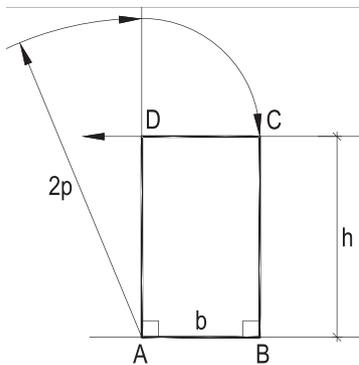


Figura 312

164 – $h, D = 2b$.

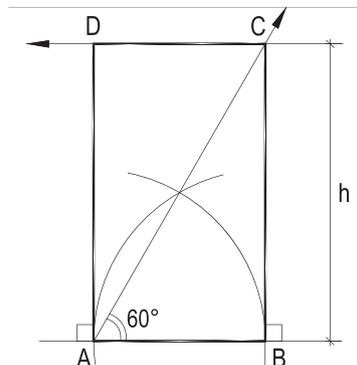


Figura 313

165 – b, α .

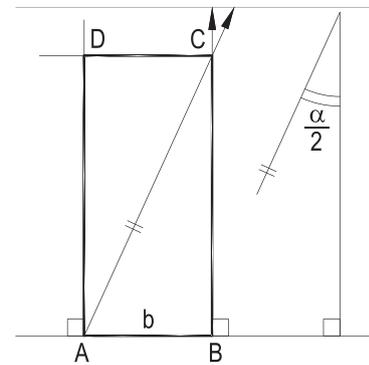


Figura 314

166 – R e k , distância de A a BD .

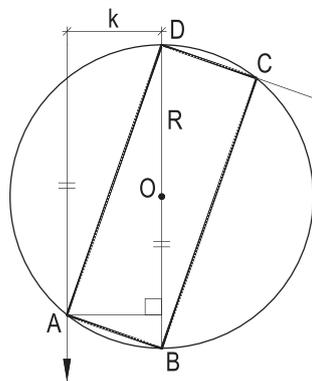


Figura 315

167 – b e r , raio do círculo inscrito em ABC .

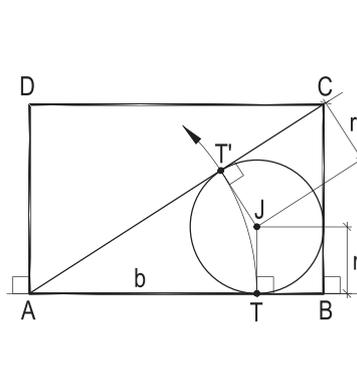


Figura 316

168 – x e y , soma e diferença das duas dimensões.

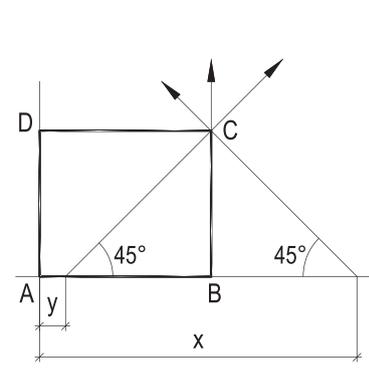


Figura 317

169 – Determinar as dimensões do retângulo ABCD inscrito no triângulo dado JKL, AB em JK, AB, medindo o dobro de AD.

Resolução: Uma homotetia de polo J resolve a questão (Figura 318).

170 – Determinar a grandeza do retângulo ABCD, sabendo que é mínima a distância do vértice C à circunferência (O). Dados AB e (O).

Resolução: Traçada a perpendicular r por B a AB, C há de ser o pé da perpendicular, por O, a essa reta r (Figura 319).

171 – Construir quatro retângulos iguais, inscritos na circunferência dada (O), sabendo que, no total, os quatro retângulos têm apenas oito vértices.

Resolução: Basta dividir a circunferência dada em oito partes iguais, para assegurar bases iguais aos quatro retângulos (Figura 320).

172 – Construir o maior retângulo de base AB dada, que tenha o vértice C equidistante das circunferências dadas, limítrofes da coroa circular (O).

Resolução: Imediata, com o uso da circunferência equidistante das duas dadas (Figura 321). Dos dois pontos de corte C e C' da perpendicular a AB por B, apenas C serve.

169

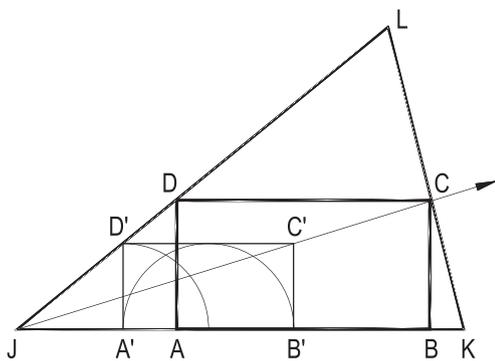


Figura 318

170

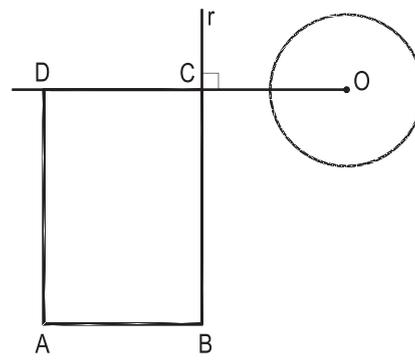


Figura 319

171

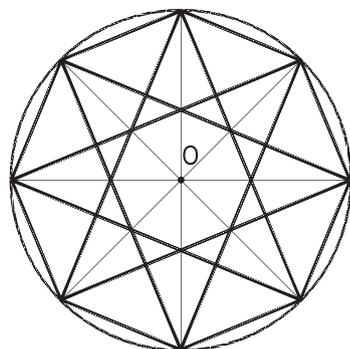


Figura 320

172

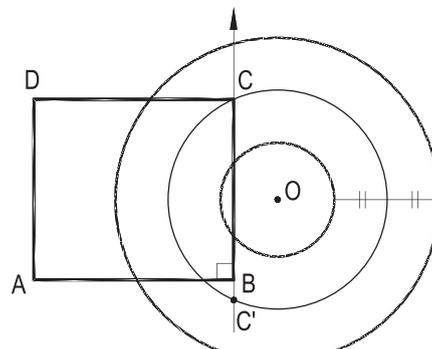


Figura 321

42 – Construção de losangos e de quadrados em grandeza

Para construir losangos e quadrados $ABCD$, combinando, como dados, seus lados ℓ , suas diagonais D , para quadrados, e D e d , para losangos, os ângulos internos para losangos, os raios r e R dos círculos inscrito e circunscrito aos quadrados, ou r dos inscritos nos losangos, basta utilizar suas propriedades (números 34 e 35), implicando, nos primeiros exemplos, em resoluções simples, como a seguir apresentado.

173 – Losango $ABCD$, dadas as medidas ℓ e D de seu lado e de sua maior diagonal.

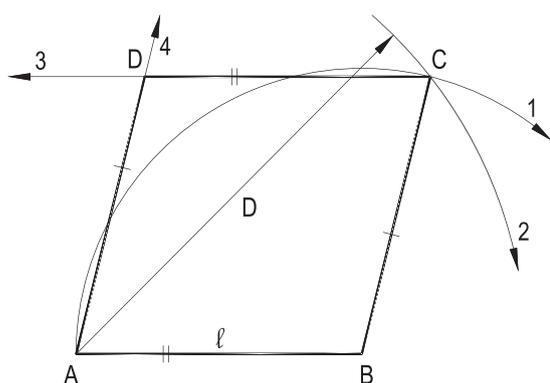


Figura 322

174 – Losango $ABCD$, dadas as medidas ℓ e d de seu lado e de sua menor diagonal.

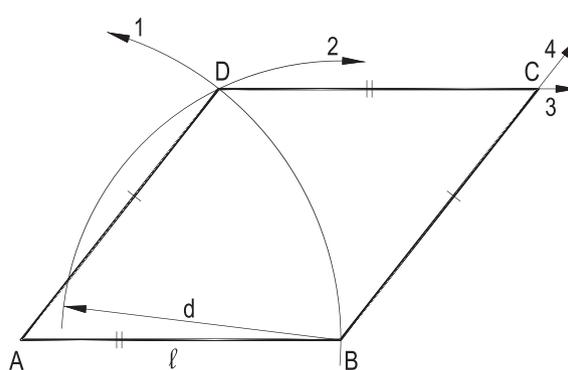


Figura 323

175 – Losango $ABCD$, dados o ângulo interno A e a medida d da menor diagonal BD .

Resolução: Marcado o ângulo A , um arco arbitrário, de centro A , dá a reta $B'D'$, paralela à menor diagonal. Aplicada a medida d em $B'D'$, uma simples translação dá D .

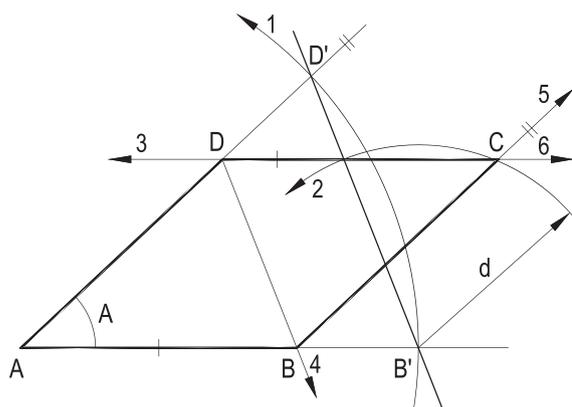


Figura 324

176 – Losango $ABCD$, dados o valor do ângulo A e a medida r , do raio do círculo inscrito.

Resolução: Construído o círculo (O, r) , as tangentes a ele paralelas aos lados de A dão o losango pedido.

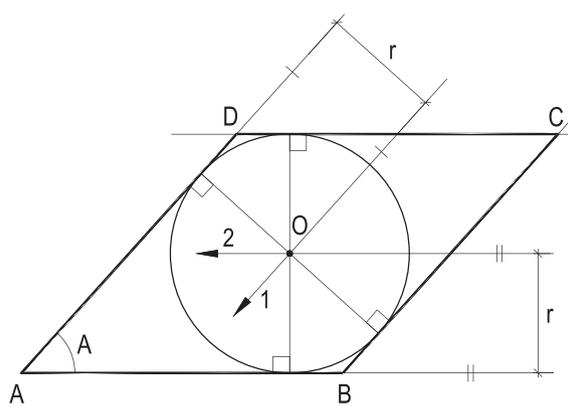


Figura 325

177 – Losango ABCD, dados o lado l e o raio r do círculo inscrito.

Resolução: O centro O é o ponto chave, obtido pela interseção do arco capaz de 90° para AB com a paralela a AB , dela distando a medida r (Figura 326), com duas soluções.

178 – Losango ABCD, dado o lado l , sabendo que uma diagonal vale o dobro da outra.

Resolução: Uma simples homotetia de polo A traz B e D , a partir do triângulo $AB'M$ de catetos $2k$ e k , k sendo um valor arbitrado (Figura 327).

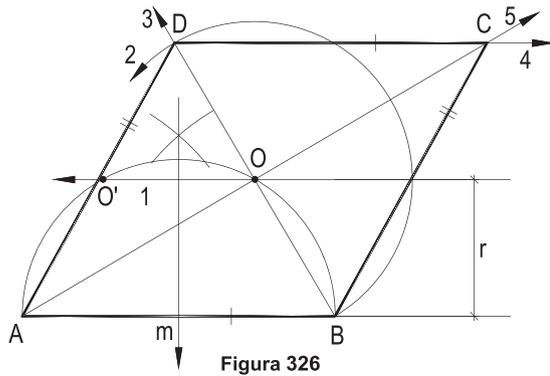
179 – Quadrado ABCD, dado o valor s da soma do lado com a diagonal.

Resolução: Um quadrado auxiliar $AB'C'D'$ e o rebatimento \bar{D} de D' dão a direção \bar{DD}' que traz D (Figura 328), a partir de $A\bar{D}' = s$, numa homotetia de polo A .

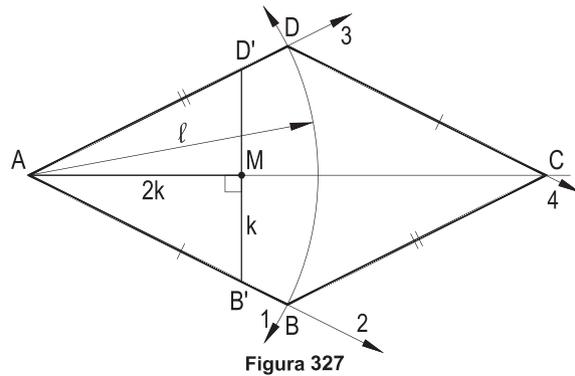
180 – Quadrado ABCD, dado o valor y da diferença entre a diagonal e o lado.

Resolução semelhante, a partir do quadrado auxiliar $AB'C'D'$ e do rebatimento \bar{C} de C' (Figura 329), sobre AB' .

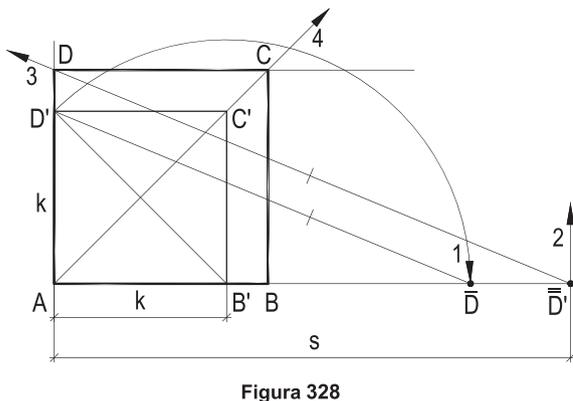
177



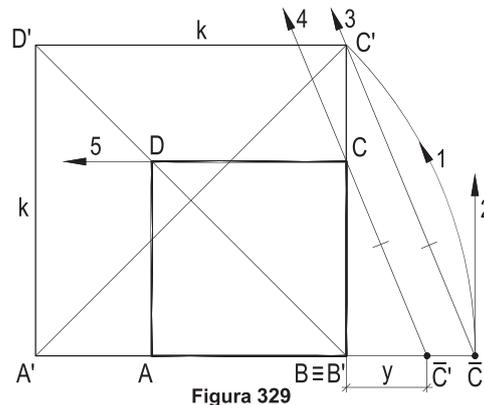
178



179



180



181 – Construir um losango circunscrito ao quadrado PQRS dado, cada lado contendo um vértice desse quadrado, sabendo que as diagonais do losango são paralelas aos lados do quadrado, a maior medindo o dobro da menor.

Resolução: Simples pelo natural paralelismo de AB e PM, tal razão 1 : 2 (Figura 330).

182 – Construir o losango ABCD, de lado dado ℓ , sabendo que o ângulo interno C mede o quántuplo do interno B.

Resolução: Por terem de ser suplementares, C há de valer 150° e B 30° (Figura 331).

183 – Construir o quadrado ABCD inscrito na semicircunferência dada (O), AB estando sobre o diâmetro PQ.

Resolução: Uma simples homotetia de polo O resolve a questão (Figura 332).

184 – Obter a verdadeira grandeza do quadrado ABCD conhecendo a medida k do segmento formado pelo vértice D e pelo ponto quarto T do lado AB, mais próximo de B.

Resolução: A construção de um triângulo retângulo $AD'T'$ com catetos proporcionais a 3 e 4 dá solução à questão, pela aplicação de $T'J = k$ sobre $T'D'$ (Figura 333).

181

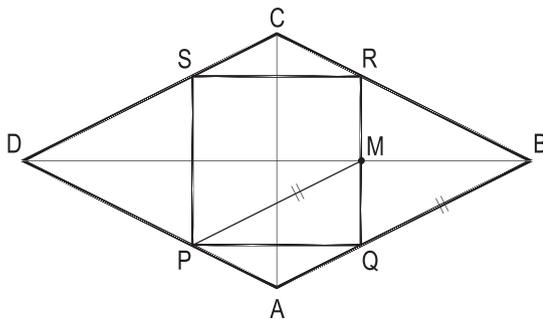


Figura 330

182

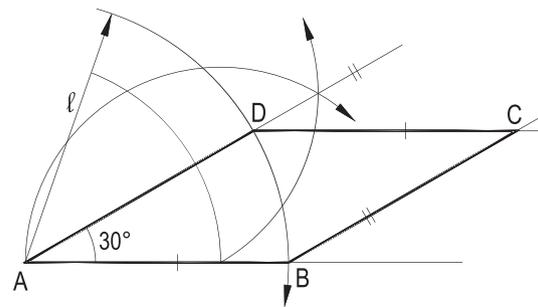


Figura 331

183

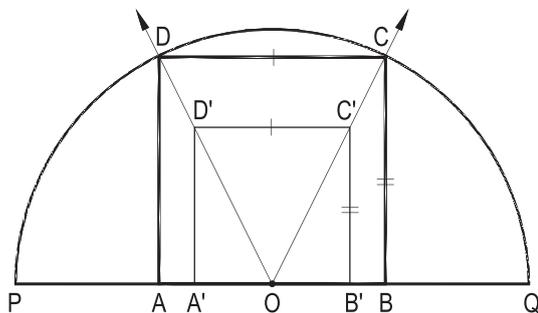


Figura 332

184

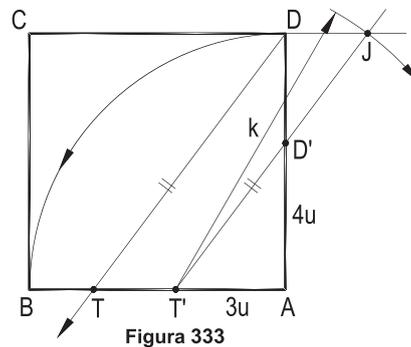


Figura 333

185 – Dadas duas circunferências (O, R) e (O', R'), pede-se determinar a verdadeira grandeza de dois quadrados iguais ABCD e AJKL que tenham, respectivamente, o lado AB tangente a (O, R) e o lado AR tangente a (O', R'), sendo B e R os pontos de contato, sabendo que o vértice A, comum aos dois quadrados, pertence à circunferência tangente às duas dadas, com centro na reta OO'.

Resolução: Para poder enviar tangentes iguais às duas circunferências dadas, o vértice A tem que pertencer ao seu eixo radical ER, sendo, assim, sua interseção com a circunferência (M) de diâmetro igual a $R + OO' + R'$, tangentes internamente às dadas.

A tangente AB à circunferência (O, R) define o lado e, então, a verdadeira grandeza do quadrado ABCD.

Há uma segunda posição (\bar{A}) para o ponto A e quatro posições para cada quadrado, mas apenas uma grandeza, por serem todos iguais (Figura 334).

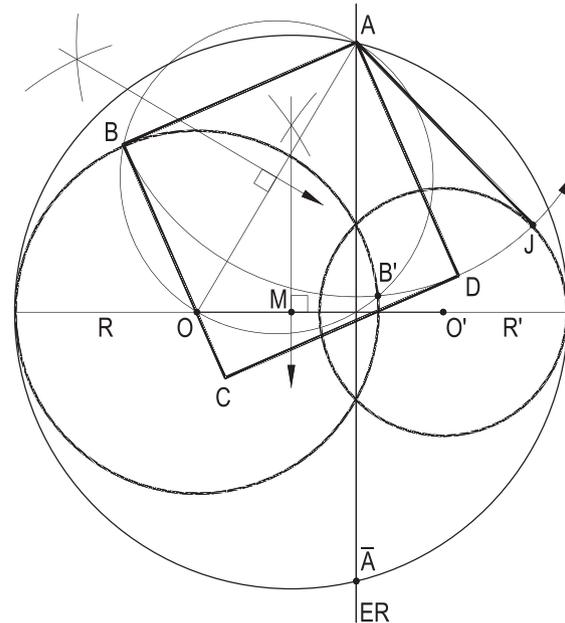


Figura 334

186 – Determinar a verdadeira grandeza do losango ABCD, que tem os lados AB e AD tangentes às circunferências dadas (O) e (O'), A e D sendo os pontos de contato, sabendo que $AB = OO'$ e que a diagonal BD tem o maior valor possível.

Resolução: Mais uma vez, A deve pertencer ao eixo radical ER das circunferências dadas e à circunferência (O, OJ) de raio igual à hipotenusa do triângulo OPJ de catetos iguais a R, raio de (O) e a OO' (Figura 335), que assegura que AB tenha o valor imposto ao lado do quadrado.

A verdadeira grandeza pedida vem com a tangente AD à circunferência (O') mais afastada de AB, o que garante o maior valor possível para a diagonal BD e é completada com paralelas.

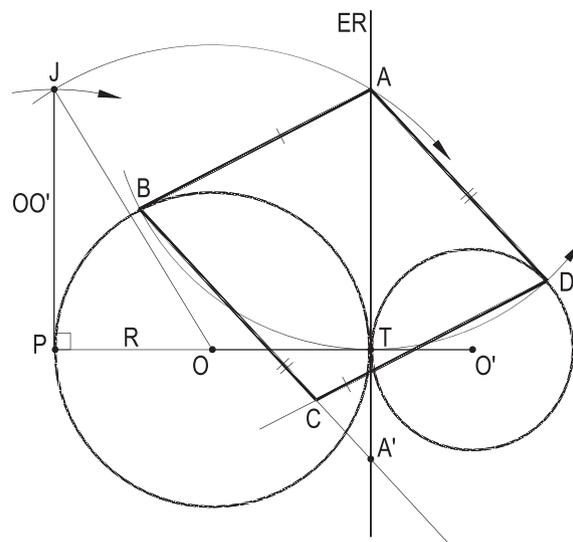


Figura 335

43 – Construção de trapézios em grandeza

O próximo grupo de problemas, referentes à construção de trapézios escalenos ABCD, de bases $AB = B$ e $CD = b$, respectivamente, maior e menor, lados $AD = \ell_1$ e $BC = \ell_2$, altura h , diagonais $AC = d_1$ e $BD = d_2$, base média b_m e mediana de Euler = m , dados esses adequadamente combinados, problemas iniciais ainda muito simples.

187 – B, b, h, ℓ_1 .

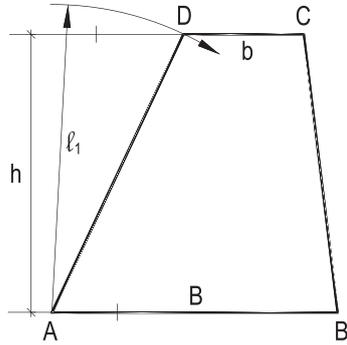


Figura 336

188 – B, b, d_1, d_2 .

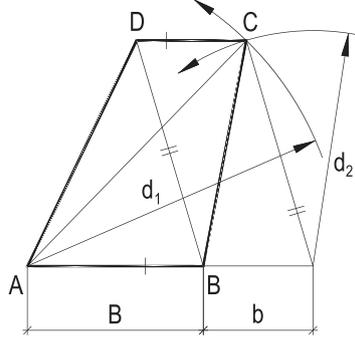


Figura 337

189 – B, b, h, d_2 .

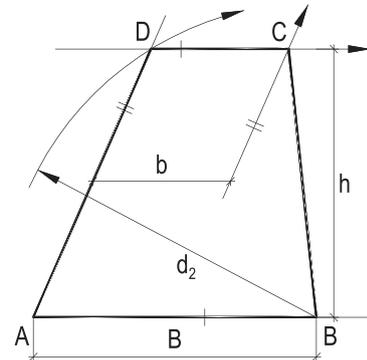


Figura 338

190 – B, b, ℓ_1, ℓ_2 .

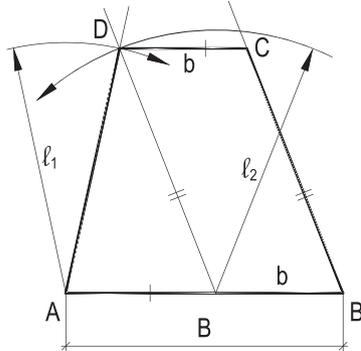


Figura 339

191 – B, b, h, \hat{A} .

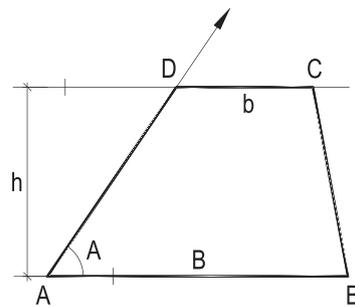


Figura 340

192 – Vértices A, B, C, $b = \ell_1$.

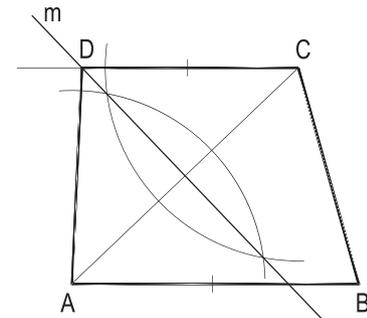


Figura 341

193 – $B, b = \ell_1 = \ell_2$.

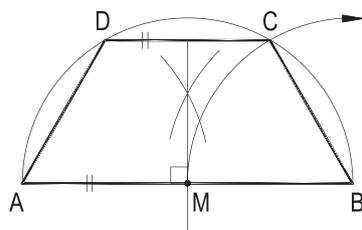


Figura 342

194 – B, h, \hat{A} e \hat{C} .

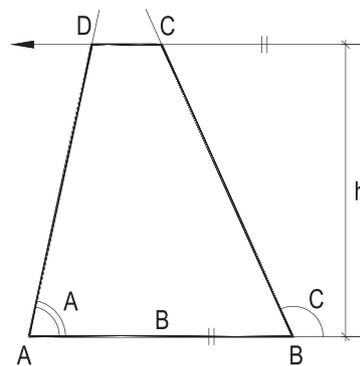


Figura 343

195 – B, b, ℓ_1, d_2 .

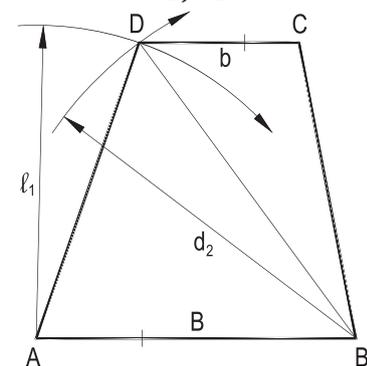


Figura 344

A seguir exemplos de construção de trapézios retângulos ABCD, sendo sempre retos os ângulos A e D e de trapézios isósceles ABCD, considerados iguais a ℓ os lados BC e AD e iguais a d as duas diagonais, além dos raios R do círculo circunscrito e, eventualmente, o raio r do círculo inscrito, quando for o caso.

196 – Trapézio retângulo, dados B, h e d_1 .

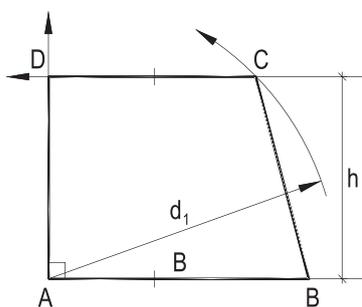


Figura 345

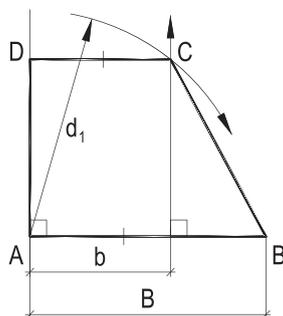


Figura 346

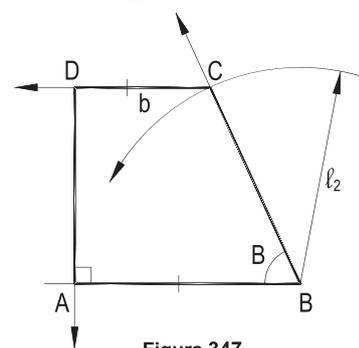


Figura 347

199 – Trapézio retângulo, dados B, b e d_2 .

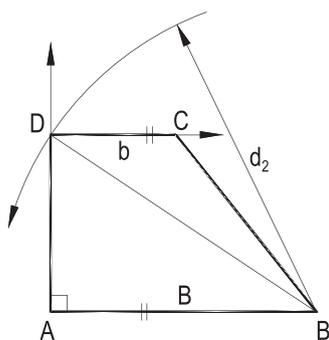


Figura 348

200 – Trapézio retângulo, dados B, l_2 e d_1 .

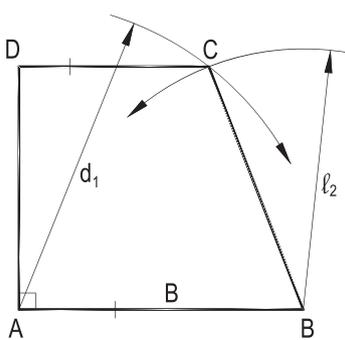


Figura 349

201 – Trapézio retângulo circunscritível, dados B e r.

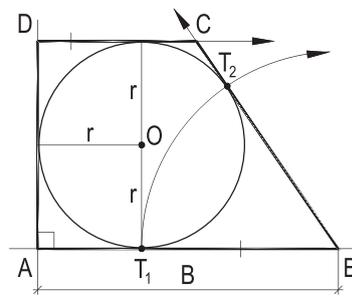


Figura 350

202 – Trapézio isósceles, dados B, b e ℓ .

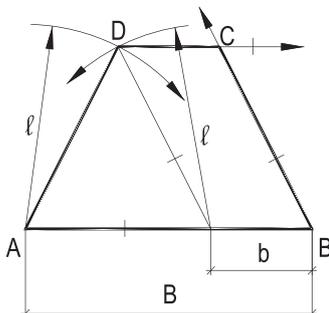


Figura 351

203 – Trapézio isósceles, dados B, h e ℓ .

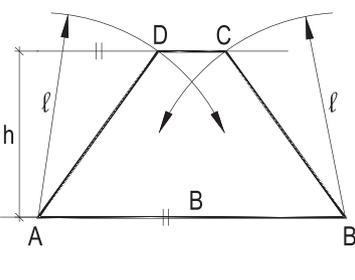


Figura 352

204 – Trapézio isósceles, dados B, b e d.

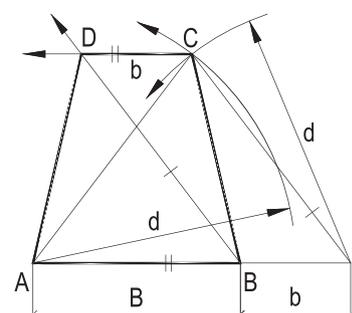


Figura 353

205 – Trapézio isósceles,
dados B, R e ℓ .

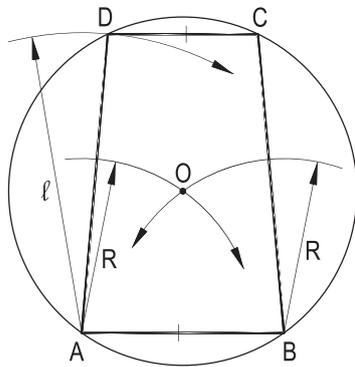


Figura 354

206 – Trapézio isósceles,
dados B e r.

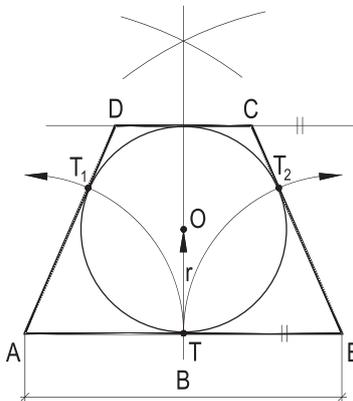


Figura 355

207 – Trapézio isósceles,
dados B, b e o
ângulo A.

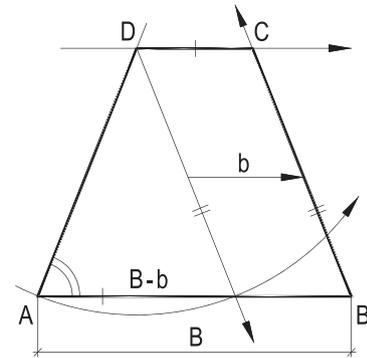


Figura 356

208 – Trapézio isósceles,
dados B, h e d.

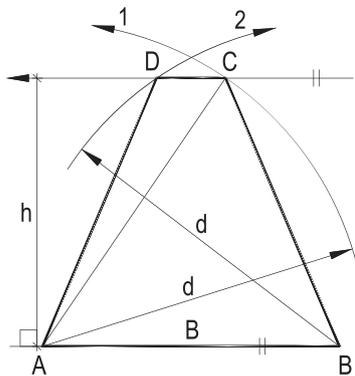


Figura 357

209 – Trapézio isósceles,
dados B, d e o
ângulo A.

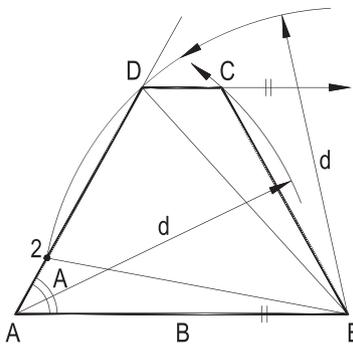


Figura 358

210 – Trapézio isósceles,
dados B, h e m.

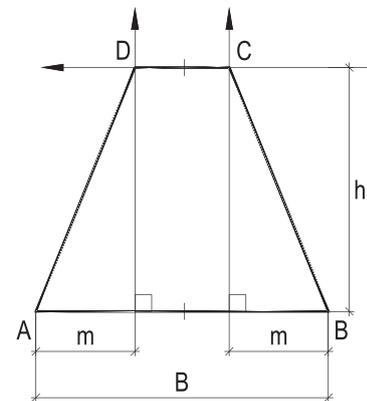


Figura 359

211 – Trapézio isósceles,
dados B, ℓ e m.

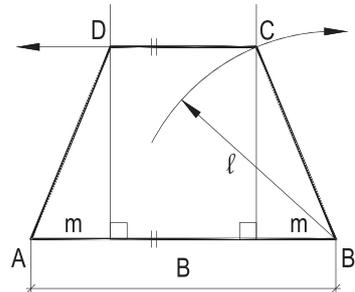


Figura 360

212 – Trapézio isósceles,
dados B, b_m e h.

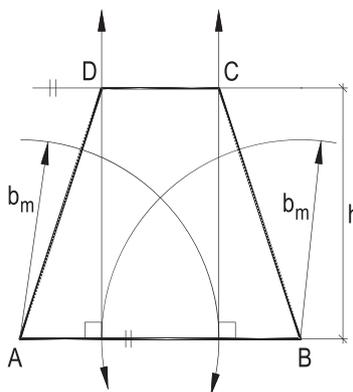


Figura 361

213 – Trapézio isósceles,
dados B e h, ângulo
 $D = 2A$.

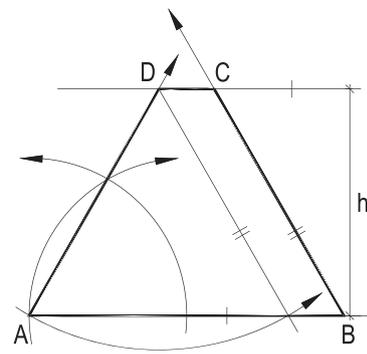


Figura 362

214 – Construir o quadrado ABCD, de centro dado G, cuja diagonal AC se apoia por A e C respectivamente na reta dada r e na circunferência dada (O).

Resolução: Por simetria de um ponto qualquer J de r, em relação a G, obtém-se a simétrica \bar{r} de r, em relação a G, que corta (O), proporcionando o vértice C (duas soluções), que, ligado a G, traz A e, então, os dois quadrados $A_1B_1C_1D_1$ e $A_2B_2C_2D_2$, que resolvem o problema (Figura 363).

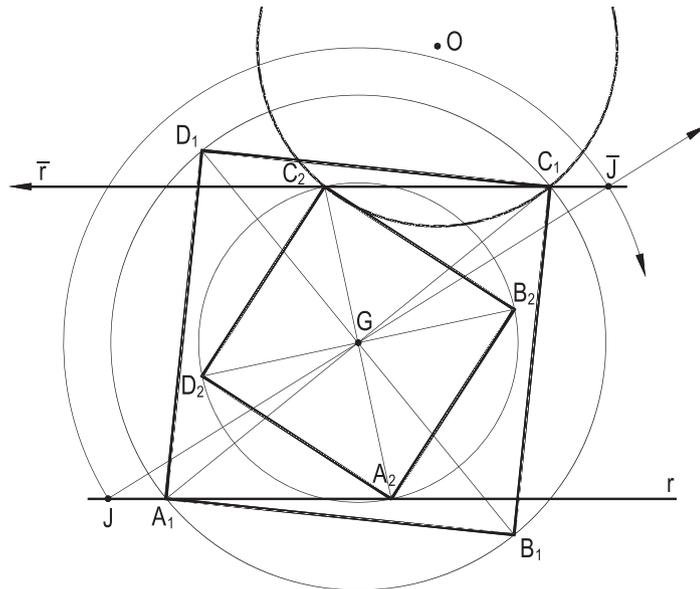


Figura 363

215 – Dadas duas circunferências (O) e (O') e duas retas r e s, considere os diâmetros XY de (O) e ZW de (O'), respectivamente, paralelos a r e a s, X à esquerda de O, e determine os pontos A e B, B entre A e o ponto comum a r e s, tais que sejam ortogonais os seguintes pares de circunferências: (X, XA) e (Y, YA), (Z, ZA) e (W, WA), (X, XB) e (Y, YB), (W, WB) e (Z, ZB). Em seguida, inscreva na circunferência (X, XA) um hexágono regular que tenha dois lados paralelos a r.

Resolução: A e B têm de ser os pontos de corte de (O) e (O') (*Geometria Plana*, número 122.2).

Assim, obtidos A e B e traçado o diâmetro XY, basta construir a circunferência (X, XA), traçar seu diâmetro PS paralelo a r para obter o hexágono PQRSTU (Figura 364) pedido, os vértices R e T marcados com o auxílio da circunferência (S, SX).

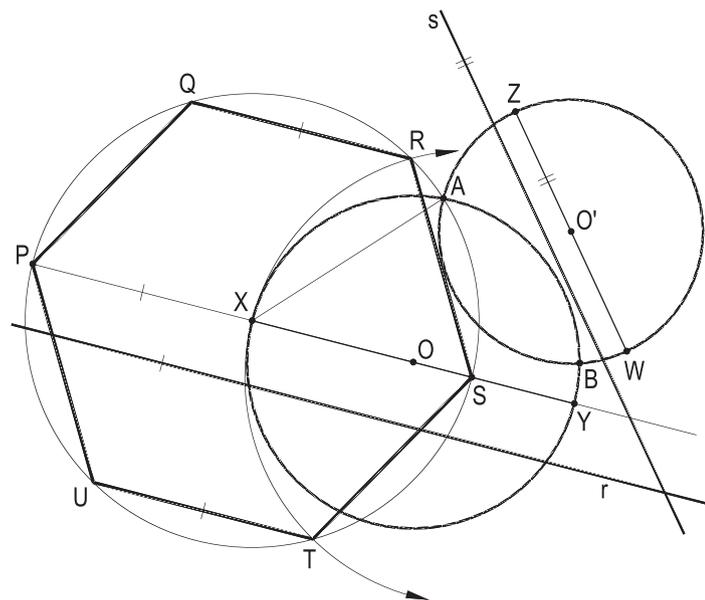


Figura 364

44 – Construção de quadriláteros em grandeza

216 – Completar o quadrilátero convexo ABCD, circunscritível a um círculo, dados os vértices A, B e C e a medida c do lado CD.

Resolução: O quarto lado AD deve (número 37.2) medir $d = a + c - b$, ou seja, $d = AB + CD - BC = AB - (BC - CD) = AB - BJ = AB - BK = AK$.

Por isso, D será o corte das circunferências (A, AK) e (C, CJ), com uma única solução (Figura 365), para que ABCD seja convexo.

217 – Completar o quadrilátero ABCD inscrito num círculo, dados os vértices A, B e C, sabendo que ele tem dois ângulos retos.

Resolução: Imediata com as perpendiculares r e s , por A e C (Figura 366).

218 – Dado o triângulo equilátero ABC, construir o quadrilátero convexo ABCD, sabendo que o triângulo DAC é isósceles, de base AC, CD sendo perpendicular a BC.

Resolução: D na mediatriz de AC (Figura 367).

219 – Completar o quadrilátero convexo ABCD circunscritível ao círculo dado (O), dados também os vértices A e C.

Resolução: As tangentes de A e de C a (O) resolvem a questão (Figura 368), B e D com denominações permutáveis.

220 – Construir o quadrilátero côncavo ABCD, cujos lados CB e CD e cujos suportes Ax e Ay dos lados AB e AD sejam tangentes a uma circunferência a ele exterior, de raio dado r . Dados, também, as semirretas Ax e Ay e o ponto C.

Resolução: Determinado o centro O, distante r de Ax e de Ay , e construída a circunferência (O, r), os tangentes CT e CT' a ela resolvem o problema (Figura 369).

221 – Inscrever no círculo de diâmetro dado AC o quadrilátero convexo ABCD, sabendo que BC é igual ao raio desse círculo e que o triângulo DAC é isósceles.

Resolução: Simples, com a corda CB igual ao raio do círculo (O), dado, e com a perpendicular, por O, a AC (Figura 370).

222 – Construir a circunferência (O, r) pertencente aos pontos dados A e B, assim como o quadrilátero entrecruzado ABCD nela inscrito, tendo o lado CD paralelo a AB, medindo o valor dado $2k$. Dado, também, o valor do raio r .

Resolução: O vértice D vem com a paralela t à mediatriz m de AB (Figura 371). (Duas soluções.)

216

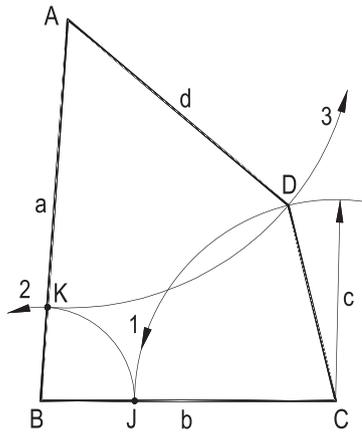


Figura 365

217

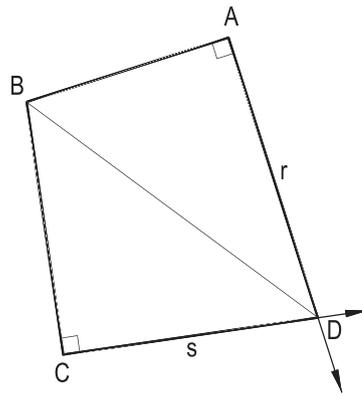


Figura 366

218

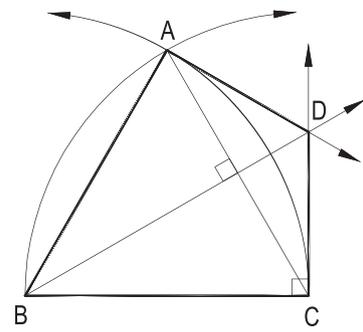


Figura 367

219

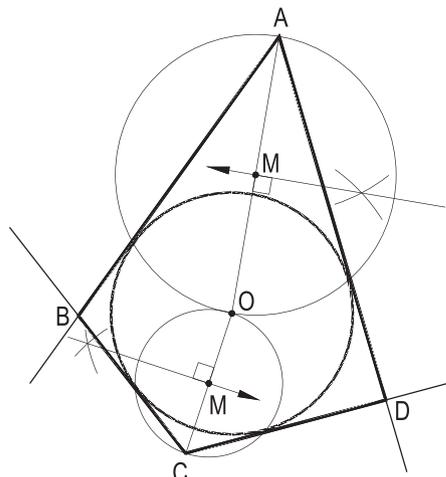


Figura 368

220

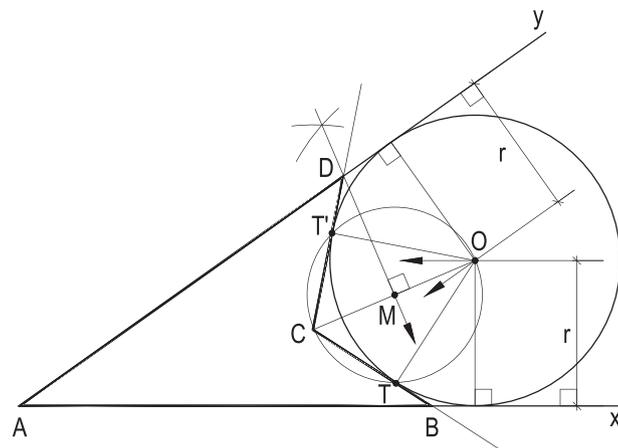


Figura 369

221

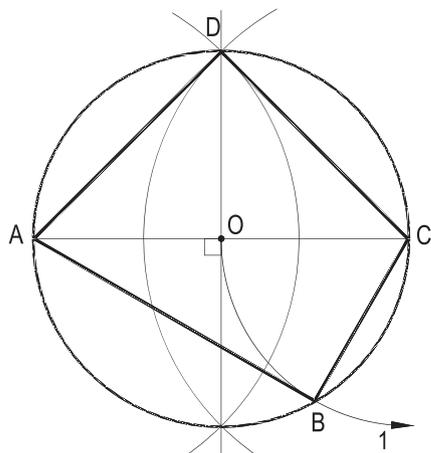


Figura 370

222

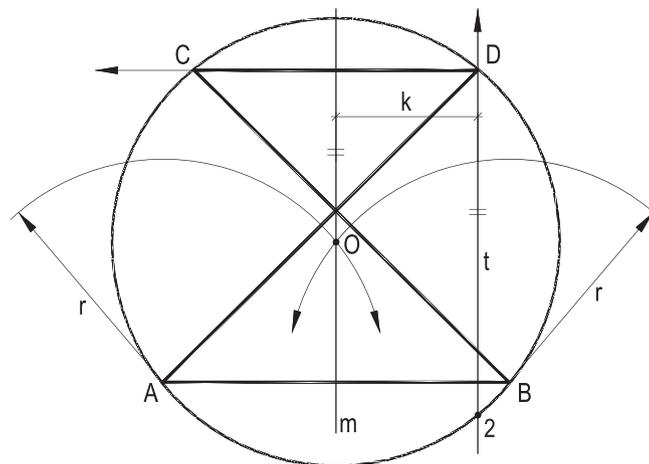


Figura 371

45 – Construção de quadriláteros em posição

Nesta parte as construções visam, além da determinação de grandezas, os posicionamentos das soluções cabíveis, mesmo que de dimensões idênticas.

Serão abordados os diversos tipos de quadriláteros, sempre seguindo a numeração anterior.

223 – Construir o paralelogramo ROTP, sabendo que o vértice O equidista dos três pontos dados R, S e T.

Resolução: O há de ser o circuncentro do triângulo RST e, com paralelas, completa-se o paralelogramo ROTP, afinal um losango, já que $OR = OT$ (Figura 372).

224 – Construir o paralelogramo ABCD, dadas sua base AB e a medida h de sua altura, sabendo que a distância de seu centro ao ponto dado J é também igual a h.

Resolução: O centro O do paralelogramo há de ser a interseção da circunferência (J, h) com uma das paralelas, s e t a r, distantes (h/2) desta, com quatro soluções (Figura 373), duas completadas e duas indicadas por seus centros O_3 e O_4 .

225 – Construir o quadrado ABCD, conhecendo os pontos M e N, médios de seus lados AB e AD.

Resolução: As retas inclinadas de 45° com MN, por M e por N, trazem as duas soluções à questão (Figura 374).

226 – Completar o retângulo ABCD, de base AB dada, sabendo que ele tem um terceiro vértice na reta r, também dada.

Resolução: As perpendiculares a AB, por A e B, resolvem, com duas soluções (Figura 375).

227 – Construir o losango ABCD que tenha os lados AB e AD sobre as semirretas dadas Ax e Ay, C distando o valor dado r, do ponto J, também dado.

Resolução: Construído o losango auxiliar $\overline{A\overline{B}\overline{C}\overline{D}}$, por homotetias de polo A, vêm as duas soluções (Figura 376).

228 – Inscrever um triângulo equilátero ABC no quadrante de círculo dado OPQ, o lado BC apoiado nos raios OQ e OP, paralelo à reta dada r.

Resolução: Uma homotetia de polo O, centro do quadrante dado, resolve o problema, a partir do triângulo equilátero auxiliar $\overline{B\overline{C}\overline{A}}$ (Figura 377).

223

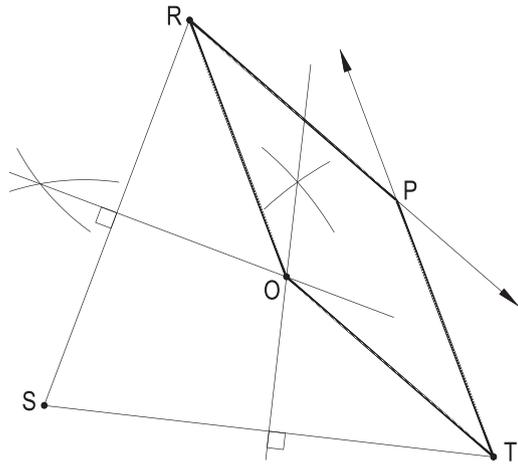


Figura 372

224

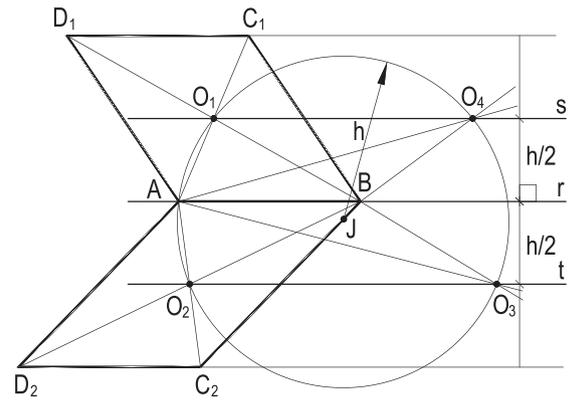


Figura 373

225

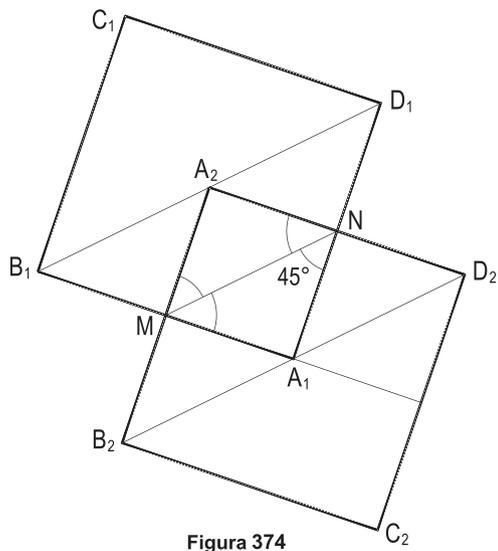


Figura 374

226

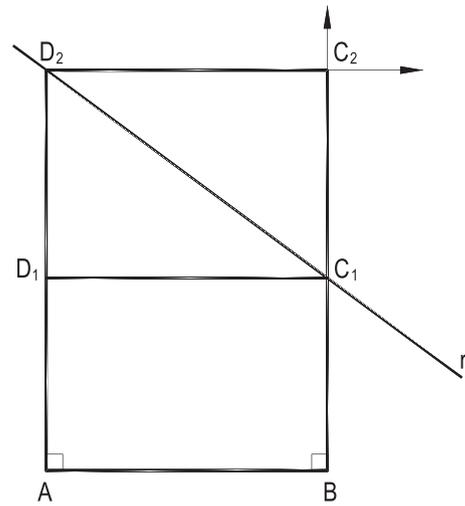


Figura 375

227

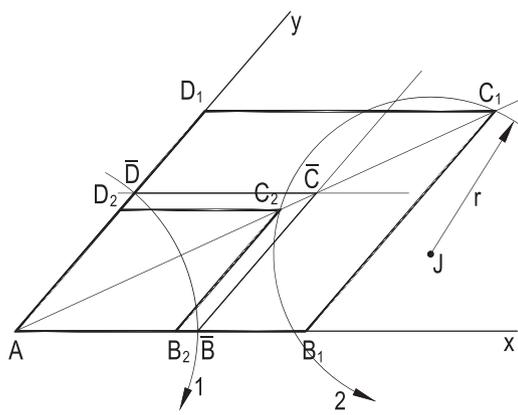


Figura 376

228

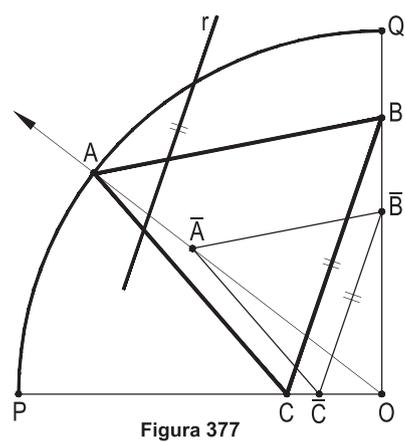


Figura 377

229 – Circunscrever à circunferência dada (O) um quadrado que tenha um vértice sobre a reta r, também dada.

Resolução: A construção do quadrado auxiliar OPQS, de posição arbitrada, proporciona a circunferência (O, OQ), que corta r, determinando o vértice A do quadrado ABCD pedido, com duas soluções (Figura 378).

230 – Inscrever, no losango dado ABCD, um retângulo de lados paralelos às diagonais do losango, tal que tenha a reta suporte de um de seus lados passando pelo ponto dado J.

Resolução: Apenas uma solução RSTU, já que a paralela s, por J, à segunda diagonal do losango não o atinge (Figura 379).

231 – Construir o paralelogramo ABCD, de base dada AB, cujo centro diste um valor igual a AB do ponto dado J, C na semirreta Bx, também dada.

Resolução: O centro procurado será a interseção da circunferência (J, AB) com a paralela a Bx pelo ponto M, médio de AB, com duas soluções (Figura 380).

232 – Construir o retângulo ABCD, de diagonal AC dada, sabendo que o lado AB mede o dobro do lado BC.

Resolução: O triângulo retângulo JCK, com catetos na razão 1 : 2, traz o vértice B_1 , na interseção de sua hipotenusa CK com a circunferência de diâmetro AC (Figura 381). A segunda solução AB_2CD_2 vem com B_2 , simétrico de B_1 em relação a AC.

233 – Construir o triângulo ABC, dados o lado BC e o valor 45° de seu ângulo interno A, cuja bissetriz contém o ponto dado J. E, então, o paralelogramo ACBP.

Resolução: Traçados os arcos capazes de 45° para BC, as uniões de J com cada um dos pontos médios M e N de seus arcos replementares (*Geometria Plana*, número 134) proporcionam os vértices A_1 e A_2 das duas soluções, completadas com paralelas (Figura 382).

234 – Dadas as circunferências (O) e (O') e a reta r, pede-se construir o quadrado ABCD, exterior ao ponto O', sabendo que A e B são as projeções ortogonais, sobre r, dos pontos de potências nulas em relação a (O) e (O').

Resolução: J e K (Figura 383) são os pontos que, projetados sobre r, proporcionam os vértices A e B e, então, o quadrado ABCD.

235 – Construir o losango ABCD, de ângulos internos 60° e 120° , com a diagonal BD perpendicular a Jx, B em Jy, D em Jx e A na circunferência (O, r) tangente às semirretas Jx e Jy, dados Jx, Jy e o valor de r.

Resolução: Construindo o losango auxiliar $\overline{\overline{ABCD}}$, conforme os dados, homotetias de polo J trazem as duas soluções (Figura 384).

229

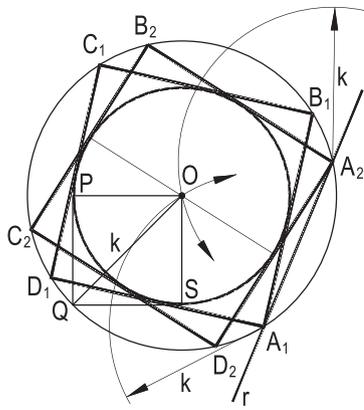


Figura 378

230

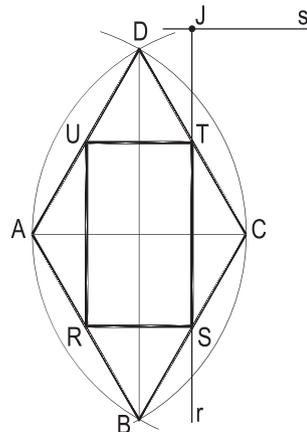


Figura 379

231

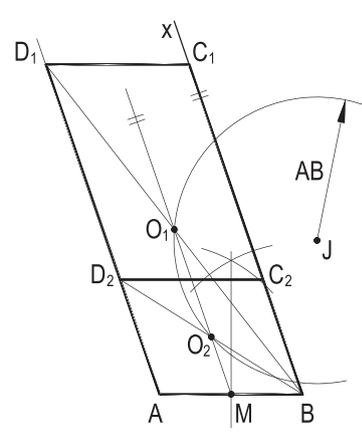


Figura 380

232

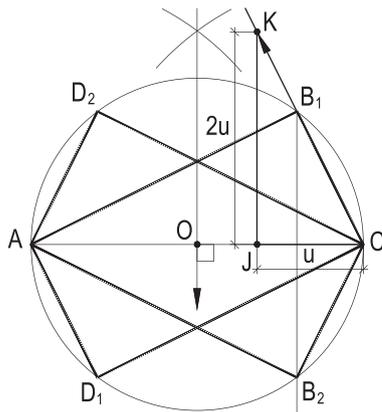


Figura 381

233

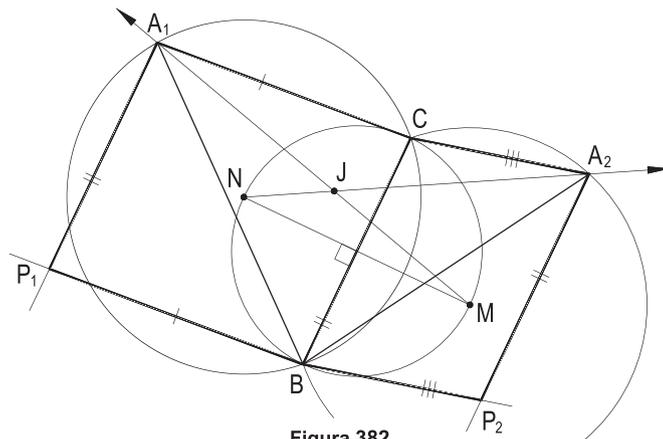


Figura 382

234

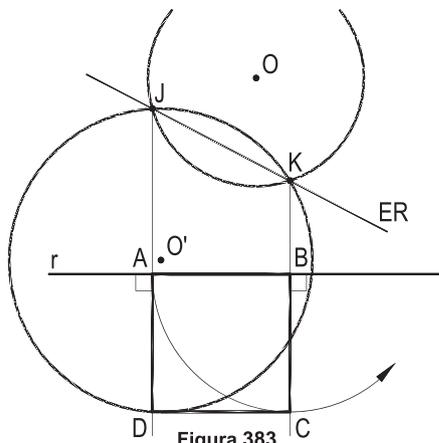


Figura 383

235

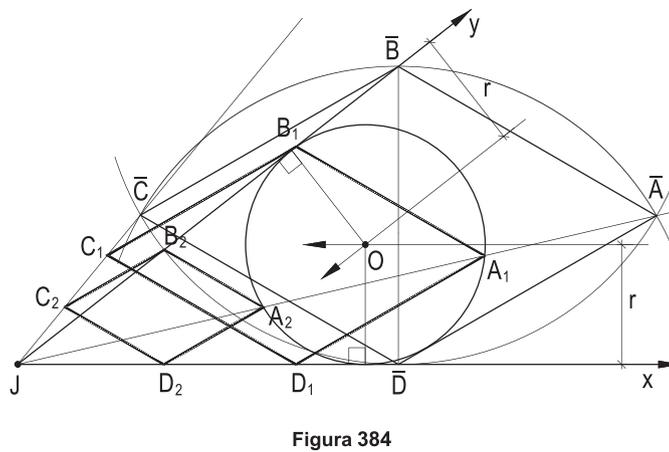


Figura 384

236 – Inscrever, no segmento circular de 120° OJK, dado, um quadrado ABCD, que tenha o lado AB sobre a corda JK.

Resolução: A construção do triângulo retângulo auxiliar MPQ, com $PQ = 2 \cdot MP$ (arbitrado), traz, por homotetia de polo M, médio de JK, o quadrado pedido (Figura 385).

237 – Construir o paralelogramo ABCD, dados sua base AB e o valor h de sua altura, sabendo que o ângulo formado por suas diagonais mede 45° .

Resolução: A duplicação da base AB para $A\bar{A}$ e a construção do arco capaz de 45° para $A\bar{A}$ proporcionam, por corte com a paralela r a AB dela distante h, o vértice C e, em seguida, o paralelogramo pedido, que pode ocupar outras três posições, a segunda para o outro ponto de corte C' (Figura 386) e duas mais por simetrias das primeiras em relação à reta AB.

238 – Construir o losango ABCD, sabendo que a diagonal AC mede o valor dado k, sendo paralela à reta OO', A e C pertencendo respectivamente às circunferências dadas (O, R) e (O', R'), a diagonal BD medindo 2R.

Resolução: A translação de (O, R) na direção OO', com amplitude k, proporciona o vértice C, por corte de (\bar{O}, R) , transladada, com (O', R') e, então, A, B e D. Duas soluções, apenas uma completada na Figura 387.

239 – Construir o retângulo ABCD, dada sua diagonal AC, sabendo que o vértice B equidista dos pontos dados J e K.

Resolução: A mediatriz m de JL dá os pontos B_1 e B_2 nas interseções com o arco capaz de 90° para AC e as duas soluções AB_1CD_1 e AB_2CD_2 (Figura 388).

240 – Mesmo problema para um losango ABCD.

Resolução: Semelhante à anterior, com uma só solução (Figura 389), já que há apenas um ponto B comum às mediatrizes de JK e de AC.

241 – Construir o losango ABCD circunscrito a um círculo dado O, o ângulo B sendo igual ao ângulo dado α , o vértice B equidistando dos pontos dados J e K.

Resolução: Construídas duas tangentes a (O) paralelas aos lados de α , vem o ponto P e a circunferência (O, OP), lugar geométrico dos pontos que veem (O) sob o ângulo α , corta a mediatriz m de JK, proporcionando o vértice B, com duas soluções, a segunda não completada na Figura 390, indicada pelo ponto B_2 .

242 – Construir o retângulo ABCD, com $AD = 2 \cdot AB$, A em r, B em s, AB paralela a w, e C capaz de enviar tangentes iguais às circunferências (O) e (O'), limitadas a seus pontos de contato. Dados r, s, w, (O) e (O').

Resolução: Construído um retângulo auxiliar A'B'C'D', conforme os dados, como o vértice C deve pertencer ao eixo radical ER das duas circunferências dadas (número 18), uma homotetia de polo J, ponto comum às retas r e s, traz C em ER e, com paralelas, o retângulo pedido (Figura 391).

243 – Dadas duas circunferências (O, R) e (O', R'), pede-se construir o losango ABCD, A e C pertencendo a cada uma das circunferências, conhecendo o centro G, do losango, sabendo que A e C correspondem à maior dimensão para a diagonal AC e que o vértice B equidista das retas p e q. Dados (O, R), (O', R'), G, p e q.

Resolução: Para obter a diagonal AC, basta construir a circunferência (\bar{O} , R), simétrica de (O, R), em relação ao ponto G, e determinar suas interseções com a segunda circunferência dada (O', R'), escolhendo, dos pontos de corte, o mais distante, C, de G (Figura 392).

Construída a diagonal AC, o vértice B há de ser a interseção da mediatriz m de AC com uma das bissetrizes b_1 e b_2 , dos ângulos formados pelas retas p e q, a segunda posição para B, não completada, indicada pelo número 2.

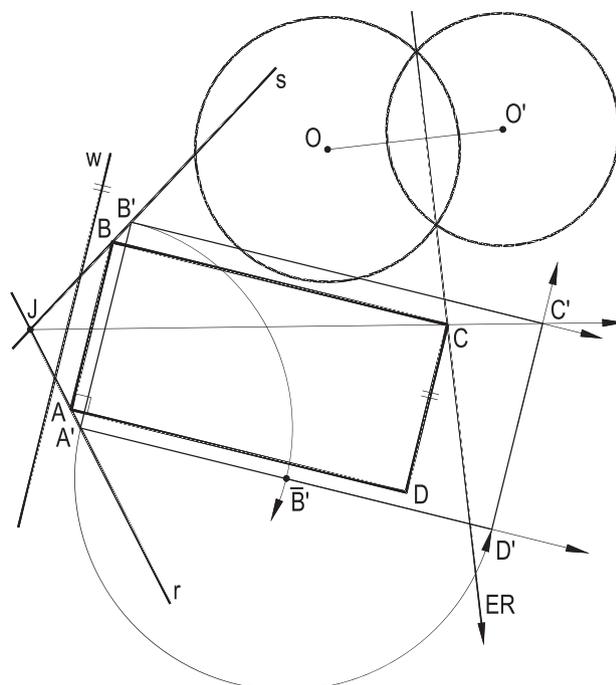


Figura 391

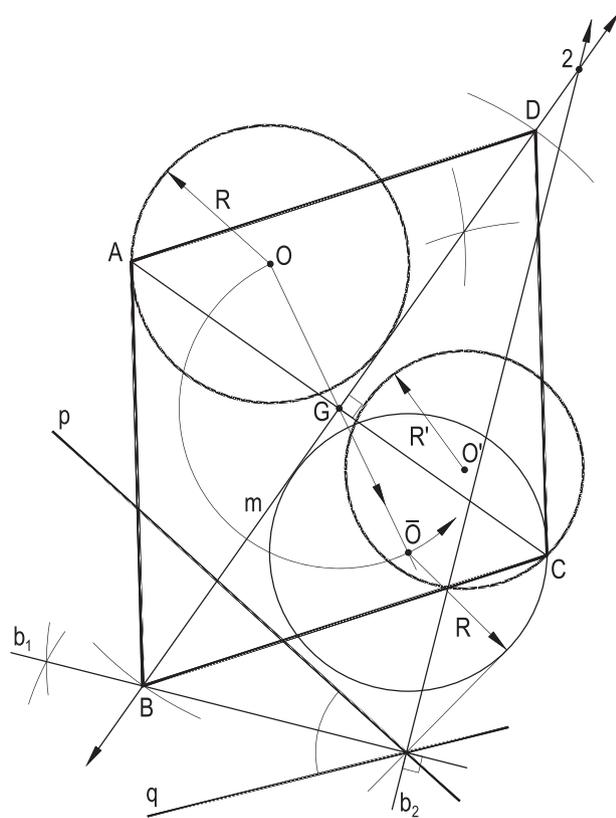


Figura 392

CAPÍTULO V

POLÍGONOS

46 – Definições e propriedades

Reverendo tudo o que foi detalhado nos capítulos II e XV do livro *Geometria Plana*, edição de 2020, deste autor, passa-se a listar as principais definições e propriedades dos polígonos, como preparação para os problemas a seguir propostos.

Como de hábito, a numeração segue a do capítulo anterior.

47 – Classificações

Quanto ao gênero, são triângulos, quadriláteros, pentágonos, hexágonos, etc., quanto à forma podem ser convexos, côncavos ou entrecruzados (ou estrelados) e, quanto às dimensões, são ditos equiláteros quando têm todos os lados iguais (Figura 393), equiângulos quando todos os seus ângulos internos são iguais (Figura 394) e regulares quando são simultaneamente equiláteros e equiângulos (Figuras 395 e 396).

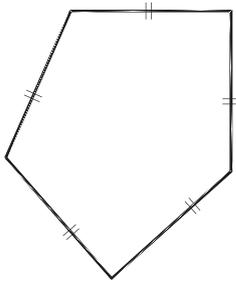


Figura 393

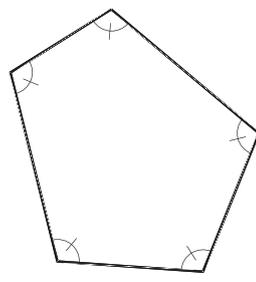


Figura 394

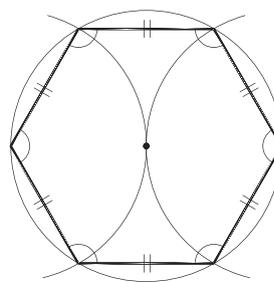


Figura 395

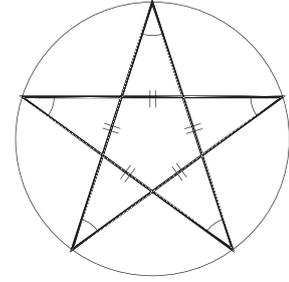


Figura 396

48 – Elementos

Os principais, de uso corrente, são os ângulos internos e externos, as diagonais, os perímetros, as espécies e aqueles próprios dos polígonos regulares, como os apótemas e os raios dos círculos inscritos e circunscritos.

49 – Polígonos regulares

As principais propriedades dos polígonos regulares, convexos ou estrelados, são:

1 – Todo polígono regular é inscrito num círculo, cujos centro e raio são denominados, mesmo que nem sempre adequadamente, centro e raio do polígono (Figuras 397 e 398).

2 – Todo polígono regular é circunscritível a um círculo, concêntrico com o circunscrito. O raio do círculo inscrito mede o valor do apótema do círculo (Figuras 397 e 398).

3 – Em todo polígono regular as bissetrizes dos ângulos internos e as mediatrizes de todos os seus lados concorrem num mesmo ponto, o centro do polígono (Figuras 397 e 398).

4 – Em todo polígono regular, os ângulos externos são iguais aos ângulos centrais (Figura 399).

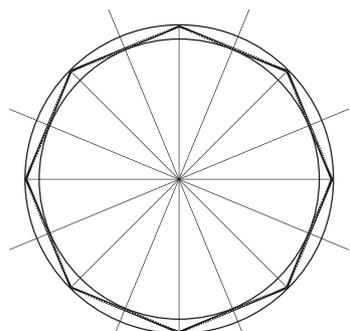


Figura 397

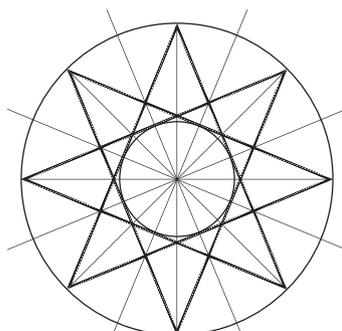


Figura 398

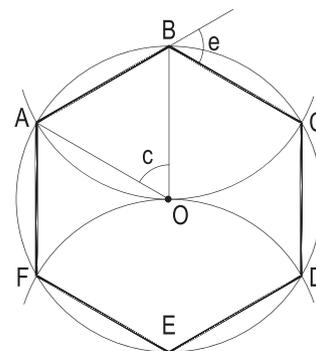


Figura 399

50 – Duplicação do gênero

Considerado um polígono regular qualquer ABCD... inscrito numa circunferência (O), para duplicar seu gênero basta traçar as perpendiculares, por O, aos seus lados, proporcionando o polígono AMBNCPD..., também regular e com o dobro do número de lados do original, visto que a cada lado deste correspondem dois lados do obtido (Figura 400).

E essas duplicações podem se suceder, tanto quanto se deseje, para obter novos polígonos regulares, sempre com gêneros dobros dos anteriores, como o polígono AXMYBZN... da Figura 401.

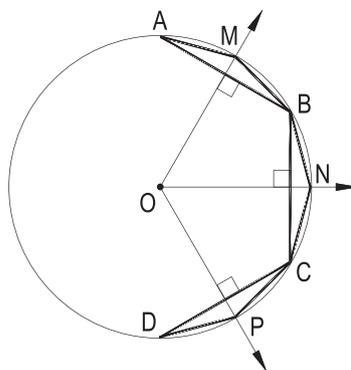


Figura 400

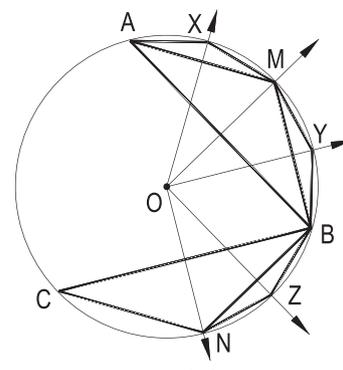


Figura 401

51 – Construção dos polígonos regulares de gênero da forma $2 \cdot 2^n$, inscritos numa circunferência dada

Dada uma circunferência (O, R) , para nela inscrever polígonos regulares com 4, 8, 16, 32, etc. lados, ou seja, com gêneros da forma $2 \cdot 2^n$, começando com o quadrado ABCD, basta traçar dois diâmetros perpendiculares e, para os octógonos regulares, duplicar o gênero 4, com as perpendiculares, por O, aos lados do quadrado (Figura 402), observando que as uniões ordenadas desses oito pontos podem proporcionar um octógono regular convexo (Figura 403) ou estrelado (Figura 404), este de espécie 3.

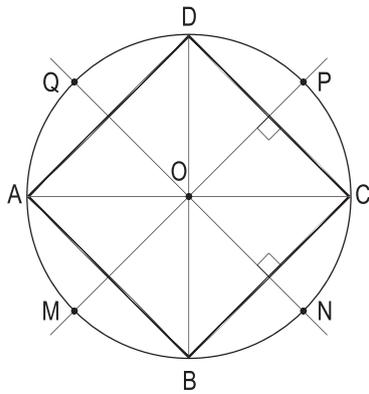


Figura 402

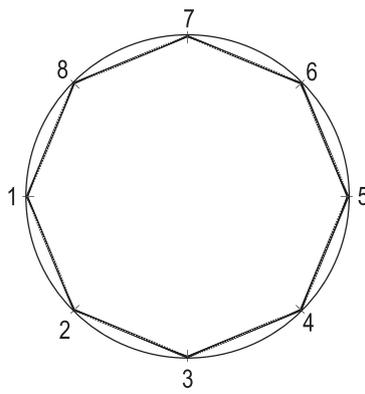


Figura 403

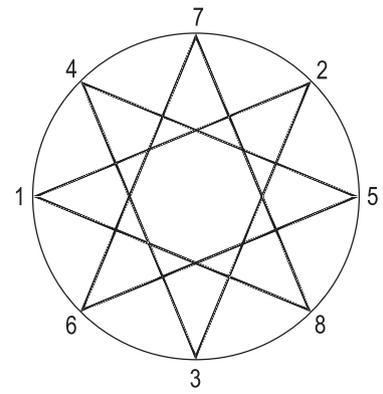


Figura 404

Com o mesmo procedimento duplica-se o gênero 8 para se obter os polígonos regulares de gênero 16, tanto o convexo, quanto os estrelados de espécies 3 (Figura 405), 5 (Figura 406) e 7 (Figura 407), pelas uniões dos pontos em que se dividiu a circunferência, respectivamente, de 1 em 1, de 3 em 3, de 5 em 5 e de 7 em 7.

E repetindo tais operações obtêm-se polígonos regulares com gêneros 32, 64, 128, ..., ou seja $2 \cdot 2^4$, $2 \cdot 2^5$, $2 \cdot 2^6$, ..., todos da forma $2 \cdot 2^n$.

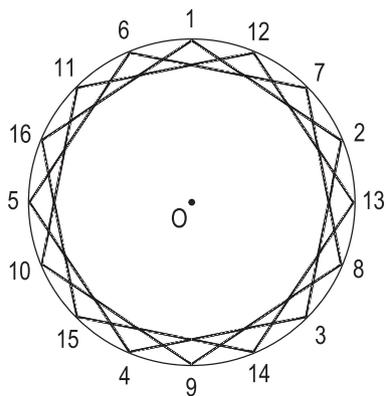


Figura 405

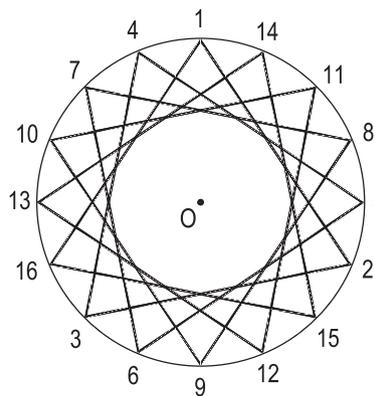


Figura 406

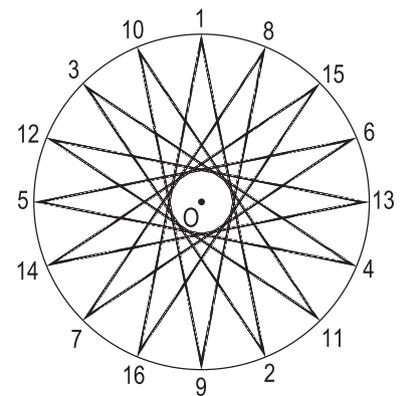


Figura 407

52 – Construção dos polígonos regulares de gênero da forma $3 \cdot 2^n$, inscritos numa circunferência dada

O início consiste em, aproveitando o valor do raio R da circunferência dada (O, R) , como cordas, construir o hexágono regular inscrito $ABCDEF$ e, com três pontos de divisão alternados, o triângulo equilátero inscrito AEC (Figura 408).

Duplicando o gênero do hexágono, com as perpendiculares, por O , aos seus lados, obtêm-se os doze pontos de divisão que trazem dodecágonos regulares convexo (Figura 409) e estrelado (Figura 410), de espécie 5.

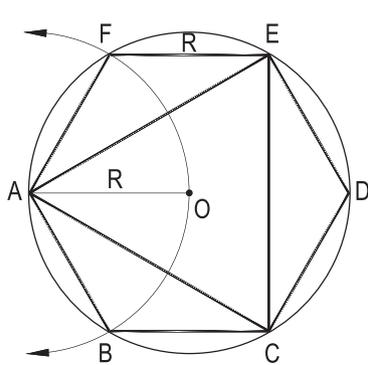


Figura 408

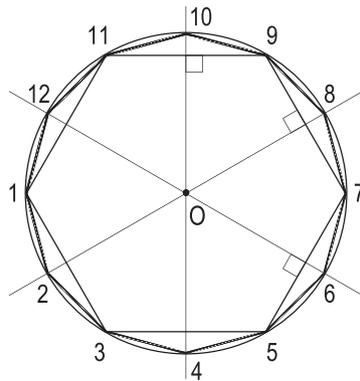


Figura 409

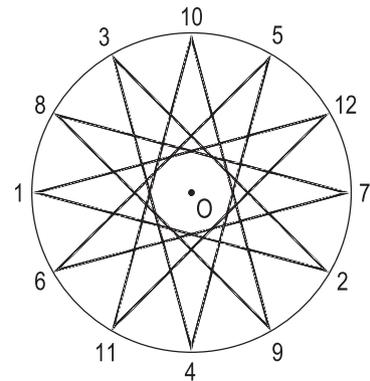


Figura 410

Com igual procedimento e a partir do dodecágono convexo regular, duplicando seu gênero, mais uma vez com perpendiculares de seu centro aos seus lados, obtêm-se os 24 pontos de divisão da circunferência em partes iguais, que proporcionam por suas uniões 1 a 1 (Figura 411), 5 a 5 (Figura 411), 7 a 7 (Figura 412) e 9 a 9 (Figura 413), respectivamente, convexo e estrelados, de espécies 5, 7 e 9.

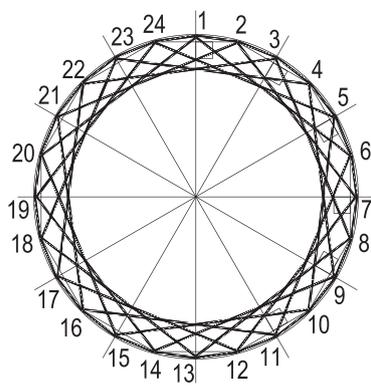


Figura 411

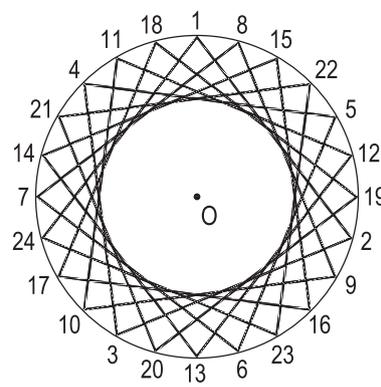


Figura 412

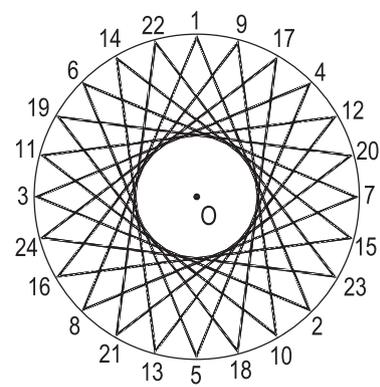


Figura 413

A repetição da operação de duplicações de gênero proporciona, a partir disso, polígonos regulares com 48, 96, 192, ..., $3 \cdot 2^n$ lados.

53 – Construção dos polígonos regulares de gênero da forma $5 \cdot 2^n$, inscritos numa circunferência dada

Aqui tratamos da construção dos pentágonos, decágonos, icoságonos e, enfim, dos polígonos regulares de gêneros $5 \cdot 2^0$, $5 \cdot 2^1$, $5 \cdot 2^2$, ..., todos da forma $5 \cdot 2^n$, inscritos numa circunferência (O), dada.

Sabe-se (*Geometria Plana*, números 276, 278, 279, 291 e Capítulo XX, problemas 66, 67, 68 e 69), que as determinações das medidas l_5 , l_{10} , l_5^* e l_{10}^* dos lados do pentágono convexo, do decágono convexo e dos pentágonos e decágonos estrelados, respectivamente, de espécies 2 e 3, todos regulares, inscritos na circunferência dada, se fazem, a partir de dois diâmetros perpendiculares AB e CD, pelos traçados dos arcos de círculo de centro no ponto M, médio de AO, e raio MC, cujas cordas CJ e CL medem, respectivamente, l_5 e l_5^* , proporcionando ainda os segmentos OJ e OL, medidas de l_{10} e l_{10}^* (Figuras 414 e 417).

E, então, com suas aplicações consecutivas, vêm as determinações dos pentágonos regulares convexo (Figura 415) e estrelado (Figura 418) e dos decágonos regulares convexo e estrelado (Figuras 416 e 419).

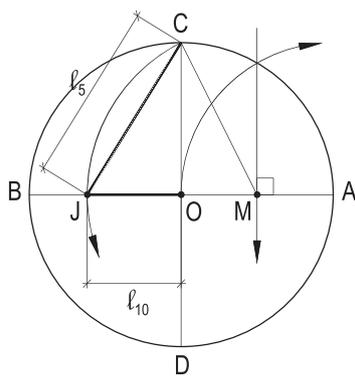


Figura 414

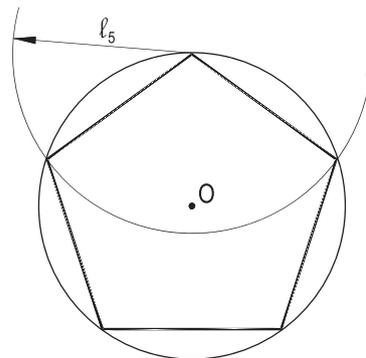


Figura 415

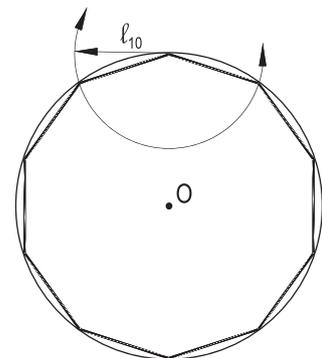


Figura 416

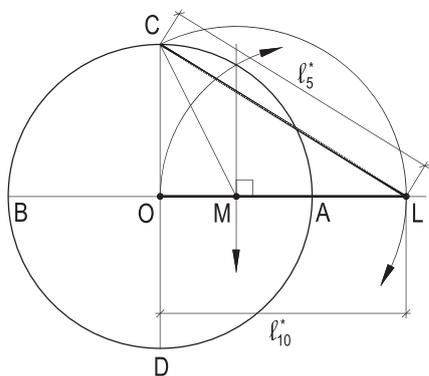


Figura 417

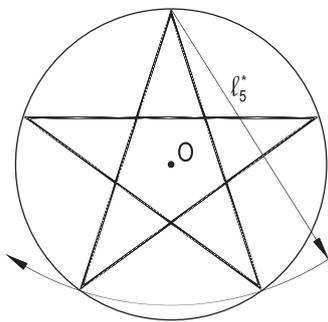


Figura 418

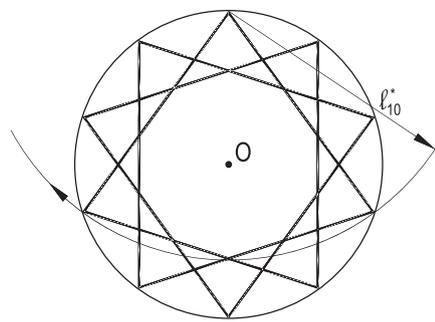


Figura 419

Naturalmente, os dois decágonos regulares inscritos no círculo (O), dado, podem ser obtidos pela duplicação do gênero do pentágono convexo regular (ver número 50) (Figura 420) e pelas uniões adequadas dos pontos de divisão da circunferência do círculo dado.

Da mesma forma, pode-se duplicar o gênero do decágono convexo regular (Figura 421) para obter os 20 pontos de divisão da circunferência dada, que, unidos sequencialmente, trazem o icoságono convexo regular inscrito (Figura 422) e, pelas uniões 3 a 3, 7 a 7, ou 9 a 9 desses pontos, são obtidos os icoságonos estrelados regulares, respectivamente, de espécies 3 (Figura 423), 7 (Figura 424) e 9 (Figura 425).

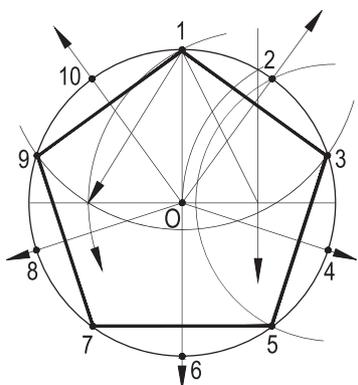


Figura 420

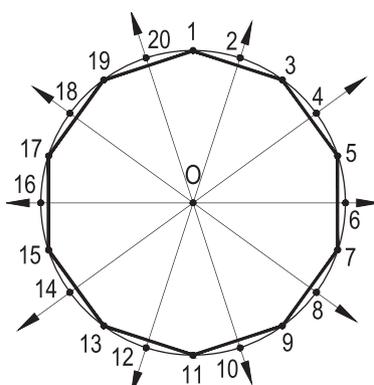


Figura 421

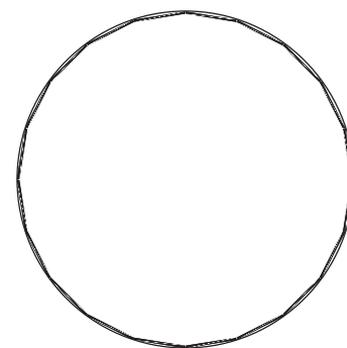


Figura 422

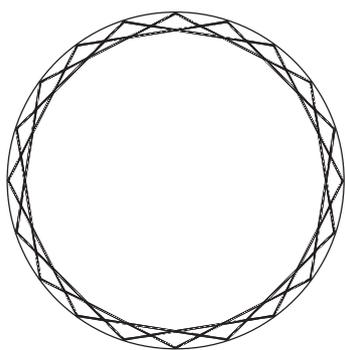


Figura 423

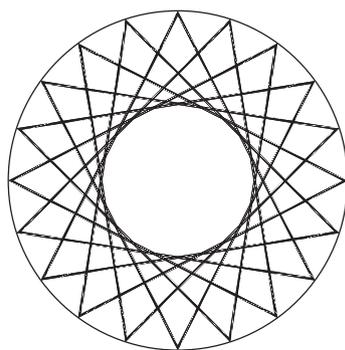


Figura 424

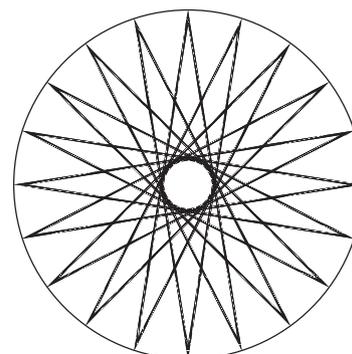


Figura 425

54 – Construção de polígonos regulares de qualquer gênero, inscritos numa circunferência dada. Método de Rinaldini

O procedimento natural para inscrever um polígono regular qualquer numa circunferência dada, ou seja, para dividi-la em um número qualquer de partes exatamente ou aproximadamente iguais, consiste em calcular o ângulo central do polígono convexo regular desejado, pela divisão de 360° pelo gênero do polígono e pela utilização de um transferidor para a marcação do ângulo central obtido com essa divisão, nem sempre, naturalmente, um valor exato.

Marcado o primeiro arco da divisão, sua repetição completa o procedimento.

Outro processo, genérico também, para a divisão da circunferência dada em um número qualquer de partes aproximadamente iguais, é o método de Rinaldini, que consiste em dividir um diâmetro qualquer AB da circunferência em tantas partes iguais quanto o gênero do polígono desejado (7, na Figura 426, e 9, na Figura 427), determinar o vértice J do triângulo equilátero JAB, o polo da divisão, unir o ponto J aos de divisão do diâmetro AB, marcando seus traços, 1, 2, 3, etc, na circunferência e traçando, por eles, perpendiculares a AB, obter, na circunferência dada (O), os vértices do polígono regular procurado, que devem ser unidos alternadamente, proporcionando, tais polígonos, um heptágono convexo regular na Figura 426 (com vértices 1, 3, 5, 7, 9, 11 e 13) e um eneágono convexo regular na Figura 418 (com vértices 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15 e 17).

Observe-se que, obtida a divisão da circunferência dada, pode-se desenhar, tanto um polígono convexo regular, como o heptágono da Figura 426, quanto o estrelado de mesmo gênero e, neste exemplo, de espécie 2 (com vértices 1, 5, 9, 13, 3, 7 e 11, nesta ordem), apresentado com linhas tracejadas nessa figura.

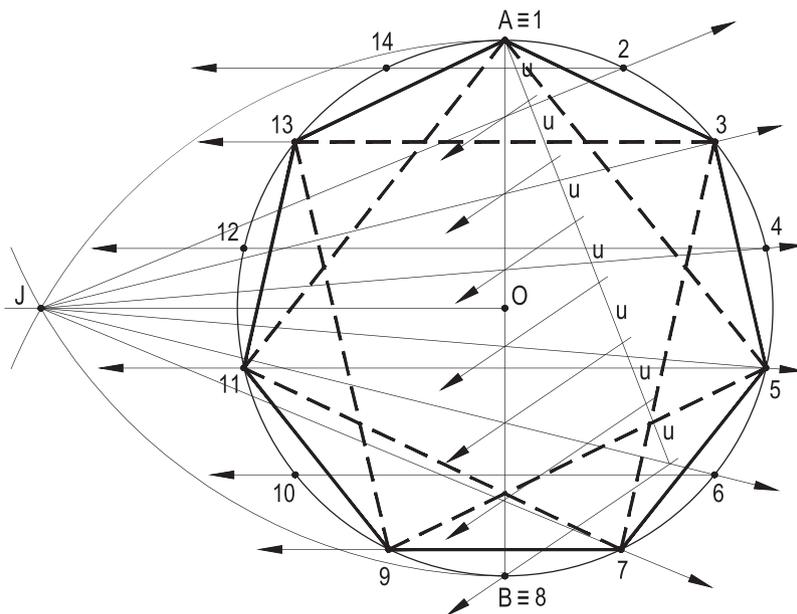


Figura 426

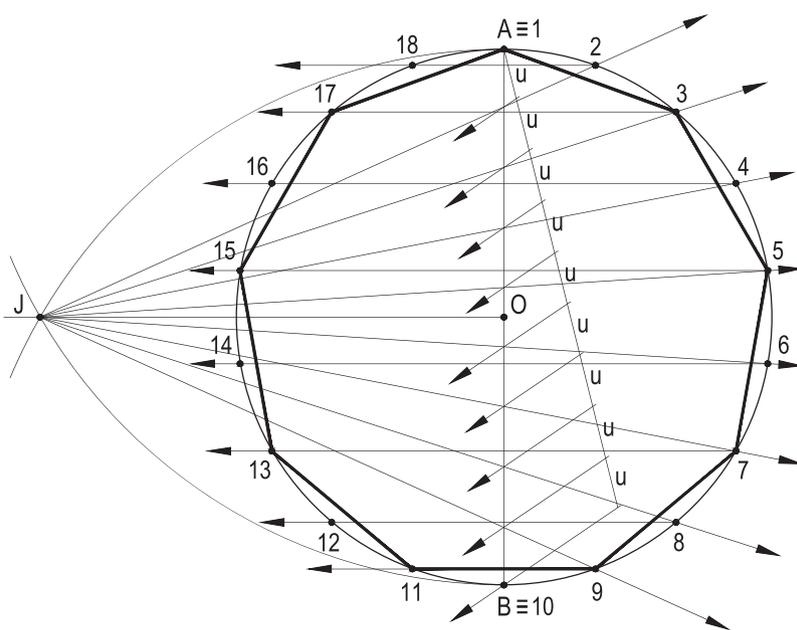


Figura 427

55 – Construção de polígonos regulares circunscritos a uma circunferência dada

Sabe-se (*Geometria Plana*, número 272) que, quando se divide uma circunferência em n parte iguais, o polígono formado pelas tangentes a ela nesses pontos de divisão é regular, com esse gênero n . Esse é, então, o procedimento usual para construir um polígono regular convexo ou estrelado, de qualquer gênero, circunscrito a uma circunferência dada, após sua divisão em tantas partes iguais quanto o gênero do polígono pedido. Assim são os polígonos convexos regulares (Figuras 428, 429, 430, 431 e 434) e os estrelados (Figuras 432 e 433), nos exemplos abaixo.

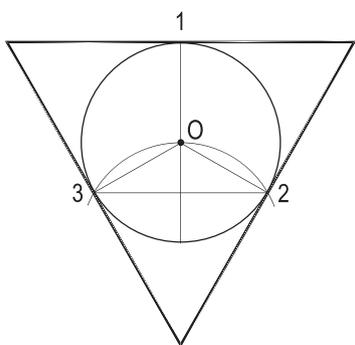


Figura 428

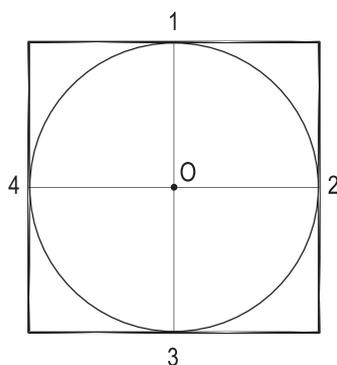


Figura 429

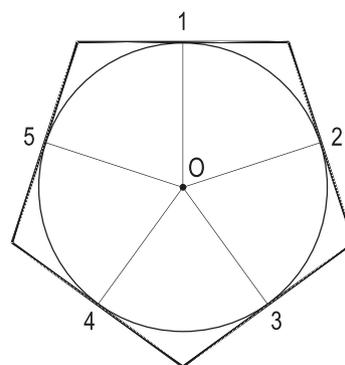


Figura 430

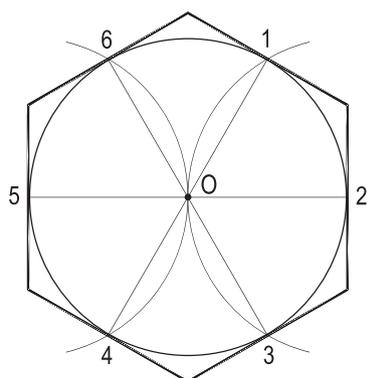


Figura 431

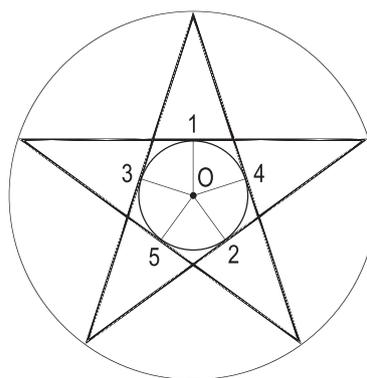


Figura 432

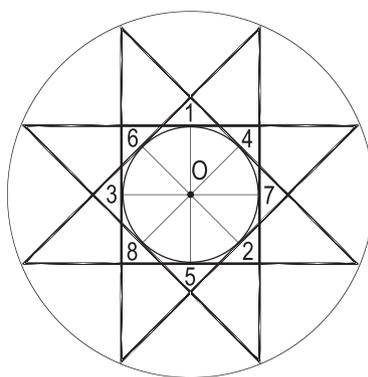


Figura 433

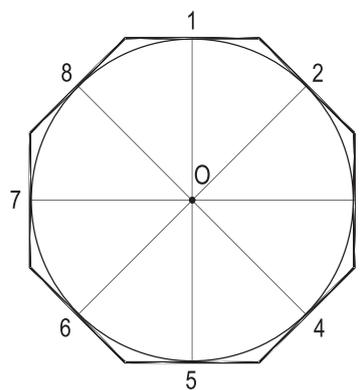


Figura 434

56 – Construção de polígonos regulares, dos quais é dado um lado AB

A resolução natural consiste em, calculado o ângulo interno do polígono, traçar, com o emprego do transferidor, a reta suporte do lado seguinte BC e determinar pelas mediatrizes de AB e de BC o centro O do polígono para, com a repetição de cordas iguais a AB, completá-lo, tal como apresentado nas Figuras 435 a 437 e 438 a 440.

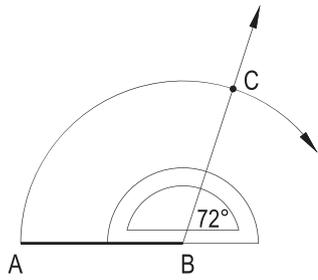


Figura 435

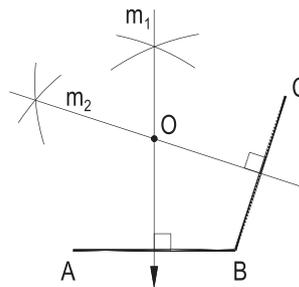


Figura 436

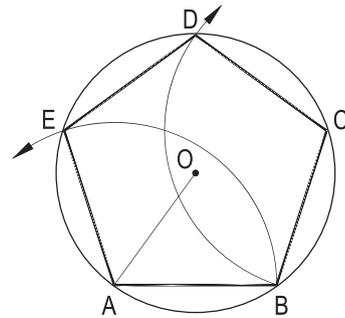


Figura 437

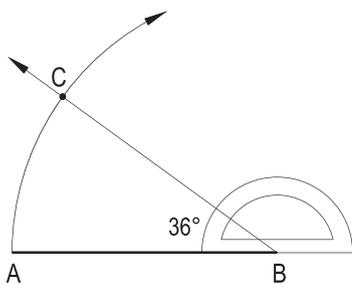


Figura 438

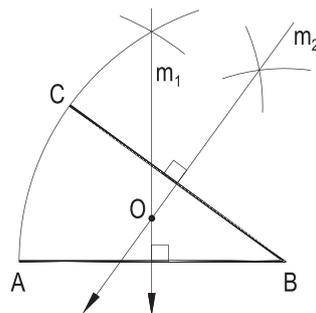


Figura 439

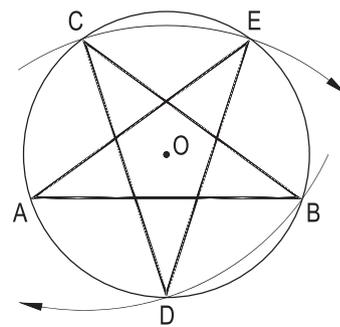


Figura 440

Outro procedimento consiste na construção de um polígono regular auxiliar de gênero e espécie iguais aos do pedido, com um lado $A'B'$ paralelo a AB e operar com adequada homotetia (Figura 441), o polo P obtido pelo corte das retas AA' e BB'.

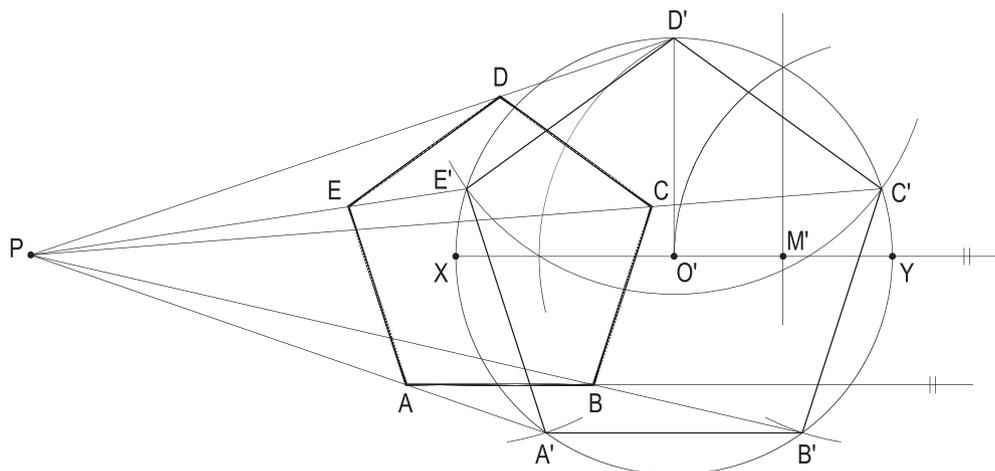


Figura 441

57 – Construção de polígonos

Dando sequência às numerações dos capítulos anteriores, vão listadas cerca de duas dezenas de problemas resolvidos concernentes à construção de diversos polígonos.

244 – Construir o pentágono convexo ABCDE circunscrito à circunferência (O), sabendo que o lado DE é paralelo à reta r. Dados A, C, r e (O).

Resolução: As tangentes A1, A2, C3, C4 e a paralela a r, pelo ponto 5, entregam o pentágono (Figura 442).

245 – Circunscrever à circunferência dada (O) um hexágono convexo que tenha lados paralelos aos lados do triângulo órtico do triângulo dado ABC.

Resolução: As perpendiculares, por O, aos lados do triângulo A'B'C', órtico do dado, trazem os pontos de tangência 1, 2, 3, 4, 5 e 6 (Figura 443).

246 – Completar o pentágono convexo equilátero ABCDE, sabendo que E e C pertencem, respectivamente, às semirretas dadas Ax e By.

Resolução: Conhecido o lado AB, seus rebatimentos sobre Ax e By trazem os vértices E e C e o último D vem com a interseção das circunferências (E, EA) e (C, CB), dispensado o segundo corte, para que o pentágono seja convexo (Figura 444).

247 – Construir o hexágono regular ABCDEF, sabendo que B pertence à semirreta dada Ax e que seu centro equidista das paralelas r e s, também dadas.

Resolução: O centro O é o ponto de corte da reta t, equidistante de r e de s, com w, por A, inclinada de 60° com Ax (Figura 445).

248 – Construir o hexágono equiângulo ABCDEF, dados o lado AB e a reta r, suporte da diagonal CF, sabendo que são iguais os lados EF e FA.

Resolução: Sendo equiângulo o hexágono, seus ângulos externos têm que medir 60° , o que proporciona (Figura 446) os vértices C e F, o vértice E tendo que pertencer à paralela a BC, por F.

249 – Construir o pentágono convexo regular ABCDE, dado o lado AB.

Resolução: Com a mediatriz m de AB, arbitrados os pontos O' e D', vem a construção do pentágono auxiliar regular A'B'C'D'E', que dá as direções dos lados da solução (Figura 447).

244

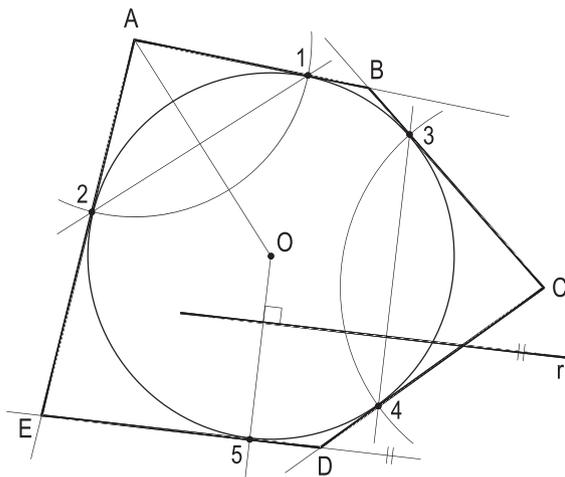


Figura 442

245

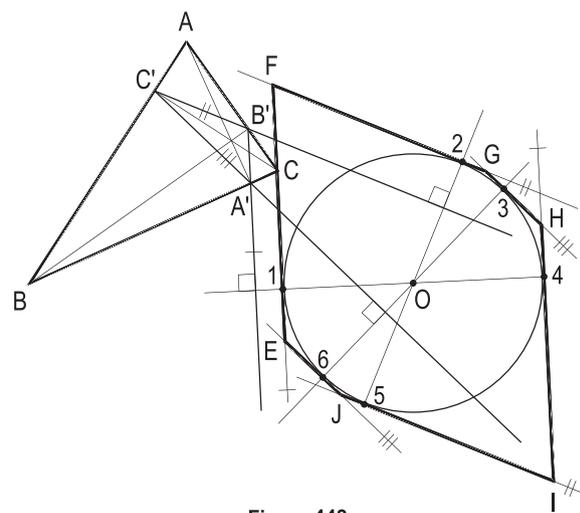


Figura 443

246

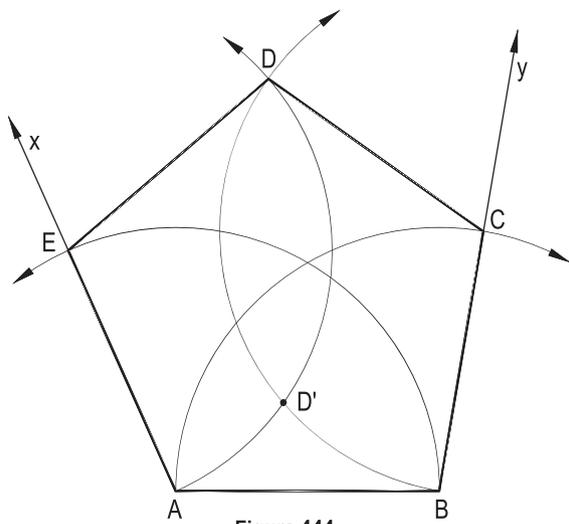


Figura 444

247

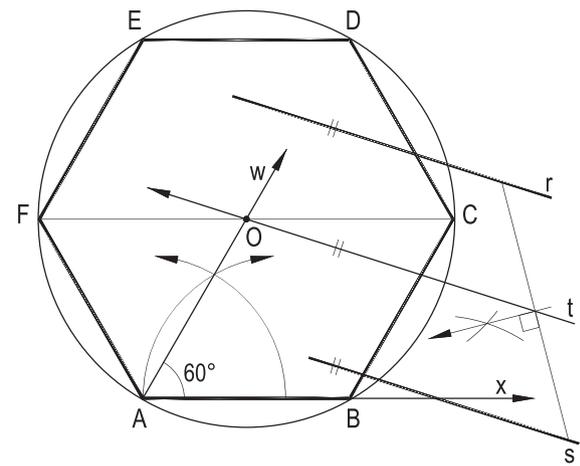


Figura 445

248

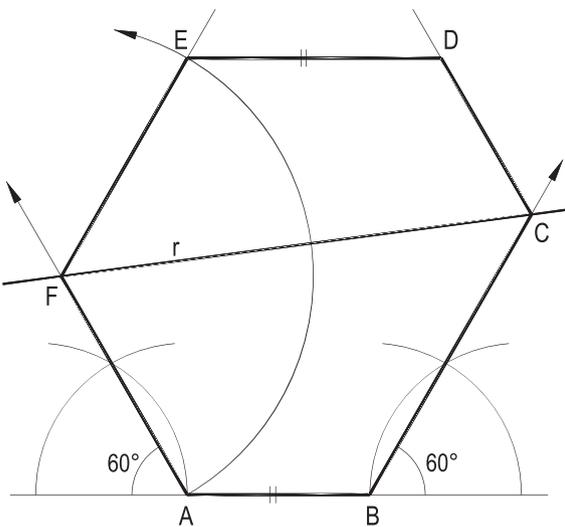


Figura 446

249

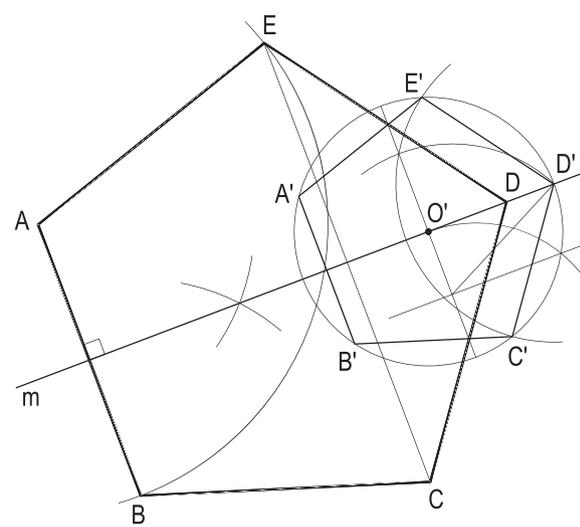


Figura 447

250 – Construir o octógono convexo regular ABCDEFGH, conhecendo seu vértice A e as retas paralelas r e s , suportes, respectivamente, dos lados AB e EF.

Resolução: Traçada a perpendicular AF às paralelas dadas, as retas, por A e por F, inclinadas de 45° com AF, e uma simples homotetia de polo A do triângulo isósceles AH'G', com os lados iguais AH' e H'G' arbitrados, trazem o vértice G e o valor FG do lado do octógono, completado com paralelas (Figura 448). Há outra solução, igual, simétrica em relação a AF.

251 – Dada a circunferência (O, OA), pede-se inscrever nela o pentágono convexo regular ABCDE e, nele, um retângulo RSTU, R em AB, S e T em CD e U em AE, a base TU medindo o dobro da altura RU.

Resolução: A construção do retângulo auxiliar R'S'T'U', com a base T'U' medindo o dobro da altura arbitrada R'U', mas paralela a CD, proporciona, com uma homotetia de polo A, a inscrição pedida (Figura 449).

252 – Dado o quadrado ABCD, considere o círculo nele inscrito e construa o pentágono convexo ABEFG circunscrito a esse círculo, E em BC, G em AD, com os lados EF e FG iguais e perpendiculares entre si.

Resolução: O vértice F tem de ser a interseção da circunferência (O, OB) (Figura 450), para garantir a perpendicularidade dos lados EF e FC, com a mediatriz m de AB, e para assegurar a igualdade desses dois lados.

253 – Construir o eneágono ABCDEFGHI regular, de segunda espécie, inscrito na circunferência (O, OA) dada.

Resolução: O método de Rinaldini (número 54) resolve a questão (Figura 451).

254 – Construir o pentágono convexo equilátero ABCDE, que tenha os lados AE e BC perpendiculares à reta r , o vértice D o mais próximo possível de r . Dados A, B e r .

Resolução: Imediata pelas repetições do valor AB nas perpendiculares, por A e por B, à reta r e com as circunferências (E, AB) e (C, AB) (Figura 452).

255 – Dadas as semirretas Ax e Ay , o ponto J e a medida r , pede-se construir o pentágono côncavo ABCDE, com todos os lados tangentes à circunferência de raio r inscrita no ângulo $\widehat{x\hat{A}y}$, o lado CD sendo perpendicular a Ax .

Resolução: As tangentes t_1 , t_2 e t_3 a (O, r) solucionam o problema, os vértices B e C em t_1 , os vértices D e E em t_2 e o lado CD na tangente t_3 , perpendicular a Ax (Figura 453).

250

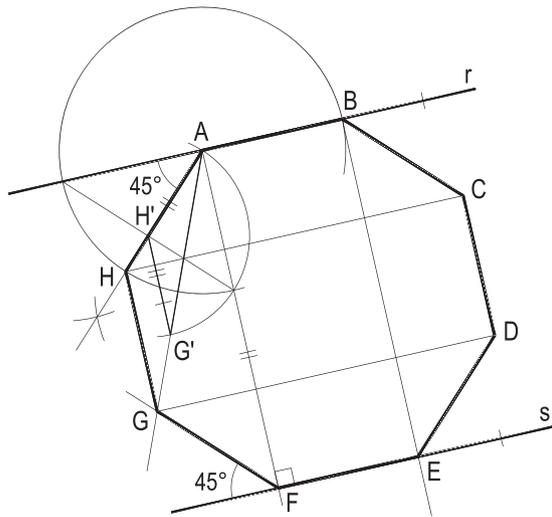


Figura 448

251

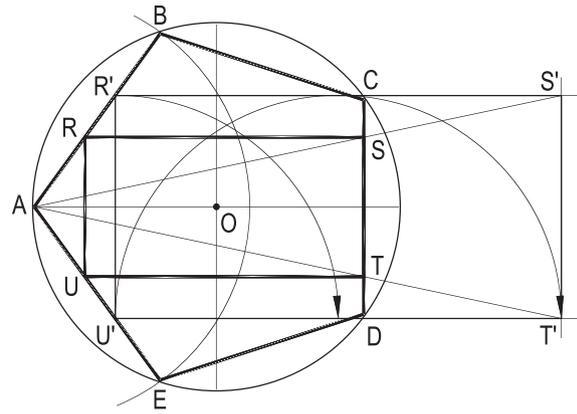


Figura 449

252

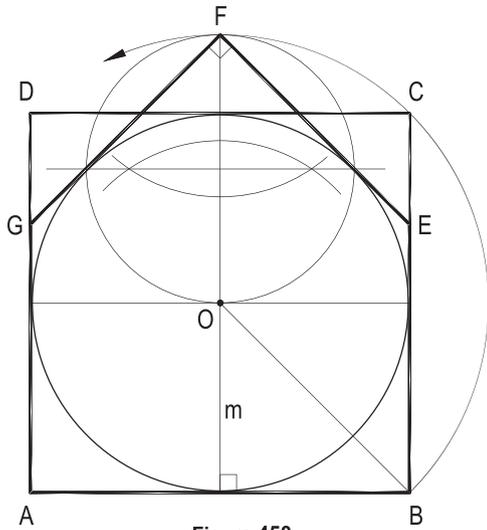


Figura 450

253

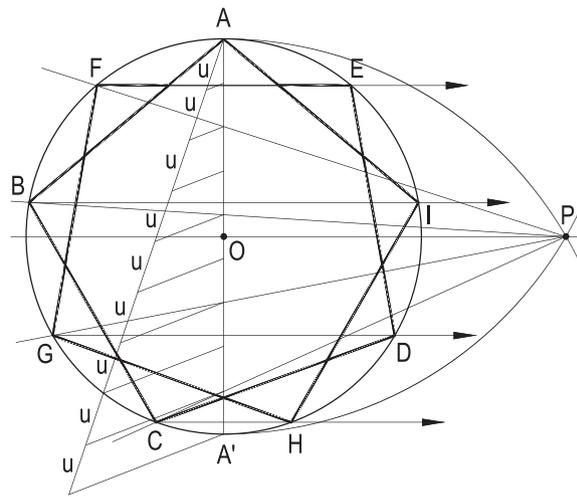


Figura 451

254

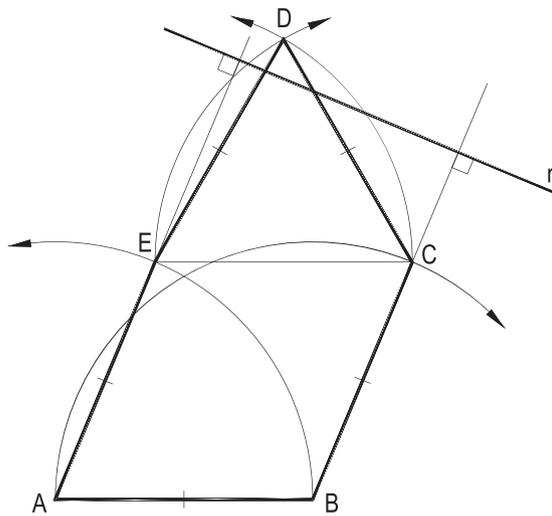


Figura 452

255

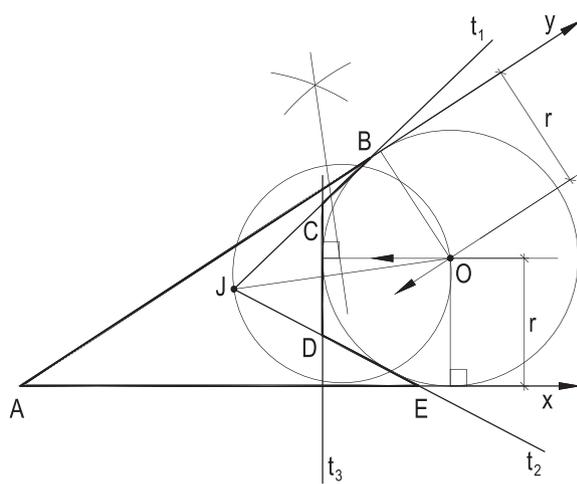


Figura 453

256 – Determinar a verdadeira grandeza do hexágono regular ABCDEF, do qual são dados os pontos médios M e N de dois lados consecutivos AB e BC.

Resolução: Como análise, observe-se que o triângulo formado por M, N e pelo centro O da circunferência circunscrita ao hexágono é equilátero e que os lados AB e BC são perpendiculares a OM e ON, respectivamente (Figura 454).

Daí a construção (Figura 457), obtendo-se, inicialmente, O e B e, então, a circunferência (O, OB), que proporciona o hexágono.

257 – Mesmo problema, dados os pontos M e P, médios de dois lados alternados AB e CD.

Resolução: Na análise (Figura 455), observe-se o triângulo equilátero ONP e o losango MOPN. Resolvendo, a reta r, por P, inclinada de 30° com MP, e a mediatriz m de MP trazem o centro O e o vértice B na perpendicular, por P, a r (Figura 458).

258 – Mesmo problema, os pontos M e Q sendo médios de dois lados opostos AB e DE.

Resolução: O ponto O, médio de MQ, é o centro do hexágono (Figura 456) e as perpendiculares r e s a MQ por Q e M trazem os vértices A, B, D e E (Figura 459).

259 – Construir o octógono estrelado regular ABCDEFGH inscrito na circunferência dada (O), A distante o mínimo da reta dada r.

Resolução: A perpendicular, por O, a r dá A (Figura 460) e a divisão da circunferência em oito partes iguais resolve a questão.

260 – Construir o pentágono não convexo ABCDE, com três ângulos retos, em A, B e no vértice D da concavidade, sabendo que E e C são equipotentes em relação às circunferências dadas (O) e (O') e que os lados CD e DE são iguais. Dado, ainda, o lado AB.

Resolução: O eixo radical ER de (O) e (O') dá os vértices C e E e a semicircunferência de diâmetro CE corta a mediatriz m de CE no último vértice D (Figura 461).

261 – O losango ABCD é formado por dois triângulos equiláteros ABD e CBD. Dada a diagonal BD, considere as mediatrizes dos lados BC e CD, que cortam a perpendicular, por C, à diagonal AC, produzindo os pontos U e T. Pede-se construir o heptágono côncavo ABSTUVD, os lados BS e VD paralelos a AC.

Resolução: Construídos o losango ABCD e as perpendiculares aos lados BC e CD, por seus pontos médios N e M (Figura 462), obtêm-se os vértices finais T e U.

256

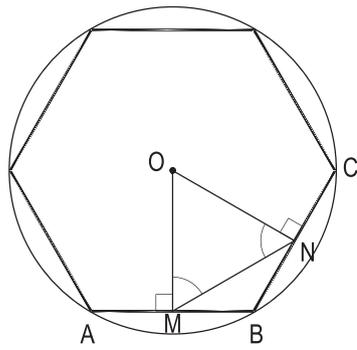


Figura 454

257

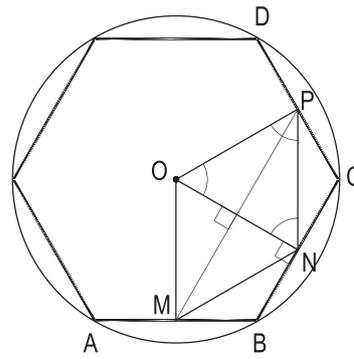


Figura 455

258

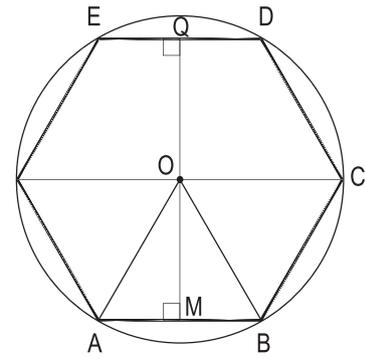


Figura 456

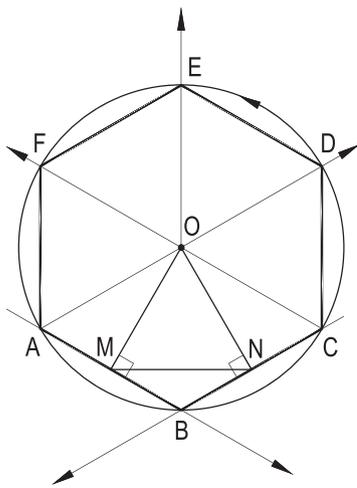


Figura 457

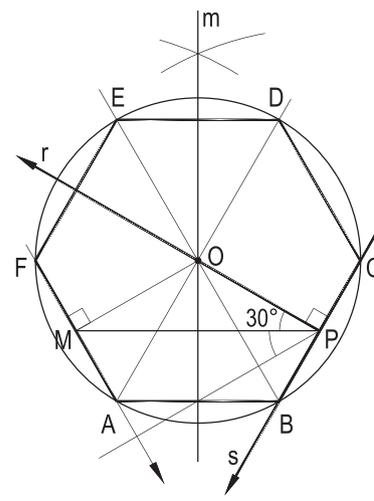


Figura 458

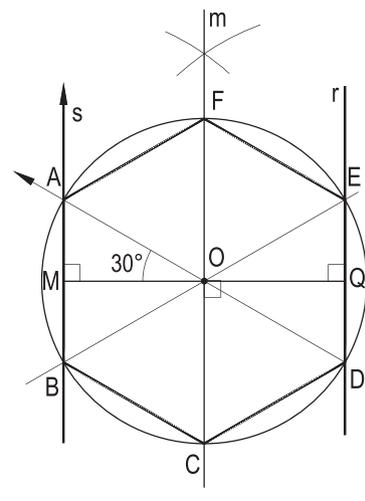


Figura 459

259

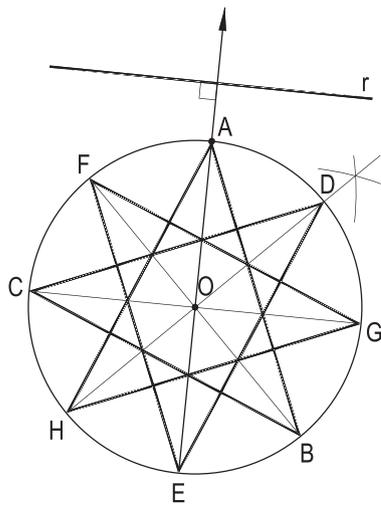


Figura 460

260

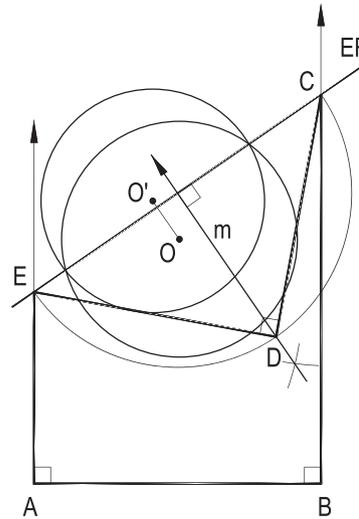


Figura 461

261

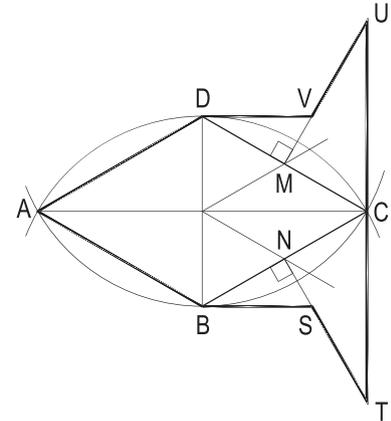


Figura 462

262 – Dadas as retas a , b , r e s e a circunferência (O) , pede-se construir o pentágono convexo $ABCDE$, inscrito em (O) , A e B equidistando de r e de s , C e D equidistando de a e de b , sabendo que são iguais os lados AE e DE , A sendo o vértice mais próximo do ponto comum às retas r e s .

Resolução: A e B são as interseções da bissetriz do ângulo que r forma com s com (O) , enquanto C e D hão de ser os cortes com (O) da reta t , equidistante de a e de b (Figura 463).

Enfim, E é o traço com (O) da mediatriz de AD .

263 – Construir o pentágono convexo regular $ABCDE$, dado pelo segmento AM , sendo M o ponto médio do lado CD .

Resolução: Arbitrado um ponto O' de AM é simples construir o pentágono convexo regular $AB'C'D'E'$, com o lado $C'D'$ perpendicular a AM . E, com homotetia de polo A , vem o pentágono regular $ABCDE$ pedido, arbitrada a ordem da sequência de seus vértices (Figura 464).

264 – Dada a circunferência (O, OA) , considere o quadrado $ABCD$ nela inscrito e construa o pentágono convexo $ABMNP$, sabendo que B fica à direita de A , que M é o médio do lado BC e que os vértices N e P pertencem à reta dada r , equidistando, respectivamente, de B e D e de A e C .

Resolução: Construído o quadrado $ABCD$, M vem com a paralela, por O , aos lados AB e CD , os vértices N e P sendo as interseções da reta dada r com as diagonais AC e BD do quadrado (Figura 465), garantindo as equidistâncias impostas.

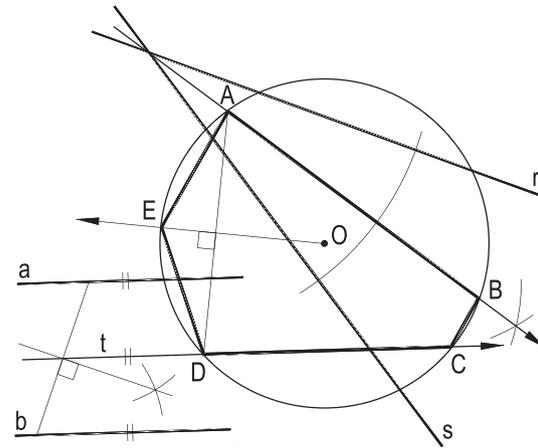


Figura 463

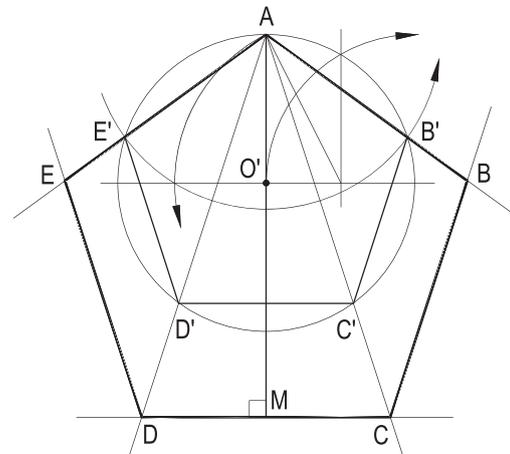


Figura 464

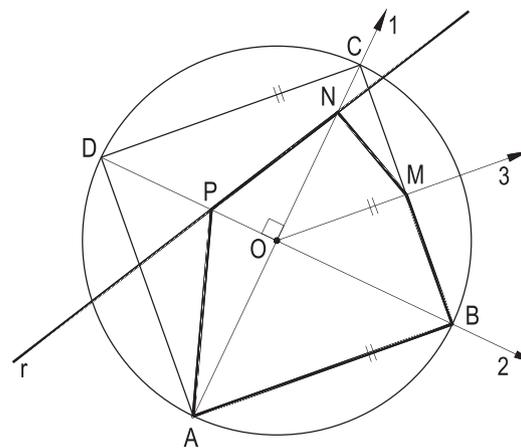


Figura 465

CAPÍTULO VI

CONCORDÂNCIAS

58 – Concordância de duas linhas

Concordar duas linha a e b por meio de uma terceira linha t é traçar t tangente às linhas a e b , de modo tal que um ponto que se movimente sobre a , em determinado sentido, passe para a linha t , no mesmo sentido, e, também assim, de t para b , sem que haja em tais movimentos qualquer solução de continuidade e sem que exista alguma inflexão.

Assim são as concordâncias nos exemplos abaixo (Figura 466, 467, 468, 469 e 470), o primeiro por uma curva t de grau superior (Figura 466) e os demais por arcos de circunferência c , concordando retas a e b paralelas ou não (Figuras 467 e 468), ou arcos de circunferência a e b (Figuras 469 e 470).

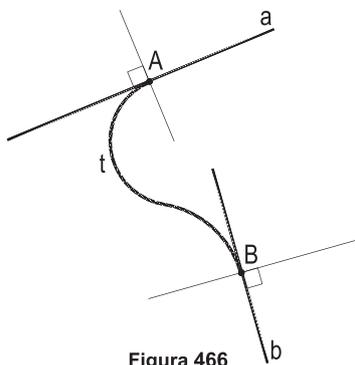


Figura 466

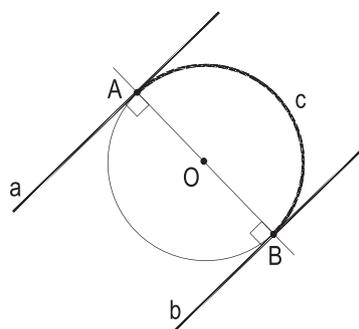


Figura 467

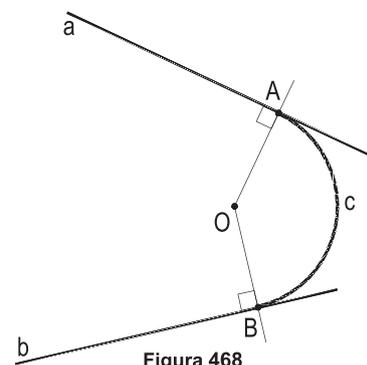


Figura 468

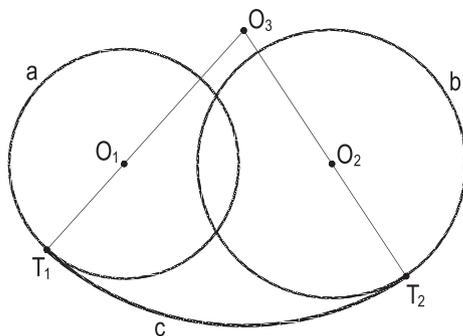


Figura 469

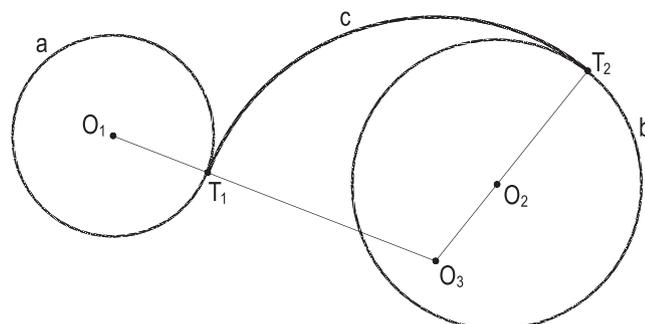


Figura 470

Nestes termos, para assegurar as tangências, devem coincidir, em cada ponto de contato (A e B, nas Figuras 466, 467 e 468, e T_1 e T_2 , nas Figuras 469 e 470), as normais às duas linhas tangentes.

59 – Concordâncias indeterminadas

De modo geral, dadas duas linhas a e b, há uma infinidade de linhas c, de iguais naturezas, capazes de concordar a e b, como nos exemplos abaixo, em que duas retas a e b (Figuras 471 e 472) ou duas circunferências (Figuras 473 e 474) são concordadas por arcos de circunferências c, havendo, em todos esses casos, uma infinidade de arcos c, com centros equidistantes das retas a e b, nos dois primeiros exemplos, ou utilizando as circunferências concêntricas às dadas com acréscimos iguais de raios, nos dois seguintes.

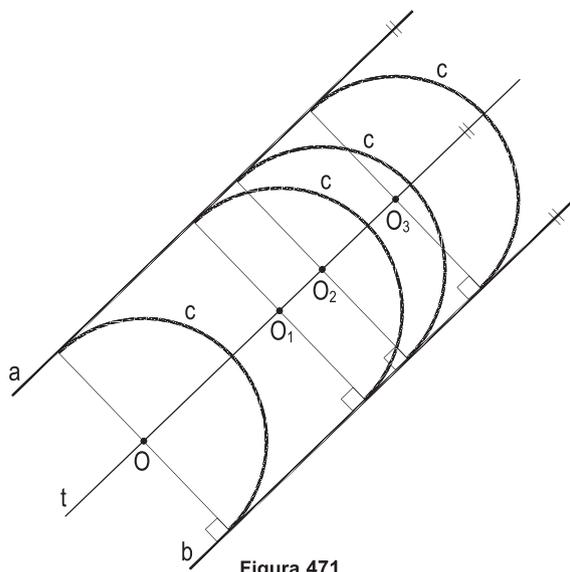


Figura 471

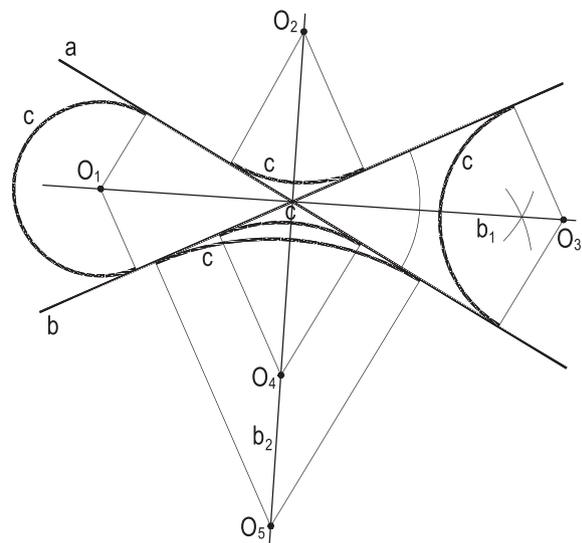


Figura 472

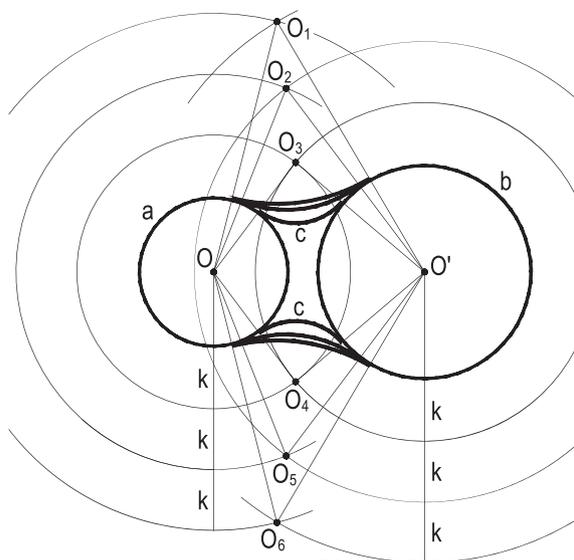


Figura 473

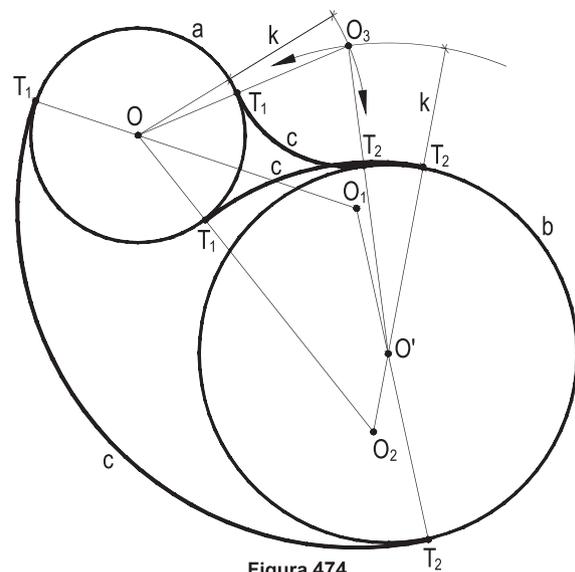


Figura 474

Mesmo quando se trata de concordar uma reta dada b com uma circunferência dada a , mediante arcos de circunferências c , existe um número infinito de soluções possíveis (Figuras 475 e 476), o que significa que tais questões sejam indeterminadas.

Adiante se verá, nos problemas propostos e resolvidos, que o fornecimento de alguma condição tornará determinadas todas essas concordâncias.

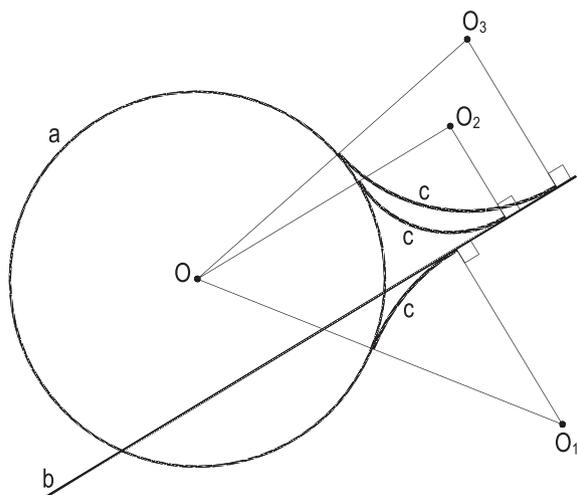


Figura 475

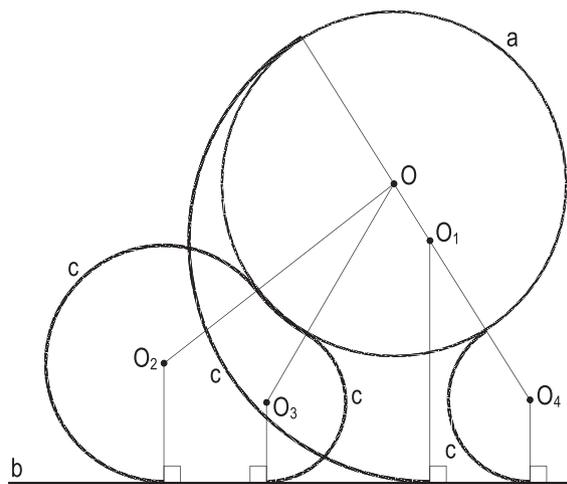


Figura 476

60 – Outras concordâncias

Nos exemplos anteriores sempre foram utilizados arcos de circunferências para concordar as linhas dadas a e b . É claro que outras curvas podem ser escolhidas para tais concordâncias, como indicado abaixo, com um arco de elipse MN' , na Figura 477, de hipérbole MA' , na Figura 478, ou de parábola NN' , na Figura 479, sempre concordando duas retas a e b .

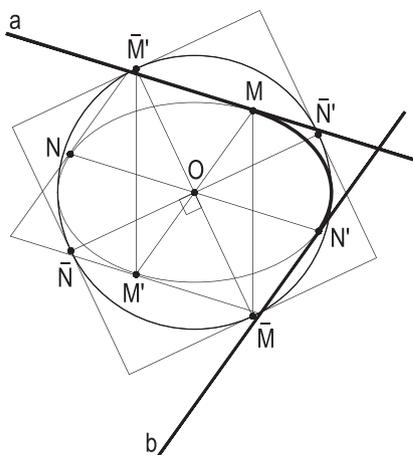


Figura 477

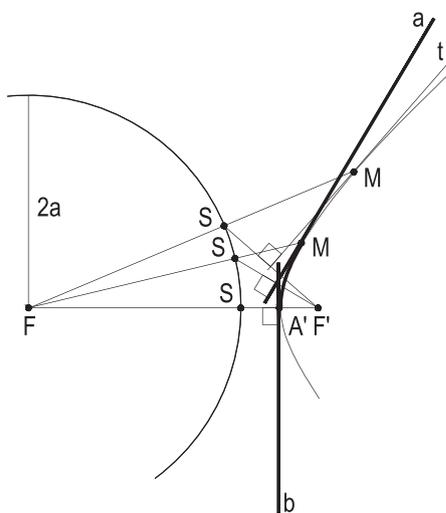


Figura 478

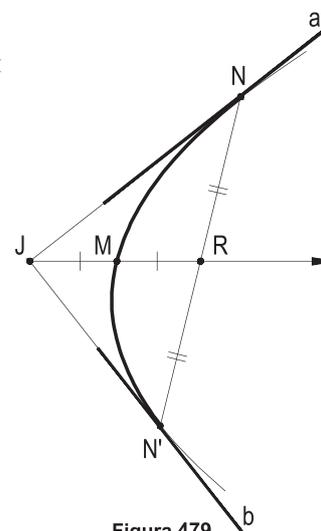


Figura 479

61 – Concordâncias simples e compostas

Uma concordância entre duas linhas dadas a e b pode ser construída utilizando apenas uma única linha curva c , como em todos os exemplos até agora apresentados, mas pode, também, contar com duas, ou mais, curvas c , naturalmente, concordantes, em sequência, duas a duas.

Quando apenas uma curva c concorda as duas linhas dadas a e b , diz-se que a concordância é simples, e, em todos os demais casos, como os apresentados abaixo, a concordância é denominada composta.

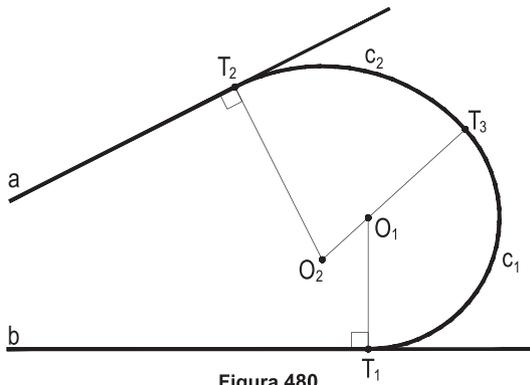


Figura 480

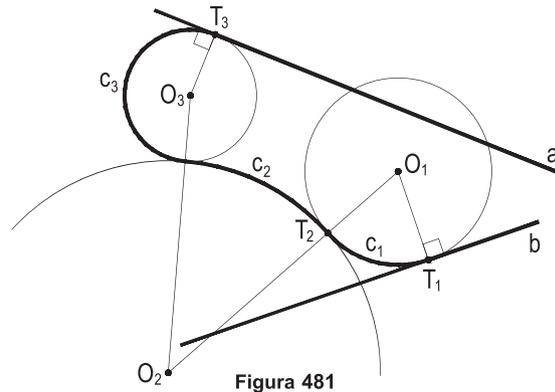


Figura 481

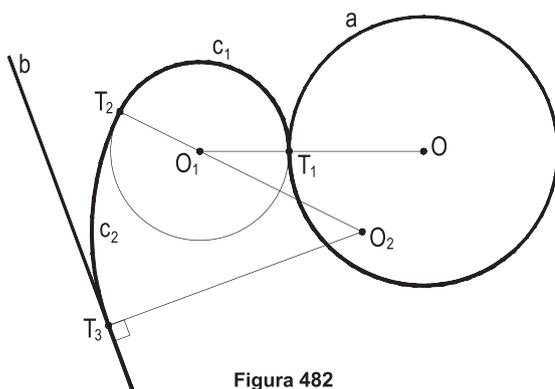


Figura 482

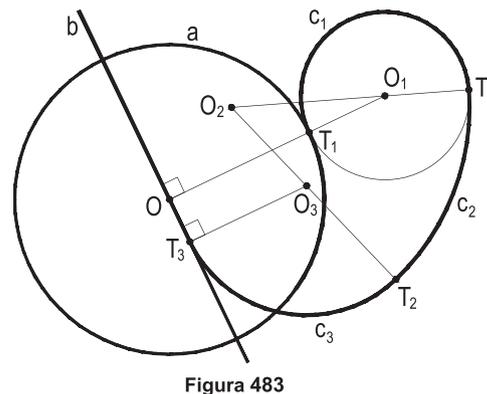


Figura 483

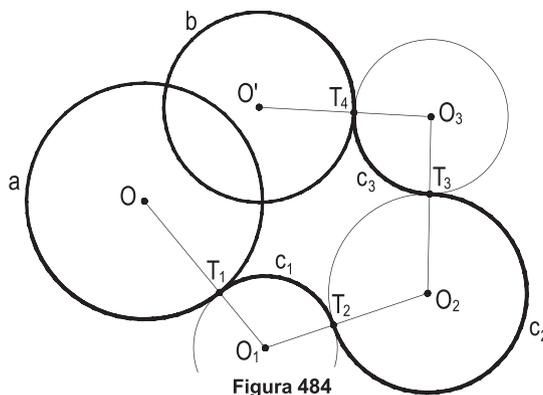


Figura 484

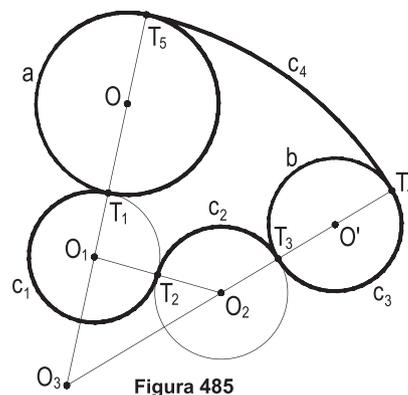


Figura 485

62 – Construção de concordâncias simples por arcos de circunferência

Nos problemas listados nesta parte, simples ainda, serão pedidas as concordâncias de duas linhas dadas a e b por um arco de circunferência c , que obedeça a determinadas condições, especificadas caso a caso.

A numeração segue, como sempre, a do capítulo anterior.

Os primeiros seis exemplos, para duas retas paralelas dadas a e b , pedem semicircunferências c de centros equidistantes de duas retas dadas p e q (Figuras 486 e 487), de outras duas pertencentes a um ponto dado J pertencente a uma das retas (Figura 488), ou exterior (Figura 489) e de semicircunferências c tangentes a uma reta dada t (Figura 491), ou a uma circunferência (O'), também dada (Figura 492), apresentando apenas uma solução para cada caso.

265

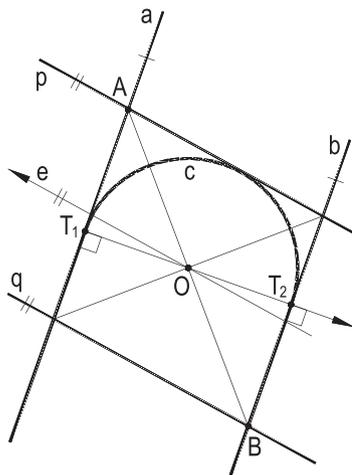


Figura 486

266

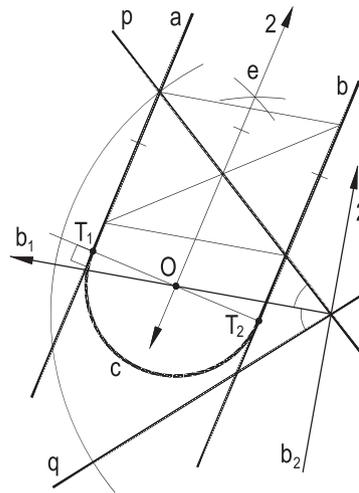


Figura 487

267

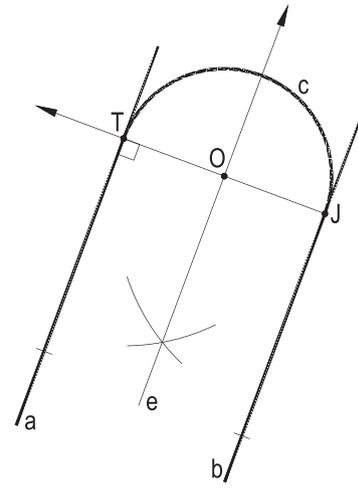


Figura 488

268

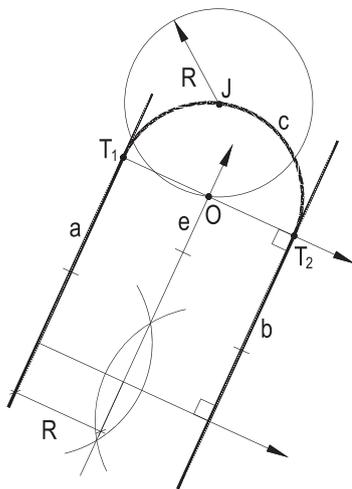


Figura 489

269

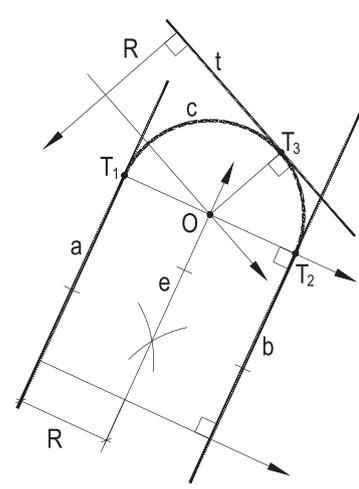


Figura 490

270

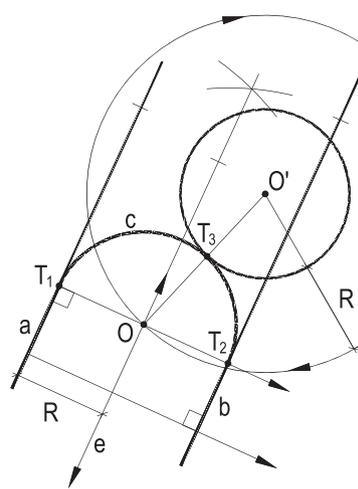


Figura 491

Nos exemplos seguintes, nesta página, trata-se concordar duas retas concorrentes dadas a e b por arcos de circunferência c , correspondentes a ângulos centrais maiores que 180° . Nos dois primeiros (Figuras 492 e 493), o centro O do arco c deve equidistar de duas retas dadas p e q ; no seguinte (Figura 494), deve ter raio de valor dado R ; nos dois seguintes, o arco deve passar por um ponto dado J pertencente a uma das retas (Figura 495), ou exterior (Figura 496); e no último (Figura 497), o arco pedido c deve ser tangente a uma reta dada t .

As resoluções seguem muito simples, salvo no de número 275, em que é utilizada uma homotetia de polo P , para uma circunferência auxiliar, de centro O' , arbitrado sobre uma das bissetrizes dos ângulos formados pelas retas a e b .

Apresentada, sempre, apenas uma solução.

271

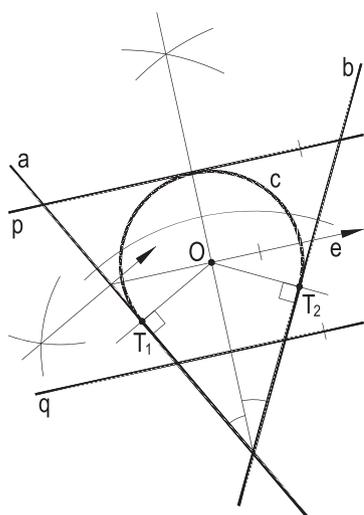


Figura 492

272

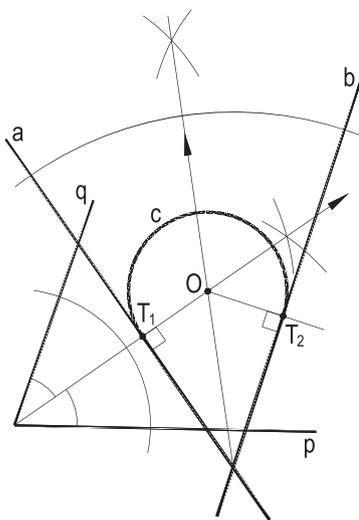


Figura 493

273

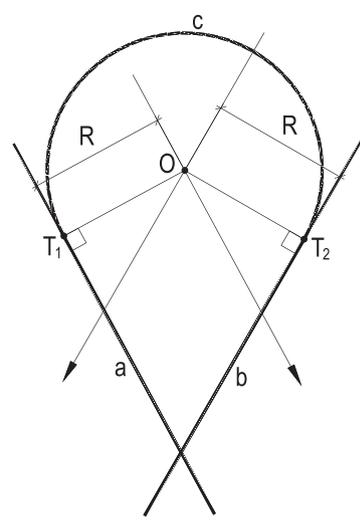


Figura 494

274

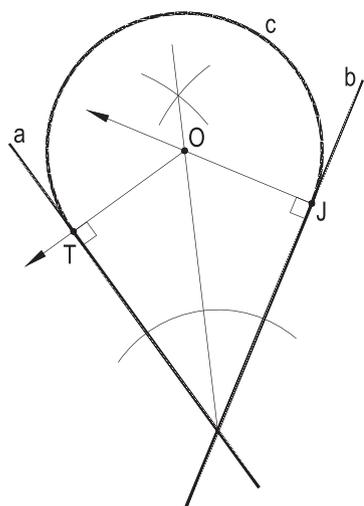


Figura 495

275

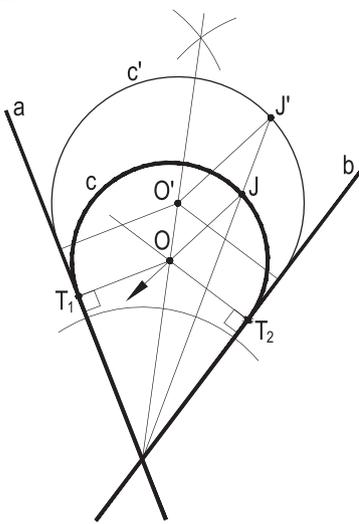


Figura 496

276

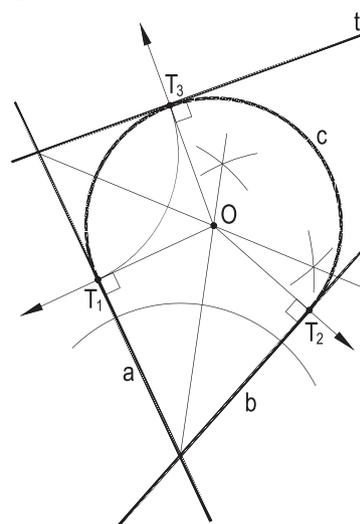


Figura 497

O próximo conjunto apresenta a concordância de uma circunferência dada b , de centro O , com uma reta dada a , mediante um arco c de circunferência, atendendo a condições impostas caso a caso, representando apenas uma solução.

No primeiro exemplo (Figura 498), é dado o valor R do raio da circunferência concordante; nos dois seguintes, o ponto de contato T de c com um dos elementos dados com a reta a , na Figura 499, e com a circunferência (O) , na Figura 500, este resolvido com uma homotetia de polo T_1 ; nos dois seguintes, determinando-se que a circunferência concordante seja também tangente a uma reta t , dada, paralela genérica (Figura 501) à reta a , ou particular, tangente a (O) (Figura 502). No último caso, é imposto, como situação particular, que o centro O' de c pertença à perpendicular, por O , à reta t (Figura 503).

277

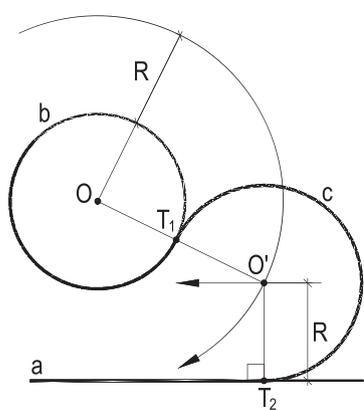


Figura 498

278

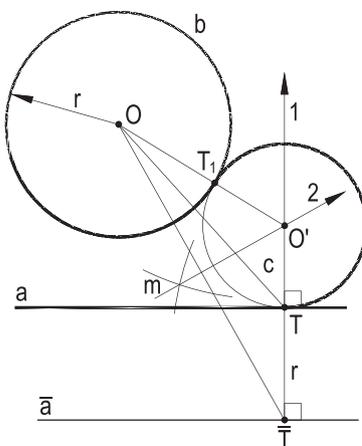


Figura 499

279

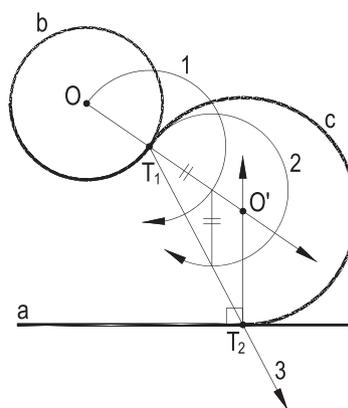


Figura 500

280

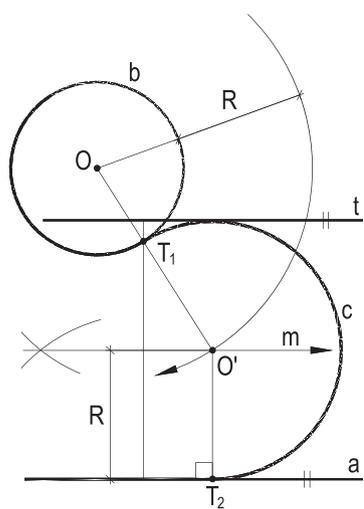


Figura 501

281

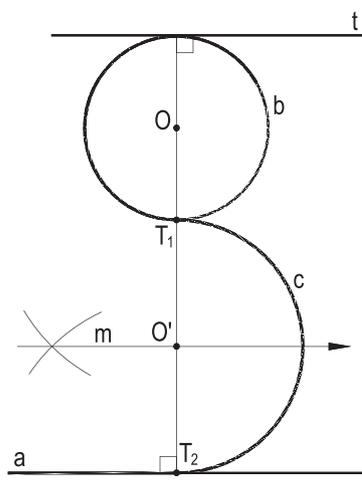


Figura 502

282

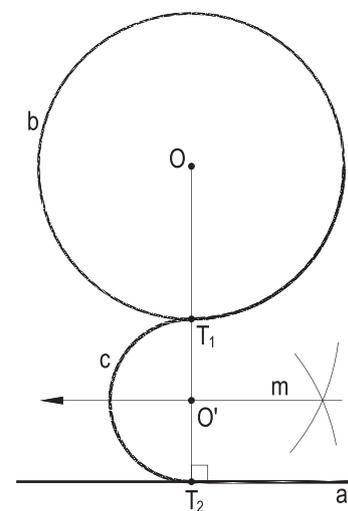


Figura 503

Concluindo as concordâncias simples por um arco de circunferência c , seguem resolvidas três questões que apresentam a construção de um arco c de circunferência concordando duas circunferências dadas (O, R) e (O', R') , a primeira especificando o valor r do raio da circunferência concordante (Figura 504) e as duas seguintes conhecendo-se um ponto de contato J com a circunferência dada (O, R) , estudando duas hipóteses: a primeira com os pontos de contato T e J de c com (O') num dos semiplanos definidos pela linha dos centro OO' (Figura 505) e a segunda com T no semiplano oposto ao de J (Figuras 506). Pede-se, sempre, apenas uma solução.

283 – Resolução: O centro C da circunferência da concordância pedida é um dos pontos de corte das circunferências $(O, R + r)$ e $(O', R' + r)$, com duas posições para o centro C , simétricas em relação à reta OO' .

E os pontos de tangência T_1 e T_2 vêm com as retas CO e CO' (Figura 504).

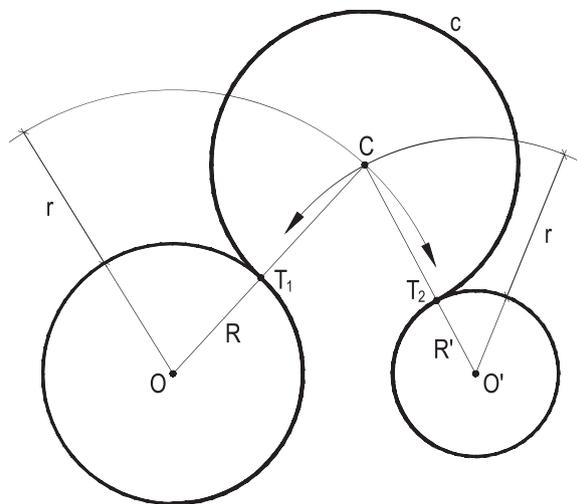


Figura 504

284 – Resolução: Subtraindo-se a medida R' de R , vem o ponto \bar{J} sobre o raio OJ .

A mediatriz m do segmento $O'\bar{J}$ proporciona, na reta OJ , o centro C da concordância c , visto que, sendo iguais $C\bar{J}$ e CO' , serão também iguais CT e CJ (Figura 505).

285 – Resolução: Construção semelhante, mas adicionando R' a R e, então, obtido o ponto \bar{J} sobre a reta OJ , a mediatriz m do segmento $O'\bar{J}$ traz o centro C do arco de circunferência concordante exteriormente a uma e interiormente à outra dada (Figura 506).

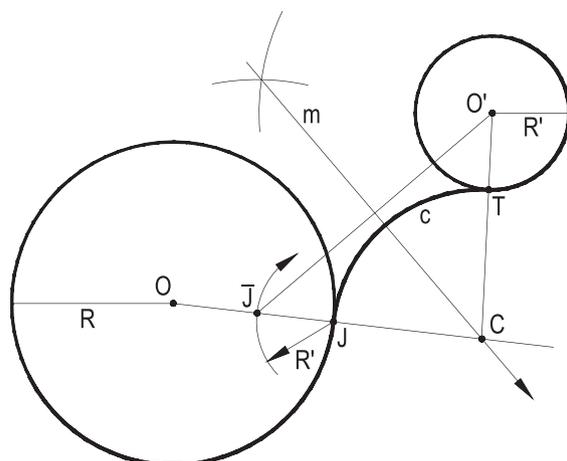


Figura 505

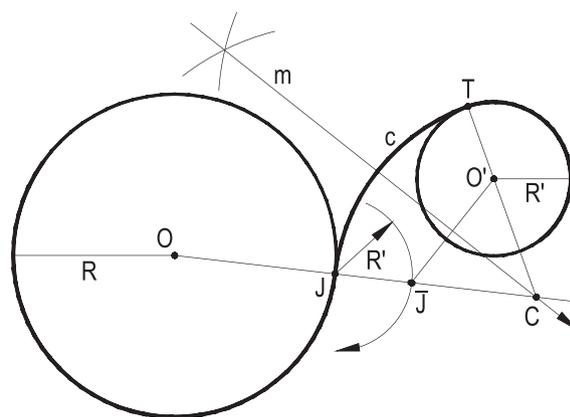


Figura 506

63 – Construção de outras concordâncias simples

Para completar o estudo das concordâncias simples de duas linhas dadas a e b , por uma terceira c , que não seja um arco de circunferência, vão listados, a seguir, diversos exemplos.

286 – Concordar as circunferências dadas (O, R) e (O', R') por um segmento de reta AB não atingido pelas linhas dos centros OO' .

Resolução: As tangentes de O' à circunferência $(O, R - R')$ dão as direções dos segmentos AB e $\bar{A}\bar{B}$ dessas tangentes (ver número 21) (Figura 507).

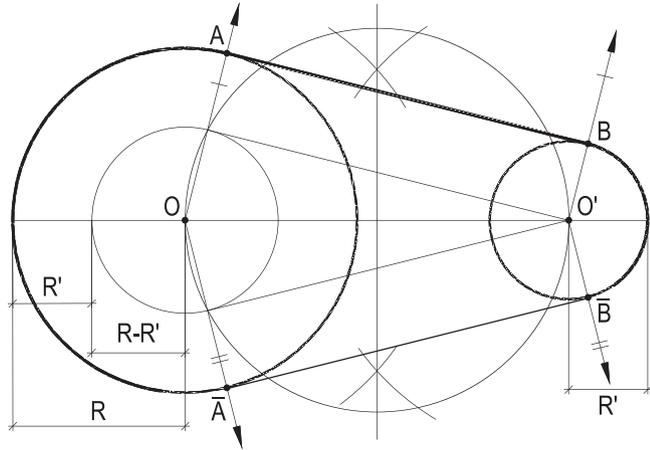


Figura 507

287 – Concordar as circunferências dadas (O, R) e (O', R') por um segmento de reta AB cortado pela linha dos centros OO' .

Resolução: Idêntica à anterior, agora com as tangentes de O' à circunferência $(O, R + R')$ (ver número 21).

AB e $\bar{A}\bar{B}$ são as duas soluções (Figura 508)

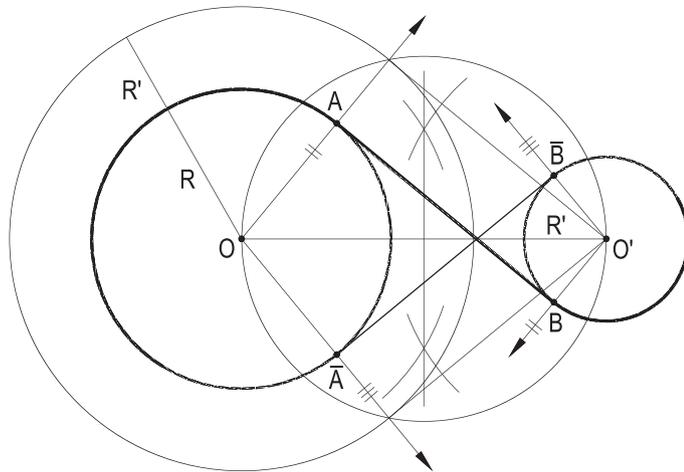


Figura 508

288 – Concordar as circunferências dadas (O, R) e (O', R') por uma semi-ipse que tenha seu eixo menor BB' sobre OO' e seu eixo maior igual a $2R$.

Resolução: É imediata pela utilização da afinidade ortogonal entre r e \bar{r} (ver *Cônicas*, número 64). Apenas uma solução completada na Figura 509.

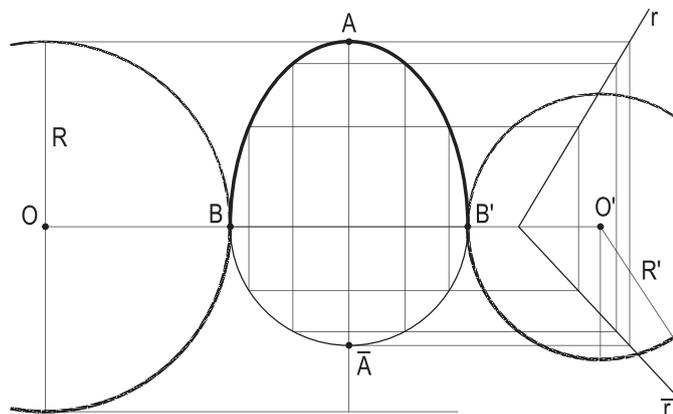


Figura 509

289 – Concordar as retas paralelas dadas a e b por uma semielipse que tenha os vértices A e A' de seu eixo maior sobre cada uma daquelas retas, dado um foco F dessa cônica.

Escolha a solução que corresponda à concavidade da elipse voltada para baixo.

Resolução: Traçada a perpendicular por F às retas a e b e marcados o segundo foco F' e os vértices A, A' e B (Figura 510), constrói-se a curva por pontos (ver *Cônicas*, números 11 e 12).

290 – Dadas a reta r e a circunferência de diâmetro AB perpendicular a r, pede-se concordá-las por uma semielipse que tenha por vértices do eixo menor, ou o ponto A, ou B e o ponto T, de concordância com a reta r, sendo a projeção ortogonal de A e de B sobre r e eixo maior igual ao dobro do menor.

Apresente as duas soluções, ambas com concavidades voltadas para a esquerda.

Resolução: Nas duas hipóteses, o eixo menor da elipse sendo igual a AT (Figura 511), ou a BT (Figura 512), para assegurar que o eixo maior valha o dobro do menor, deve-se traçar o semieixo maior MC, marcados o centro M e o vértice C da elipse, medindo, respectivamente, AT ou BT.

A curva vai construída por pontos (ver *Cônicas*, número 45).

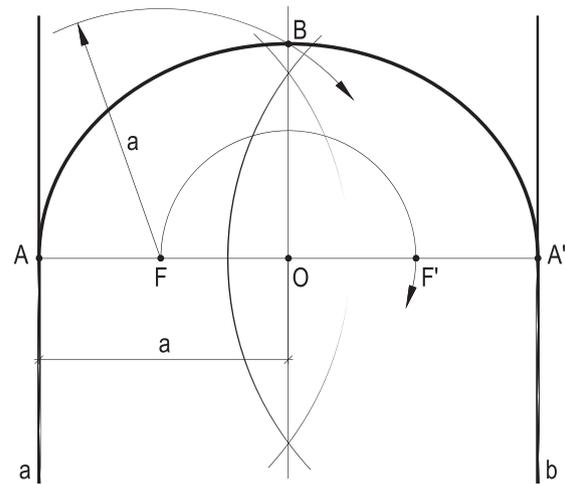


Figura 510

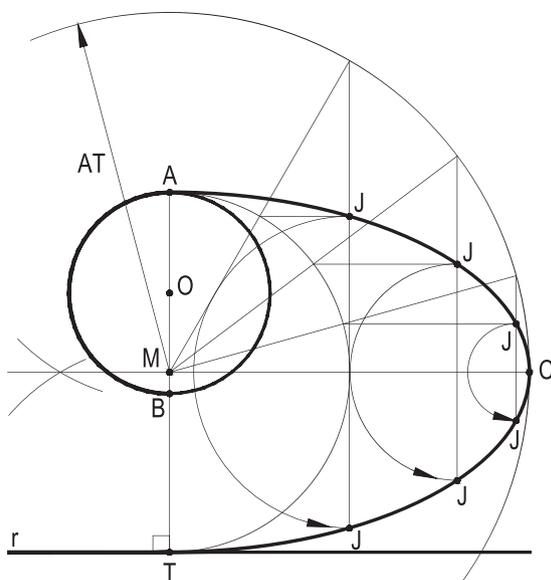


Figura 511

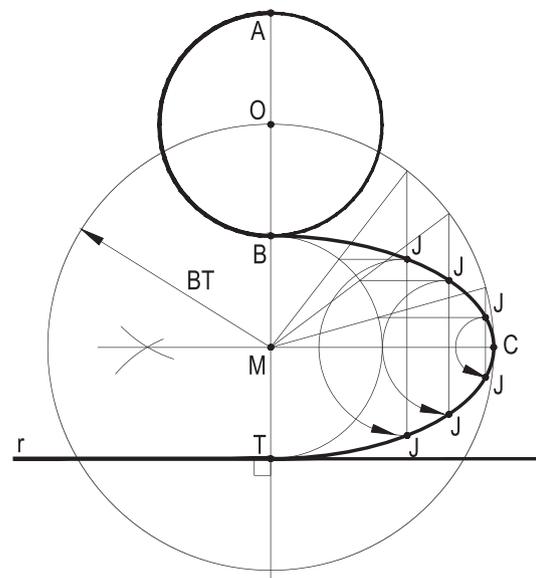


Figura 512

291 – Concordar as retas dadas r e s por um arco de elipse, conhecendo seu foco F , que é, entre os dois focos da curva, o mais próximo do ponto comum às retas r e s . Dada, também, a medida $2a$ do eixo maior da elipse.

Resolução: Determinados os simétricos F_1 e F_2 de F , em relação a r e a s , respectivamente, as circunferências $(F_1, 2a)$ e $(F_2, 2a)$ cortam-se, proporcionando o segundo foco F' da elipse (*Cônicas*, número 22), com o que vem o centro O da curva e, com a circunferência de centro O e raio a , ficam marcados os vértices A e A' do eixo maior. Na mediatriz de FF' , obtêm-se os outros dois vértices B e B' , com a circunferência (F, a) (*Cônicas*, número 14.2). Os pontos de contato T_1 e T_2 da curva com as retas dadas (*Cônicas*, número 24) e demais pontos correntes J proporcionam a construção da elipse (Figura 513), da qual foi escolhido o arco maior $T_1A'T_2$, na concordância que corresponde a convergir as retas dadas.

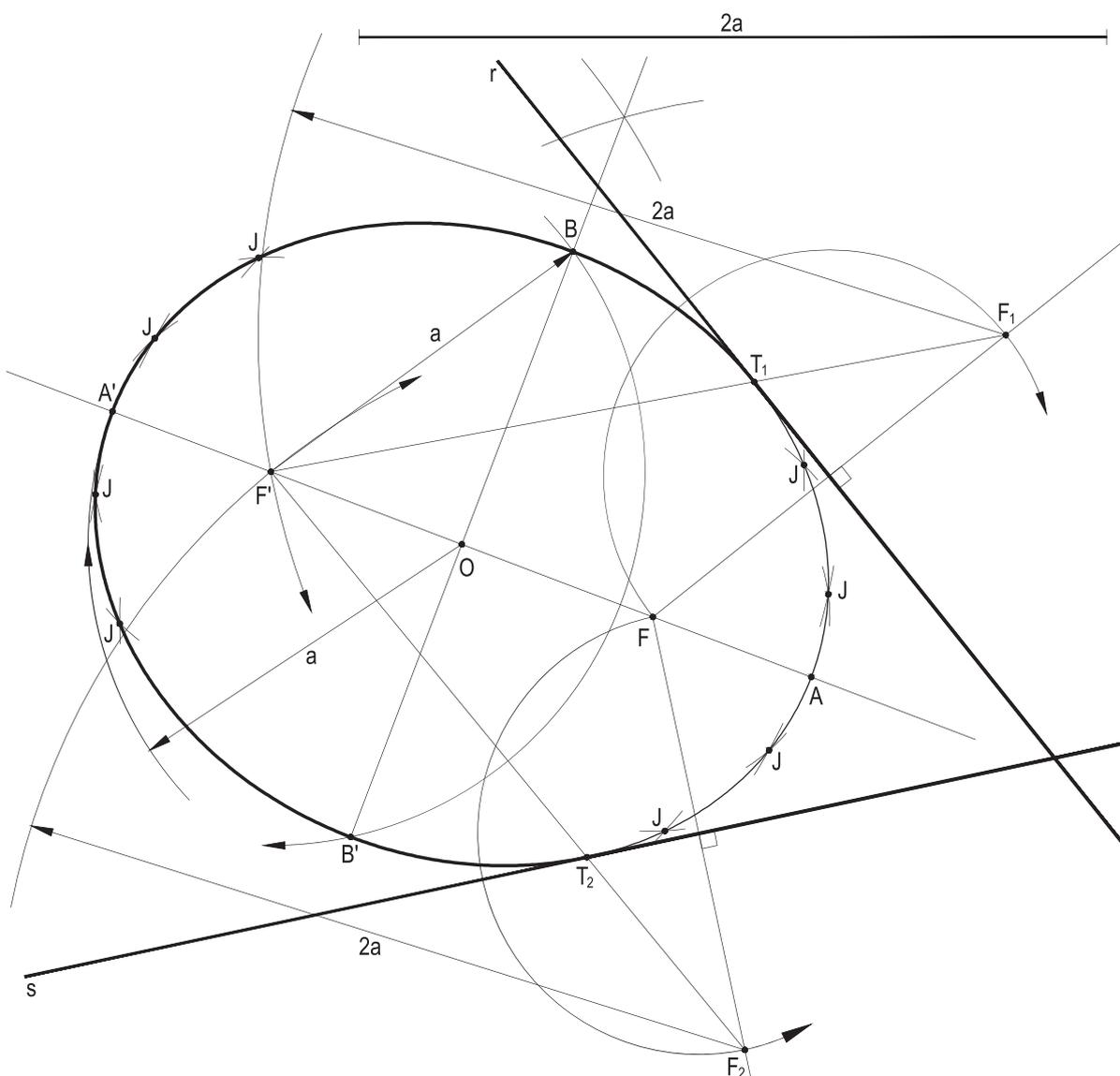


Figura 513

292 – Concordar as retas perpendiculares r e s , dadas, por um arco de elipse, conhecendo o valor a do semieixo maior da elipse e sabendo que seu centro O , equidistando de r e s , dista o mínimo possível do ponto dado C , o eixo maior paralelo à reta dada w .

Resolução: Sabe-se (*Cônicas*, número 34) que o lugar geométrico dos pontos dos quais se pode traçar tangentes perpendiculares a uma elipse é a circunferência de mesmo centro que a elipse e raio igual à hipotenusa de um triângulo retângulo de catetos iguais aos seus semieixos.

Assim, o ponto J comum às retas r e s há de ser um dos pontos de tal circunferência, cujo centro O tem que pertencer a uma das bissetrizes desse ângulo reto, devendo, para ficar à menor distância possível do ponto C , ser o pé da perpendicular de C a essa bissetriz, descartada a segunda bissetriz, mais distante de C . Conhecida a posição do centro O da elipse e, portanto, o raio OJ da circunferência cujos pontos veem a elipse sob ângulo reto, aplicando-se o valor dado a , como cateto de um triângulo retângulo JQO de hipotenusa OJ (Figura 514), obtém-se o valor $b = OQ$ do semieixo menor OB e, em seguida, utilizando $BF = BF' = a$ com o triângulo OBF , o valor $c = OF$ da semidistância focal dessa elipse, que proporciona, na paralela \bar{w} , por O , a w , os focos F e F' da elipse.

Com os simétricos S e S' de F , pertencentes à circunferência ($F', 2a$) (*Cônicas*, número 22), são determinados precisamente os pontos de contato T e T' de r e s ao arco de elipse procurado, com duas soluções complementares.

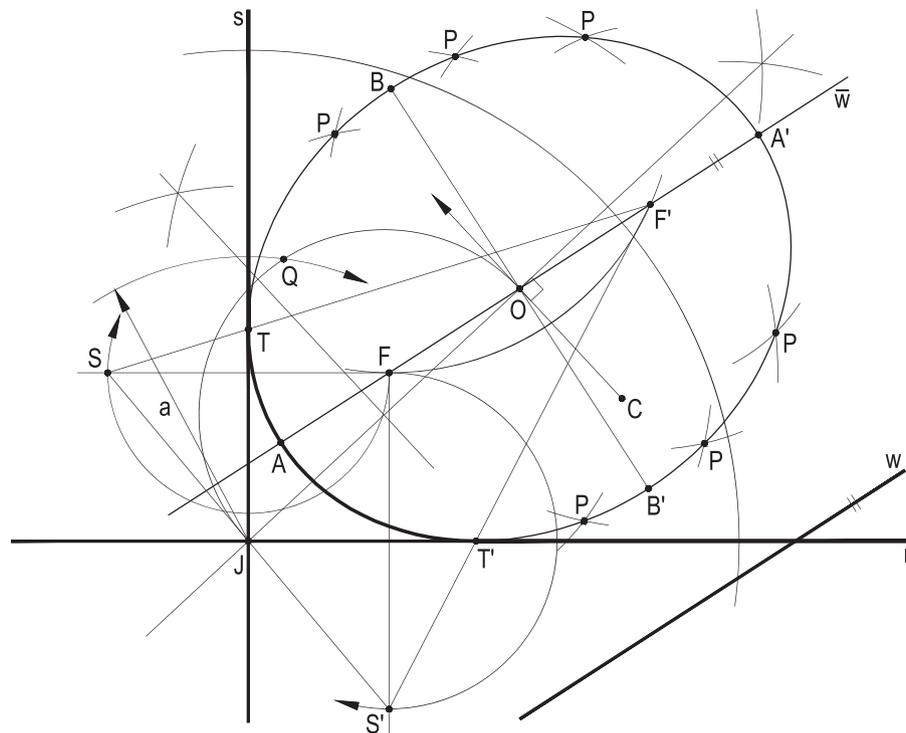


Figura 514

293 – Concordar as retas dadas r e s por um arco de hipérbole h , conhecendo seu foco F e o valor $2a$ de seu eixo real.

Resolução: Obtidos os simétricos S e S' de F em relação às retas dadas, as circunferências $(S, 2a)$ e $(S', 2a)$ cortam-se, proporcionando o segundo foco F' (*Cônicas*, número 102), e as retas $F'S$ e $F'S'$ dão os pontos de contato T e T' , que limitam o arco h da hipérbole concordante pedida (Figura 515), construído por pontos (ver *Cônicas*, número 91).

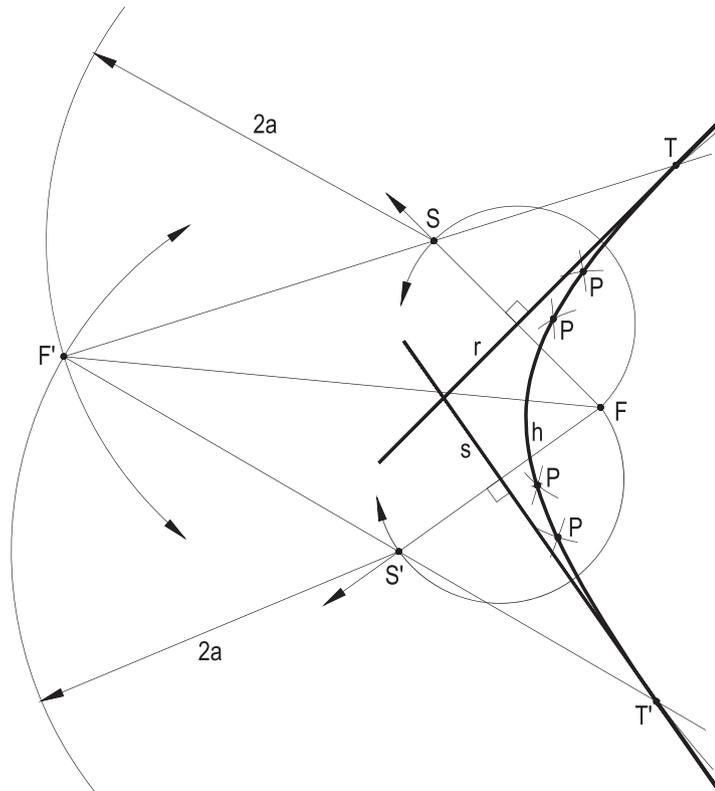


Figura 515

294 – Concordar as retas dadas r e s por um arco de parábola p de diretriz d , dada.

Resolução: Obtidas as simétricas d_1 e d_2 da diretriz d em relação, respectivamente, a r e a s , obtém-se, por corte, o foco F da parábola (*Cônicas*, item 152.6), o que traz seu eixo e , seu vértice A , ponto médio do segmento de perpendicular FJ de F a d , J em d (Figura 516), e as perpendiculares por F a r e a s dão, em d , S_1 e S_2 , que proporcionam, com paralelas ao eixo, os pontos de contato T_1 e T_2 , que delimitam o arco da concordância pedida, construído por pontos (ver *Cônicas*, número 145).

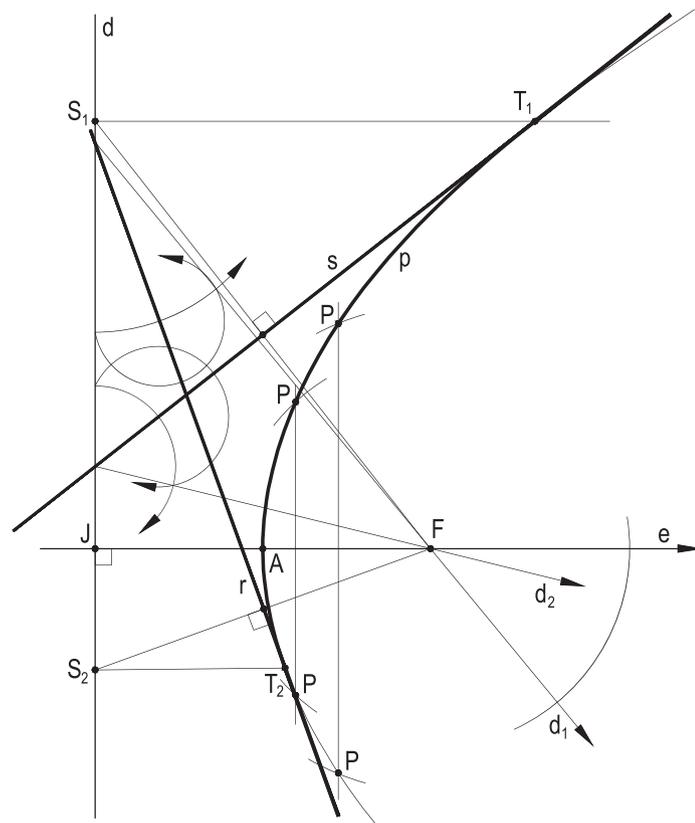


Figura 516

64 – Construção de concordâncias compostas por arcos de circunferência

Aqui serão abordadas concordâncias entre retas e circunferências por vários arcos de circunferência, naturalmente, em pares consecutivos tangentes entre si.

Neste primeiro conjunto, são construídas concordâncias de retas paralelas dadas a e b por um par de semicircunferências tangentes entre si, atendendo a condições impostas, caso a caso. Os quatro exemplos iniciais buscam pares de semicircunferências iguais e os dois seguintes em outras proporções. Em todos, pede-se apenas uma solução.

295 – Dado o ponto J de contato da primeira semicircunferência com a reta a .

Resolução: A perpendicular p , por J , às retas dadas dá o ponto de contato T_2 em b e o ponto de tangência T_1 das duas semicircunferências (Figura 517).

296 – Imposto que o ponto J de contato das duas circunferências pertença à reta dada w .

Resolução: A interseção de w com a reta m_1 , equidistante das dadas (Figura 518), proporciona o ponto J de concordância das duas circunferências.

297 – A semicircunferência tangente à reta a deve conter o ponto dado J .

Resolução: Determinada a quarta parte R da distância entre as paralelas dadas, o corte da circunferência (J, R) com a reta m_2 , equidistante de a e de m_1 , esta equidistante de a e de b , proporciona o centro C da primeira semicircunferência e o ponto T_2 de concordância das duas circunferências (Figura 519).

298 – A semicircunferência concordante com a reta a é tangente à reta dada w .

Resolução: O centro C da primeira circunferência é a interseção de \bar{w} , paralela a w , dela distante R , quarta parte da distância entre a e b , com a mediatriz m_2 do segmento T_1T_3 (Figura 520).

299 – A razão entre os raios das duas semicircunferências deve ser igual à das medidas dadas m e n e o ponto J , comum às duas, pertencendo à reta dada w .

Resolução: O ponto J de concordância das duas circunferências fica determinado pelo corte de w com a reta c , que guarda distâncias a e a e b naquela razão (Figura 521).

300 – Imposto que a semicircunferência junto à reta b tenha raio dobro da outra, seu ponto de contato J com b pertencendo à circunferência dada (O) .

Resolução: O ponto J é prontamente determinado no corte de (O) com b e a divisão em três partes iguais de JT_2 proporciona o ponto de concordância T_1 (Figura 522).

295

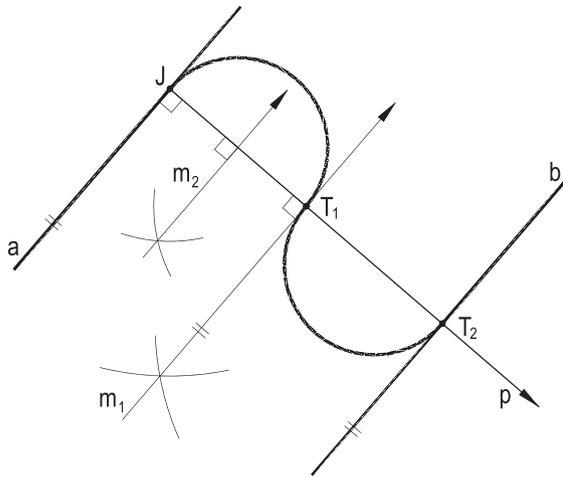


Figura 517

296

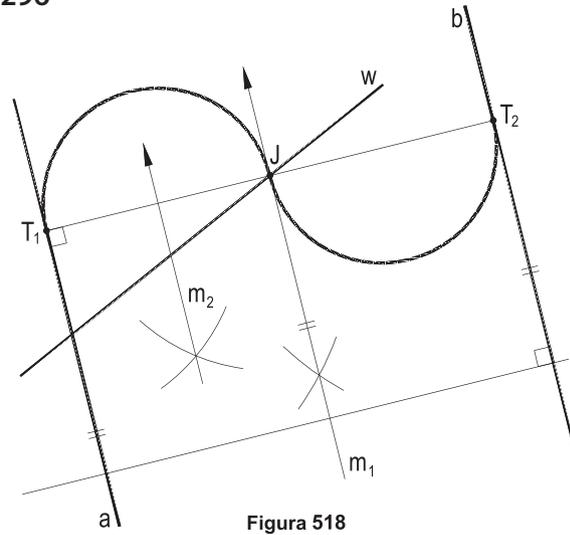


Figura 518

297

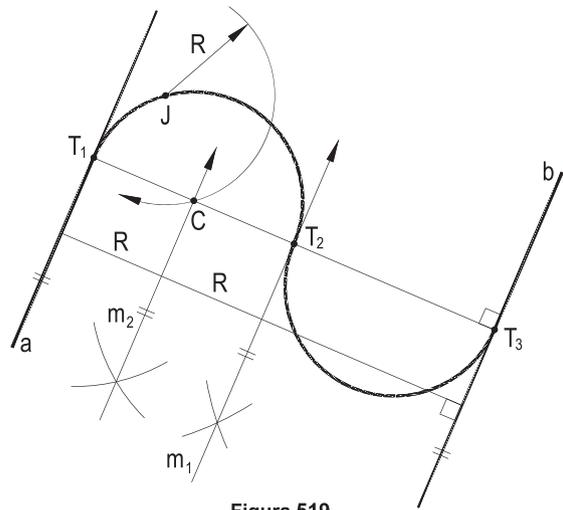


Figura 519

298

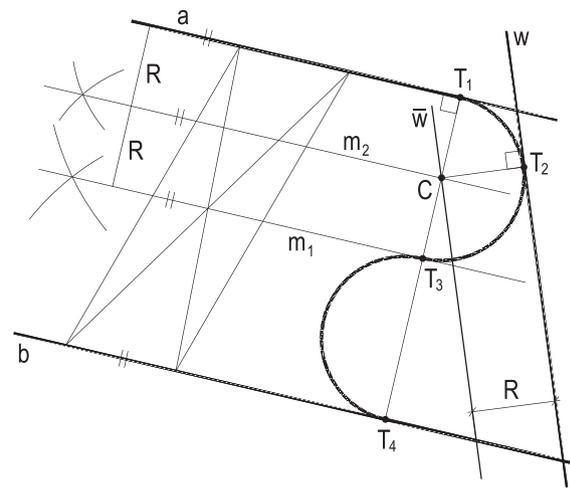


Figura 520

299

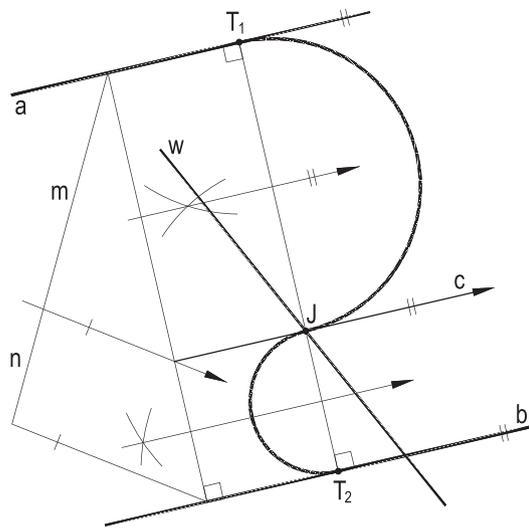


Figura 521

300

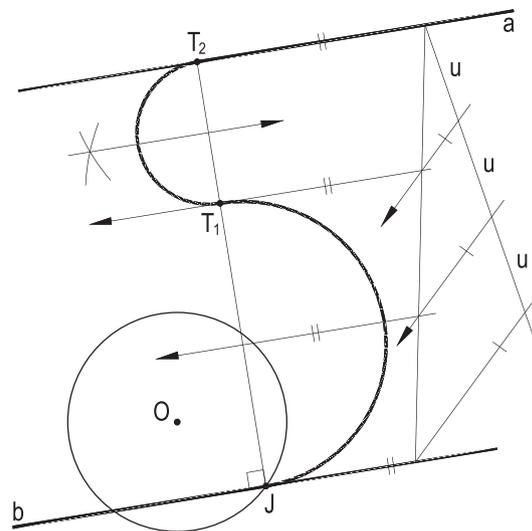


Figura 522

Neste grupo vão detalhadas as concordâncias de duas retas dadas a e b por três arcos de circunferências concordantes em pares consecutivos, obedecendo a cada conjunto de condições impostas, pedindo-se, sempre, apenas uma solução para cada questão.

301 – Concordar as paralelas dadas a e b por três arcos de circunferências iguais, de raio R , dado, conhecendo os pontos de concordância A e B , em a e b , respectivamente.

Resolução: Construídas (O_1, R) e (O_2, R) , as circunferências $(O_1, 2R)$ e $(O_2, 2R)$ cortam-se, proporcionando o centro O_3 do arco intermediário e, por suas uniões com O_1 e O_2 , vêm os pontos de contato T_1 e T_2 (Figura 523).

302 – Concordar as paralelas dadas a e b por três arcos de circunferência, os extremos, iguais, nos pontos A e B dados, conhecendo o extremo J da segunda concordância, o arco intermediário tendo centro na reta dada w .

Resolução: A mediatriz m_1 de AJ traz o centro O , e, com o simétrico \bar{O} de O em relação J , a mediatriz m_2 de $\bar{O}O'$ dá o centro C do arco intermediário JL .

303 – Concordar as perpendiculares a e b por três arcos de circunferência, todos de raio R , dado, os dois extremos sendo semicircunferências.

Resolução: As paralelas a e b distantes R e $3R$ de a e de b resolvem o problema, proporcionando, por cortes, os centros O_1 e O_3 das semicircunferências extremas e o centro O_2 do arco intermediário (Figura 525).

304 – Dadas duas retas quaisquer a e b e a circunferência (O, R) , pede-se concordar a e b mediante três arcos de circunferência, os dois extremos com raio dado k e o intermediário pertencente à circunferência (O, R) .

Resolução: A circunferência $(O, R + k)$ proporciona os centros C_1 e C_2 dos arcos extremos, por interseções com as retas paralelas às dadas e delas distando a medida k e, então, os pontos de contato T_2 e T_3 (Figura 526).

305 – Concordar as paralelas dadas a e b por três semicircunferências iguais, a intermediária tendo seu centro equidistante das retas r e s , também dadas.

Resolução: Dividida a distância entre a e b em seis partes iguais, a reta i , intermediária do feixe (Figura 527), corta a bissetriz b_1 de um dos ângulos que r forma com s , proporcionando o centro O_2 da segunda semicircunferência. A perpendicular p , por O_2 , às paralelas dadas traz nelas os pontos de concordância T_1 e T_4 e, sobre p , T_2 e T_3 de concordância da semicircunferência intermediária com as extremas.

301

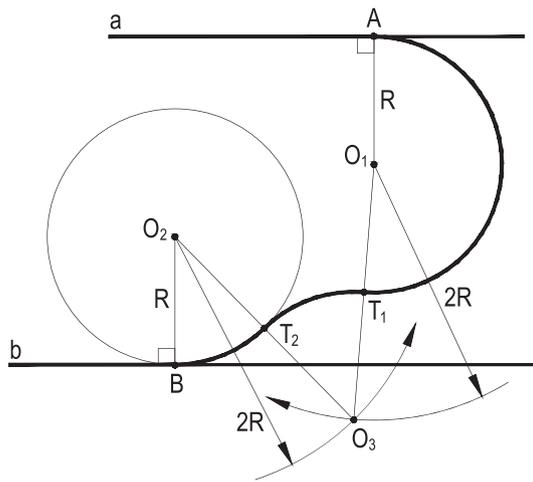


Figura 523

302

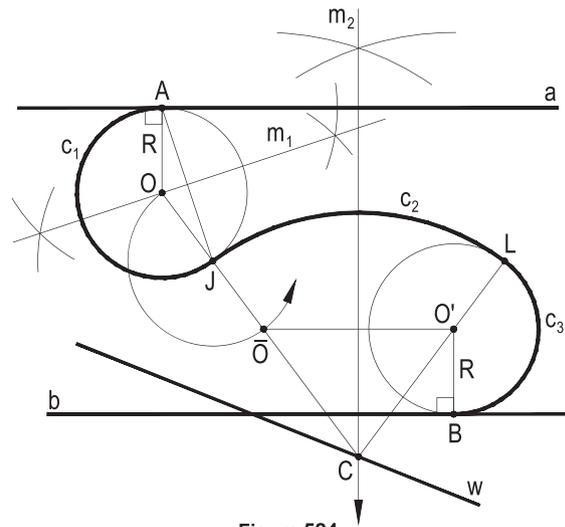


Figura 524

303

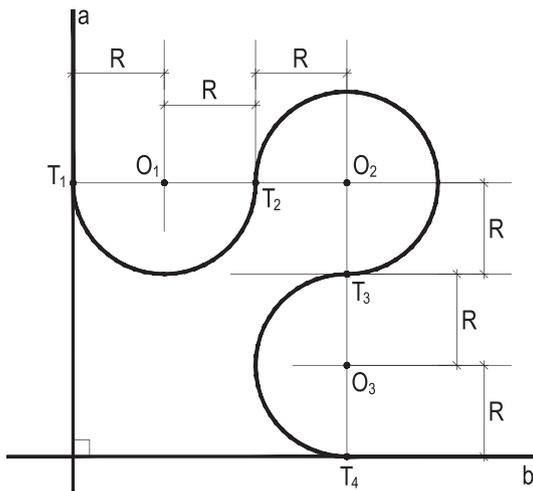


Figura 525

304

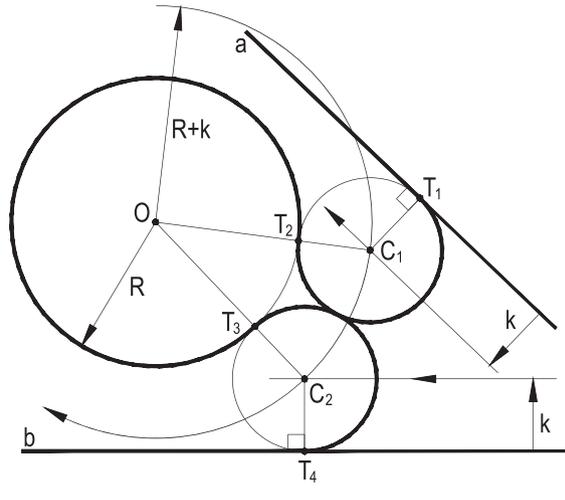


Figura 526

305

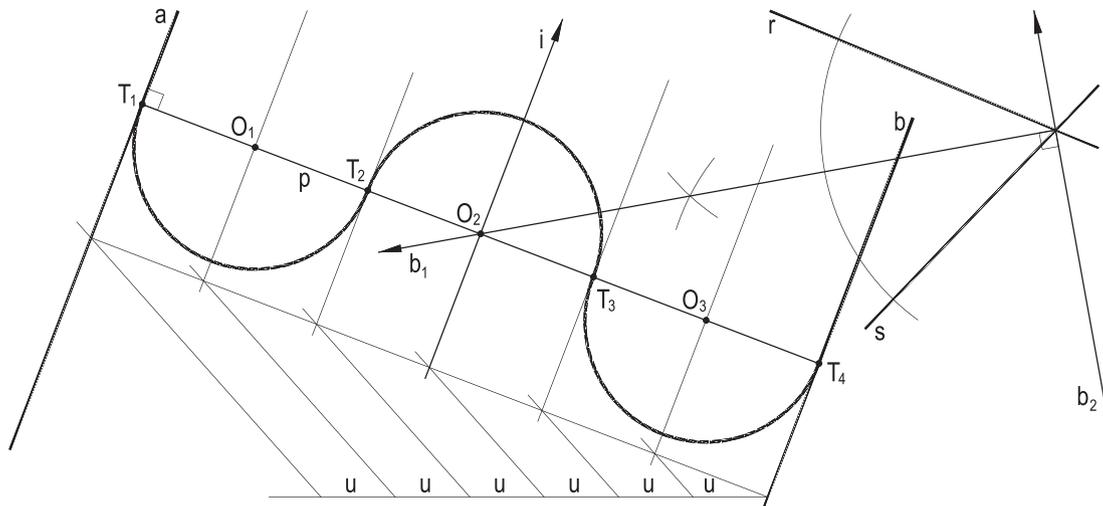


Figura 527

Trata-se, agora, de concordâncias compostas entre retas e circunferências.

306 – Dadas as circunferências (O_1, r) e (O_2, R) , esta tangente à reta dada a , no ponto A , pede-se concordar (O_1) com a , mediante dois arcos de circunferência, o primeiro associando (O_1) a (O_2) e o segundo sendo parte de (O_2) .

Resolução: As duas circunferências $(O_1, R + r)$ e $(O_2, 2R)$ cortam-se, produzindo o ponto O_3 , centro do arco intermediário procurado, limitado pelos pontos de tangência T_1 e T_2 (Figura 528).

307 – Concordar a circunferência (O, OA) com a circunferência (C, r) , ambas dadas, mediante dois arcos circulares de raios iguais a OA , iniciando-se a concordância no ponto A .

Resolução: O centro O' do primeiro arco é imediato, simétrico de O em relação a A . O centro O'' da terceira circunferência seguinte vem com a interseção de $(O', 2R)$ com $(C, r + R)$, proporcionando os pontos de contato T_1 e T_2 (Figura 529).

308 – Concordar duas circunferências dadas (A) e (B) mediante uma linha mista composta por duas semicircunferências intercaladas por um segmento da reta dada a .

Resolução: O segmento T_2T_3 é obtido com as perpendiculares à reta a pelos pontos A e B e as mediatrizes de T_1T_2 e de T_3T_4 (Figura 530) entregam os centros C e D dos arcos soluções.

306

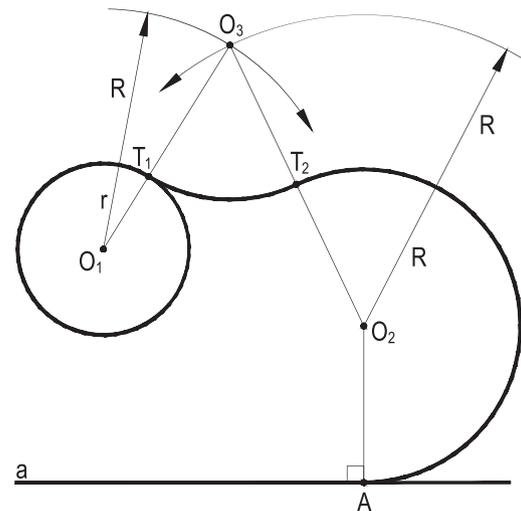


Figura 528

307

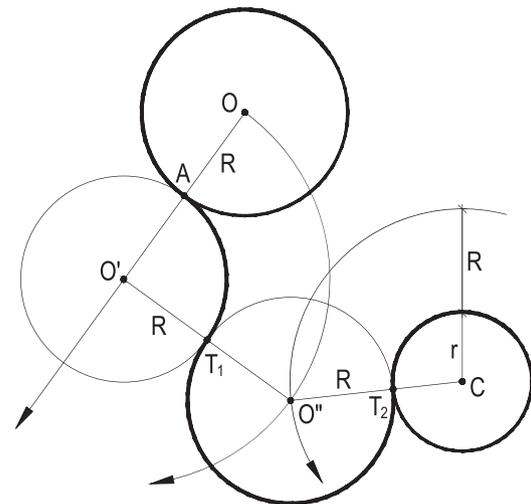


Figura 529

308

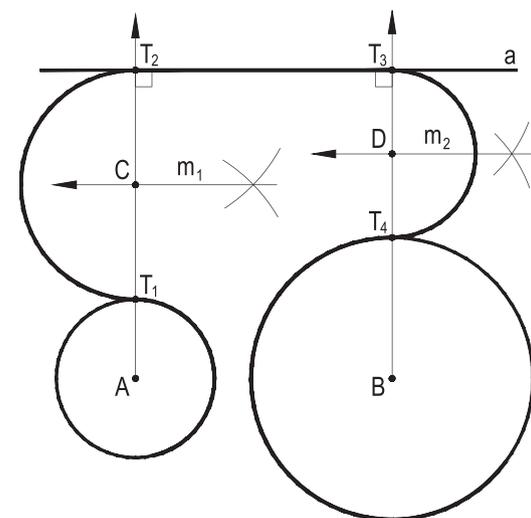


Figura 530

CAPÍTULO VII

OVAIS E ÓVULOS

65 – Definições e elementos

Ovais são curvas fechadas formadas por arcos de circunferências que se sucedem concordando aos pares.

Podem contar com um número par de arcos, simétricos dois a dois, em relação a determinadas retas, quando são denominadas ovais regulares, falsas elipses ou, simplesmente, ovais.

Possuem, então, dois eixos, necessariamente desiguais, para que não degenerem em circunferências. Têm, por isso, quatro vértices, os extremos desses dois eixos, e um centro, o ponto comum a eles. Na Figura 531, AB e CD são os eixos, A, B, C e D os vértices e O o centro da oval regular construída.

Quando os arcos componentes da oval não atendem a duas simetrias, mas apenas a uma, a curva passa a se denominar óvulo, ou oval irregular.

Na Figura 532, AB é o eixo de simetria do óvulo representado.

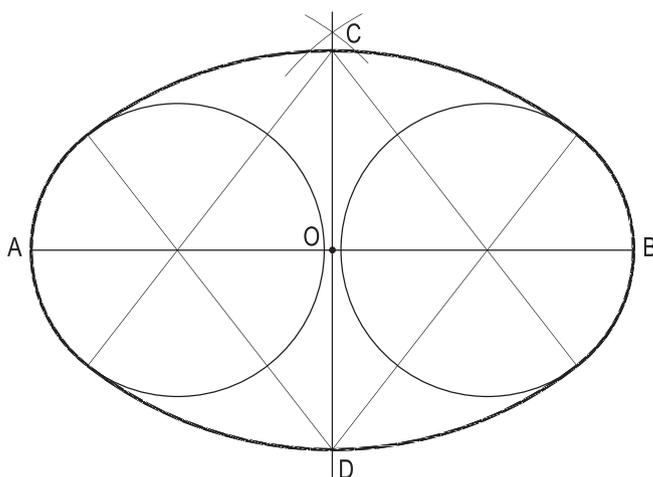


Figura 531

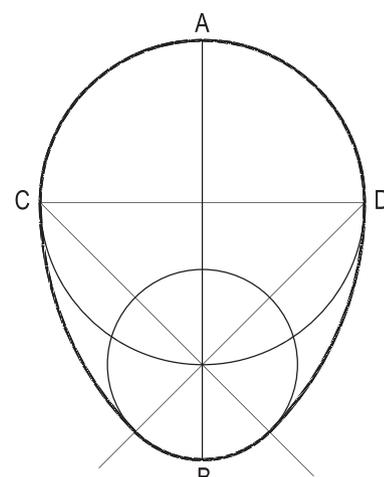


Figura 532

66 – Ovais

As ovais regulares, ou simplesmente ovais, são classificadas pelas quantidades de arcos que as compõem, ou, mais simplesmente, pela quantidade de centros desses arcos.

Assim são a oval de quatro centros da Figura 533 e a de oito centros da Figura 534.

As ovais estão sempre inscritas na circunferência que tem por diâmetro o eixo AB da oval, como indicado na Figura 533, que é, então, o maior dos dois eixos da curva.

Os pontos O_1, O_2, O_3 e O_4 da Figura 533 e os pontos $O_1, O_2, O_3, O_4, O_5, O_6, O_7$ e O_8 da Figura 534 são denominados centros da oval, nenhum deles, em verdade, coincidindo com o centro O de cada uma das ovais, já que são apenas centros dos arcos que compõem as curvas.

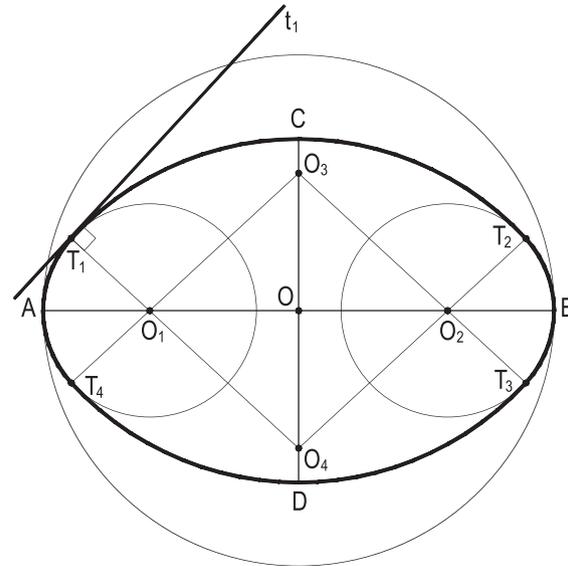


Figura 533

Os pontos T_1, T_2, T_3 e T_4 , da Figura 533, cada um alinhado com dois centros da oval, são os pontos de concordância dos arcos que formam a curva. O mesmo acontece com os pontos $T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6, T_7$ e T_8 da Figura 534, garantindo que as tangentes às ovais em cada um deles tangenciem os dois arcos que neles chegam.

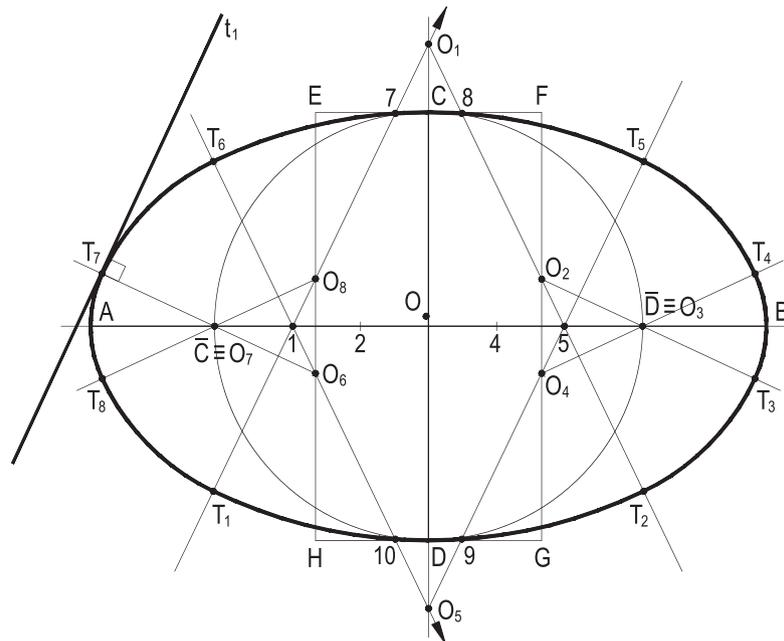


Figura 534

67 – Famílias de ovais

Consideremos duas circunferências iguais (O) e (O'), a mediatriz m do segmento OO' e diversos pontos C_1, C_2, C_3 , etc. de m , assim como seus simétricos $\bar{C}_1, \bar{C}_2, \bar{C}_3$, etc., em relação ao ponto M , médio de OO' , os quais, unidos a O e a O' , proporcionam pontos como T e T' , em (O) e em (O'), que são pontos de concordância de arcos de circunferência tangentes às duas dadas, compondo com elas uma família de ovais de quatro centros, todas com o mesmo eixo AA' (Figura 535).

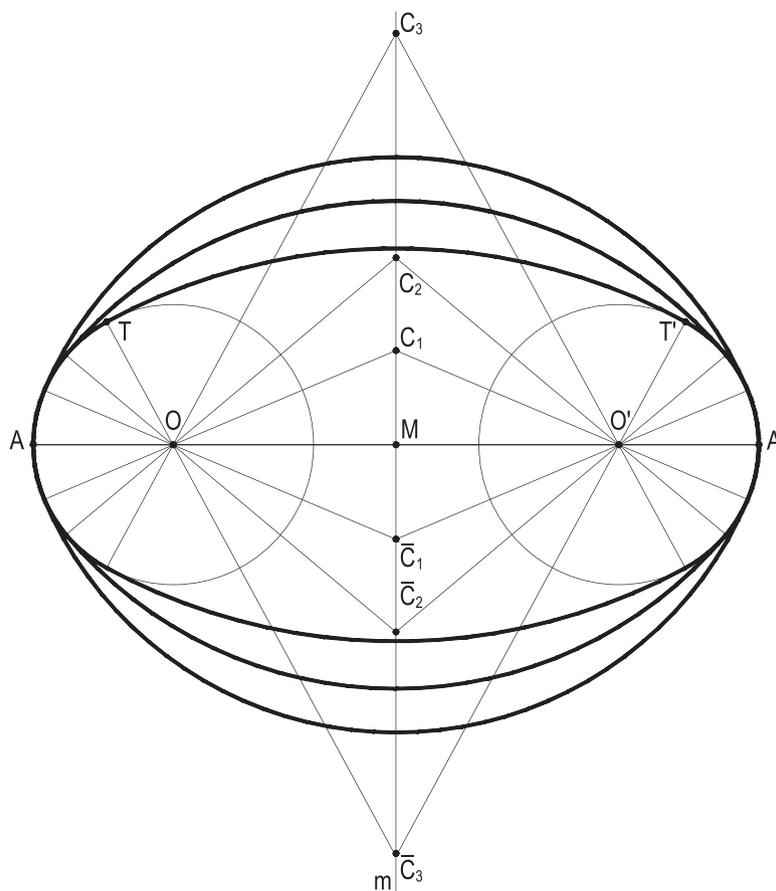


Figura 535

Observe-se que cada uma dessas ovais tem quatro centros, que são os pontos dados O e O' e cada par de pontos de m , simétricos em relação a M , tais como C_1 e \bar{C}_1 , C_2 e \bar{C}_2 , C_3 e \bar{C}_3 , etc. Todas inscritas na circunferência de diâmetro AB (Figura 535).

Fato é que, construída assim uma família de ovais de quatro centros, a partir de duas circunferências iguais, fica claro que, para determinar uma dessas curvas, é preciso definir a dimensão do segundo eixo, que será, sempre, seu eixo menor, ou estipular alguma outra condição à qual a oval deva atender, como adiante exemplificado.

Tais considerações, naturalmente, permanecem válidas para ovais com quantidades de centros superiores a quatro.

Consideremos, agora, um segmento BB' , sua mediatriz m e diversos pontos C_1, C_2, C_3 , etc. de m e seus simétricos $\bar{C}_1, \bar{C}_2, \bar{C}_3$, em relação ao ponto M , médio de BB' .

As uniões desses pontos a B e a B' trazem pontos T e T' , de concordância de arcos simétricos, aos pares, em relação a BB' com arcos das circunferências com centros em B ou em B' (Figura 536).

Fica, assim, formada uma família de ovais regulares de quatro centros, todas tendo em comum seu eixo menor BB' .

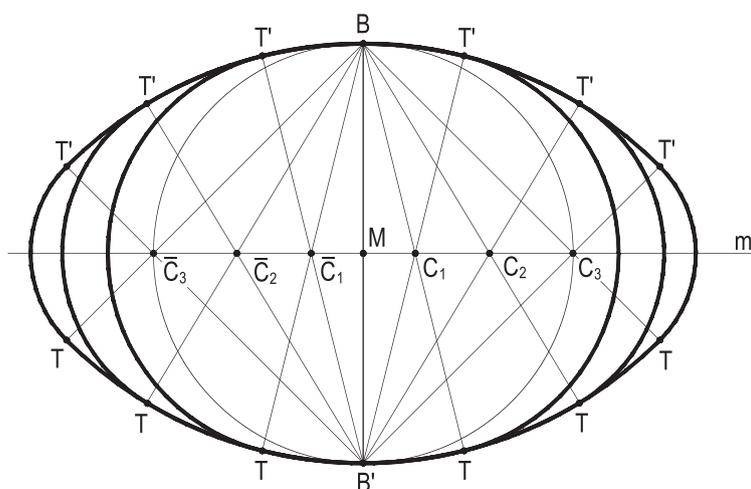


Figura 536

Note-se que todas essas ovais circunscvem a circunferência de diâmetro BB' , alongando-se à medida que os pontos C escolhidos sobre m se afastam desse diâmetro BB' .

68 – Construção de uma oval regular de quatro centros, a partir de seu eixo maior

Tal como visto acima (número 66), dado apenas o eixo maior AB de uma oval regular de quatro centros, sua construção resta indeterminada. Arbitradas duas circunferências iguais (O_1, O_1A) e (O_3, O_3B) e escolhidos dois pontos O_2 e O_4 da mediatriz de AB , simétricos em relação ao ponto M , médio de AB , vêm os pontos T_1, T_2, T_3 e T_4 de concordância dos arcos T_1T_2, T_2T_3, T_3T_4 e T_4T_1 , que definem a oval escolhida (Figura 537), com centros O_1, O_2, O_3 e O_4 , uma das inúmeras da família com eixo maior AB .

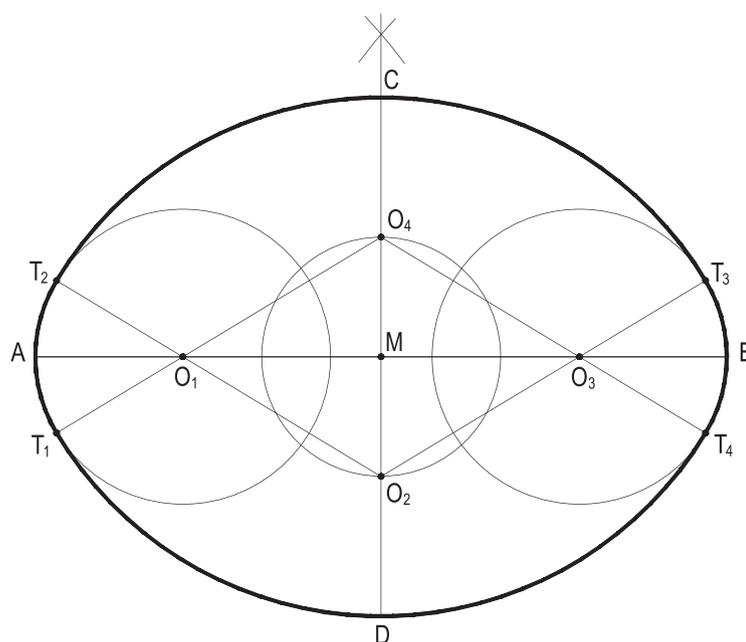


Figura 537

69 – Construção de uma oval regular de quatro centros, a partir de seu eixo menor

Dado apenas o eixo menor CD , como o problema é indeterminado (número 66), para construir uma oval regular de quatro centros, basta traçar a mediatriz m de CD , tomar, nela, dois pontos O_2 e O_4 simétricos em relação ao ponto M , médio de CD , que, ligados a C e a D , proporcionam os pontos de concordância T_1, T_2, T_3 e T_4 dos quatro arcos que formam a oval escolhida, com centros C, O_2, D e O_4 .

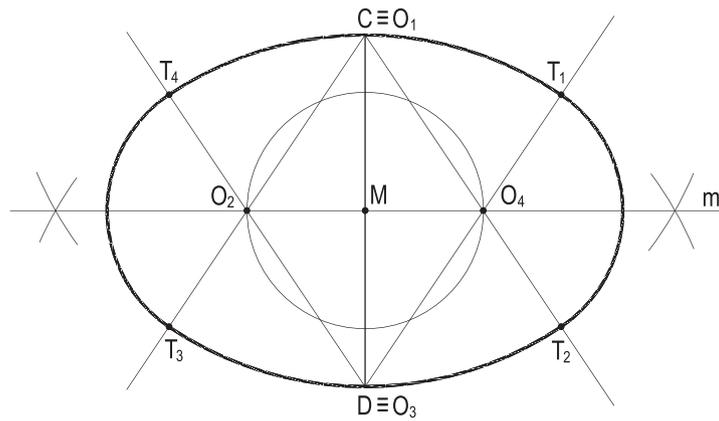


Figura 538

Naturalmente, essa é a construção de apenas uma das muitas ovais de quatro centros tendo por eixo menor o segmento dado CD .

70 – Construção da oval regular de quatro centros, a partir de seus dois eixos

Desenhados, em posição, os dois eixos dados AB e CD , rebate-se um dos vértices A do eixo maior, em torno do centro O , produzindo, no suporte do eixo menor, o ponto \bar{A} (Figura 539), que, girado em torno de C , proporciona, na reta AC , o ponto $\bar{\bar{A}}$.

Traçada a mediatriz m do segmento $\bar{A}\bar{\bar{A}}$, obtêm-se os centros O_1 e O_2 , sobre os eixos da oval, que, por simetria em relação ao seu centro O , proporcionam os outros dois centros O_3 e O_4 .

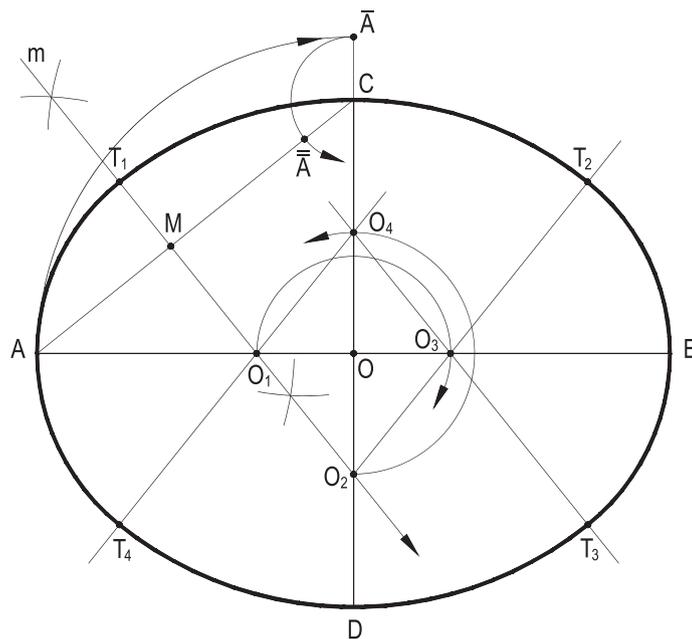


Figura 539

Com as retas O_1O_2, O_2O_3, O_3O_4 e O_4O_1 , tais as igualdades de O_1T_1 e O_1T_4 e de $\bar{C}\bar{\bar{A}}$ e $\bar{\bar{C}}\bar{\bar{A}}$, vêm os pontos de tangência T_1, T_2, T_3 e T_4 , completando-se a oval com os quatro arcos concordantes.

71 – Construção de uma oval de oito centros, dado seu eixo menor CD

Construída a circunferência de diâmetro CD, divide-se seu diâmetro \overline{CD} , perpendicular a CD, em seis partes iguais, pelos pontos 1, 2, O, 4 e 5, e traça-se o retângulo EFGH, cujos lados EF e GH, paralelos a \overline{CD} , medem a metade de \overline{CD} e que são divididos em três partes iguais, pelos pontos 7 e 8 em EF e 9 e 10 em GH (Figura 540).

As uniões de pares de pontos 1 e 7, 5 e 8, 5 e 9 e 1 e 10 criam quatro retas que cortam os eixos da oval e as retas EH e FG, proporcionando os centros O_1, O_2, O_4, O_5, O_6 e O_8 , aos quais se somam os pontos $\overline{C} \equiv O_7$ e $\overline{D} \equiv O_3$, completando o conjunto dos oito centros da oval.

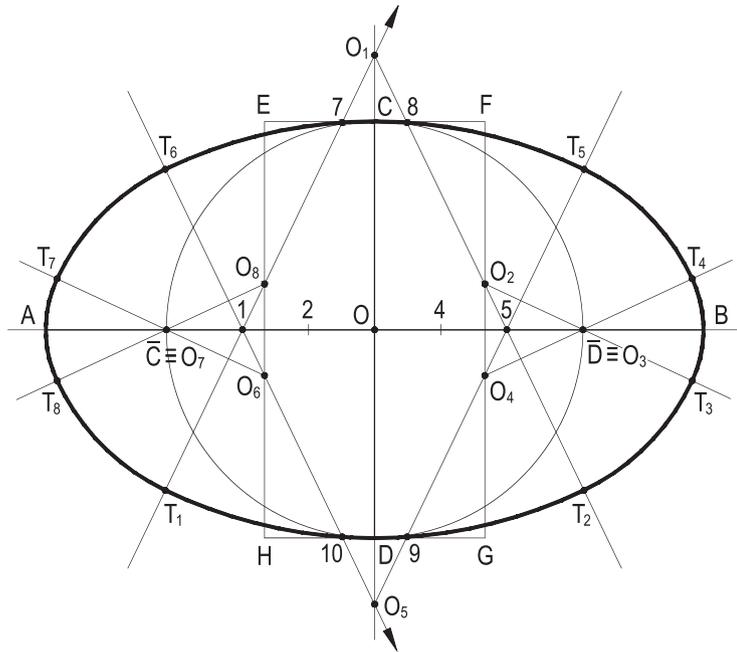


Figura 540

72 – Tangentes a ovais

Por serem as curvas formadas por arcos de circunferência, as tangentes às ovais regulares hão de ser tangentes a alguns desses arcos, o que simplifica suas construções, como no caso da tangente t por um ponto corrente P, dado, e das tangentes t_1 e t_2 , paralelas a uma reta dada d , construídas com os traçados das normais O_4P, O_1T_1 e O_3T_3 , respectivamente (Figura 541).

Observe-se que, para a direção dada d , os arcos de centros O_2 e O_4 não permitem tais tangentes.

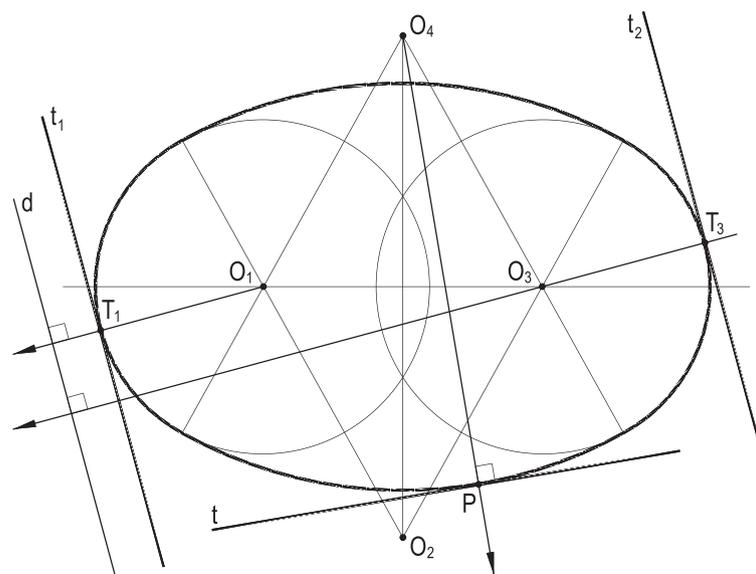


Figura 541

É, por isso, que, antes do traçado das tangentes paralelas à reta dada d , deve-se observar quais são os arcos que hão de a elas atender.

Para a construção das tangentes por um ponto exterior J , deve-se identificar previamente os arcos que interessam e, então, determinar (número 20) os pontos de contato.

No exemplo da Figura 542, foram utilizados os arcos capazes de 90° para JO_1 e JO_2 , proporcionando os pontos de contato T_1 e T_2 e, então, as tangentes pedidas t_1 e t_2 , visto que os arcos de centros O_3 e O_4 não poderiam contar com tangentes do ponto dado J .

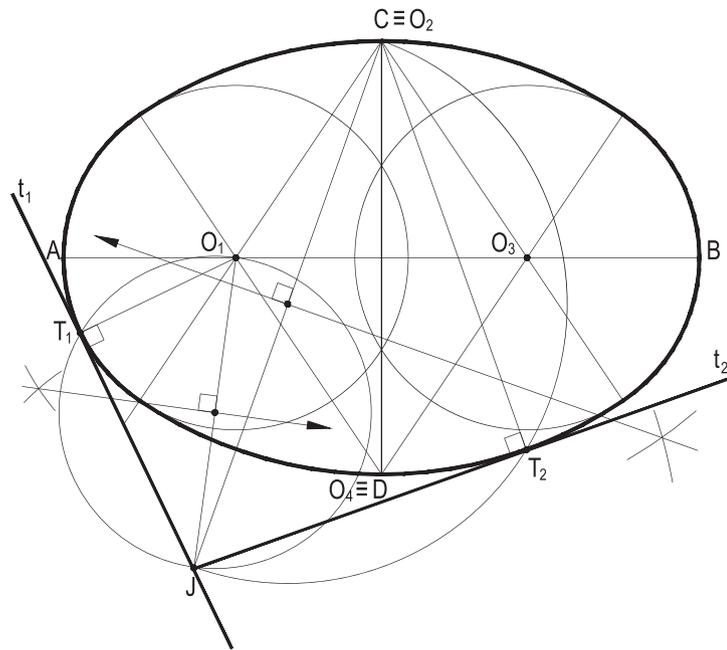


Figura 542

73 – Óvulos

Óvulo, ou oval irregular, é a curva fechada formada por arcos de circunferências concordantes duas a duas sequencialmente, apresentando simetrias em relação a uma reta, suporte de seu eixo.

Os óvulos são curvas irregulares, com apenas um eixo e, portanto, sem centro.

Os dois exemplos das Figuras 543 e 544 são óvulos de quatro centros, adiante (número 74) mais detalhados. Em ambos, o segmento CD , perpendicular ao eixo AB e diâmetro do arco superior de cada curva, trazendo a maior medida transversal é, embora indevidamente, habitualmente denominado eixo menor da oval.

Observe-se, entre os dois exemplos ao lado, o maior alongamento do óvulo da Figura 544, decorrente do maior afastamento do ponto J , centro do arco inferior PQ , ao ponto M , médio de CD .

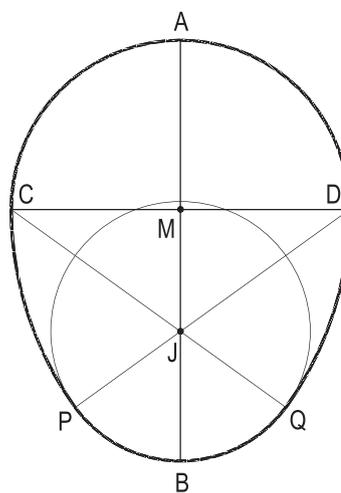


Figura 543

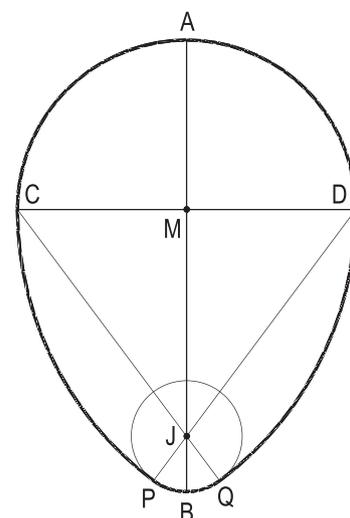


Figura 544

74 – Famílias de óvulos

Consideremos uma semicircunferência de diâmetro CD e centro O_1 , dois pontos O_2 e O_3 da reta CD , arbitrados, mas simétricos em relação a O_1 , além da mediatriz m de CD .

Tomando pontos J_1, J_2, J_3 , etc. de m , suas uniões a O_2 e a O_3 trazem, sobre os arcos de centros O_2 e O_3 e raios iguais a O_2D , ou O_3C , pontos E_1 e F_1 de concordância desses arcos com outro, de centro J_1 (Figura 545), compondo, com a semicircunferência inicial, um óvulo de quatro centros O_1, O_2, O_3 e J_1 .

Por repetição e para os pontos J_2 e J_3 , e outros da mesma forma escolhidos, dá-se formação a novos óvulos, também de quatro centros O_1, O_2, O_3 e J_2 , ou O_1, O_2, O_3 e J_3 , etc. (Figura 545), formando-se, assim, uma família de óvulos de quatro centros, três deles O_1, O_2 e O_3 fixados e os quartos J_1, J_2, J_3 , etc. sobre a mediatriz m de CD .

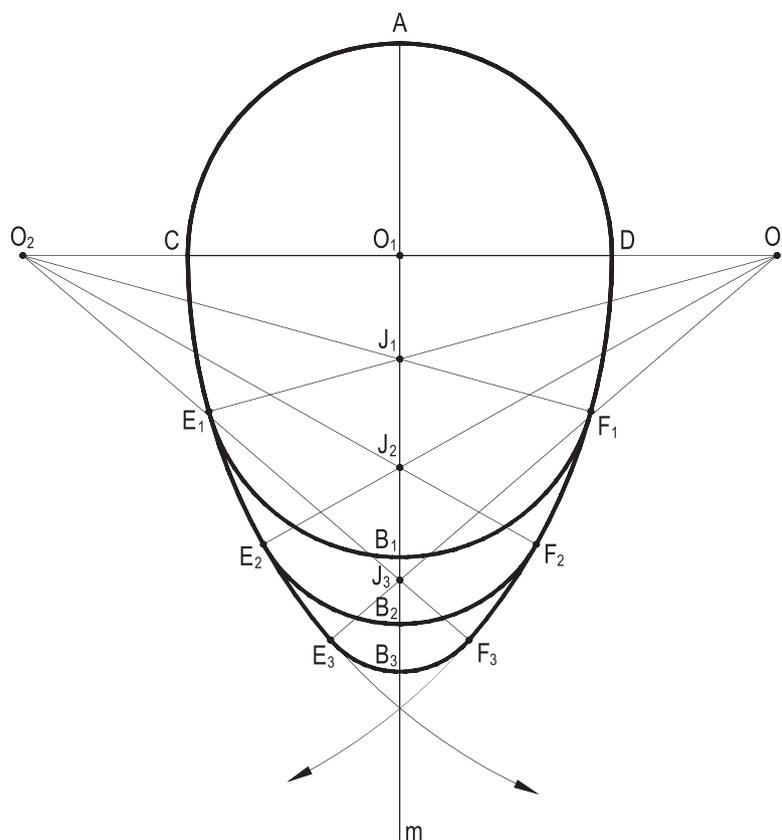


Figura 545

Todos os óvulos dessa família têm o mesmo eixo menor CD , variando a dimensão AB_1, AB_2, AB_3 , etc. dos eixos maiores, o que assegura concluir ser indeterminada a construção de óvulos de quatro centros, dados apenas por seu eixo menor, além de que os pontos O_2 e O_3 foram também arbitrados, obedientes apenas a suas simetrias em relação ao ponto O_1 .

Da mesma forma é indeterminada a construção de um óvulo de quatro centros conhecendo-se apenas seu eixo maior.

Tais considerações, naturalmente, permanecem válidas para óvulos com quantidades de centros superiores a quatro, o que significa que, para suas construções, dados adicionais devem ser estipulados, para que sejam determinadas suas resoluções.

75 – Construção do óvulo de quatro centros, dados, em posição, seus dois eixos

Dar os dois eixos AB e CD, em posição, significa conhecer não apenas suas medidas, mas também a posição do ponto O, comum aos dois.

Para a construção, traça-se a circunferência de centro O, com diâmetro CD, o eixo menor do óvulo, marcando-se o ponto \bar{A} diametralmente oposto ao vértice A e, então, conhecida a diferença $d = \bar{B}\bar{A}$, entre os dois eixos, aplicá-la sobre as retas CB e DB, obtendo-se os pontos \bar{C} e \bar{D} , \bar{C} em BC e \bar{D} em BD (Figura 546).

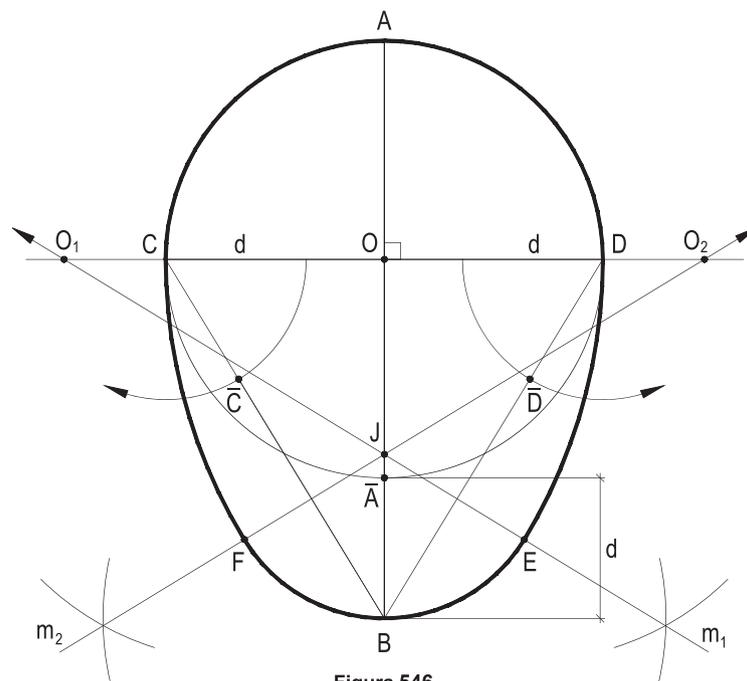


Figura 546

São, então, traçadas as mediatrizes m_1 e m_2 dos segmentos $B\bar{D}$ e $B\bar{C}$, que cortam AB no mesmo ponto J atingindo a reta suporte do eixo menor CD, produzindo os pontos O_1 e O_2 , dois dos quatro centros do óvulo procurado, que tem em O e em J seus outros dois centros.

Os alinhamentos dos pares de centros O_1 com J e de O_2 com J trazem os pontos de concordância E e F (Figura 546).

Com centros em O_1 e raio O_1D , traça-se o arco DE, para, com centro em J e raio JE, obter o ponto F sobre m_2 e, concluindo, com centro em O_2 e raio O_2F , construir o arco FC. São esses três arcos, além da semicircunferência de diâmetro CD, os quatro arcos que formam o óvulo procurado.

Quanto maior for a diferença d entre os dois eixos dados, mais alongado será o óvulo procurado.

76 – Tangentes a óvulos

As construções de tangentes a um óvulo dado, seja num ponto corrente P (Figura 547) dado, seja com direção conhecida d , ou a partir de um ponto exterior J , também dado (Figura 548), são bem simples, por serem elas, afinal, tangentes a arcos de circunferência, repetindo os passos detalhados para as ovas regulares (número 72).

É claro que, antes dos traçados, é indispensável observar quais os arcos da curva podem interessar a cada uma das tangentes pedidas. Assim, nos exemplos aqui estudados, tanto para as tangentes t_1 e t_2 paralelas à reta dada d , como a tangente t por um ponto corrente P da curva (Figura 547), os arcos tangenciados são os de centros O_3 , O_1 e O_2 , respectivamente.

Para a construção das tangentes ao óvulo por um ponto dado J , exterior à curva, verificados quais os arcos que interessam, basta (ver número 20) traçar as tangentes t_1 e t_2 a eles (Figura 548).

Além disso, cabe observar que as tangentes à curva nos pontos de concordância de seus arcos tangenciam simultaneamente os dois arcos que chegam a tais pontos, como as tangentes t_1 , t_2 , t_3 e t_4 na Figura 549, respectivamente, nos pontos O_2 , T_1 , T_2 e O_3 .

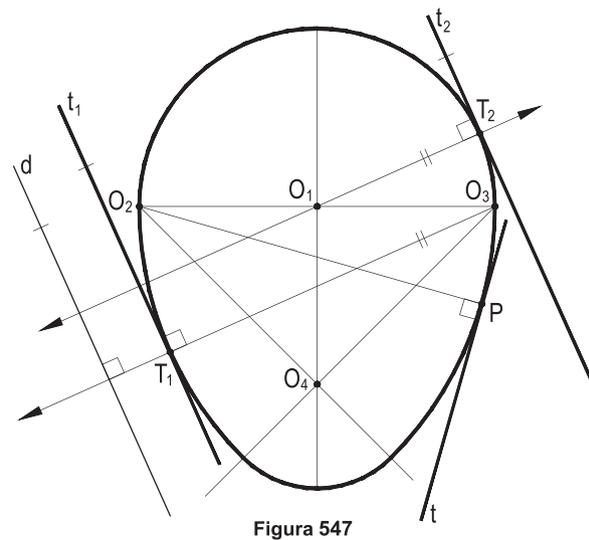


Figura 547

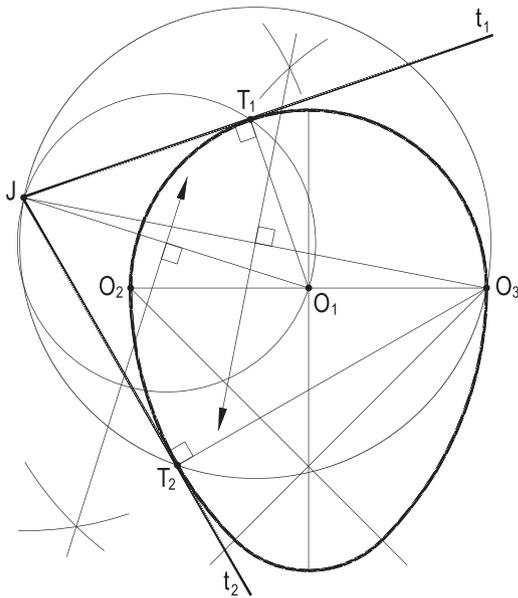


Figura 548

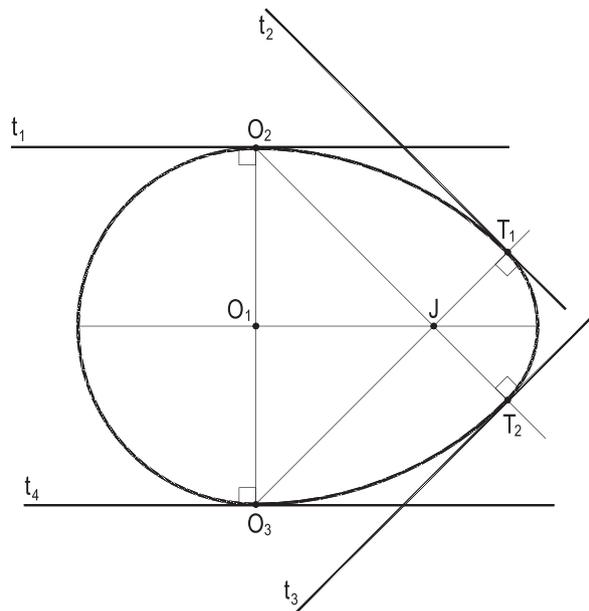


Figura 549

77 – Problemas resolvidos

Seguindo a numeração anterior, vão listados problemas relativos a ovais regulares e a óvulos, devidamente resolvidos.

309

309 – Dadas duas circunferências iguais (O) e (O'), pede-se construir uma oval regular de quatro centros, sabendo que estes centros formam um quadrado $OJO'J'$ e, em seguida, determinar as tangentes à curva paralelas a um dos lados desse quadrado.

Resolução: Imediato completar o quadrado $OJO'J'$, assim como construir a oval pedida, obtidos os pontos de concordância T_1, T_2, T_3 e T_4 de seus pares de arcos consecutivos, que são os pontos de contato das quatro tangentes t_1, t_2, t_3 e t_4 pedidas (Figura 550).

310 – Dadas as circunferências iguais (O) e (O') e a reta r , pede-se construir uma oval regular de quatro centros, concordando as circunferências dadas, sabendo que um de seus centros, J , pertence à reta r .

Resolução: J há de ser a interseção de r com a mediatriz m de OO' para garantir as igualdades de JO e de JO' e de JT_2 e JT_3 e o quarto centro será (Figura 551) o ponto J' simétrico de J em relação à reta OO' .

A construção da oval se faz, então, pela determinação dos pontos T_1, T_2, T_3 e T_4 , frutos das uniões de J e de J' aos centros O e O' e pelo traçado dos arcos concordantes de centros O, J, O' e J' .

A inclusão das tangentes t_1, t_2, t_3 e t_4 à curva, nos pontos de contato T_1, T_2, T_3 e T_4 , assegura as concordâncias pedidas (Figura 551)

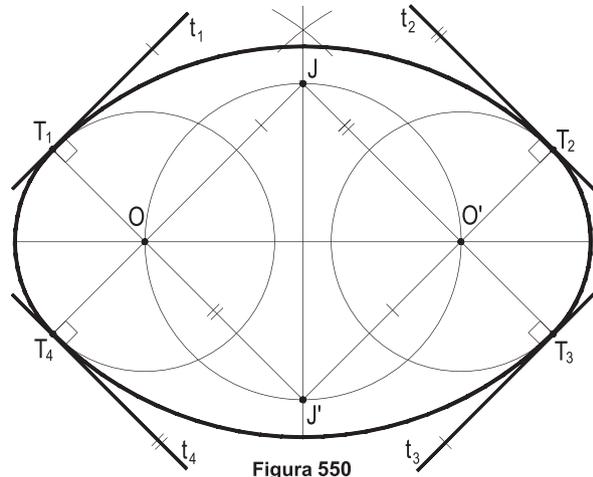


Figura 550

310

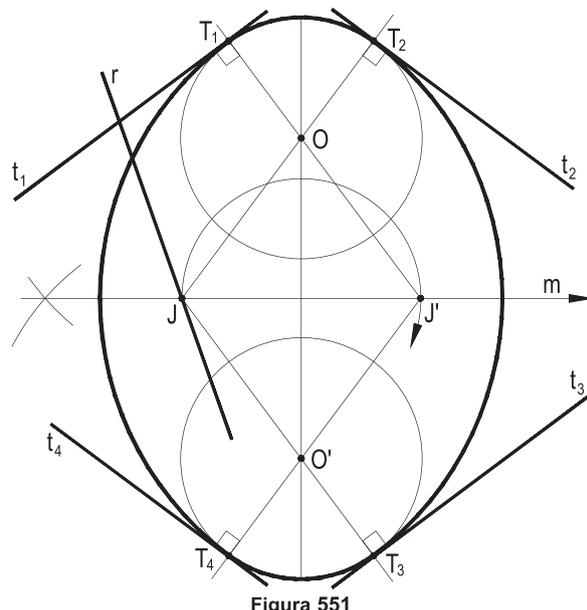


Figura 551

311 – Dadas duas circunferências iguais (O) e (O'), pede-se construir a oval regular de quatro centros O, J, O' e J', sabendo que o triângulo OJO' é equilátero e que a oval concorda as duas circunferências dadas.

Resolução: É claro que também o triângulo OJ'O' tem de ser equilátero, para garantir a simetria da oval. Assim, construído o losango OJO'J' e obtidos os pontos de concordância T_1 , T_2 , T_3 e T_4 (Figura 552), fica imediato construir a oval, composta pelos arcos T_1T_2 , T_2T_3 , T_3T_4 e T_4T_1 .

312 – Construir a oval regular de quatro centros, dada por seu eixo menor AB, sabendo que um de seus centros equidista das retas paralelas r e s, dadas.

Resolução: Obtido o terceiro centro J, interseção da mediatriz m de AB com a reta e, equidistante de r e de s, e, em seguida, o quarto centro J', simétrico de J em relação a AB, fica imediata a construção da oval (Figura 553).

313 – Dadas duas circunferências iguais (O) e (O'), tangentes exteriormente, pede-se concordá-las com dois arcos de circunferências, compondo uma oval regular de quatro centros.

Resolução: Os outros dos centros J e J' da oval procurada são os pontos de corte das circunferências de centros O e O', com raios medindo o dobro dos raios de (O) e (O') dadas (Figura 554).

314 – Construir o óvulo de quatro centros, contendo a semicircunferência dada de diâmetro AB, A e B sendo dois de seus centros, sabendo que a curva é tangente à circunferência dada (O) em seu arco de centro B.

Resolução: A união de B a O traz o ponto de contato T entre a oval e a circunferência (O), assim como o quarto centro J, interseção de BT com a mediatriz m do eixo AB.

O óvulo é, então, composto pela semicircunferência de diâmetro AB e pelos arcos de centros A, B e J (Figura 555).

315 – Dadas quatro circunferências (A) e (B) externas e iguais e (C) e (D) secantes e também iguais entre si, pede-se desenhar duas ovais regulares, ambas de quatro centros, A e B sendo dois centros da primeira oval e C e D dois centros da segunda, sabendo que as duas curvas têm um terceiro centro J em comum.

Resolução: O terceiro centro J, comum às duas ovais, tem de ser (ver número 66) o ponto de corte das mediatrizes dos segmentos AB e CD, o que proporciona os últimos centros L e K das duas curvas pedidas, por simetrias de J em relação a AB e a CD, respectivamente (Figura 556).

311

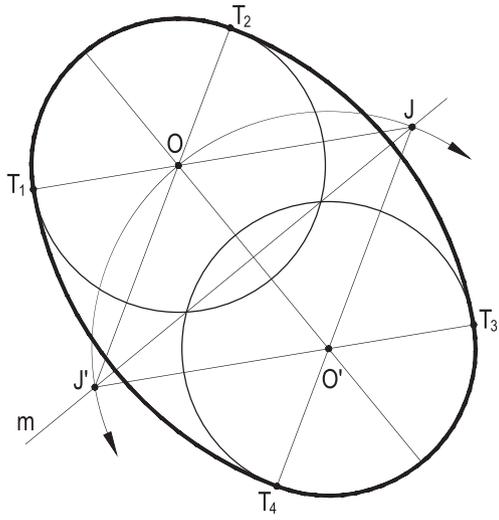


Figura 552

312

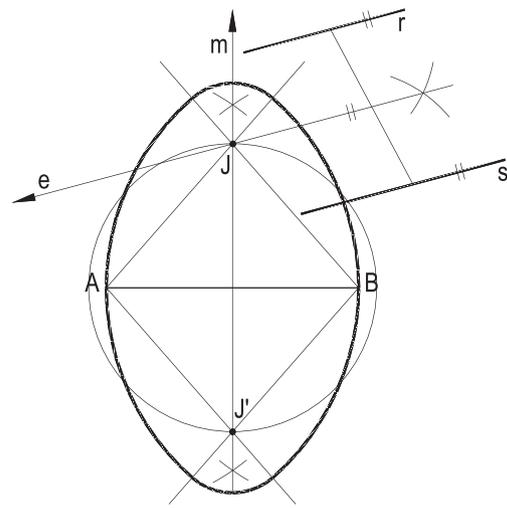


Figura 553

313

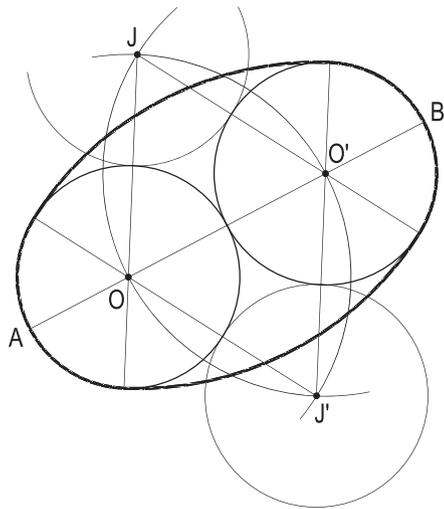


Figura 554

314

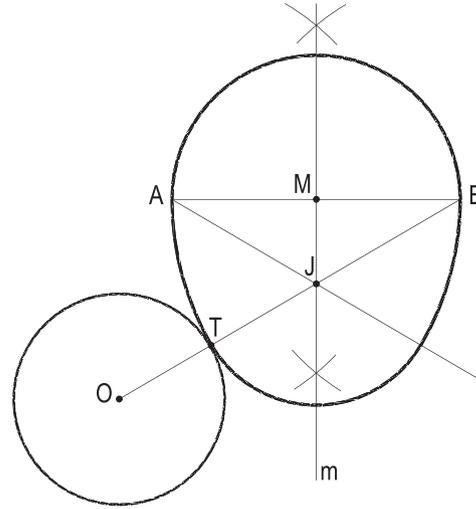


Figura 555

315

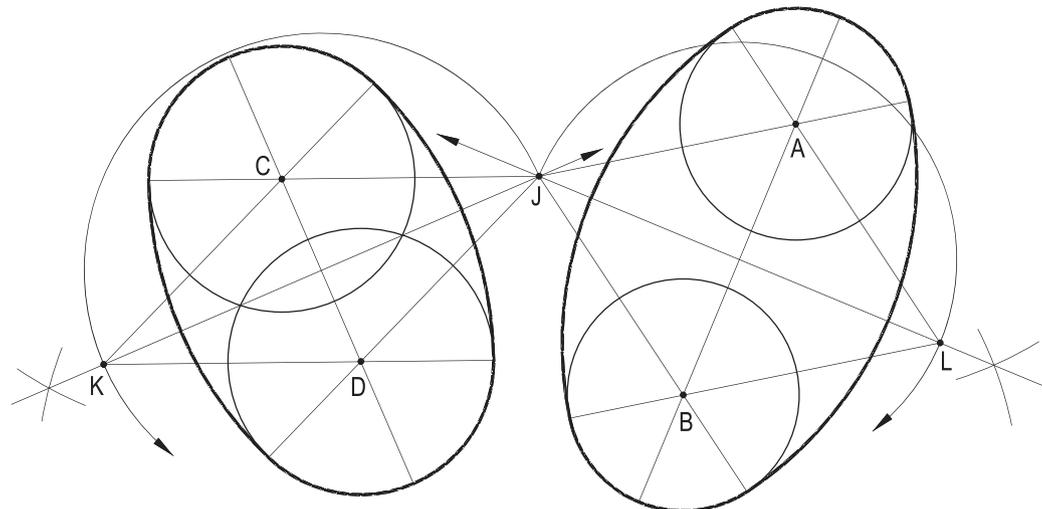


Figura 556

316 – Dadas uma reta r e uma semicircunferência exteriores, esta de centro O e diâmetro AB , construa a oval irregular de quatro centros O, A, B e H , extremo do raio OH perpendicular a AB e exterior àquela semicircunferência e , além disso, desenhe o retângulo circunscrito à oval, com dois lados paralelos a r .

Resolução: Basta construir o óvulo (ver número 75) e traçar as tangentes à curva que sejam paralelas ou perpendiculares a r (ver número 76) (Figura 557).

317 – Dados os segmentos colineares e iguais AB e BC , uma reta r e uma medida k , pede-se construir dois óvulos iguais, de quatro centros, o primeiro com centros A, B, M , médio de AB , e H , pertencente à reta r e o segundo com centros B, C, N , médio de BC , e sentido oposto ao do primeiro. Em seguida, desenhe as circunferências (O, k) e (O', k) , tangentes exteriormente aos dois óvulos.

Resolução: Obtido H e seu simétrico \bar{H} , em relação a B , é simples construir os dois óvulos. Os pontos O e O' são os cortes das circunferências de centros M e C e de centros A e \bar{H} (Figura 558) ampliadas da medida k , em relação às de diâmetros AB e BC .

318 – Dadas duas retas r e s , uma semicircunferência de diâmetro AB e, sobre a reta AB , os pontos \bar{A} e \bar{B} , tais que sejam iguais os segmentos $A\bar{A}$ e $B\bar{B}$, pede-se construir o óvulo com centros O , médio de AB , \bar{A} , \bar{B} e um quarto H equidistante de r e de s , aproveitando a semicircunferência dada como um de seus arcos.

Resolução: A bissetriz b_1 proporciona H (Figura 559) na mediatriz de AB . A segunda bissetriz b_2 corta a mediatriz de AB num ponto inacessível.

319 – Dadas a semicircunferência de diâmetro AB e, na reta que lhe serve de suporte, os pontos \bar{A} e \bar{B} , tais que $A\bar{A} = B\bar{B}$, considere o triângulo equilátero ABH e a oval irregular com centros \bar{A} , \bar{B} , O (médio de AB) e H , assim como uma outra oval igual a ela, obtida por translação na direção AB , tangente à primeira no ponto B , e construa a circunferência (J) , igual à dada, tangente exteriormente aos dois óvulos.

Resolução: Obtido o ponto H e desenhados os dois óvulos, o segundo com centros \bar{B} , \bar{O} , \bar{C} e \bar{H} , o ponto J é o de corte das circunferências de centros \bar{A} e \bar{C} , com raios ampliados de uma medida igual ao raio da dada (Figura 560).

320 – Dadas a semicircunferência de diâmetro AB e centro M e as circunferências iguais (O) e (O') , construa o óvulo de quatro centros A, B, M e J e a oval de quatro centros O, O', J e um quarto a determinar, sabendo que J é um centro comum às duas curvas.

Resolução: J é a interseção das mediatrizes m_1 e m_2 , respectivamente, de OO' e de AB , o que define o óvulo pedido. A oval que concorda (O) e (O') tem como quarto centro o ponto J' , simétrico de J em relação a OO' (Figura 561).

316

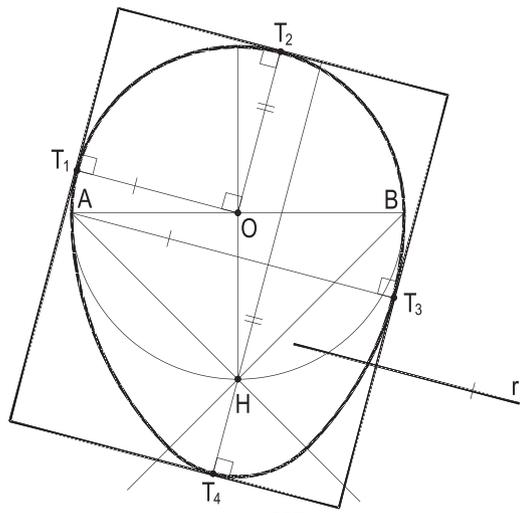


Figura 557

317

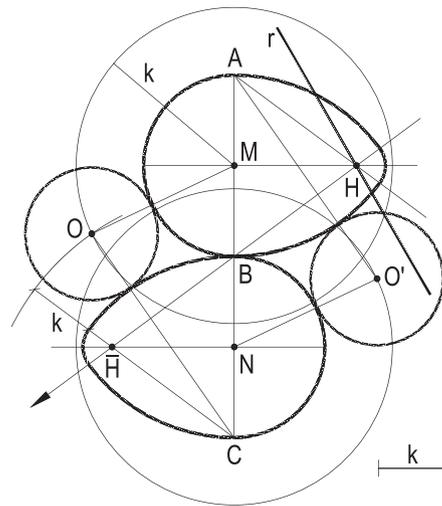


Figura 558

318

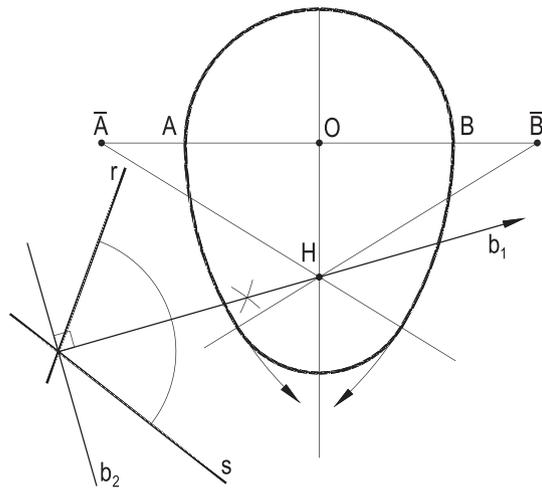


Figura 559

319

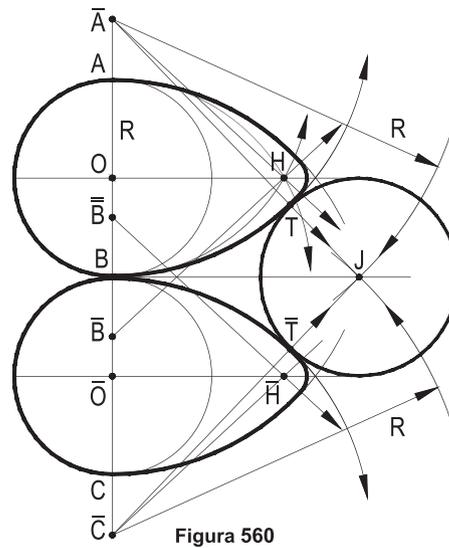


Figura 560

320

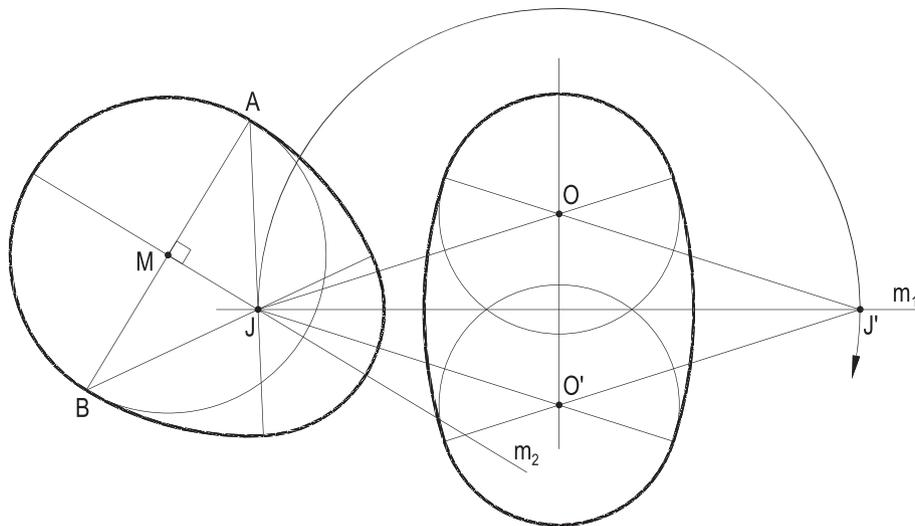


Figura 561

321 – Dados os pontos A e B , centros das circunferências (A, R) e $(B, 2R)$, tangentes exteriormente, pede-se construir a circunferência $(C, 2R)$ tangente exteriormente às duas dadas e concordar (A, R) e $(C, 2R)$ por meio de um óvulo de quatro centros.

Resolução: Obtido o valor R , terça parte de AB , e determinado o ponto C , com duas soluções C_1 e C_2 , pelas interseções das circunferências $(A, 3R)$ e $(B, 4R)$ (Figura 562), fica imediato precisar os eixos PQ e RS do óvulo procurado (a segunda solução, para a posição C_2 , foi apenas indicada, mas não completada), já que a reta suporte do eixo maior fica definida por esse ponto C_1 e pelo dado A , limitada pelos pontos P e Q (Figura 562), RS sendo o diâmetro de $(C_1, 2R)$ perpendicular a PQ .

E, utilizando a construção detalhada no número 75 (Figura 546), obtêm-se os pontos \bar{R} e \bar{S} , para, com as mediatrizes m e n , de $Q\bar{S}$ e de $Q\bar{R}$, determinar os centros O_1 e O_3 do óvulo pedido, completado pelos centros $O_2 \equiv P$ e O_4 , antes precisados (Figura 562).

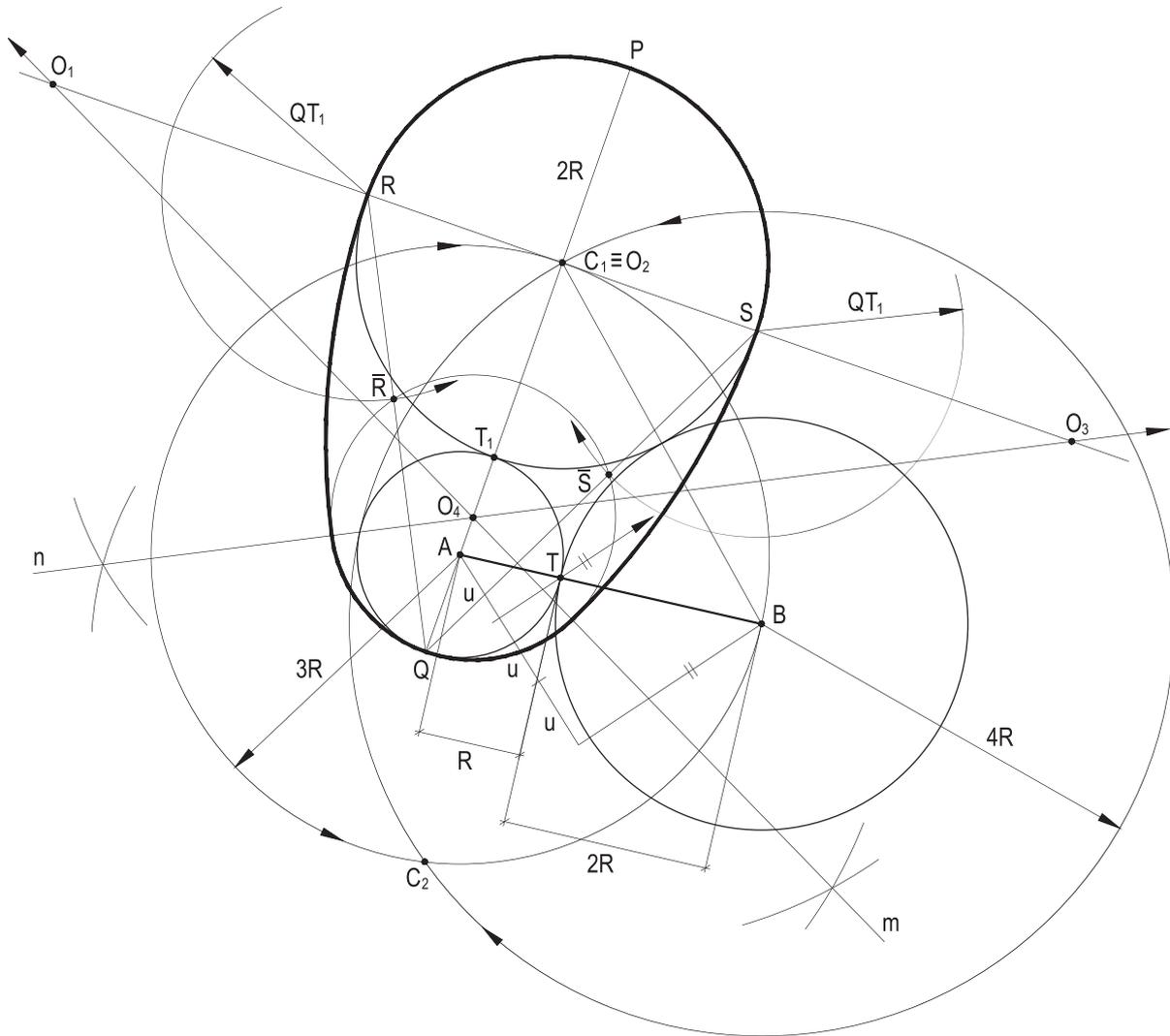


Figura 562

CAPÍTULO VIII

ESPIRAIS

78 – Definições e elementos

Espiral é a curva plana descrita por um ponto, extremo livre de um vetor que tem origem fixa, girando em torno dessa origem, afastando-se ou aproximando-se dela, obedecendo a duas leis estabelecidas, uma angular, sequencial, dos ângulos formados por tais vetores e outra, linear, comandando suas amplitudes. O ponto fixo (O, nas Figuras 563 e 564) é denominado polo da espiral e as semirretas que o ligam a pontos correntes da curva são os raios vetores. Conforme se desenvolva, a partir de seu polo, para a direita (sentido horário) (Figura 563), ou para a esquerda (sentido anti-horário) (Figura 564), a espiral é dita dextrógira ou levógira (ou sinistrógira), respectivamente.

Espira é o arco da curva correspondente a cada volta completa do ponto corrente compreendido entre duas passagens consecutivas sobre um mesmo raio vetor, como os arcos P_1P_9 ou P_2P_{10} das Figuras 563 e 564. A medida do segmento formado, então, sobre esse raio vetor é denominada passo da espiral, como os segmentos P_1P_9 e P_2P_{10} dessas figuras.

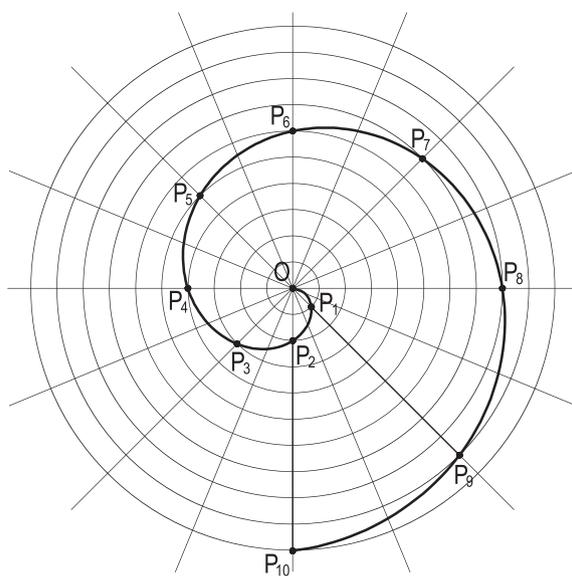


Figura 563

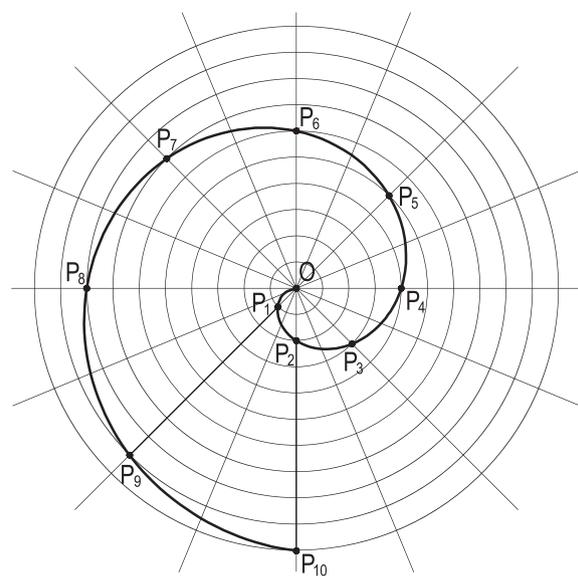


Figura 564

Fazendo-se variar as leis linear e angular que comandam o movimento de um ponto móvel em torno do polo fixo, pode-se criar grande diversidade de espirais, algumas das quais atendem a condições mais usuais, sendo, a seguir detalhadas.

79 – Espiral de Arquimedes

Seu criador foi o matemático grego Arquimedes de Siracusa, uma pequena cidade na costa sudeste da Sicília. O matemático apresentou, quase três séculos antes da era cristã, seu detalhamento na obra *Sobre as Espirais*.

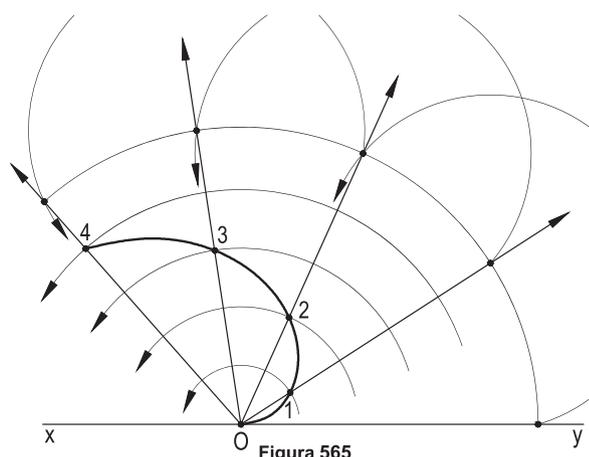
Arquimedes, além de matemático e amante da Geometria, foi físico, cientista, engenheiro, astrônomo e inventor, tendo ficado famoso pelo conhecido Princípio de Arquimedes, que afirma que “qualquer corpo mais denso que um fluido, ao ser nele mergulhado, perde peso correspondente ao volume de fluido deslocado”. Sabe-se que, após tal descoberta, o cientista saiu correndo pelas ruas, gritando Eureka, palavra grega, cuja tradução para o português é uma interjeição que significa “encontrei” ou “descobri”.

O cientista é também reconhecido por ter equacionado, a pedido de seu rei, o problema de deslocar uma muito pesada estrutura, afirmando que, com uma alavanca e um ponto de apoio, seria capaz de mover o mundo.

Além do detalhamento de sua espiral e da enunciação de suas aplicações práticas, Arquimedes teve excepcional importância para a Geometria, tendo desenvolvido as fórmulas para os cálculos das áreas e dos volumes das esferas e dos cilindros a elas circunscritos.

A espiral de Arquimedes, ou espiral aritmética, é o lugar geométrico dos pontos que se movem com velocidade constante sobre uma reta, que gira, também a velocidade angular constante, em torno de um ponto fixo. É uma curva aberta e contínua.

Assim, os vetores de pontos de uma espiral de Arquimedes, tomados segundo uma progressão aritmética angular em relação ao eixo referencial XY, têm suas amplitudes obedecendo a outra progressão aritmética (Figura 565).



Por serem uniformes as leis das variações lineares e angulares do movimento do ponto gerador, em toda espiral de Arquimedes, o passo é constante. Assim são os segmentos de reta P_1P_9 e P_2P_{10} da espiral aritmética da Figura 563, passos da curva.

Os estudos e os conceitos defendidos por Arquimedes vieram a influenciar, adiante, geniais matemáticos, como René Descartes, o criador da Geometria Descritiva, e Apolônio de Perga, conhecido como o Grande Geômetra, muito elogiado por seu livro *As Cônicas*.

80 – Construção da Espiral de Arquimedes

Dado o polo O , informado seu sentido e escolhido o eixo referencial OX , para construir, por pontos, a espiral de Arquimedes, deve-se traçar uma circunferência de centro O e raio arbitrado OA , dividi-la em um número qualquer de partes iguais, dividindo também seu raio nessa mesma quantidade de partes iguais. As circunferências de centro O e os raios divisores proporcionam, por ordenados cortes, pontos correntes da curva, como P_1, P_2, P_3 , etc., na Figura 566.

O traçado da curva se faz, então, à mão livre, ou com auxílio de uma curva francesa, sendo tão mais preciso, quanto maiores forem as quantidades de divisões utilizadas (Figuras 566 e 567).

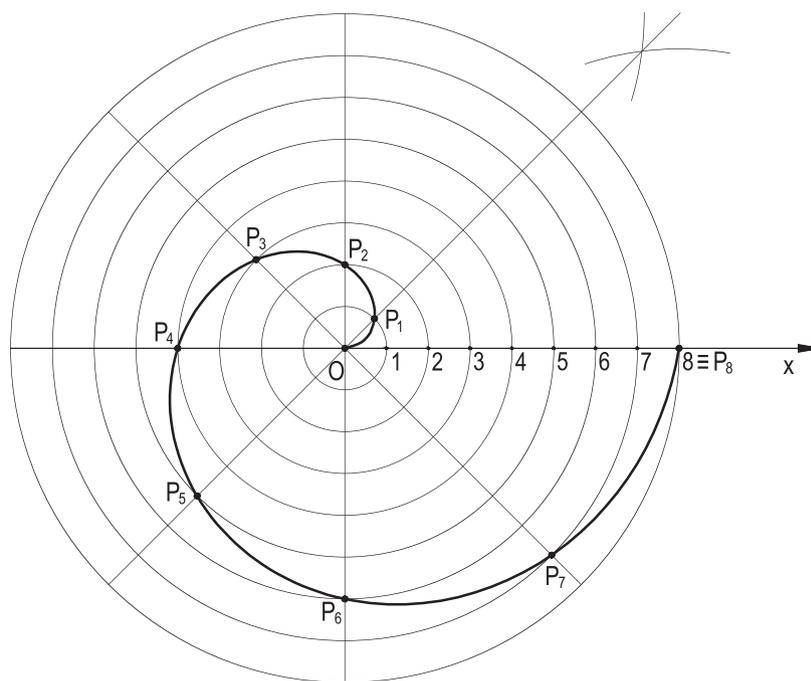


Figura 566

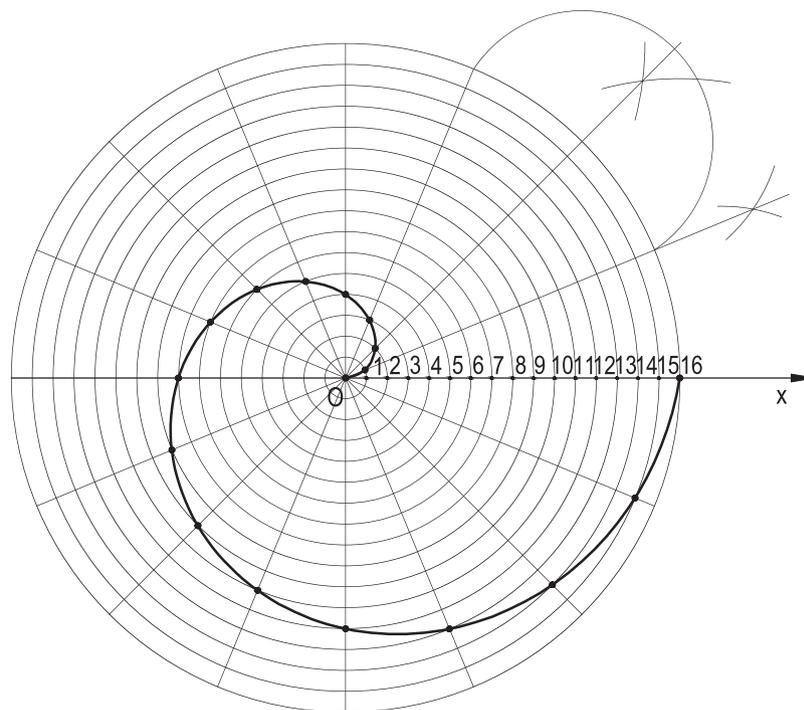


Figura 567

81 – Espiral hiperbólica

Espiral hiperbólica é o lugar geométrico dos extremos livres de vetores, todos com origem num ponto fixo O , que formem com um eixo fixo Ox contendo O , num mesmo sentido, ângulos θ , 2θ , 3θ , 4θ , etc., em progressão aritmética, com amplitudes OA , OB , OC , OD , etc. que valham múltiplos de um valor conhecido R , que se sucedam, respectivamente, em produtos pelos inversos dos múltiplos daqueles ângulos.

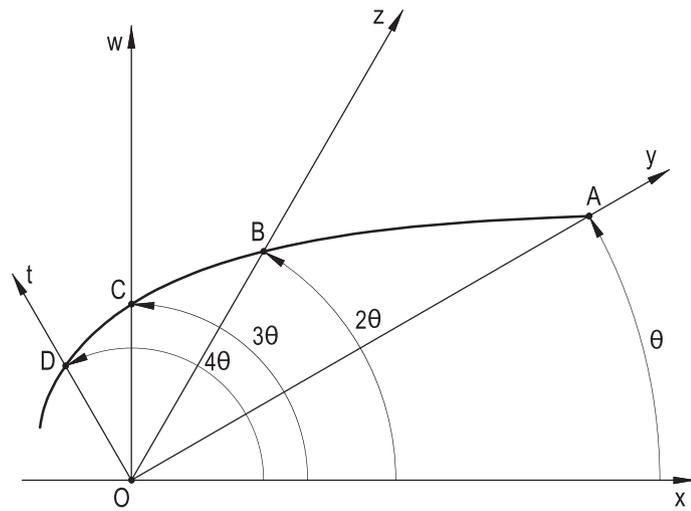


Figura 568

Assim, no exemplo da Figura 568, as semirretas Oy , Oz , Ow , Ot , etc. formam, com o eixo fixo Ox , ângulos iguais a $1.\theta$, $2.\theta$, $3.\theta$, $4.\theta$, etc., enquanto que as amplitudes dos vetores neles marcados são $OA = 1.R$, $OB = \frac{1}{2} . R$, $OC = \frac{1}{3} . R$, $OD = \frac{1}{4} . R$, etc., A , B , C , D , etc. sendo pontos correntes de curva, mantido constante o produto ângulo com amplitude.

O ponto fixo O é denominado polo ou centro da espiral, que é uma curva aberta e contínua, podendo ser dextrógira ou levógira.

Para a construção da curva, como no exemplo da Figura 569, foram utilizados, a partir do eixo Ox , dado, ângulos múltiplos de 60° , para o traçado das semirretas Oz , Ow , Ox' , Oz' , Ow' , etc., inclinadas de 60° , 2.60° , 3.60° , etc., com esse eixo, sobre as quais foram aplicados, respectivamente, o valor arbitrado $OA = R$, sobre Oz e, a seguir, $OB = \frac{1}{2} R$, $OC' = \frac{1}{3} R$, $OD' = \frac{1}{4} . R$, etc., mantendo, sempre constante produto do ângulo do raio vetor com sua amplitude.

O polo O não chega a ser alcançado, pois deveria, então, ser nula a amplitude de seu raio vetor.

Para estender a curva além do ponto A , basta trabalhar com bissetrizes dos ângulos com o eixo, como Oy , mantendo constante o produto das medidas ângulo e amplitude.

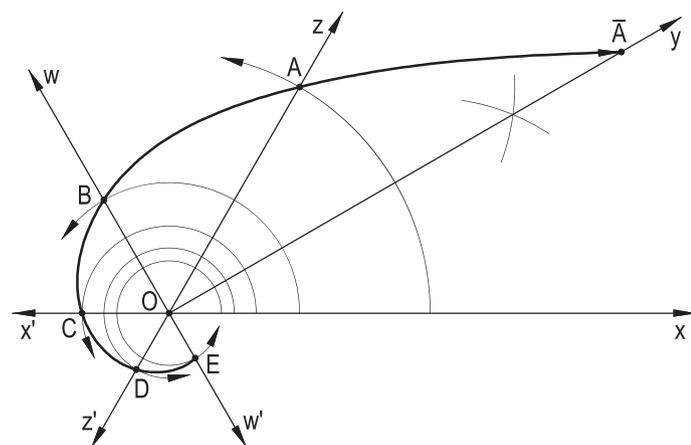


Figura 569

Com a inclusão de novas bissetrizes, sempre dos ângulos formados com o eixo das abscissas, seria possível alongar, tanto quanto o desejado, a curva, para a direita.

E a redução continuada das amplitudes dos raios vetores, sempre em obediência às progressões angular e linear, levaria a curva a aproximar-se do polo O, sem, naturalmente, poder atingi-lo.

82 – Espiral logarítmica

Espiral logarítmica é uma curva plana, lugar geométrico dos extremos livres dos vetores que se originam num mesmo ponto O, vetores esses que se sucedem angularmente, a partir de um eixo fixo que contenha O, segundo os termos de uma progressão aritmética estabelecida, suas amplitudes obedecendo a determinada progressão geométrica. Tal ponto O é denominado polo da espiral.

É uma curva contínua e aberta, podendo, naturalmente, ser dextrógira ou levógira.

No exemplo abaixo (Figura 570), os ângulos que se sucedem em relação ao eixo Ox são os de razão 45° de uma progressão aritmética, o termo inicial OA com valor arbitrado, sobre o eixo horizontal, a razão da progressão geométrica das amplitudes estabelecida igual a 2, no sentido anti-horário, ou seja, $OB = 2.OA$, $OC = 2.OB$, $OD = 2.OC$, etc.

Tal como com a hipérbolica, a espiral logarítmica tem seus pontos aproximando-se do polo, tendendo a ele sem, no entanto, alcançá-lo.

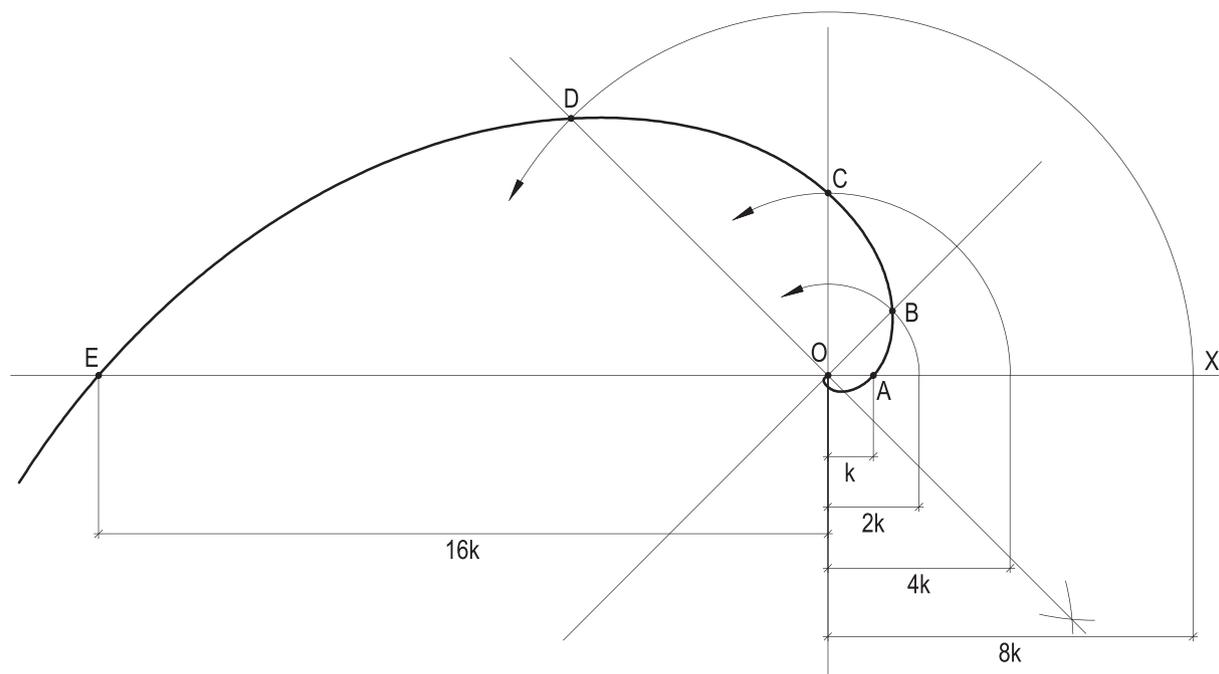


Figura 570

83 – Segmentos áureos. Média e extrema razão

Um segmento de reta se diz dividido em média e extrema razão se a razão entre o menor e o maior dos segmentos em que foi dividido for igual à razão entre a maior parte e o segmento original, conforme definição citada pelo grande geômetra Euclides em seu sexto livro do conjunto denominado *Elementos*.

Ocorre que, para um segmento qualquer AB, há dois pontos I e E, um interior, outro exterior, mas colinear com A e B, cujas medidas atendem a tal propriedade (ver *Geometria Plana*, edição de 2020, deste autor, número 280 e seguintes) (Figura 571), AI e AE, então denominados segmentos áureos de AB.

A razão entre o segmento AB e seu áureo interno AI é um número irracional, valendo, aproximadamente 1,618, habitualmente representado pela letra grega Φ e denominado número de ouro, número áureo, ou razão de Phidias, em homenagem ao escultor grego que tanto a utilizou em suas obras.



Figura 571

84 – Divisão de um segmento dado em média e extrema razão

Tal como detalhado no item 282 do livro *Geometria Plana*, antes citado, para dividir um segmento dado AB em média e extrema razão, deve-se traçar a circunferência (C, CB) tangente a AB em B, com raio igual à metade de AB, ligar C a A, obtendo os pontos R e S (Figura 572), que, girados em torno de A, proporcionam os extremos I e E dos segmentos áureos, interno e externo do segmento AB, seus divisores em média e extrema razão.

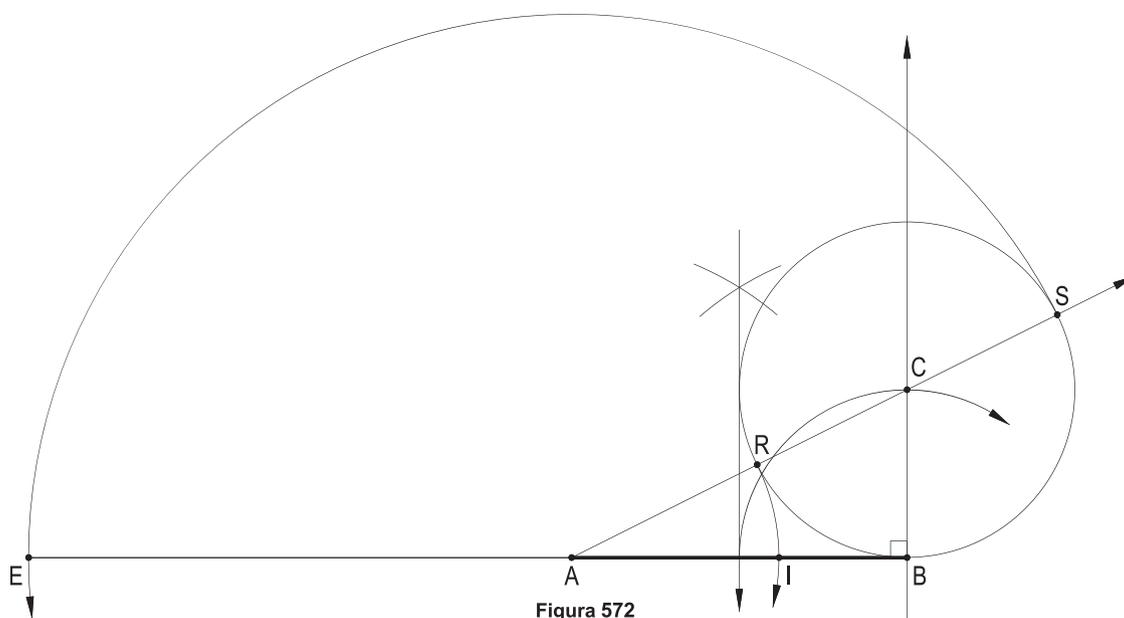


Figura 572

85 – Triângulos áureos

Quando o ângulo interno oposto à base de um triângulo isósceles mede 36° , a base é igual ao valor do segmento áureo interno de cada um dos lados iguais (*Geometria Plana*, número 283).

Quando o ângulo interno oposto à base de um triângulo isósceles mede 108° , a base vale o módulo do segmento áureo externo de cada um dos lados iguais (*Geometria Plana*, número 285).

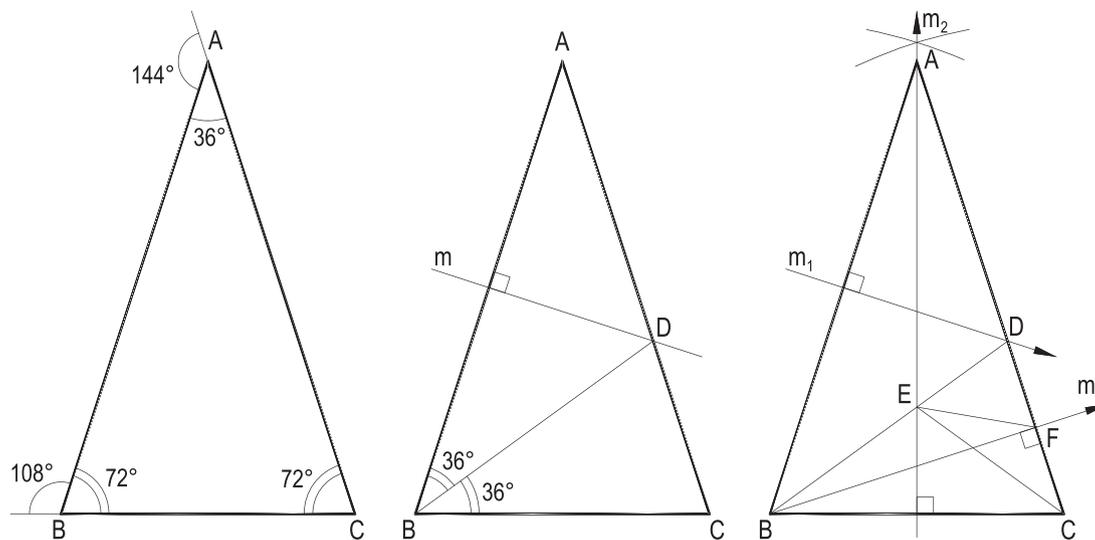
Os triângulos isósceles, cujos ângulos opostos à base medem 36° ou 108° , são, por isso, denominados triângulos áureos e contam com as seguintes propriedades:

1 – Os ângulos internos e externos dos triângulos áureos, medindo 36° , 72° , 108° e 144° (Figura 573), são, assim considerados em conjunto, termos de uma progressão aritmética de razão 36° .

2 – A mediatriz m de um dos lados iguais de um triângulo áureo acutângulo ABC , de base BC , divide o triângulo em outros dois BCD e DAB , áureos também, o primeiro sendo acutângulo e o segundo obtusângulo (Figura 573).

3 – O ponto D , traço dessa mediatriz com o lado AB , coincide com o pé da bissetriz do ângulo B (Figura 573), já que, no triângulo DAB , $A = B = 36^\circ$.

4 – Assim, os traçados das mediatrizes m_1 , m_2 , m_3 , etc., sempre de um dos lados iguais, proporcionam, em sequência, novos triângulos áureos, como BCD e DAB , como CED e EBC e como EDF e FCE na Figura 573, em cada par o primeiro sendo acutângulo e o segundo obtusângulo.



5 – A mediatriz m de um dos lados iguais AC de um triângulo áureo obtusângulo ABC atinge a base BC num ponto D tal que a ceviana AD divide o triângulo original em dois triângulos áureos DAC e BAD , o primeiro acutângulo e o segundo obtusângulo (Figura 574), como, aliás, demonstrado no livro *Geometria Plana*, antes mencionado.

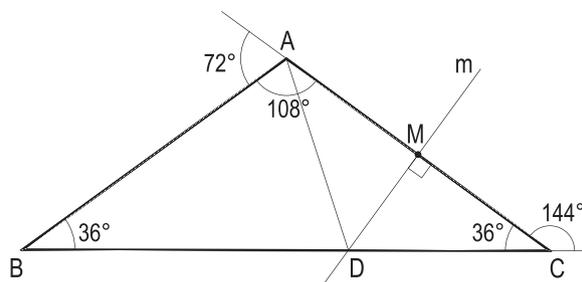


Figura 574

De fato, basta ver que o ponto D , pertencendo à mediatriz m do lado AC , equidista de A e de C , garantindo ser isósceles o triângulo DAC , fazendo com que os ângulos DAC e BAD meçam, respectivamente, 36° e 72° , obrigando a ser também isósceles o triângulo BAD .

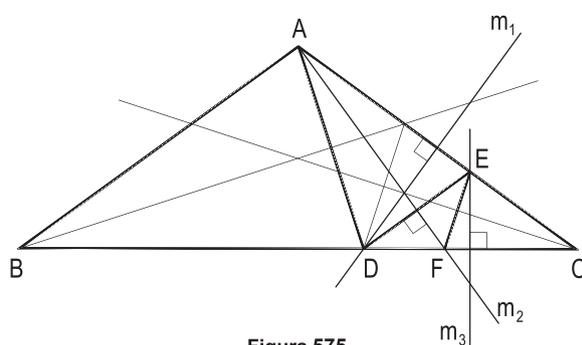


Figura 575

6 – As repetições da construção acima, com as mediatrizes $m_1, m_2, m_3, \text{ etc.}$, sempre de um dos lados iguais, provocam uma sequência de pares de triângulos isósceles áureos, como DAC e BAD , como ECD e ADE e como FED e CEF , etc. na Figura 575.

86 – Espiral associada a um triângulo áureo

Dado o triângulo isósceles áureo acutângulo ABC , de base BC , com as mediatrizes m_1, m_2 e m_3 , dos segmentos AC, BC e BD , vêm, respectivamente, os centros D, E e F dos arcos de circunferências AC, CB e BD , de raios $DA = DC, EB = EC$ e $FB = FD$, respectivamente, partes da oval associada $ACBD$, garantidas as concordâncias dos pares de arcos sucessivos AC, CB e BD , por serem colineares os centros D e E dos dois primeiros com o ponto de tangência C e E e F dos dois seguintes com o ponto de tangência B (Figura 576).

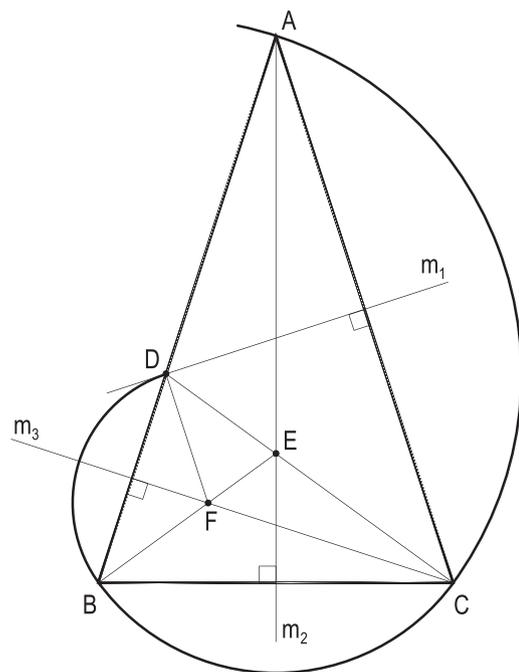


Figura 576

Naturalmente, a construção pode ser estendida, ampliando a espiral estudada, tanto para além de A , quanto de D .

87 – Retângulo áureo

Diz-se que um retângulo é áureo quando uma de suas dimensões vale o módulo do segmento áureo da outra.

Tal como detalhado no item 281.5 do livro *Geometria Plana*, deste autor, vale listar as seguintes propriedades:

1 – Os retângulos áureos são, aos pares, semelhantes.

2 – Para construir um retângulo áureo ABCD, dado seu lado menor AB, basta determinar o ponto M, médio do lado AX do quadrado auxiliar ABXY, girar o vértice Y em torno de M até a reta suporte de AX, obtendo o vértice C do retângulo procurado (Figura 577).

3 – Para construir um retângulo áureo dado seu lado maior AB, basta determinar o ponto I, de AB, tal que AI meça seu segmento áureo interno (Figura 578), pois AI há de ser a medida do lado menor do retângulo pedido. Assim, girando AI em torno de A, vem o vértice D do retângulo ABCD procurado.

4 – Retirando-se um quadrado AXYD de um retângulo áureo ABCD resta outro retângulo áureo XBCY (Figura 579).

5 – Repetindo-se a supressão de quadrados de cada novo retângulo áureo, vão sempre se formando novos retângulos áureos, como BCEF, BGIF, FHJI, etc., na Figura 580.

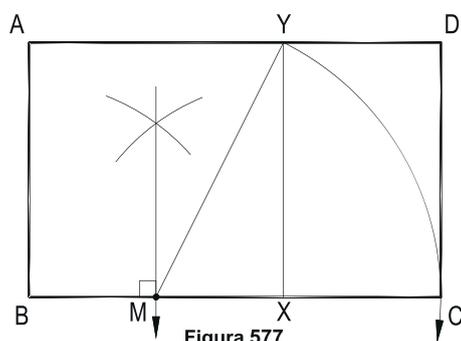


Figura 577

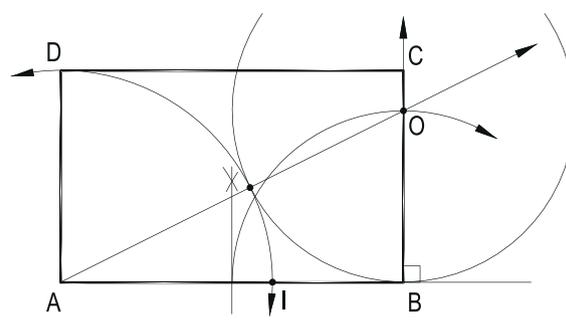


Figura 578

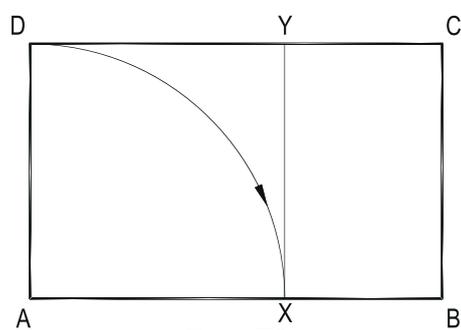


Figura 579

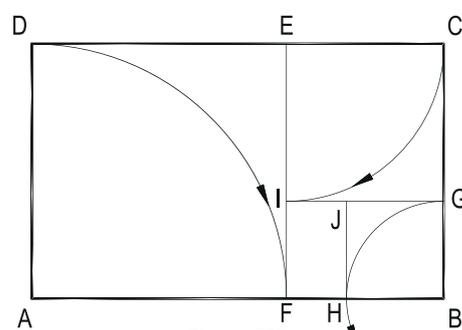


Figura 580

88 – Pentágonos áureos

Todo pentágono convexo regular é dito áureo porque suas diagonais criam, tomadas três a três, triângulos isósceles áureos em seu interior.

De fato, observado o pentágono convexo regular $ABCDE$ da Figura 581, abaixo, observa-se que suas diagonais AC , AD e BE dão formação aos triângulos isósceles AJK , JAB e KAE , todos áureos (ver número 85), tal a existência dos ângulos 36° e 108° .

Assim, cada diagonal sua mede o módulo do segmento áureo externo de seu lado.

Além disso, traçadas todas as suas cinco diagonais, pelas repetições das medidas desses ângulos, observa-se a criação de outro pentágono convexo regular $A'B'C'D'E'$ (Figura 582).

E, consecutivamente, as cinco diagonais desse segundo pentágono áureo dão formação a um terceiro de mesma natureza, o que se repete indefinidamente (Figura 582).

A criação de triângulos áureos, com tais construções, proporciona o traçado de uma espiral associada, tal como detalhado no item 86, anterior, pela sequência de arcos de circunferência aos pares concordantes, como os $E'C$, CD , DA , etc., de centros J , A' e E' , respectivamente, da Figura 582 todos correspondendo a ângulos centrais de 108° .

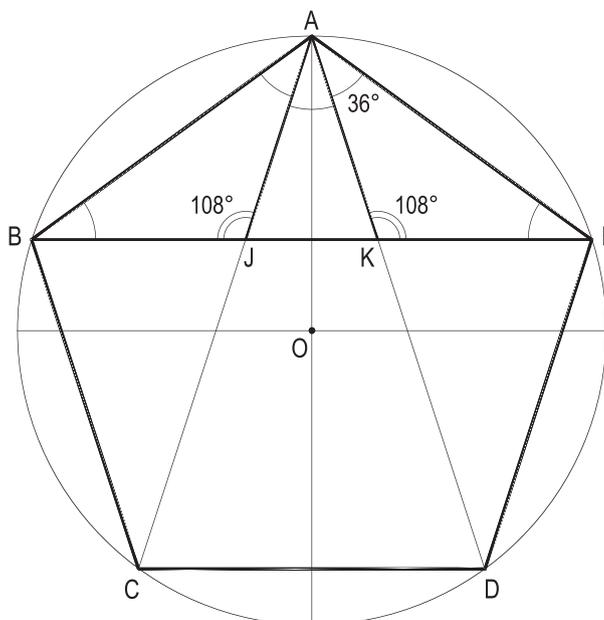


Figura 581

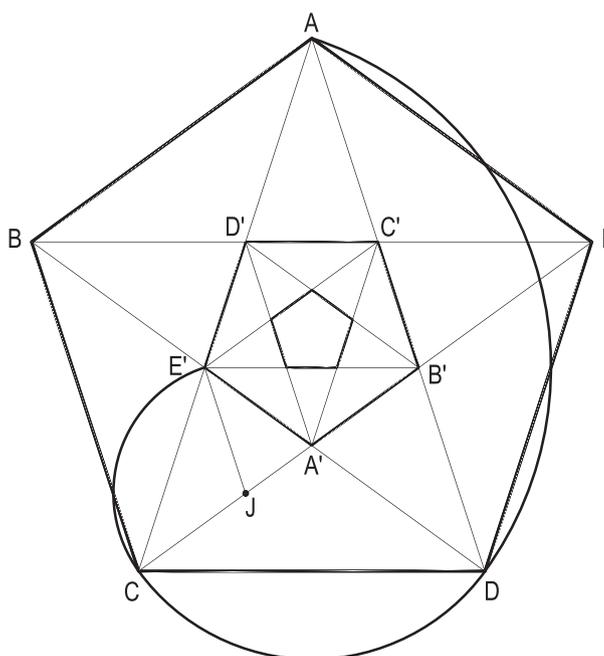


Figura 582

89 – Espiral áurea

Espiral áurea é uma curva contínua e aberta, formada por quadrantes de circunferências consecutivamente concordantes, inscrita num retângulo áureo e obtida a partir da decomposição do retângulo áureo inicial numa sequência de outros, áureos também, obtidos pela supressão continuada de quadrados, tal como visto no item 87.5.

Assim é a espiral, cujo trecho ABCDEF é representado na Figura 583 abaixo, concordando quadrantes de circunferências AB, BC, CD, DE, EF, etc., com centros, respectivamente, nos pontos 1, J, 2, 3, 4, etc.

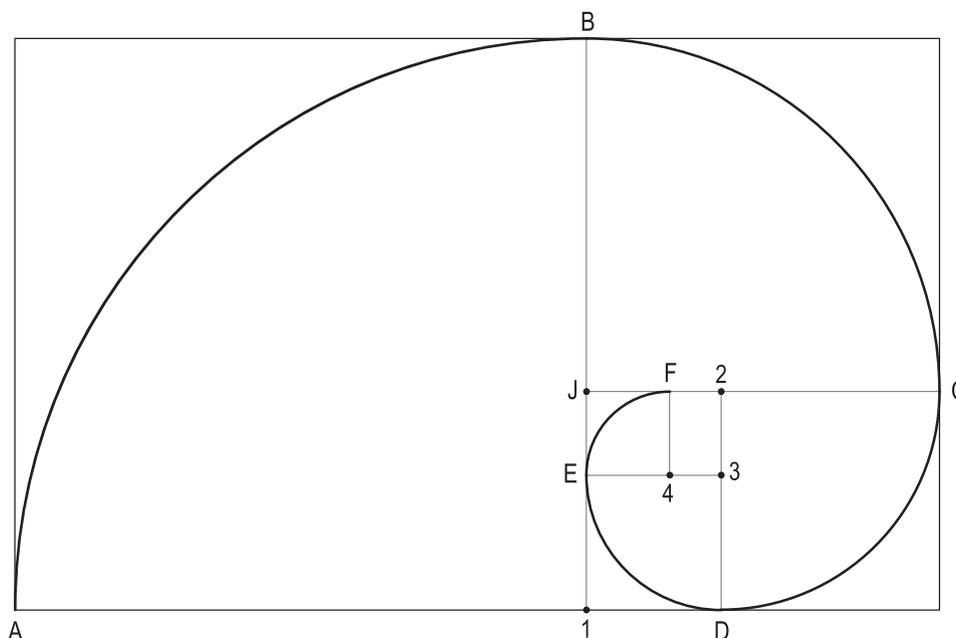


Figura 583

90 – Sequência de Fibonacci

Apresentada pelo matemático italiano Leonardo Fibonacci, trata-se da sequência de números reais inteiros, começando com o 0 e o 1 e tal que cada novo elemento valha a soma dos dois anteriores. Assim, tal sequência é: 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ...

Vale observar que, à medida que aumentam os valores dos elementos dessa sequência, a razão entre cada um deles e seu antecessor tende ao valor 1,618, o número de ouro, a razão de Phidias, Φ (ver número 83).

91 – Espiral de Fibonacci

Espiral de Fibonacci é uma curva contínua e aberta formada por quadrantes de circunferência, consecutivamente concordantes, cujos raios valham os termos da sequência de Fibonacci.

A construção da espiral de Fibonacci assemelha-se à da áurea, com uma sequência de quadrados, cujos lados medem, em uma unidade qualquer estabelecida, os termos da sequência numérica de Fibonacci, como indicado na Figura 584.

Inicia-se com os quadrados ABCD e CDEF de lados unitários, seguindo com os quadrados BFGH, de lado 2 (1 + 1), AHIJ, de lado 3 (2 + 1), EJKL, de lado 5 (3 + 2), GLMN, de lado 8 (5 + 3), INOP, de lado 13 (8 + 5), KPQR, de lado 21 (13 + 8) e assim por diante (Figura 584), concordando quadrantes de circunferências de centros, respectivamente, em C, B, A, E, G, I, K, etc.

Observe-se a semelhança dessa espiral com a áurea (número 89), tanto maior quanto mais a curva se afasta de seu polo, já que, nessa sequência, cada vez mais a razão entre o raio de um quadrante e o do quadrante imediatamente anterior tende ao número de ouro Φ , aproximadamente igual a 1,618.

De fato, designando por R e R' os raios de dois quadrantes consecutivos da espiral, R' seguindo-se a R, temos, a partir do quarto quadrante:

$$R'/R = 5/3 = 1,667$$

$$R'/R = 8/5 = 1,600$$

$$R'/R = 13/8 = 1,625$$

$$R'/R = 21/13 = 1,615$$

$$R'/R = 34/21 = 1,619$$

$$R'/R = 55/34 = 1,618$$

$$R'/R = 89/55 = 1,618$$

$$R'/R = 144/89 = 1,618$$

$$R'/R = 233/144 = 1,618$$

$$R'/R = 377/233 = 1,618$$

$$R'/R = 610/377 = 1,618$$

$$R'/R = 987/610 = 1,618$$

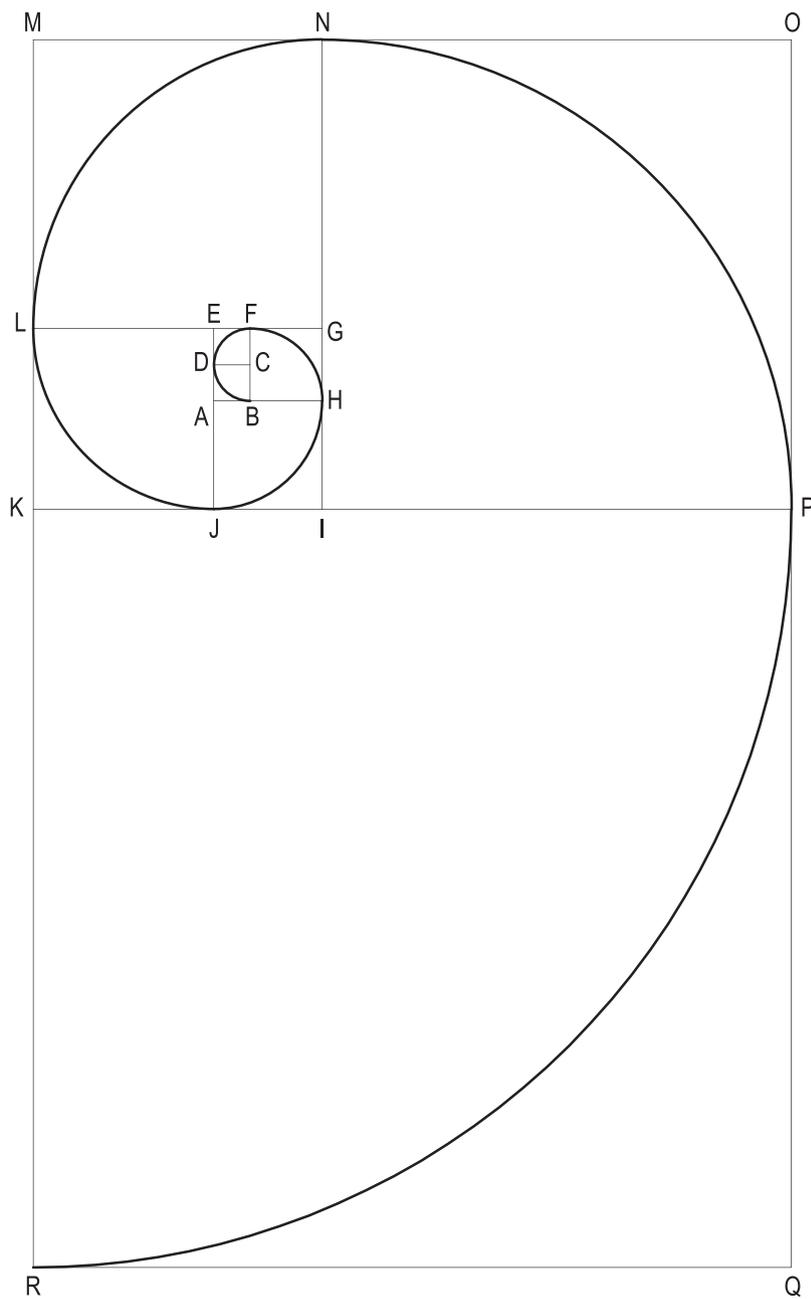


Figura 584

92 – Falsas espirais

Assemelhando-se às espirais de Arquimedes, foram desenvolvidas curvas contínuas, abertas, construídas com concordâncias de arcos de circunferências, de simples traçados, a partir de determinados números de pontos fixos, como a seguir detalhado, todas, observe-se, com passos constantes.

93 – Espiral de dois centros

Construída pelas concordâncias de semicircunferências a partir de dois pontos iniciais A e B, escolhidos arbitrariamente, inicia-se, com centro A e raio AB, descrevendo uma semicircunferência, obtendo-se, sobre a reta referencial AB, o ponto 1; a seguir, com centro B e raio B1, nova semicircunferência traz, na reta AB, o ponto 2 e, alternando os centros A e B, com sucessivas semicircunferências, são determinados novos pontos 3, 4, 5, 6, etc. da espiral (Figura 585).

94 – Espiral de três centros

Tem raciocínio semelhante ao do caso anterior, mas agora com a preliminar construção de um triângulo equilátero ABC, arbitrário. Os vértices A, B e C serão centros dos arcos de 120° , terças partes das circunferências concordantes, que comporão a espiral.

Com centro em A e raio AC, descrito o arco de 120° , vem o ponto 1, da espiral; com centro em B e raio B1, novo arco de 120° traz o ponto 2 da curva; com centro C, raio C2, um terceiro arco de mesma amplitude angular proporciona o ponto 3 e, repetindo-se o procedimento, consegue-se tantos pontos da espiral quanto se deseje, como na Figura 586, abaixo.

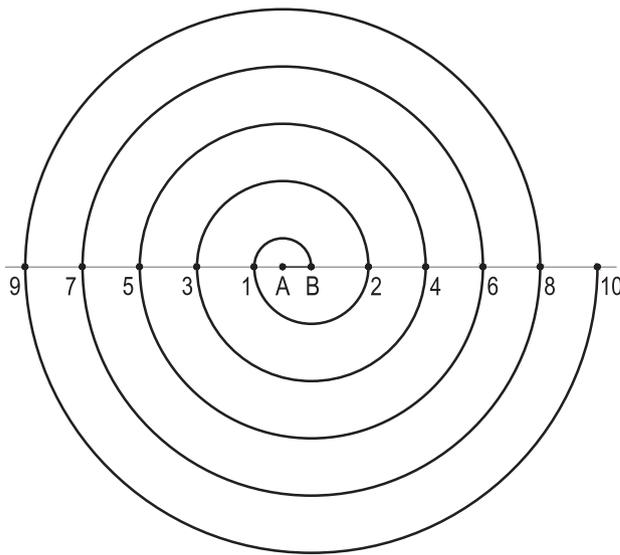


Figura 585

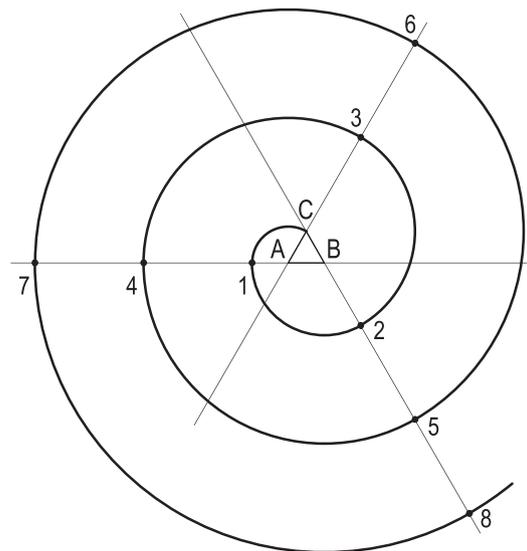


Figura 586

95 – Espiral de quatro centros

Agora são arcos de circunferência de 90° , concordados para formar a espiral.

Inicia-se com a construção de um quadrado ABCD de lado arbitrado e, sucessivamente, com centros em A, B, C e D e raios AD, B1, C2 e D3, com arcos de quadrantes, são obtidos pontos 1, 2, 3 e 4 da espiral procurada (Figura 587). Repetida a operação, com centros nos vértices do quadrado inicial ABCD e raios A4, B5, C6 e D7, novos pontos da curva são obtidos. E tantos mais quanto se queira, da mesma forma.

96 – Espirais policêntricas

Tal como visto nos casos anteriores, é possível, e simples, construir falsas espirais de 5, 6, 7, etc. centros, sempre a partir dos vértices dos polígonos convexos regular com esses gêneros e valor de lado arbitrado, concordando, consecutivamente, arcos de circunferência, respectivamente, de como entre amplitudes e 72° ($360^\circ/5$), 60° ($360^\circ/6$), $360^\circ/7$, 45° ($360^\circ/8$), etc.

A Figura 588 mostra a construção de uma falsa espiral de seis centros, a partir do hexágono regular ABCDEF, de lado arbitrado, seus vértices funcionando como centros dos arcos concordantes de 60° , como F1, 12, 23, 34, etc. que compõem a espiral.

97 – Observação

Em todos os casos de falsas espirais de n centros, as espirais se sucedem, crescentes à medida que se desenrola a curva, a partir de seu polo, seus passos, para cada caso, sendo sempre iguais.

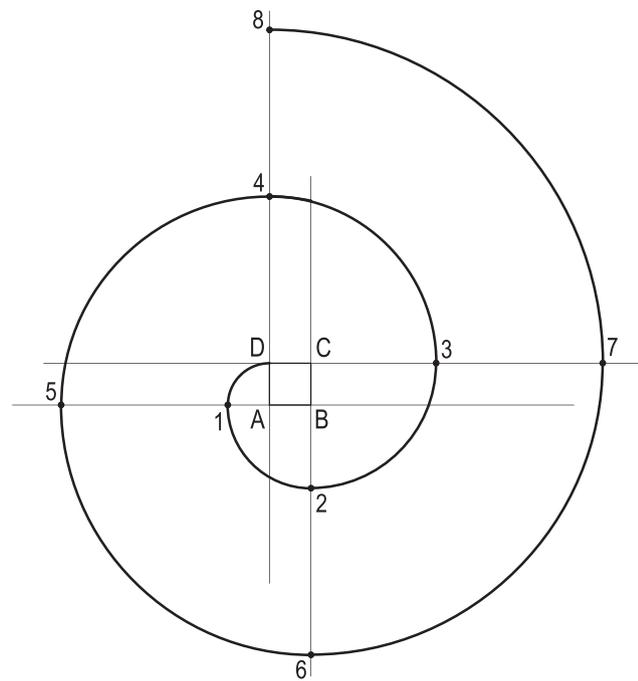


Figura 587

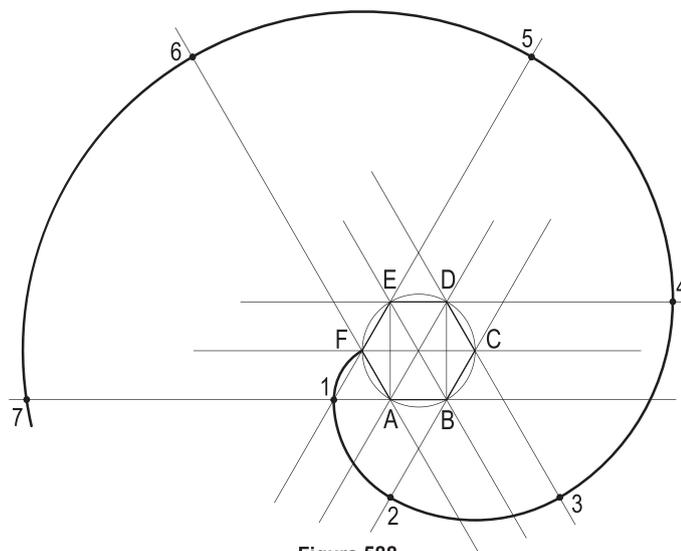


Figura 588

98 – Problemas resolvidos

Seguindo a numeração utilizada nos capítulos anteriores vão propostos e resolvidos alguns problemas sobre espirais.

322 – Num sistema cartesiano, o ponto dado $A(a, 0)$ gira, em torno da origem no sentido anti-horário, de modo tal que o vetor \vec{OA} obedeça a uma velocidade angular constante, vindo aumentar sua amplitude, em progressão aritmética de razão a , a cada 45° . Pede-se desenhar a primeira espira dessa curva.

Resolução: Trata-se, é claro (número 79), de uma espiral de Arquimedes, construída por pontos, pela aplicação sobre seus raios vetores traçados a $45^\circ, 90^\circ, 135^\circ, 180^\circ, 225^\circ, 270^\circ, 315^\circ$ e 360° em relação ao eixo das abscissas, dos valores $a, 2a, 3a, 4a, 5a$, etc., de suas amplitudes, termos da progressão aritmética estabelecida, até completar uma primeira espira com o ponto \bar{A} (Figura 589).

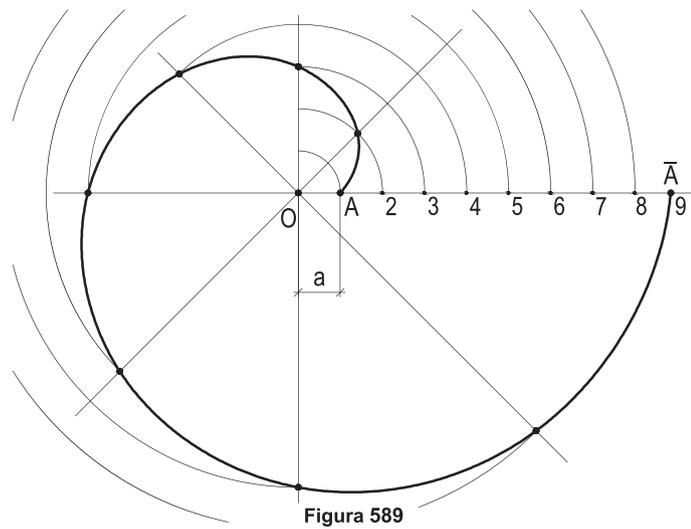


Figura 589

323 – De uma espiral aritmética de polo O são dados dois pontos A e B de sua primeira espira, levógira, os raios vetores \vec{OA} e \vec{OB} formando 120° . Pede-se construir o trecho AB da espiral.

Resolução: Dividido o ângulo dado AOB em quatro partes iguais e determinada a diferença $A\bar{B}$ entre as amplitudes dos raios vetores dados, com o rebatimento de OB , em torno de O até a reta r , a divisão dessa diferença em quatro partes iguais, pelos pontos \bar{J}, \bar{K} e \bar{L} , proporciona o valor k da progressão aritmética das amplitudes dos raios vetores em estudo e, em consequência, os pontos correntes J, K e L do trecho pedido (Figura 590).

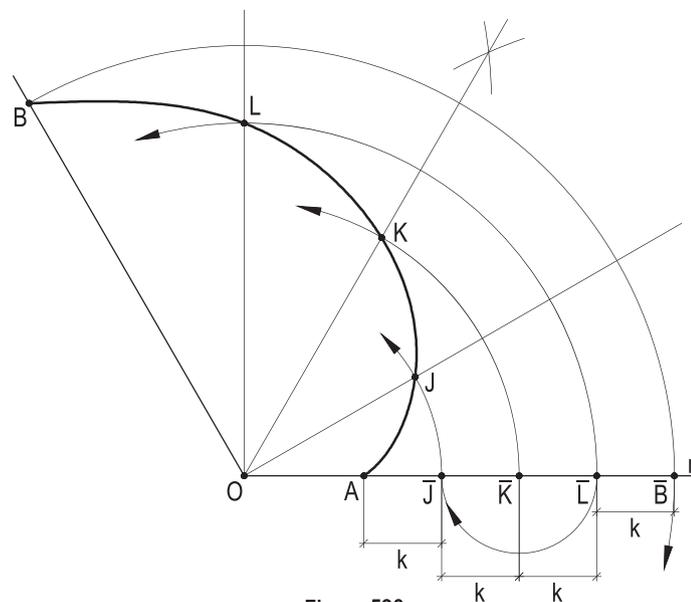
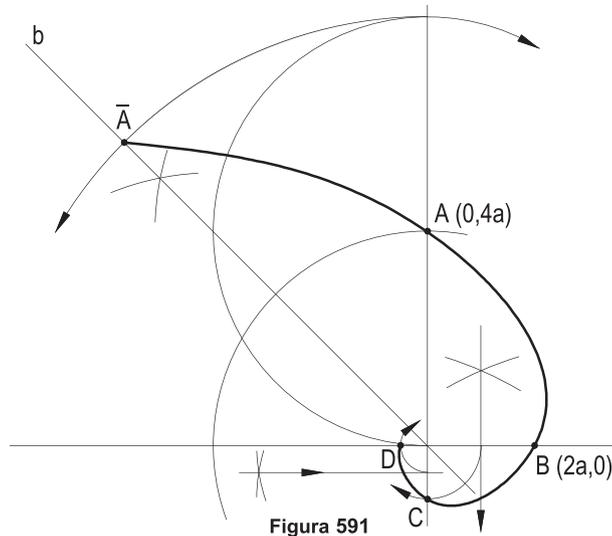


Figura 590

324 – Dados, num sistema cartesiano, os pontos A (0, 4a) e B (2a, 0), pertencentes a uma espiral hiperbólica, pede-se obter mais dois pontos C e D da curva após B, no sentido de A para B, e um terceiro \bar{A} após A, no sentido oposto, e desenhar o trecho $\bar{A}D$ da curva.

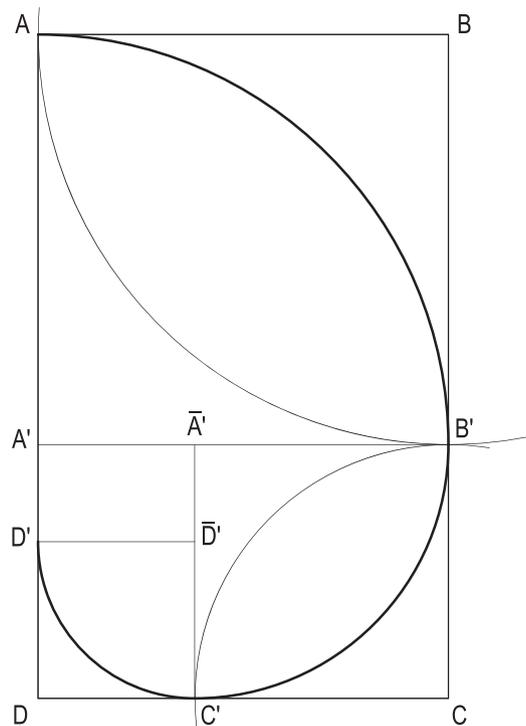
Resolução: Obedecendo a progressão geométrica dada, os raios vetores dos pontos C e D, que seguem a B, devem medir a e a/2, e o ponto \bar{A} , na bissetriz b, dos eixos coordenados, no sentido oposto, que forma o raio vetor de \bar{A} , vem com o valor 8a, visto ter sido utilizada, para esse ponto, 45° , a metade da amplitude angular anterior (Figura 591).



325 – Dado o retângulo áureo ABCD e o quadrado ABB'A', como indicado na figura abaixo, sabendo que os pontos A e B' pertencem a uma espiral áurea dextrógira, pede-se determinar mais dois pontos da curva, além de B', a intervalos angulares de 90° , e construir esse trecho da curva.

Resolução: Sabe-se (número 87.4) que, retirado o quadrado ABB'A' do retângulo dado, cria-se novo retângulo áureo A'B'CD, o que se repete para este retângulo e para o quadrado B'CC'A' dele extraído, proporcionando o retângulo A'A'D'D', áureo também.

Assim, vêm os pontos C' e D', e o trecho AB'C'D' pedido é construído pelas concordâncias dos três quadrantes de circunferência de centros A, A' e D' (Figura 592).



326 – Dado o hexágono regular ABCDEF, pede-se construir duas falsas espirais, a primeira levógira, de três centros, utilizando, como centros, os vértices A, C e E, iniciada em E, e outra dextrógira, com centros nos seis vértices do hexágono, esta segunda.

Resolução: Para a primeira espiral, os arcos concordantes, de 120° cada, são E1, com centro no vértice A, 12, com centro em C, 23 com centro em E, 34 com centro em A, este não completado, por inacessível sua extremidade, etc.

Para segunda espiral, os arcos concordantes, agora de 60° cada, são, sucessivamente, DI, I II, II III, III IV, IV V, V VI, VI VII, etc., respectivamente, com centros C, B, A, F, E, D e C, etc., iniciada no vértice D (Figura 593).

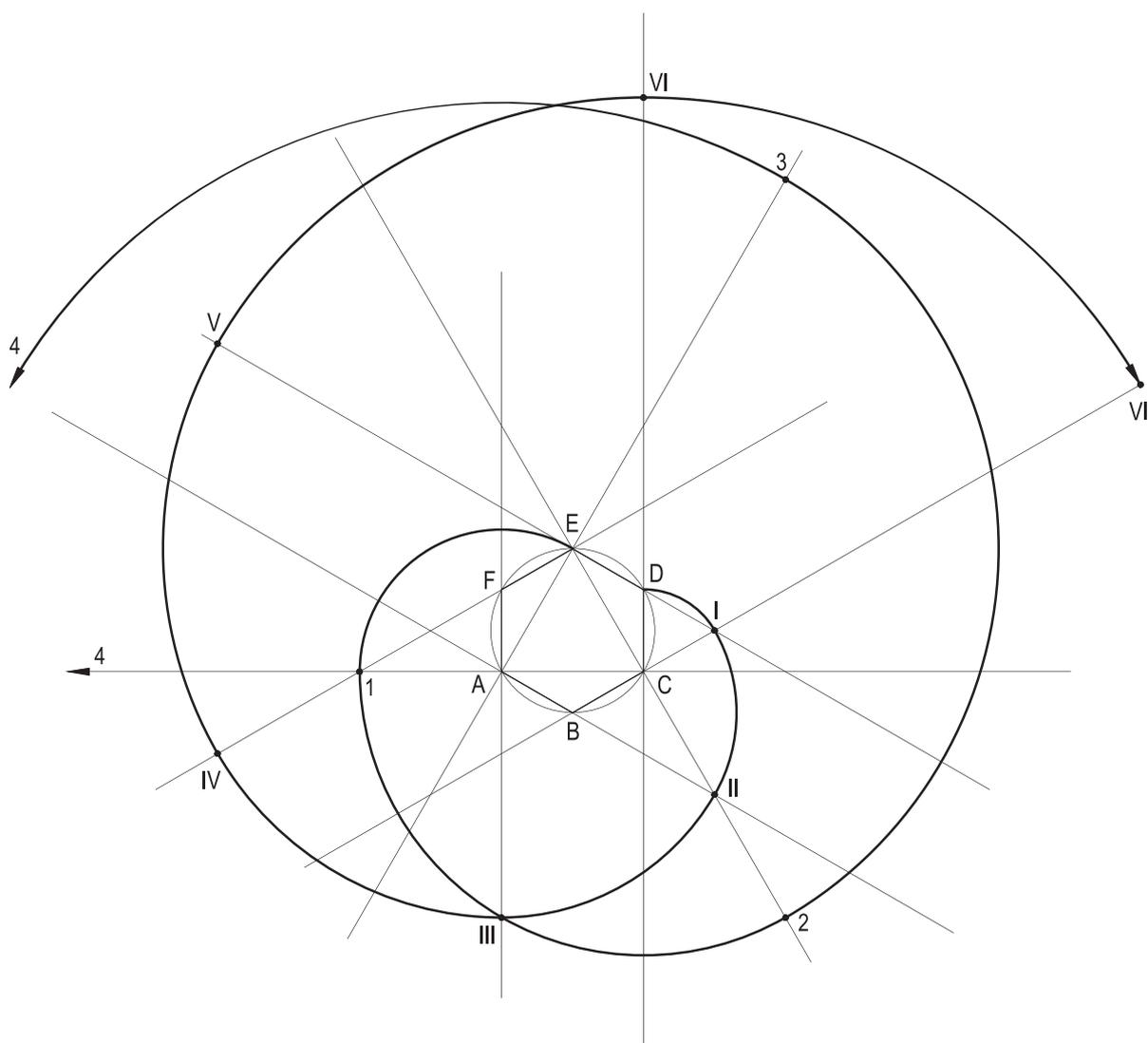


Figura 593

327 – Dado o octógono convexo regular ABCDEFGH, pede-se construir duas falsas espirais, ambas levóginas, a primeira quadricêntrica, aproveitando, como centros, nesta ordem, os vértices A, C, E e G do quadrado inscrito no octógono, iniciada em G, e a segunda, de oito centros, utilizando todos os vértices do octógono dado, começando esta segunda espiral com um primeiro arco de centro A.

Resolução: Idêntica à do exemplo anterior, a primeira espiral concordando arcos de 90° na ordem: GI, I II, II III, III IV, IV V, etc., com centros, respectivamente, nos vértices, A, C, E e G, a segunda, com arcos de 45° na ordem: H1, 1 2, 2 3, 3 4, 4 5, 5 6, 6 7, 7 8, 8 9, etc., com centros, respectivamente, nos vértices A, B, C, D, E, F, G, H, A, etc. (Figura 594).

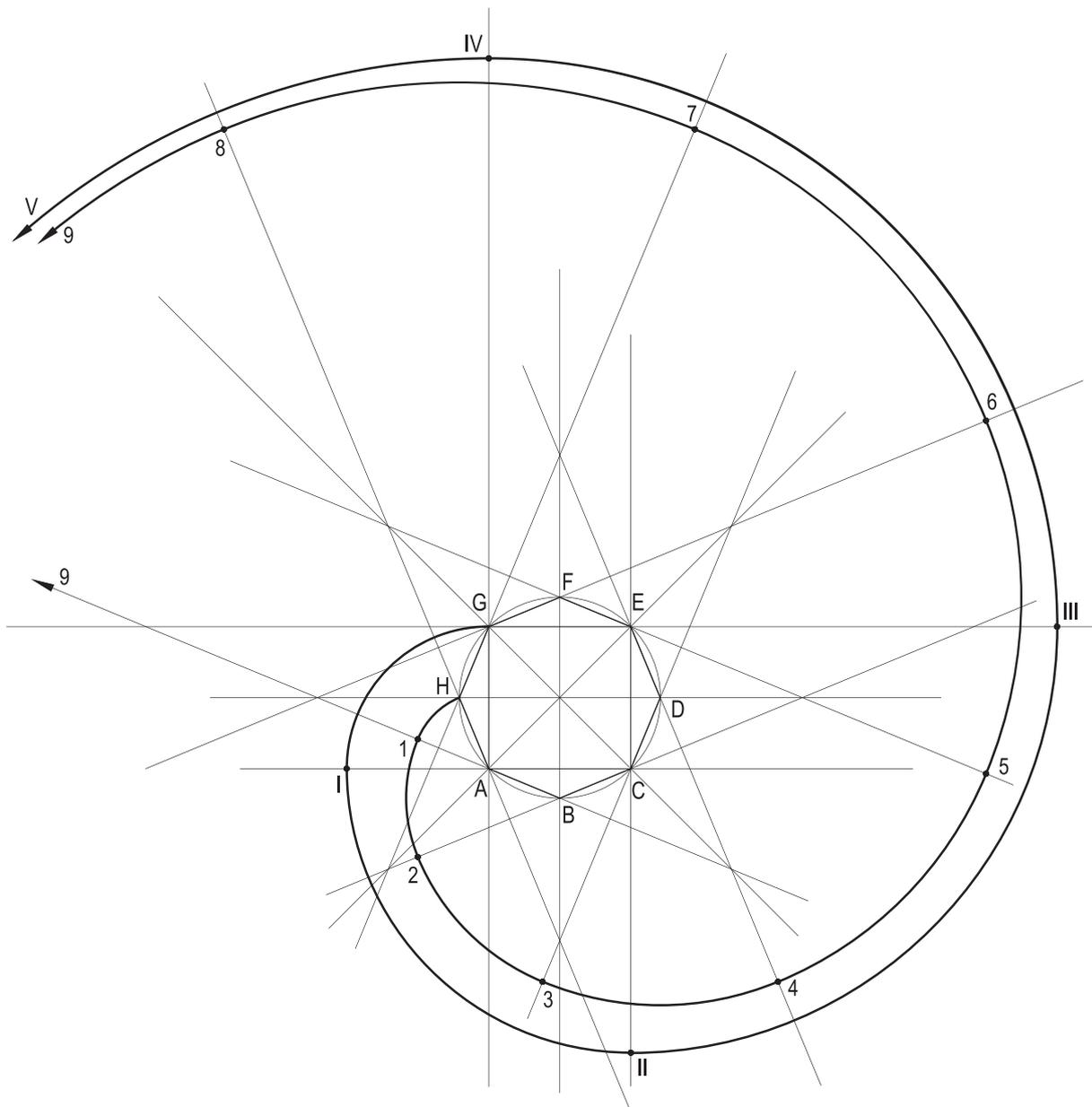


Figura 594

328 – Considere, num sistema cartesiano de origem O , um ponto $A(a, 0)$ e uma sucessão de pontos B, C, D e E , situados sobre semirretas com origem em O , inclinadas em relação a cada semirreta anterior conforme os termos de uma progressão aritmética de razão $30^\circ : 30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ e 120° , traçadas no sentido anti-horário.

Faça com que o ponto dado A se afaste da origem segundo outra progressão aritmética de razão $a : a, 2a, 3a, 4a$ e $5a$, cada posição sobre cada uma daquelas semirretas, ordenadamente.

Construa, então, a crescente de semicircunferências opostas à origem O , com diâmetros AB, BC, CD e DE .

Resolução: Traçados os suportes dos raios vetores inclinados de $30^\circ, 90^\circ, 180^\circ$ e 300° em relação ao eixo das abscissas, no sentido imposto, obedecida, assim, a progressão aritmética angular estabelecida, e neles aplicados os valores da progressão aritmética de razão a , vêm os pontos B, C, D e E , que permitem, facilmente, construir as quatro semicircunferências pedidas (Figura 595), crescentes e no sentido anti-horário.

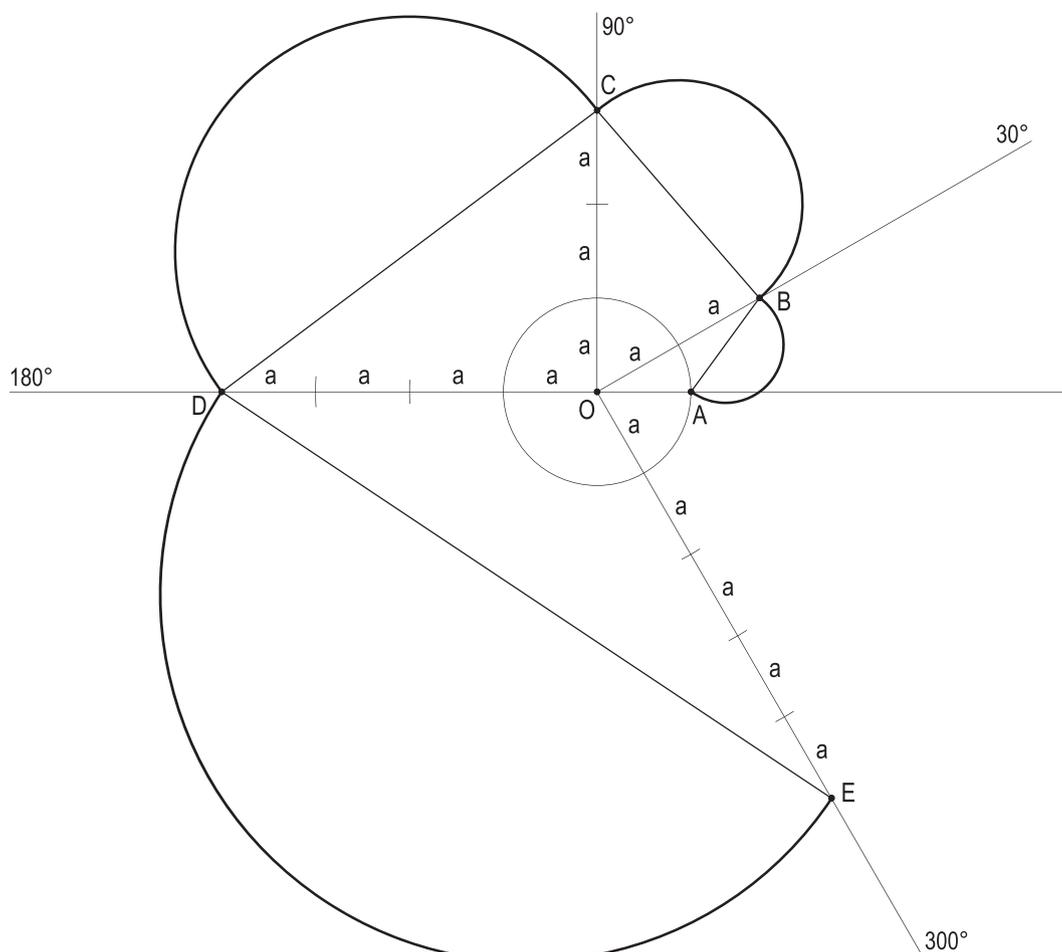


Figura 595

329 – Dado o retângulo áureo ABCD, pede-se desenhar a espiral áurea dextrógira nele inscrita, apresentando dela cinco trechos de quadrantes AF, FG, GI, IK e KM, aproximando-se de seu polo, e construir o arco de circunferência que concorde essa espiral com a circunferência que tenha centro O e raio R, dados, sabendo que o arco concordante contém o ponto A, seu centro O' entre A e E.

Resolução: Decomposto o retângulo áureo dado ABCD numa sucessão de pares de quadrados e de novos retângulos áureos, como ADFE e BCFE, como CFHG e BEHG, etc. (Figura 596), vem a construção da espiral áurea pedida (ver número 89).

Traçada a circunferência (O, R) e marcada a medida $AP = R$, sobre o segmento AB, a mediatriz m do segmento OP traz, sobre a reta AB, o centro O' do arco AT, que soluciona o problema, concordando a espiral e a circunferência dada (Figura 596).

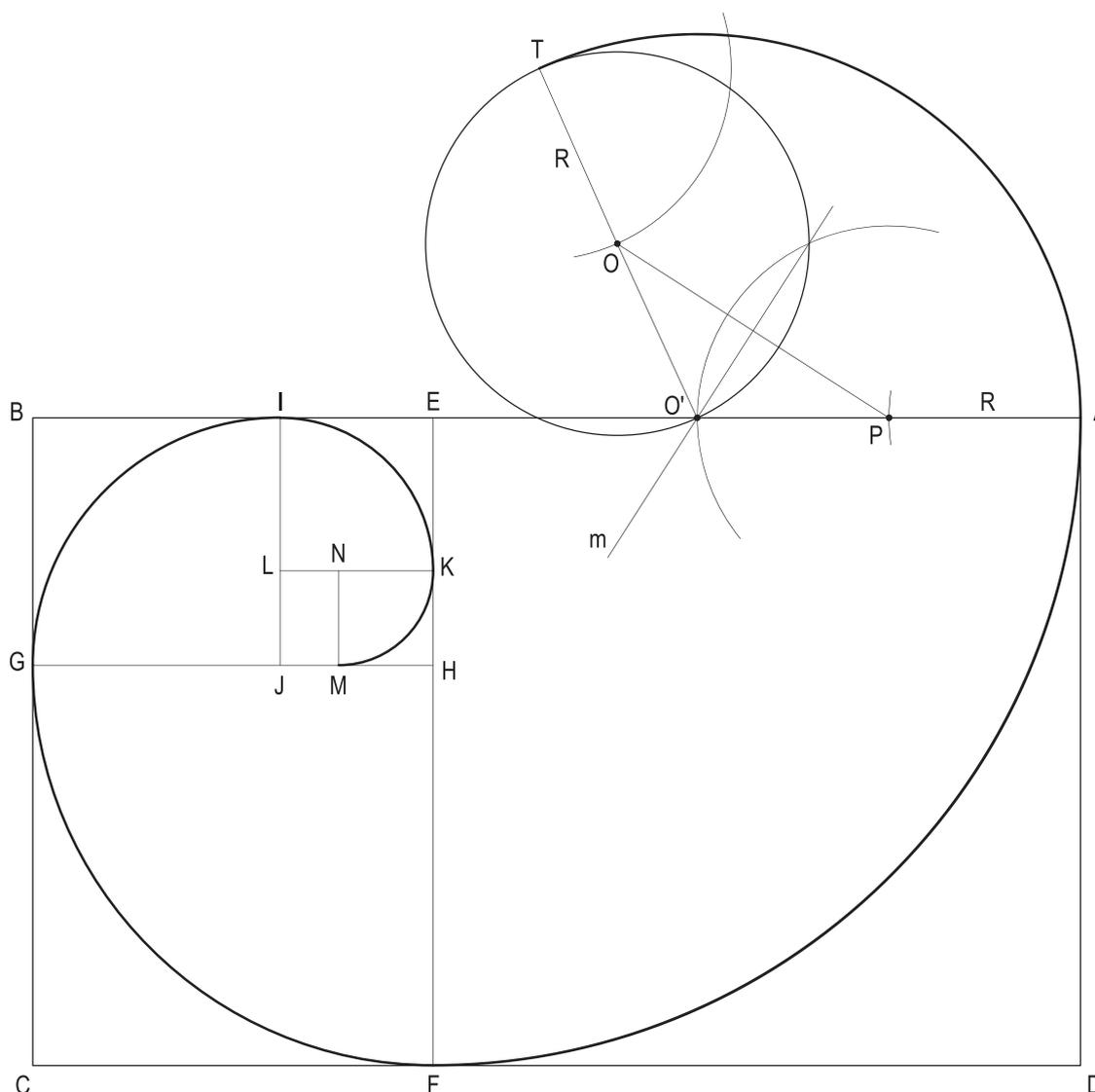


Figura 596

CAPÍTULO IX

CURVAS CÍCLICAS

99 – Definições e elementos

Cíclica é a curva descrita por um ponto rigidamente ligado a uma circunferência que rola, sem deslizar, sobre uma reta fixa ou sobre uma circunferência fixa. O ponto e a circunferência rolantes são denominados geradores ou geratrizes e a linha fixa é a diretriz.

Quando a diretriz é uma reta (Figura 597), a curva é denominada cicloide e quando é uma circunferência, a curva chama-se epicicloide (Figura 598) ou hipocicloide (Figura 599), conforme, respectivamente, a geratriz seja exterior ou interior à diretriz.

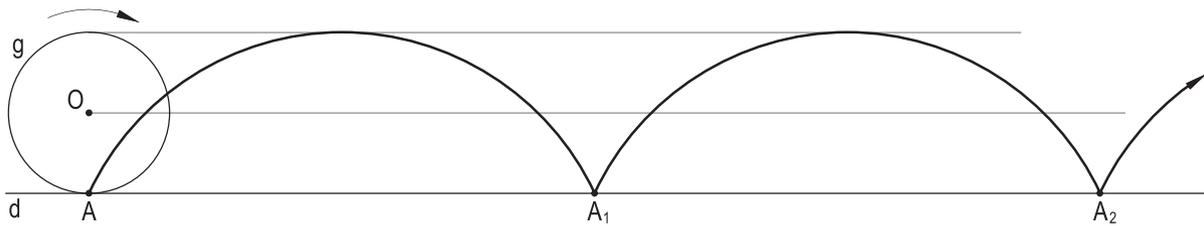


Figura 597

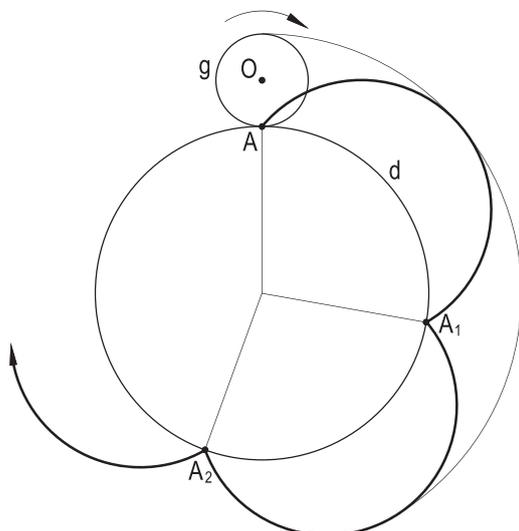


Figura 598

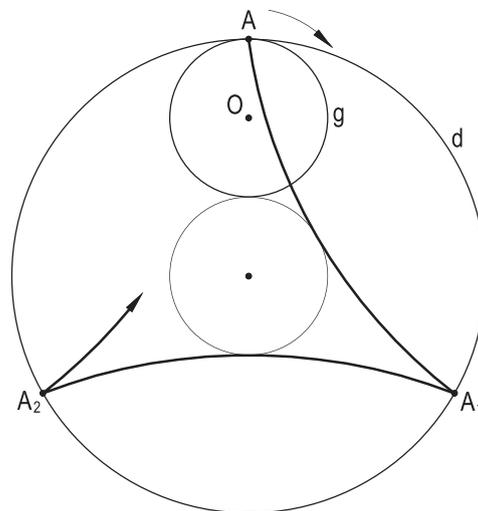


Figura 599

Observe-se que estando inicialmente o ponto gerador A sobre a diretriz d , após um giro completo da geratriz g , A , agora na posição A_1 (Figuras 597, 598 e 599), volta a pertencer à diretriz d , o que segue ocorrendo a cada nova volta completa de geratriz g . Os arcos AA_1 , A_1A_2 , etc., assim formados, são denominados ciclos da curva e é a repetição desses arcos, iguais entre si para cada caso, que faz com que tais curvas sejam denominadas cíclicas. Os trechos como AA_1 , A_1A_2 , etc. da diretriz, formados pelos extremos de cada ciclo, são denominados passos dessas curvas.

100 – Classificação quanto à posição do ponto gerador em relação à circunferência geratriz

Dizer que um ponto A está rigidamente ligado a uma circunferência (O , r) é afirmar que, em qualquer situação, resta imutável a posição de A , em relação a (O , r), o que se assegura, por exemplo (Figura 600), pela utilização de uma corda BC , qualquer, da circunferência e pelas repetições, em grandeza, do triângulo ABC , para novas posições $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$, etc., todos iguais ao original.

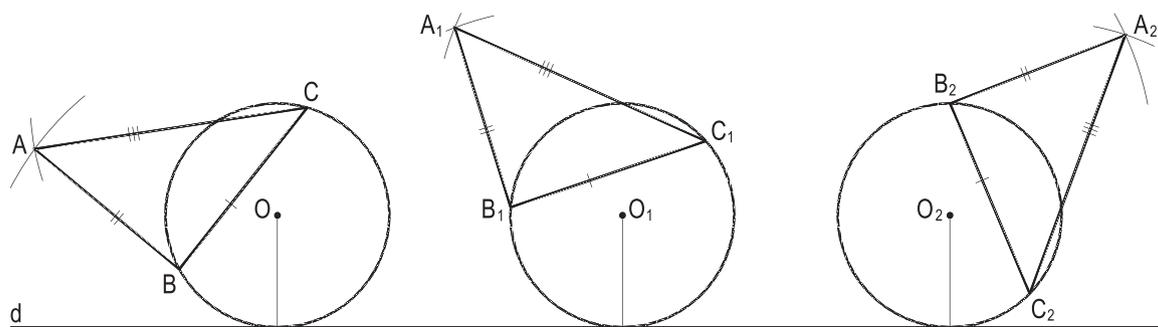


Figura 600

Numa curva cíclica, o ponto gerador A pode pertencer à circunferência geradora (Figuras 597, 598 e 599), e, então, a cíclica é dita normal, ou, ainda rigidamente ligado a ela, ser exterior (Figuras 601 e 602) ou interior (Figuras 603 e 604) à circunferência geratriz (O), sendo a cíclica, então, denominada, respectivamente, alongada ou encurtada.

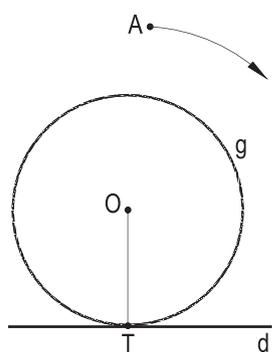


Figura 601

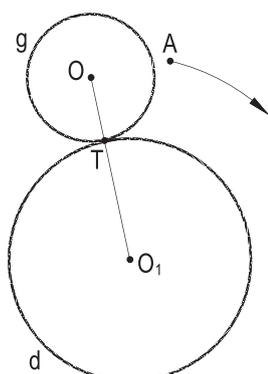


Figura 602

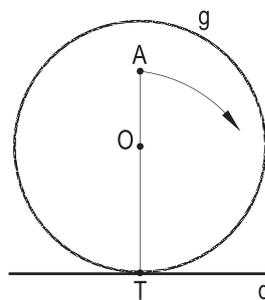


Figura 603

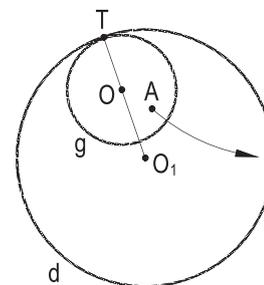


Figura 604

101 – Cicloides

Apreciando um ciclo completo de uma cicloide normal de geratriz (O) e diretriz d , descrito a partir da posição A_1 do ponto gerador, sendo ele o de contato de (O) e d , observe-se que a próxima posição A_2 do ponto gerador pertencendo a d cria o segmento A_1A_2 da diretriz com comprimento igual à retificação da geratriz (Figura 605). De fato, tudo se passa como se um fio não elástico enrolado sobre a circunferência (O), a partir de A_1 , fosse desenrolado, à medida que (O) girasse apoiada em d , sem deslizar, até a posição A_2 .

Quando o ponto gerador A_1 é exterior à geratriz (O), em seu giro, sem deslizar sobre a diretriz d , cria-se uma cicloide alongada (número 100). Observe-se que, neste caso, os ciclos consecutivos da curva cortam-se em pontos P (Figura 606), denominados nós da curva, e que, tanto nas alongadas como nas encurtadas (Figura 607), o passo é igual ao das normais correspondentes.

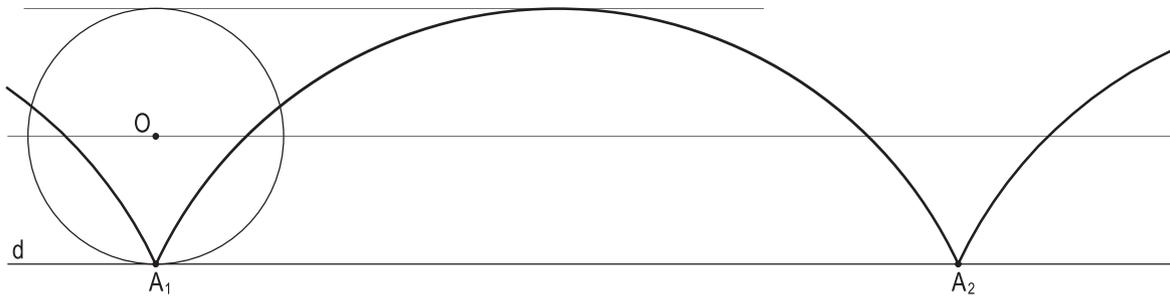


Figura 605

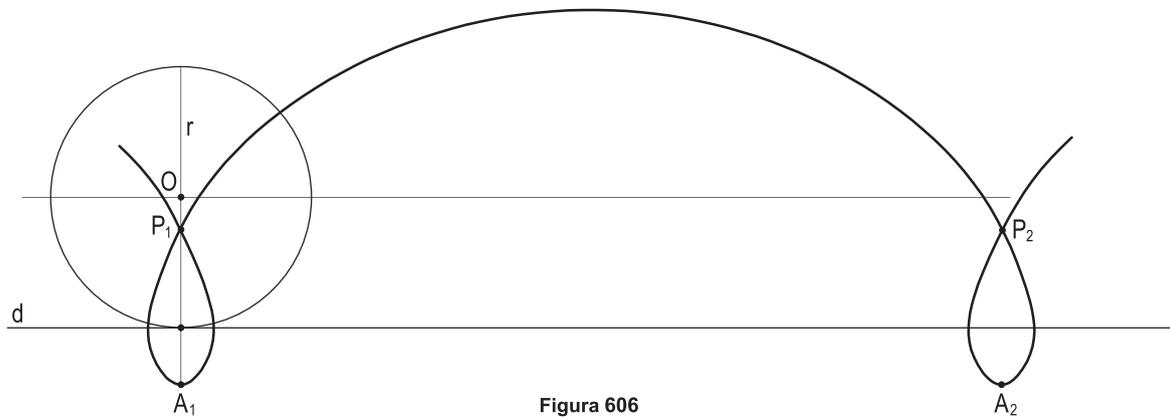


Figura 606

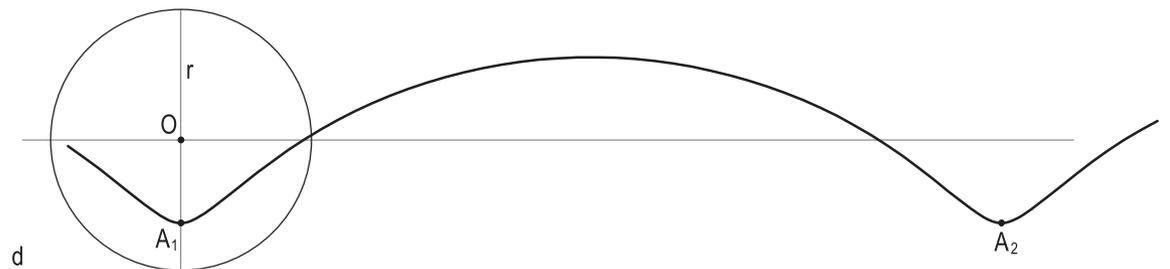


Figura 607

102 – Centro instantâneo de rotação

Centro instantâneo de rotação de uma figura plana em movimento é o ponto que, em determinado intervalo de tempo, tem velocidade nula.

Observe-se que quando uma figura plana gira, há um ponto I, em torno do qual ela gira, que mantém nula sua velocidade (Figura 608). É o centro instantâneo de rotação de tal figura, no movimento estudado e no intervalo de tempo considerado.

Sabe-se, da Física, que nesse movimento da figura girante, sendo I seu centro instantâneo de rotação para o intervalo considerado, as retas, como IA na Figura 608, que unem I a um ponto A qualquer da figura são suas normais em tais pontos e que, por isso, as perpendiculares a elas nesses pontos A são as tangentes às curvas trajetórias criadas nesses movimentos.

Para as cíclicas, os centros instantâneos de rotação, para cada momento, são os pontos I de contato correspondentes entre geratriz e diretriz, nulas que são suas velocidades em tais movimentos. E, por isso, a normal IA_1 , e a tangente t_1 , nesse ponto A_1 da curva são, respectivamente, a reta formada pelo centro instantâneo de rotação I e por esse ponto corrente A_1 e a perpendicular t_1 a ela (Figura 609), por A_1 .

Além disso, cabe ressaltar que (Figura 610) o arco I_2A_2 , para a posição (O_2) da geratriz, é igual à abscissa A_1I_2 de seu centro, já que seria essa abscissa o percurso descrito pela geratriz no retorno da posição O_2 para O_1 .

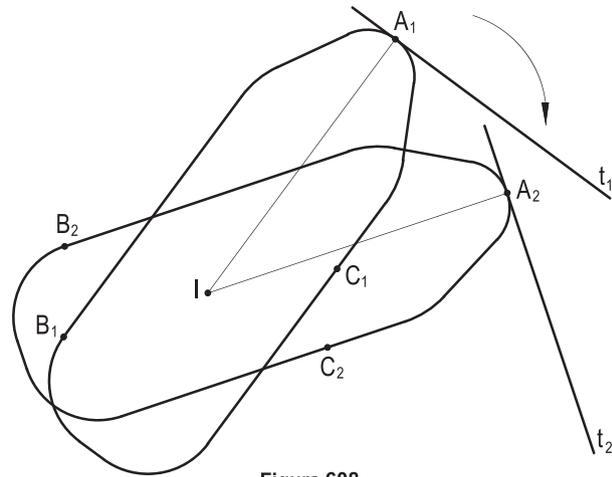


Figura 608

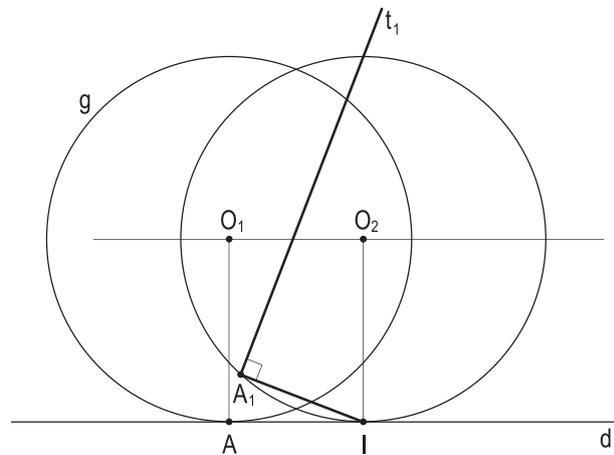


Figura 609

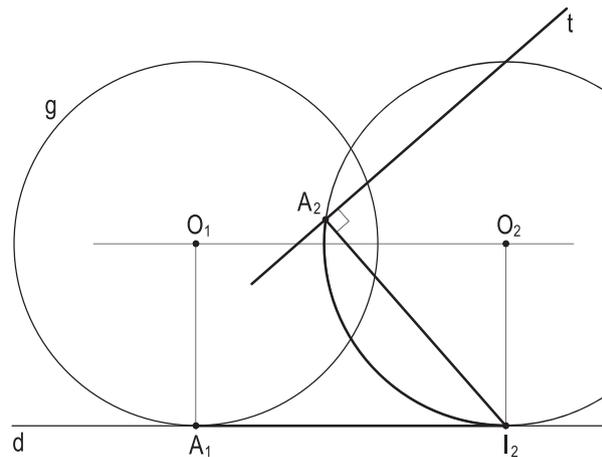


Figura 610

103 – Determinação aproximada da retificação de uma circunferência

Dado que o valor do comprimento de uma circunferência de raio r é $2\pi r$ (*Geometria Plana*, número 299), por ser π um número irracional, só se pode buscar tal valor em termos aproximados.

Há enorme quantidade de procedimentos para obter graficamente a medida aproximada de uma circunferência de diâmetro D , o mais famoso deles sendo o Processo de Arquimedes, que consiste em construir um segmento $AB = \pi D = 3,14 D$.

E como 0,14 é o valor, aproximadamente, da fração $\frac{1}{7}$, vem que AB deve, em termos aproximados, corresponder à soma de três diâmetros da circunferência dada, com $\frac{1}{7}$ desse diâmetro, o que justifica a construção ao lado (Figura 611), em que, aplicados, consecutivamente, três segmentos AA_1 , A_1A_2 e A_2A_3 iguais a D e, determinada sua sétima parte JK , marca-se A_3B igual a JK .

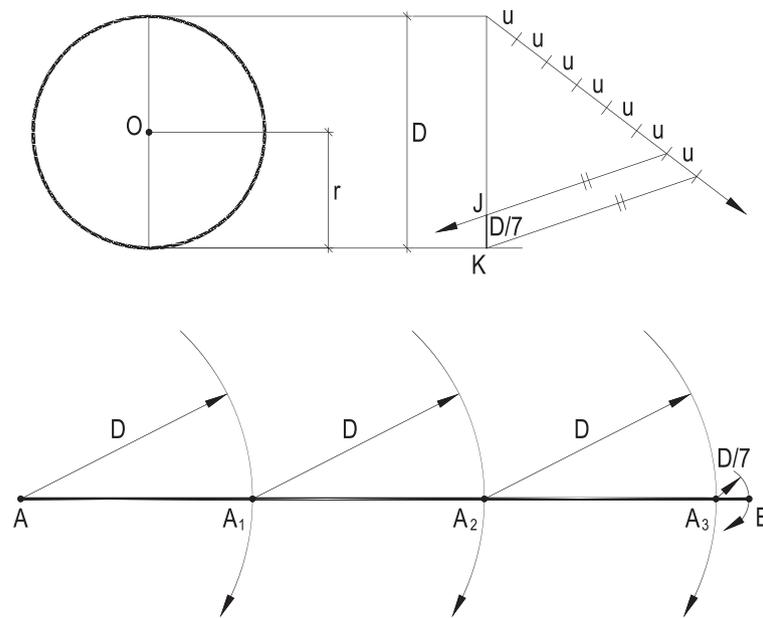


Figura 611

104 – Determinação aproximada da medida de um arco de circunferência dada

Para a determinação gráfica, também naturalmente aproximada, do comprimento de um arco de uma circunferência dada, basta (*Geometria Plana*, número 300) verificar que fração seu ângulo central é de 360° para dividir a retificação da circunferência nessa mesma razão.

105 – Observação

Outro método, que é o que utilizaremos, consiste em determinar um polo J que proporcione, tanto obter a medida aproximada de comprimento de uma circunferência dada, como o valor, sempre aproximado, da medida de um qualquer de seus arcos.

Tal ponto J (Figura 612) localiza-se sobre o suporte de um diâmetro da circunferência dada (O, r), situado a uma distância dela igual a três quartas partes de r , como se passa a justificar.

Traçados dois diâmetros perpendiculares AB e CD da circunferência dada (O, r), marcado o ponto Q, quarto do raio OB e mais próximo do centro O, seu rebatimento, em torno de B, proporciona sobre o prolongamento do diâmetro AB o polo J que, ligado a D, traz, sobre a tangente t a (O, r), em A, o valor aproximado AE de um quadrante da circunferência e que, ligado ao extremo G de um arco AG menor que um quadrante, entrega o comprimento aproximado AF desse arco AG (Figura 612).

De fato, os triângulos semelhantes JOD e JAE permitem anotar:

$$\frac{AE}{OD} = \frac{JA}{JO} = \frac{2r + \frac{3}{4}r}{r + \frac{3}{4}r} :$$

$$\therefore \frac{AE}{r} = \frac{11r}{7r} = \frac{11}{7}$$

$$\therefore AE = \frac{11}{7}r = 1,57r$$

$$\therefore AE = \frac{3,14}{2}r = \frac{2\pi r}{4}$$

A explicação da igualdade das medidas do arco AG e do segmento AF vem da relação entre os ângulos centrais \widehat{AOG} e 90° , respectivamente, relativos ao arco AG e ao quadrante AD (Figura 612).

O procedimento é, naturalmente, válido para retificar arcos DG maiores que um quadrante, proporcionando sua medida aproximada EF (Figura 613), por soma dos arcos DA e AG.

E mais, o processo utilizado resolve, também, um primeiro problema inverso, o da determinação do arco DG de uma circunferência dada, a partir da sua medida EF, com sua aplicação sobre a tangente t, seguida pela união do ponto F ao polo J (Figura 613).

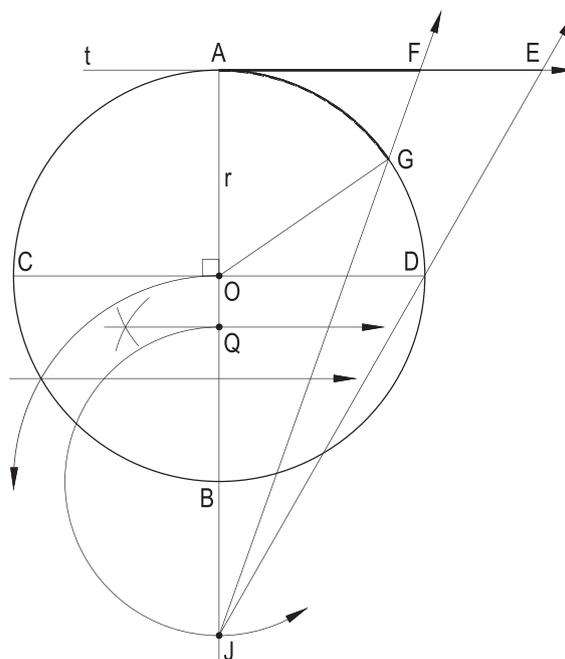


Figura 612

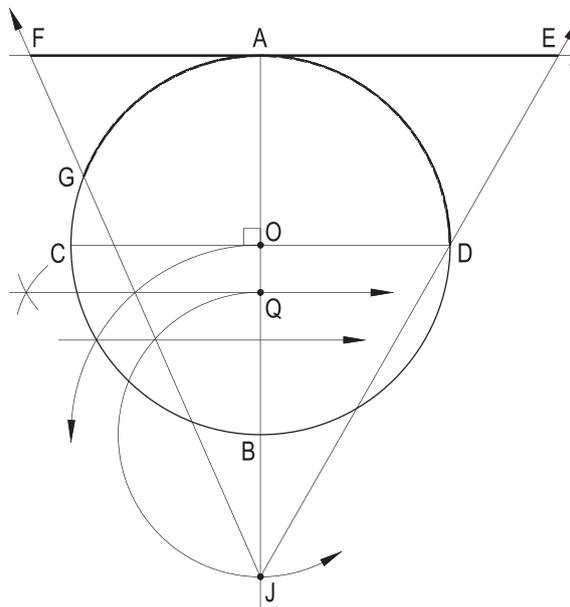


Figura 613

107 – Construção de tangentes à cicloide normal

A construção da tangente a uma cicloide normal de geratriz (O, r) , ponto inicial A e diretriz d , todos dados, num ponto corrente P da curva, definido pela abscissa AE de seu centro instantâneo de rotação E , se faz determinando esse ponto P , tal como detalhado no item 106, anterior, para traçar a normal EP à curva nesse ponto e, então, obter a tangente t à curva, que é a perpendicular àquela normal, pelo ponto P (Figura 617).

Para a construção da tangente t paralela a uma reta dada s , como análise, consideremos resolvida a questão (Figura 618), observando que, por translação, são iguais os triângulos OAP e $O'EP'$, assim como os arcos AP e EP' , ambos com comprimentos iguais ao segmento AE da diretriz d (número 102).

Assim, para construir a tangente t a uma cicloide normal dada, com a direção de uma reta também dada s , deve-se traçar, pelo ponto inicial A da curva, a perpendicular a s , definindo, na circunferência geratriz (O) , o ponto P (Figura 619).

A retificação do arco AP , medindo, no caso, a soma dos segmentos \overline{AC} e \overline{PC} , respectivamente, iguais ao quadrante AC de (O) e à retificação do arco $CP' = CP$, é aplicada sobre a diretriz d , proporcionando, a partir de A , o ponto E e as paralelas EP_1 e PP_1 , respectivamente, a AP e à diretriz, dando, por corte, o ponto de contato P_1 e, então, a tangente t procurada (Figura 619).

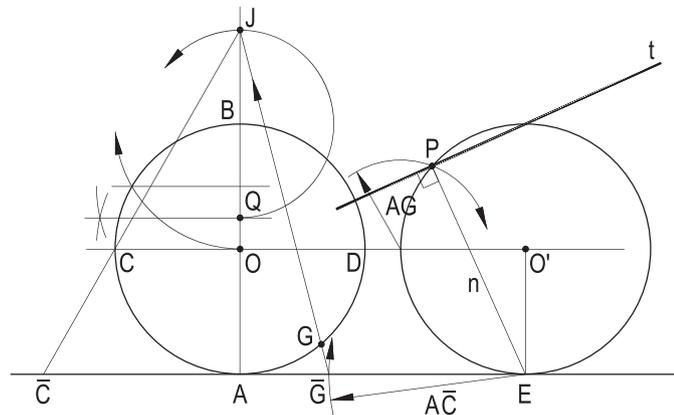


Figura 617

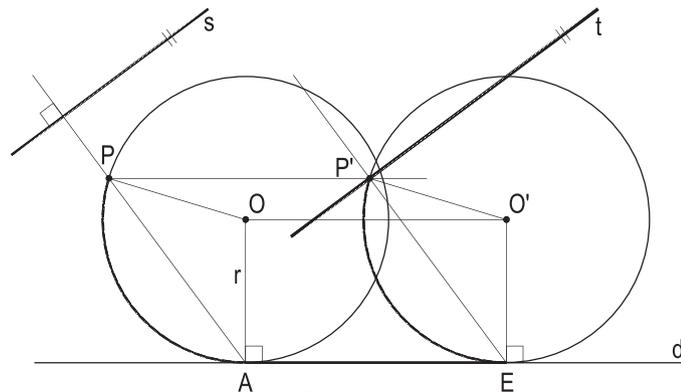


Figura 618

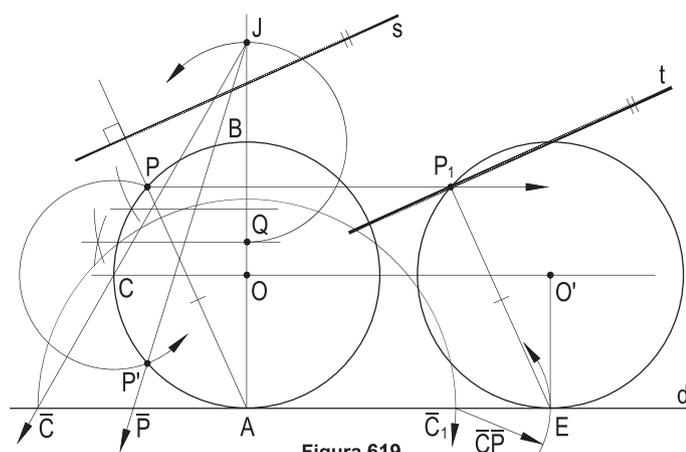


Figura 619

108 – Construção da cicloide normal

As curvas cíclicas não podem ser construídas com régua e compasso, mas sim à mão livre, por pontos, ou com auxílio de curvas francesas (e, naturalmente, com mais precisão, por programas de computador).

Para a construção por pontos (Figura 620), dadas a circunferência geratriz (O, OA) e a diretriz d , sendo A o ponto gerador, deve-se retificar a circunferência, para determinar o passo $A\bar{A}$ da cicloide, medindo o quádruplo do segmento AF . Dividido o passo em tantas partes iguais quanto a circunferência geratriz (doze, na Figura 620) e, utilizando os centros O_1, O_2, O_3 , etc. e as paralelas à diretriz pelos pontos 1, 2, 3, etc. de divisão da circunferência, obtêm-se, por seus ordenados cruzamentos, os doze pontos P_1, P_2, P_3 , etc. da cicloide.

É claro que, quanto maior a quantidade de divisões em partes iguais da geratriz (e do passo), mais pontos são obtidos da curva, aumentando o grau de precisão de sua construção.

Observe-se que a cicloide conta com um eixo de simetria A_6O_6 , perpendicular à diretriz e pertencente ao ponto médio de seu passo, o que pode simplificar a obtenção dos pontos da curva, adiante desse eixo, a partir dos primeiros determinados. Além disso, não teria sido necessário desenhar as circunferências (O_6) e (O_{12}), já que o ponto M , médio do trecho construído e correspondente à posição (O_6) da geratriz e o ponto \bar{A} , da diretriz, são de obtenções imediatas. Seus traçados foram incluídos apenas para completar a figura.

Novos ciclos, se desejados, são, naturalmente, iguais a esse primeiro construído.

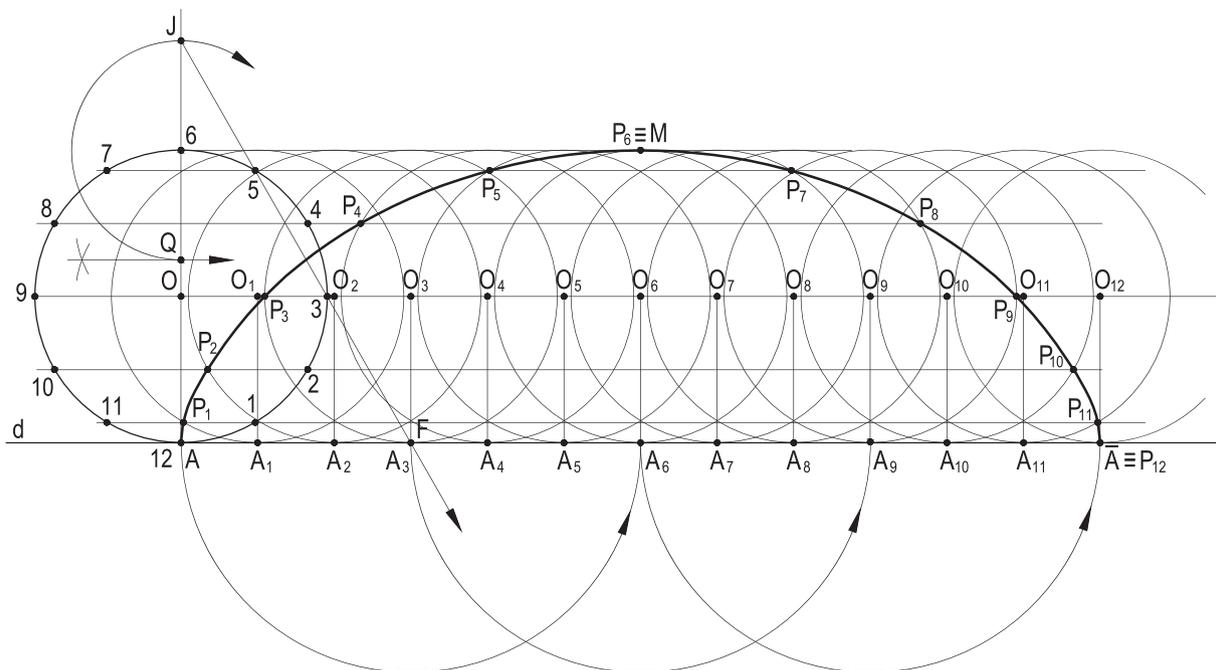


Figura 620

110 – Cicloide alongada

Cicloide alongada é a curva gerada por um ponto rigidamente ligado a uma circunferência e exterior a seu círculo, quando tal circunferência rola, sem deslizar, sobre uma reta.

A circunferência e a reta são denominadas geratriz e diretriz da cicloide (Figura 622).

As definições de ciclo, passo e centros instantâneos são as mesmas utilizadas para as cicloides normais.

111 – Determinação de um ponto corrente de uma cicloide alongada dada

Para análise, consideremos a cicloide alongada gerada pelo ponto A , para a geratriz (O, r) e para a diretriz d (Figura 622), observando (número 102) que o arco $E\bar{A}'$ é igual à abscissa $\bar{A}E$ do centro instantâneo de rotação E , para a nova posição do ponto corrente A' da cicloide, que é obtido com a marcação, sobre a reta $O'\bar{A}'$, do valor $O'A' = OA$.

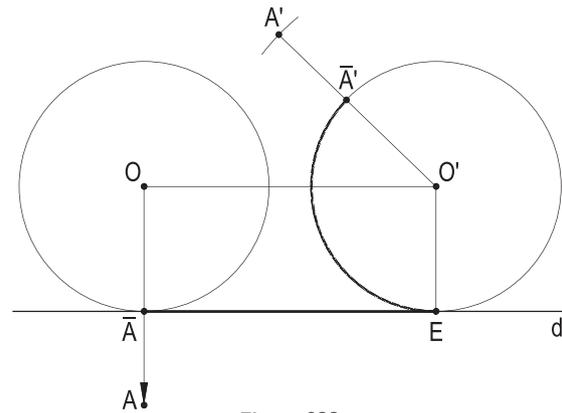


Figura 622

Assim, marcado o ponto E e determinado o arco $E\bar{A}'$ de comprimento igual à abscissa $\bar{A}E$, vem o ponto \bar{A}' e, em seguida, o ponto corrente pedido A' , sobre a reta $O'\bar{A}'$, com $O'A' = OA$ (Figura 623).

112 – Construção da tangente a uma cicloide alongada, num ponto corrente

Dados a circunferência geratriz (O, r), um ponto A , rigidamente ligado a ela, OA medindo um valor dado R , maior que r , e a diretriz d da curva, para construir a tangente à cicloide alongada em um ponto seu P , que corresponda ao centro instantâneo de abscissa $\bar{A}E$ dada, em relação à do ponto \bar{A} , basta, como acima detalhado, determinar o ponto corrente P e lembrar (número 102) que a normal à curva nesse ponto P contém o centro instantâneo de rotação E , que lhe diz respeito, observando que, no caso, o arco $E\bar{P}$ de (O') que corresponde à abscissa dada $\bar{A}E$ mede a soma de um quadrante com um arco igual ao arco $\bar{A}1$ (Figura 624).

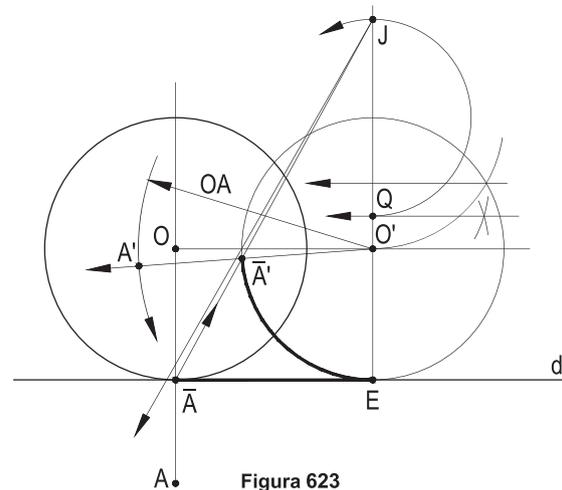


Figura 623

A tangente t pedida será, então, a perpendicular, por P , à normal EP (Figura 624).

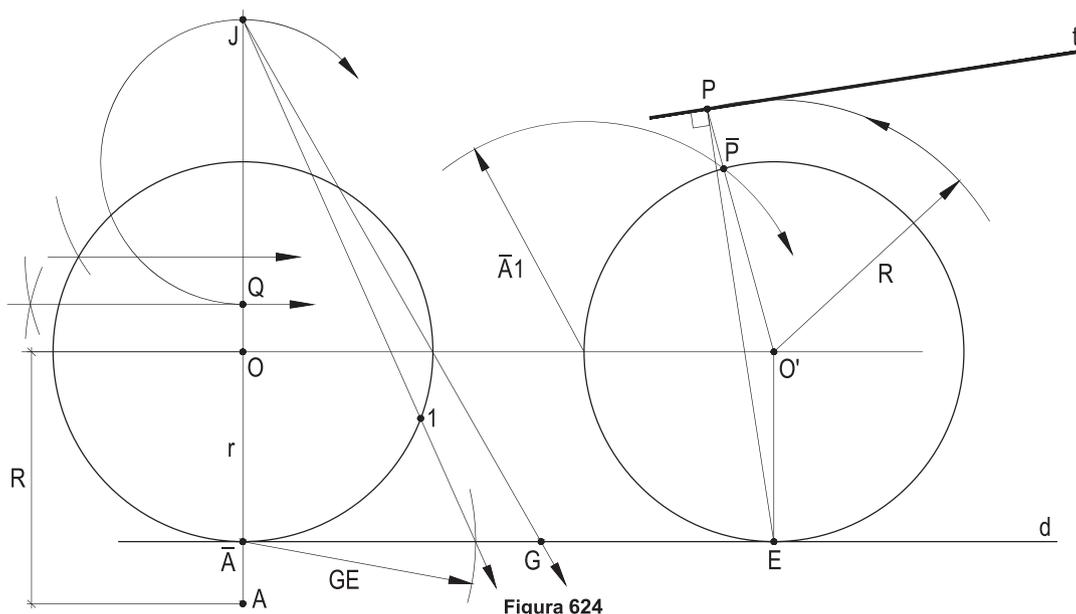


Figura 624

113 – Construção da tangente a uma cicloide alongada, paralela a uma reta dada s

Considerada a circunferência (O, OA) concêntrica com a geratriz $(O, O\bar{A})$ e contendo o ponto inicial A da curva, a perpendicular, por \bar{A} , à reta dada s proporciona \bar{T} e, na geratriz, o ponto \bar{P} . Retificado o arco $\bar{A}\bar{P}$, para GH , consegue-se a abscissa $\bar{A}E$ do centro instantâneo de rotação E da posição procurada para o ponto de contato T da tangente t , então, imediata, pela obtenção, com a paralela por E , a $\bar{A}\bar{T}$, tal ponto T na circunferência (O', OA) (Figura 625).

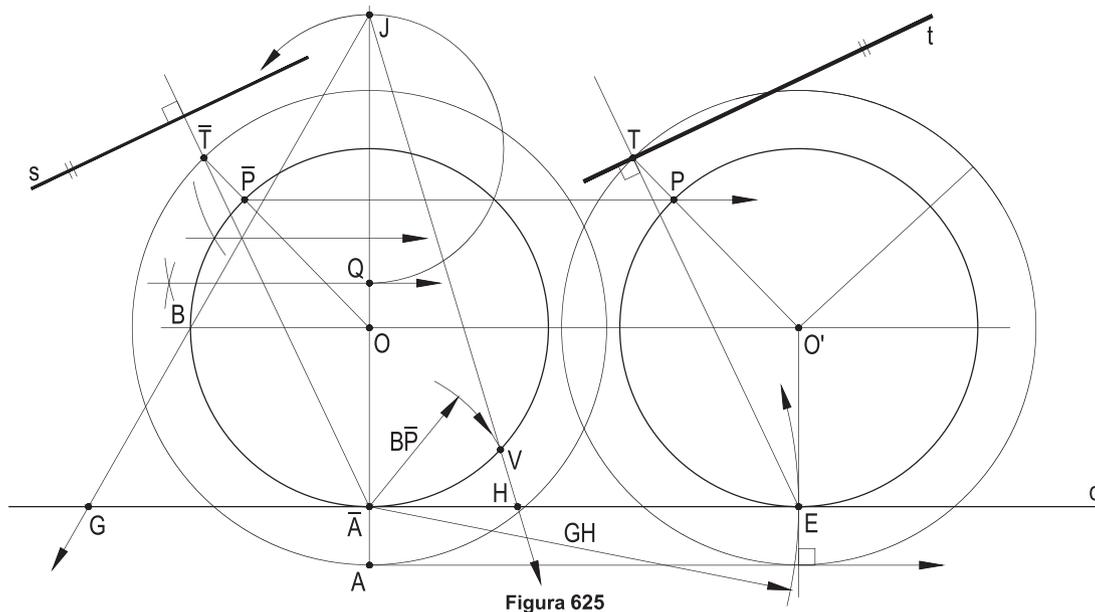


Figura 625

114 – Construção da cicloide alongada

Por ser rigidamente ligado à circunferência geratriz ($O, O\bar{A}$), o ponto A gerador da epicloide alongada procurada estará, em cada posição nova de \bar{A} , da cicloide normal correspondente, sobre o prolongamento do raio $O\bar{A}$, para cada novo centro instantâneo de rotação da posição em questão, tal que $\bar{A}A$ permaneça constante (Figura 626).

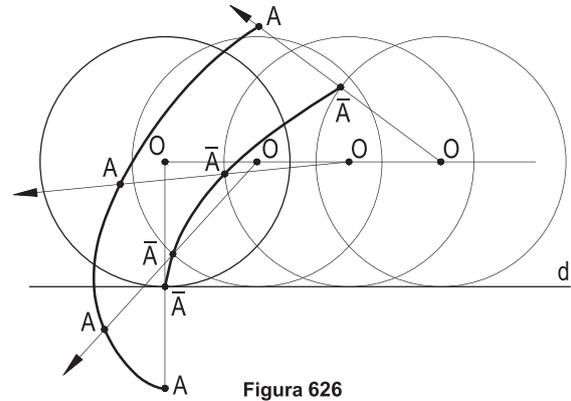


Figura 626

Esta é a construção completada na Figura 627.

Naturalmente, a utilização de tangentes nos pontos correntes (Figura 628) auxilia, em muito, o traçado da curva.

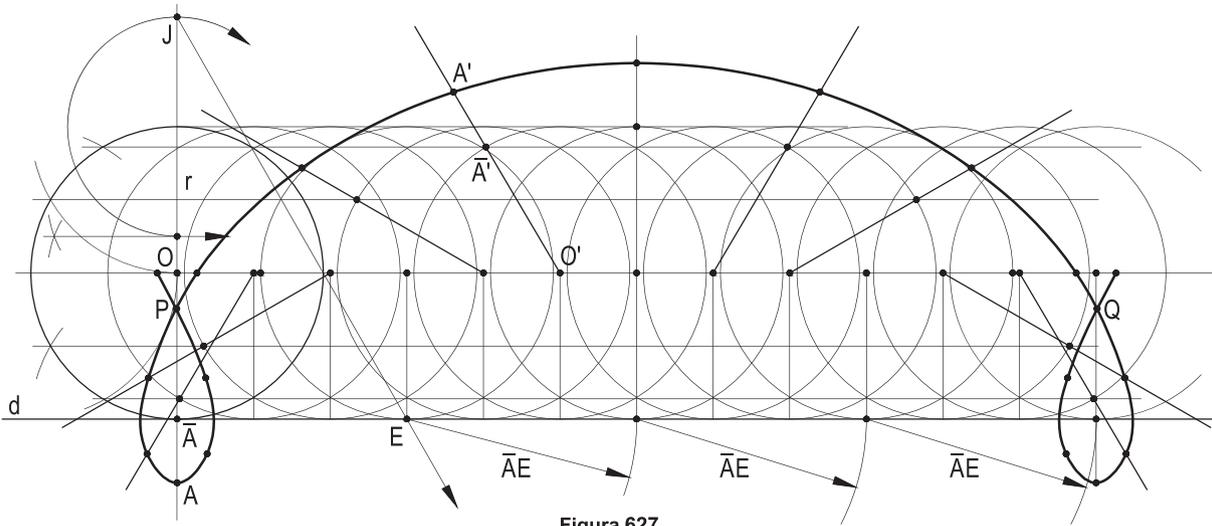


Figura 627

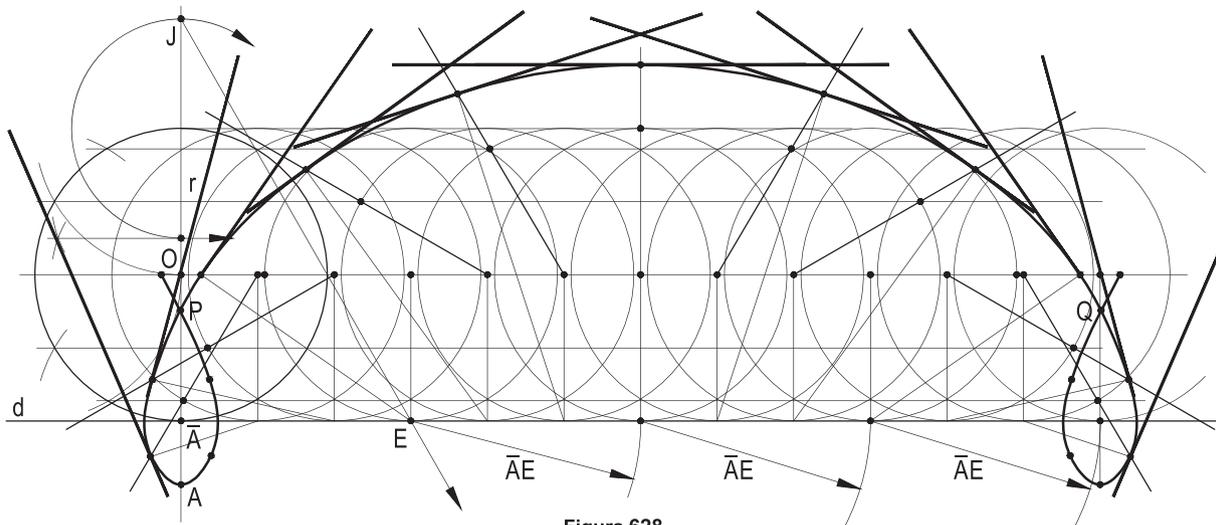


Figura 628

115 – Semelhanças

Como as cicloides alongadas dependem de dois parâmetros, o raio r da circunferência geratriz e a distância R do ponto gerador ao centro daquela circunferência, só são semelhantes duas cicloides alongadas quando são iguais as razões entre os raios de suas geratrizes e entre as distâncias respectivas de seus pontos geradores aos centros daquelas duas geratrizes.

Como exemplo da inexistência genérica de semelhança entre duas cicloides alongadas, são apresentadas, nas Figuras 629 e 630, duas curvas dessa natureza, com geratrizes (O, r) iguais, mas diferentes distâncias $R_1 = \frac{3r}{2}$ e $R_2 = 2r$ de seus pontos geradores A_1 e A_2 aos centros das geratrizes.

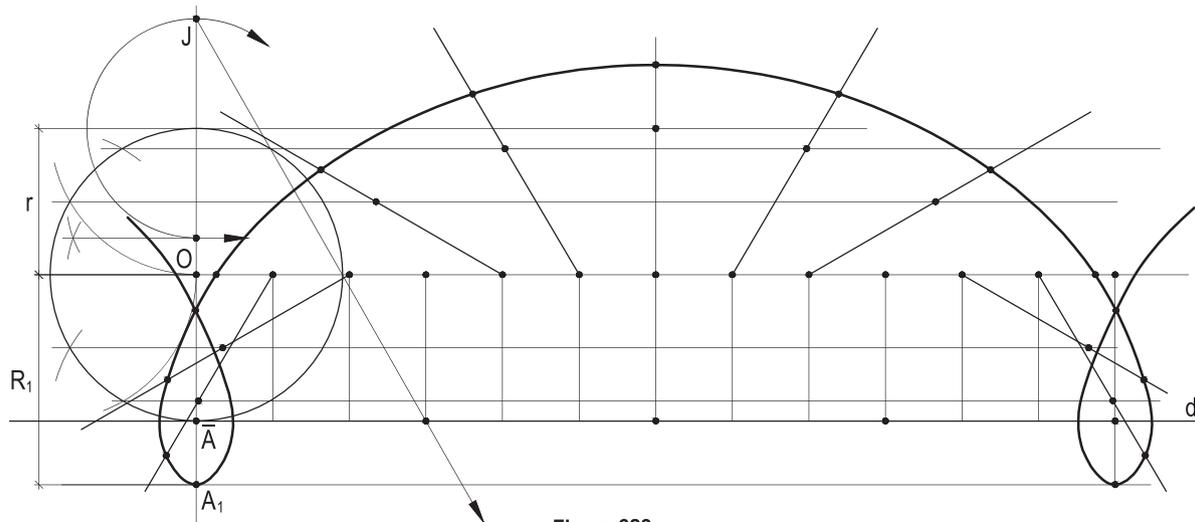


Figura 629

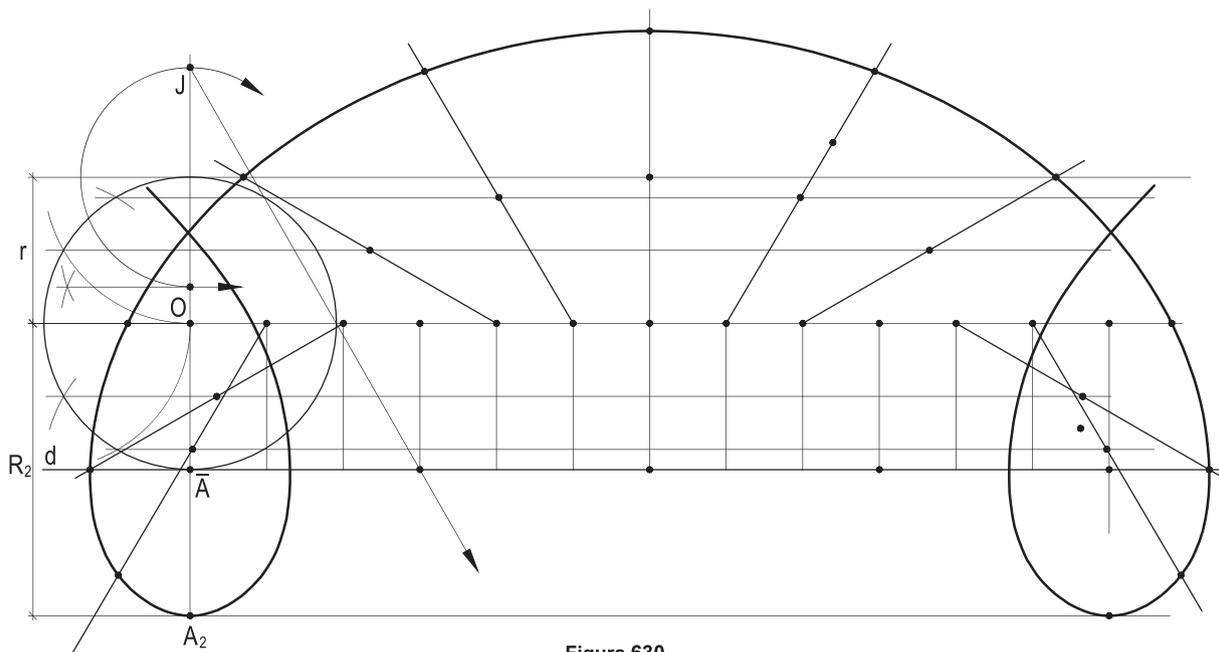


Figura 630

119 – Construção da tangente a uma cicloide encurtada paralela a uma reta dada s

Dados a geratriz $(O, O\bar{A})$, a diretriz d e o ponto A , gerador da cicloide, para construir a tangente a ela paralela à reta dada s , basta utilizar o mesmo procedimento detalhado (número 113) para as cicloides alongadas, determinando o ponto P , interseção da perpendicular n , por \bar{A} , a s com a circunferência (O, OA) , e, em seguida, seu correspondente \bar{P} da circunferência geratriz, para, retificando o arco $\bar{A}\bar{P}$, igual à soma dos segmentos $\bar{A}E$ e $E\bar{A}' = FE$, determinar o centro instantâneo \bar{A}' do ponto de contato P' procurado (Figura 633), que, então, entrega a tangente t pedida, por P' e paralela à reta s .

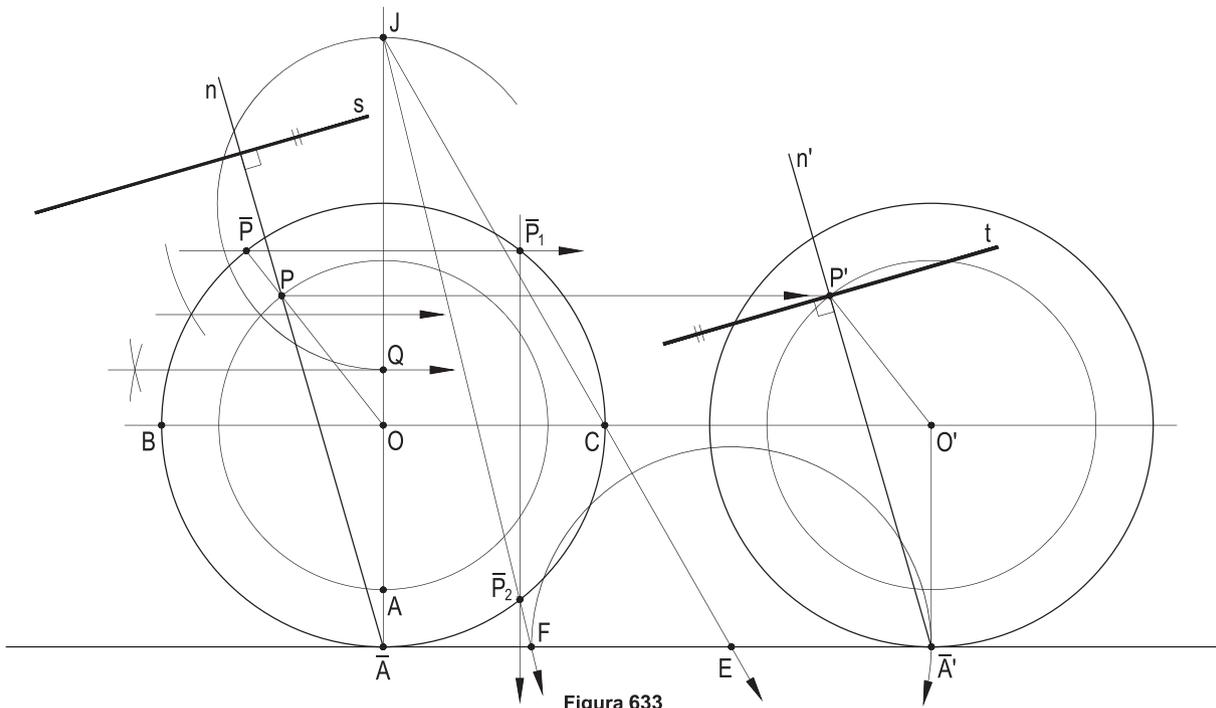


Figura 633

120 – Semelhanças

Tal como as alongadas, as cicloides encurtadas só podem, aos pares, garantir uma semelhança se a razão entre os raios das suas geratrizes igualar, respectivamente, a razão entre as distâncias dos pontos geradores aos centros dessas circunferências.

Aliás, observe-se que, à medida que o ponto gerador se aproxima do centro da geratriz, a cicloide encurtada progressivamente se “achata”, tendendo a degenerar numa reta paralela à diretriz, pelo centro da geratriz.

As cicloides encurtadas da Figura 634 geradas pelos pontos A e B ressaltam essas diferenças de curvaturas.

E, quando o ponto gerador é o próprio centro O , a curva transforma-se na reta OO' .

121 – Construção da cicloide encurtada

Dados a circunferência geratriz (O), a diretriz d e os pontos A e B , geradores de cicloides encurtadas, para construí-las, por pontos, basta determinar os pontos da cicloide normal que lhes corresponde e aplicar sobre os raios de cada posição da geratriz as medidas OA e OB , que entregam os pontos correntes A_1, A_2 , etc. e B_1, B_2 , etc. das cicloides pedidas (Figura 634).

É claro que, incluindo-se as tangentes nos pontos correntes A_1, A_2 , etc. da cicloide encurtada gerada pelo ponto A , consegue-se maior precisão no desenho da curva, pela apreciação de suas curvaturas, ponto a ponto (Figura 635).

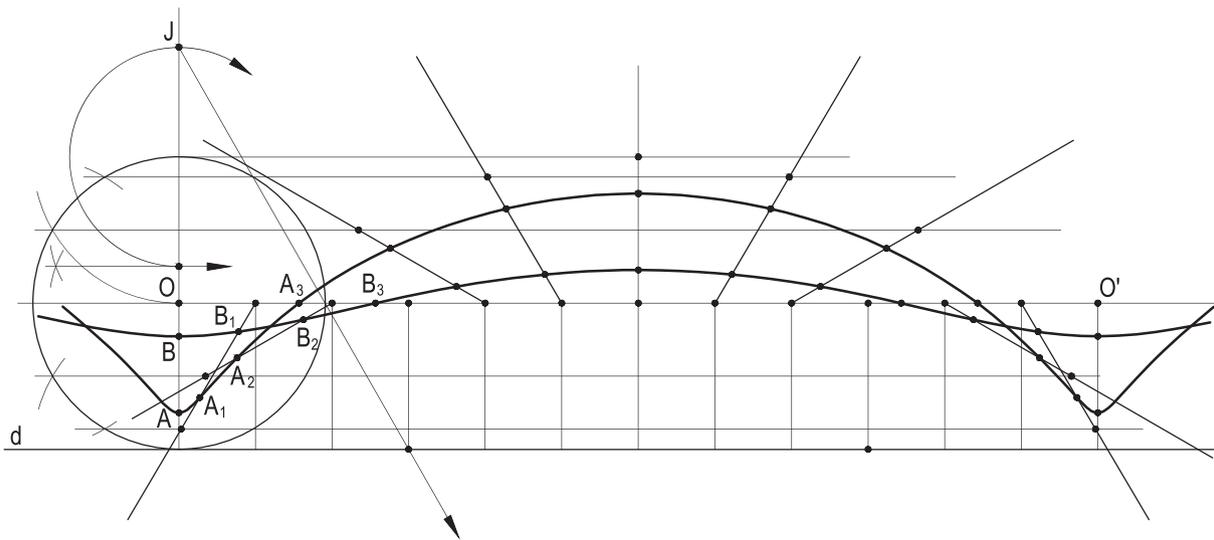


Figura 634

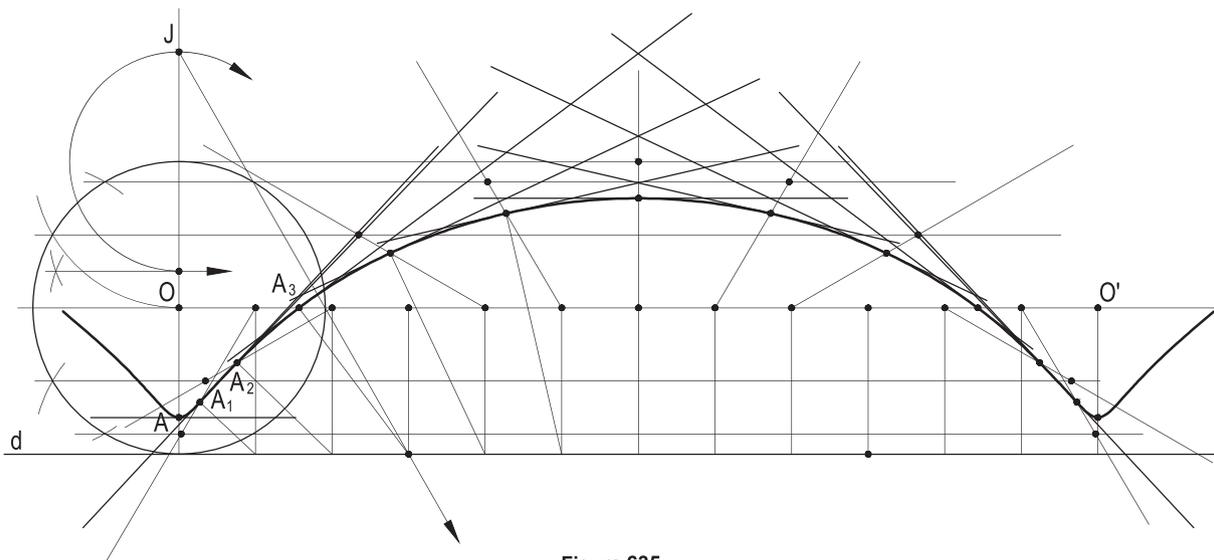


Figura 635

122 – Epicicloides e hipocicloides

Epicicloide é a curva gerada por um ponto rigidamente ligado a uma circunferência que rola, sem deslizar, externamente, a uma circunferência fixa (Figura 636).

Hipocicloide é a curva descrita por um ponto rigidamente ligado a uma circunferência que rola, sem deslizar, internamente, a uma circunferência fixa (Figura 637).

Em ambos os casos, a circunferência rolante (O) e a fixa (O') são, respectivamente, denominadas geratriz e diretriz de cada curva.

Nas Figuras 636 e 637, de cada circunferência diretriz d , foi indicado apenas um arco XY , além de seu centro O' , dadas as grandes dimensões dessas duas circunferências, mas o bastante para poder contar, em ambos os casos, com um ciclo completo $A\bar{A}$ da cíclica em questão, epicicloide a primeira e hipocicloide a segunda.

As epicicloides e as hipocicloides são denominadas normais, alongadas ou encurtadas, conforme, respectivamente, o ponto gerador pertença à circunferência geratriz (Figuras 636 e 637), seja exterior a ela (Figura 641) ou interior à geratriz (Figura 642), apresentadas um pouco adiante.

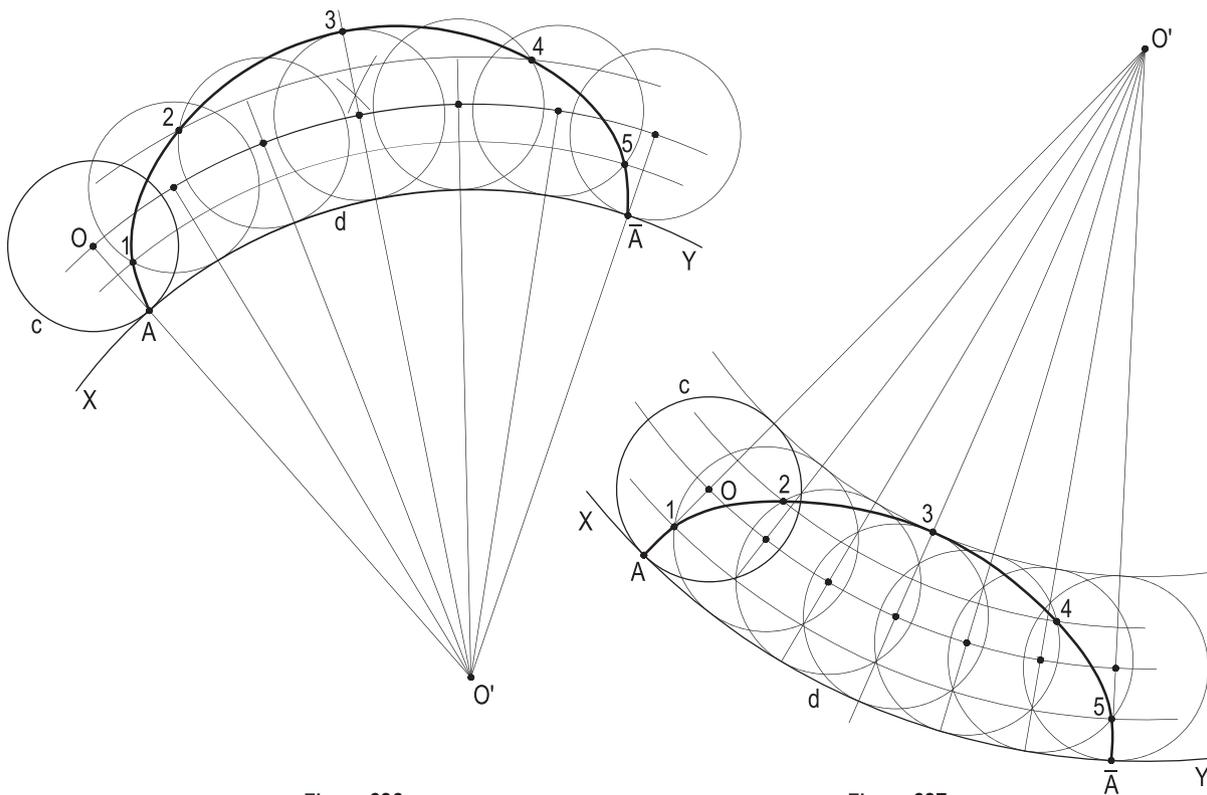


Figura 636

Figura 637

123 – Elementos das epicicloides e das hipocicloides

As definições de ciclo, passo e centro instantâneo de rotação são as mesmas utilizadas para as cicloides.

Tal como com as cicloides, e com as mesmas justificativas, o passo de uma epicicloide, ou de uma hipocicloide, agora um arco da diretriz, tem comprimento igual à retificação da geratriz. Assim são, por exemplo, os passos $A\bar{A}$ da epicicloide da Figura 636 e da hipocicloide da Figura 637.

Além disso, repetem-se, em formas e dimensões, os diversos ciclos de qualquer epicicloide e de toda hipocicloide, o que, aliás, decorre do acima exposto.

124 – Construção da tangente num ponto corrente

Da mesma forma que o detalhado para as cicloides, a construção da tangente t num ponto corrente P de uma epicicloide (Figura 638), ou de uma hipocicloide (Figura 639), se faz pelo traçado da normal EP , E sendo o centro instantâneo de rotação de P e pela condução da perpendicular t , a EP , por P .

Em ambos os exemplos, naturalmente, são iguais os comprimentos dos arcos TE da diretriz e EP da geratriz.

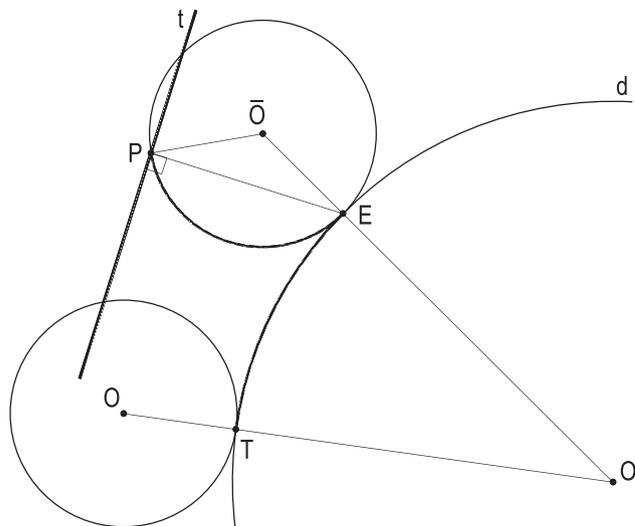


Figura 638

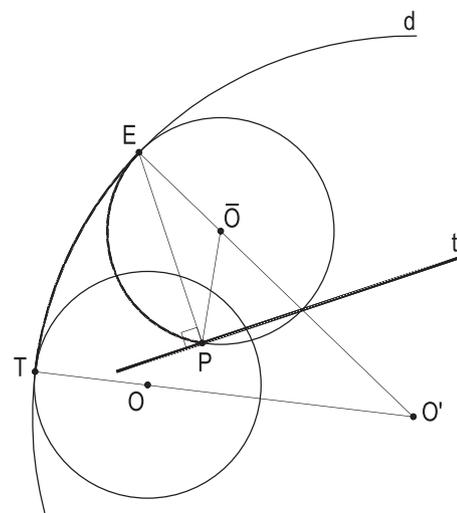


Figura 639

125 – Construção de epicicloides normais, alongadas e encurtadas

O mais habitual é que os passos das epicicloides normais sejam uma fração exata do comprimento da diretriz, do que resulta que um número inteiro de ciclos da curva completa uma volta de 360° .

Assim, no exemplo escolhido para o traçado da epicloide normal (Figura 640), o raio da circunferência geratriz (O, r) vale a quarta parte do raio r' da diretriz (O', r'), o que acarreta que quatro ciclos da epicloide completam uma volta em torno de O' .

Para o traçado, divididos a geratriz e seu passo $A\bar{A}$ em oito partes iguais, marca-se os centros de oito posições da geratriz, para obter os pontos 1, 2, 3, etc. da curva.

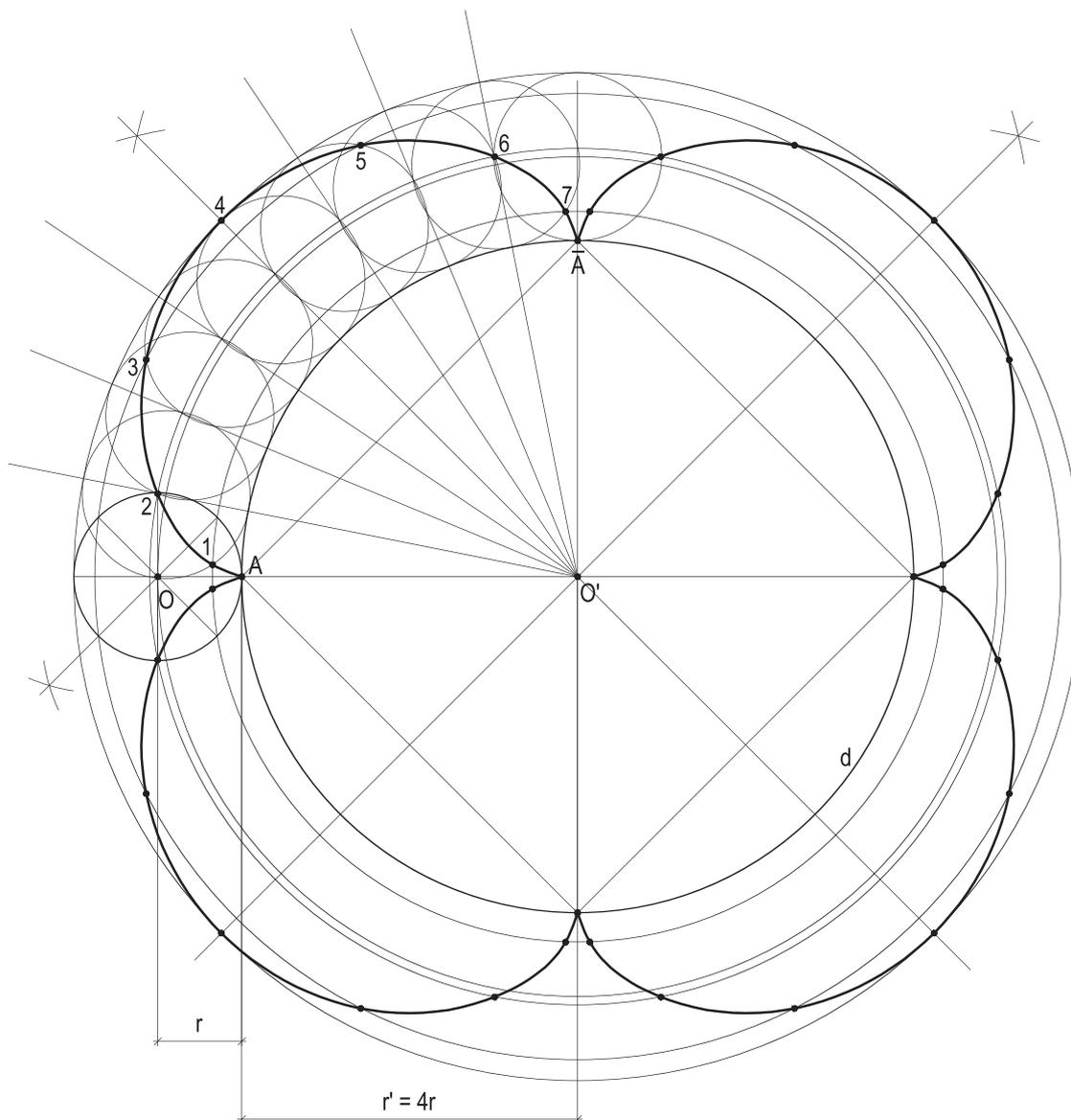


Figura 640

Observe-se que a epicloide é tangente, em seu ponto 4, médio do primeiro ciclo à circunferência ($O', O'4$), o que se repete para os outros três passos desenhados (Figura 640).

Lembre-se que poderiam ter sido incluídas as tangentes à curva, nos pontos marcados, o que colaboraria com seu traçado pelas indicações das curvaturas, ponto a ponto.

Para o traçado da epicicloide alongada, gerada pelo ponto A exterior à geratriz $(O, O\bar{A})$ e rigidamente ligado a ela, tal como detalhado para as cicloides, deve-se dividir em um mesmo número de partes iguais a geratriz e o passo (oito, na Figura 641), determinar os pontos correntes da epicicloide normal correspondente e marcar, nas posições intermediárias da geratriz, segmentos, a partir de seus centros, com valores iguais a OA.

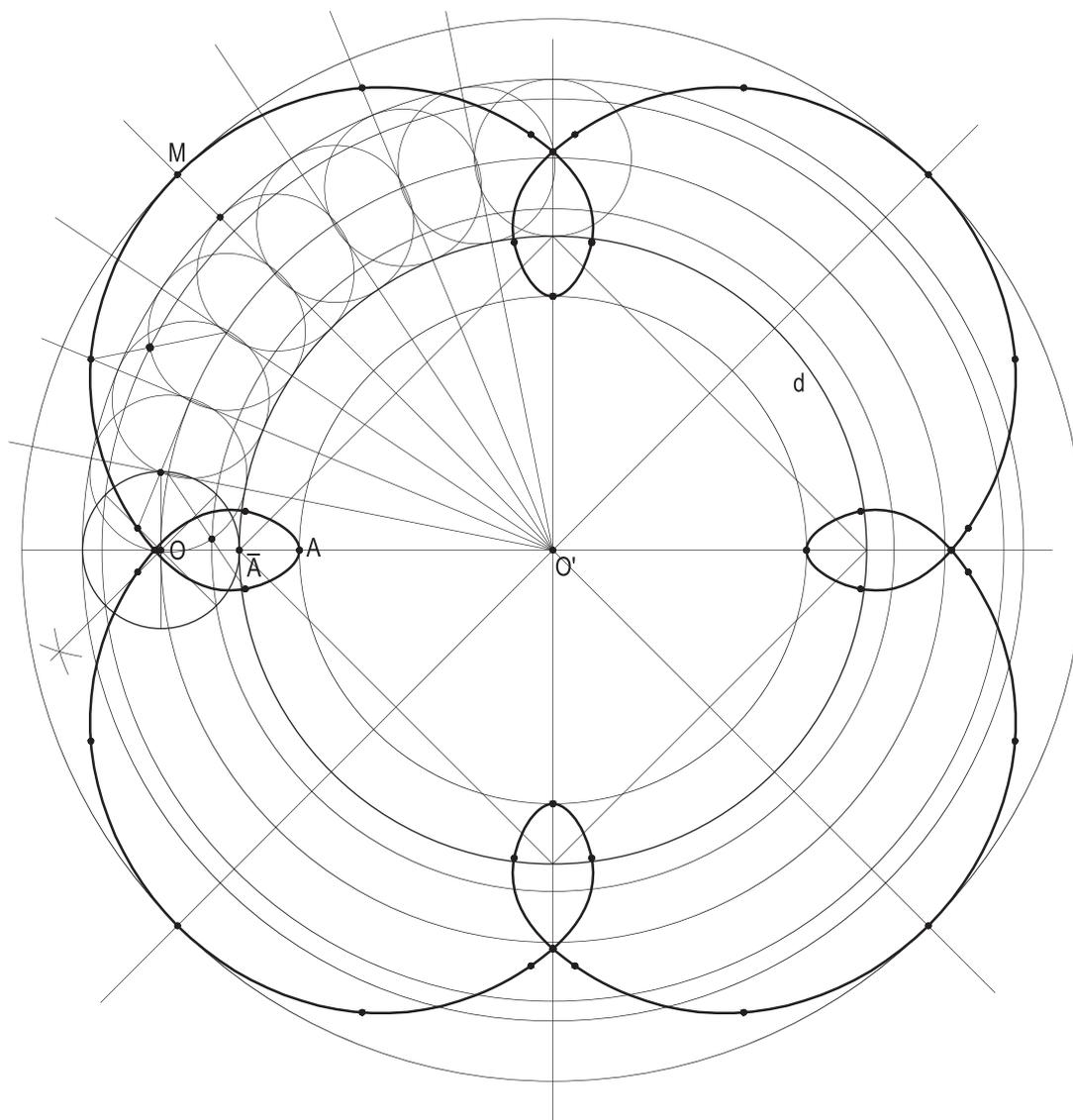


Figura 641

No exemplo acima, mais uma vez, a diretriz tem raio igual ao quádruplo do raio da geratriz, acarretando quatro ciclos iguais para a epicicloide alongada, completando uma volta de 360° em torno de O' .

Observe-se as concordâncias das epicicloides com as circunferências concêntricas com a diretriz e contendo, ou os pontos A, extremos, ou os médios M de seus ciclos (Figura 641).

Da mesma forma, a construção da epicicloide encurtada, gerada por um ponto A interior à geratriz e rigidamente ligado a ela, se faz pela obtenção de pontos da epicicloide normal correspondente, com as marcações do comprimento inicial OA sobre os suportes dos raios das posições intermediárias, para conseguir pontos correntes da encurtada (Figura 642).

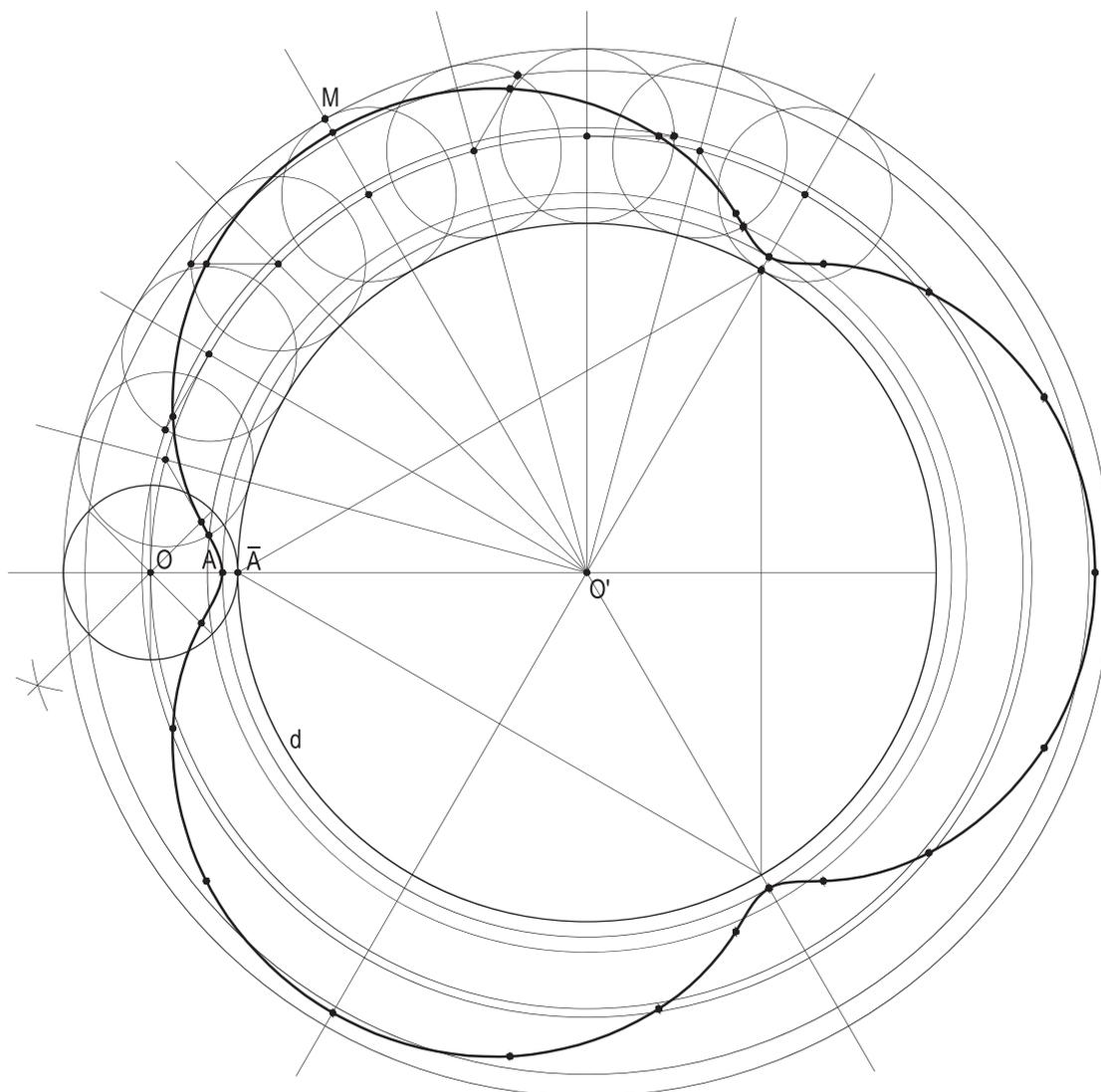


Figura 642

Para o exemplo acima, da epicicloide encurtada, a diretriz d foi escolhida com raio igual ao triplo do raio da geratriz, proporcionando três ciclos completos da curva após uma volta inteira em torno do centro O' da diretriz.

Mais uma vez, vale observar que a epicicloide resta tangente às circunferências $(O', O'A)$ e $(O', O'M)$, em seus pontos mais próximos e mais afastados do centro O' da diretriz (Figura 642).

Como visto anteriormente, em diversos exemplos, o traçado das tangentes à curva nos pontos correntes determinados auxilia sua construção pelas informações de suas curvaturas nesses pontos, indicadas pelas tangentes. Assim é a construção abaixo (Figura 643) da epicloide normal de geratriz (O, OA) e diretriz (O', O'A), esta com raio igual ao triplo do raio OA da geratriz.

Divididos a geratriz e o passo $\overline{A\bar{A}}$ da diretriz em oito partes iguais, obtidos os pontos correntes A_1, A_2, A_3 , etc. da epicloide e marcados os centros instantâneos de rotação T_1, T_2, T_3 , etc. correspondentes, as normais T_1A_1, T_2A_2, T_3A_3 , etc. permitem os traçados das tangentes t_1, t_2, t_3 , etc. (Figura 643), auxiliando, em muito, a construção, por pontos, da curva.

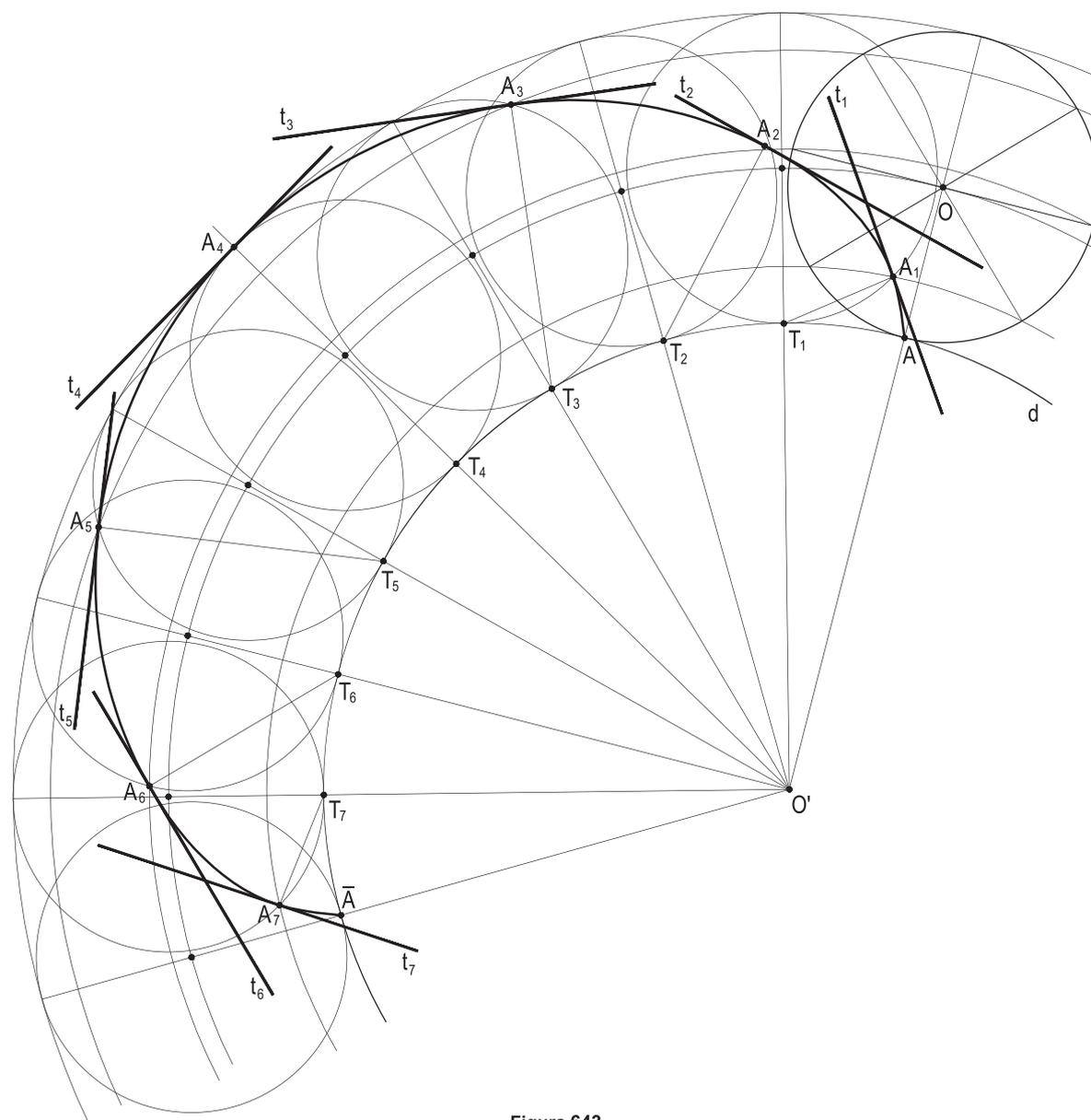


Figura 643

126 – Construção de hipocicloides normais, alongadas e encurtadas

Também aqui, os exemplos apresentam diretrizes com raios múltiplos dos raios das circunferências geratrizes, triplos, em todas três, normal (Figura 644), alongada (Figura 645) e encurtada (Figura 646). Assim, em todos os três casos, as hipocicloides contam com uma volta completa em torno do centro O' da diretriz, trazendo três ciclos completos.

O traçado, por pontos, da hipocicloide normal se consegue, como feito para a epicycloide, pelas divisões em oito partes iguais da circunferência geradora (O, OA) e de seu primeiro ciclo $A\bar{A}$, com a união dos pontos assim obtidos (Figura 644).

A construção da hipocicloide alongada gerada pelo ponto A , rigidamente ligado à geratriz ($O, O\bar{A}$), se faz, como aconteceu com a epicycloide alongada, aproveitando os pontos antes marcados da cíclica normal correspondente, expandindo os raios de cada posição intermediária da geratriz para o valor inicial OA (Figura 645).

A hipocicloide encurtada da Figura 646 é traçada pela união, à mão livre, dos pontos obtidos a partir da cíclica normal correspondente, com a aplicação do valor constante OA sobre os raios das posições intermediárias da geratriz.

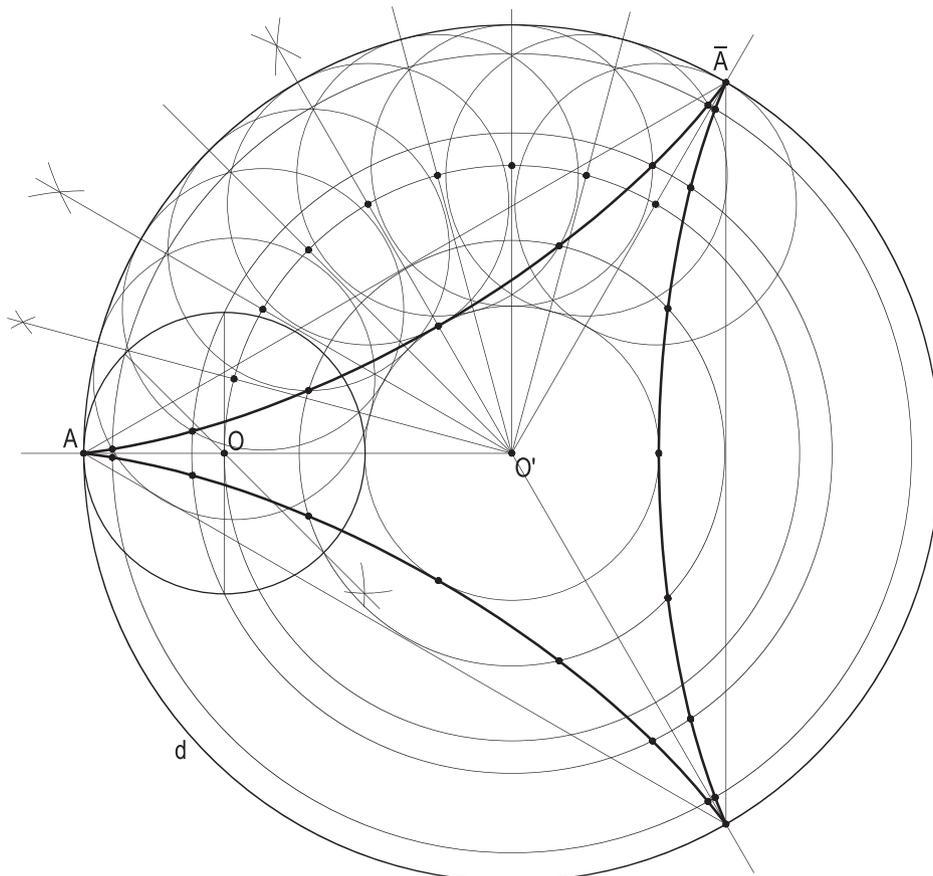


Figura 644

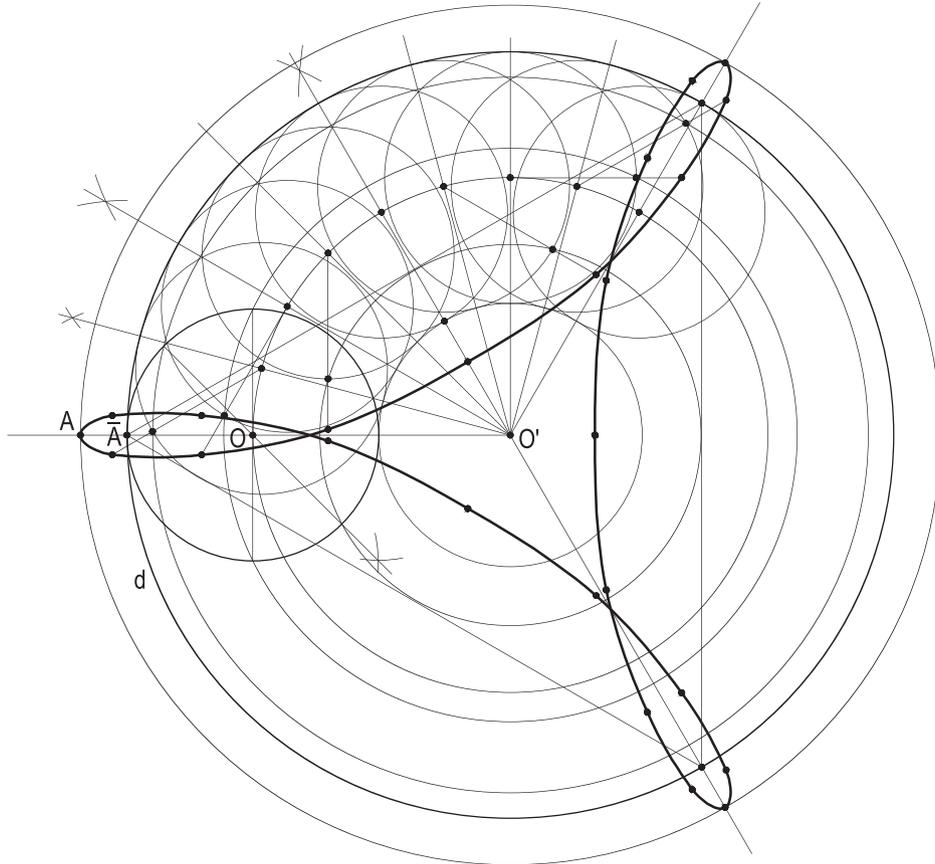


Figura 645

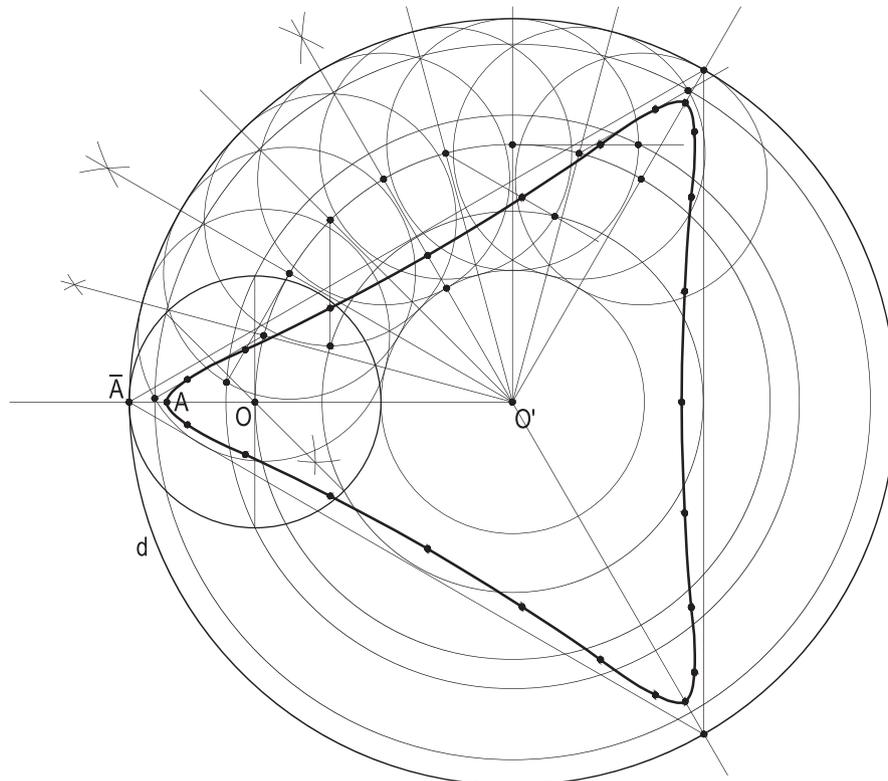


Figura 646

127 – Auxílio dos polígonos regulares

Sempre que o raio da diretriz é um múltiplo do raio da circunferência geratriz, como em todos os exemplos até agora estudados, o passo da epicloide, ou da hipocicloide, é uma fração exata do comprimento da diretriz, decorrente da divisão dessa circunferência em tantas partes iguais quanto aquele múltiplo utilizado.

Assim foi a epicloide normal da Figura 640, em que a circunferência diretora foi dividida em quatro partes iguais, proporcionando quatro ciclos para aquela curva ao fim de uma volta completa em torno do centro da diretriz, o que também ocorreu com a alongada (Figura 641), mais uma vez a diretriz tendo raio igual ao quádruplo da geratriz.

Observe-se que, nos casos das Figuras 640 e 641, o passo das cíclicas é um arco correspondente ao lado de quadrado inscrito na diretriz.

Já nos exemplos das Figuras 642, 643, 644, 645 e 646, em que o raio da diretriz vale o triplo do da geratriz, as curvas construídas têm seus passos iguais à terça parte das diretrizes, correspondendo, por isso, a cordas dessa diretriz iguais aos lados dos triângulos regulares (equiláteros) nelas inscritos, tanto para epicloides como para hipocicloides, normais, alongadas ou encurtadas, apresentadas em cada uma dessas construções.

Generalizando: sempre que o raio da diretriz for um múltiplo inteiro do raio da geratriz, tudo ocorrerá dessa forma, os passos das cíclicas sendo arcos correspondentes a lados de polígonos convexos regulares inscritos na diretriz, com gêneros iguais aos valores desses múltiplos.

É isso o que acontece com as epicloides e com as hipocicloides normais das Figuras 647 e 648, cujos ciclos que completam uma volta inteira em torno do centro O' da diretriz correspondem aos lados, respectivamente, do triângulo equilátero ABC e do quadrado ABCD inscritos na diretriz.

É também o que se passa com a epicloide normal da Figura 649, para diretriz com raio igual ao quádruplo do raio da geratriz, implicando em que seu passo valha a quinta parte da circunferência diretriz, cada um correspondendo a um lado do pentágono regular convexo inscrito na diretriz.

E, utilizando os polígonos regulares inscritos na diretriz, mas agora operando com os estrelados, aproveitando todo o estudo desenvolvido em *Geometria Plana*, números 276, 277, 278 e 279, é possível traçar cíclicas algo mais complexas, como a epicloide normal da Figura 650, em que a razão entre o raio da diretriz e da geratriz correspondente vale $\frac{5}{2}$, o pentágono regular estrelado A1234 orientando as espiras da curva.

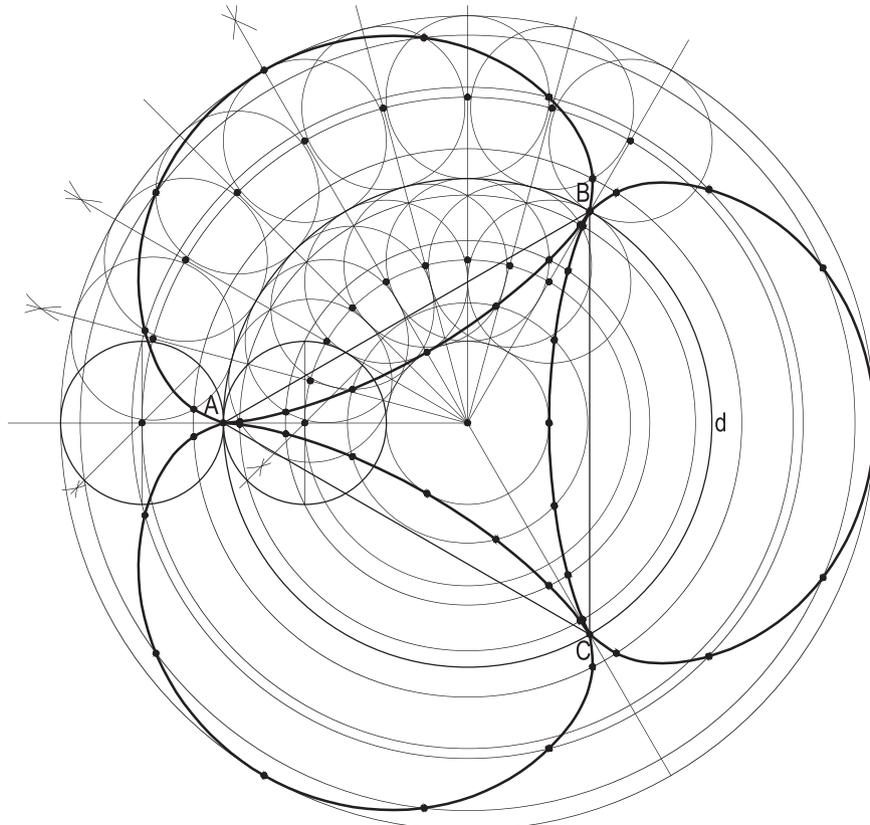


Figura 647

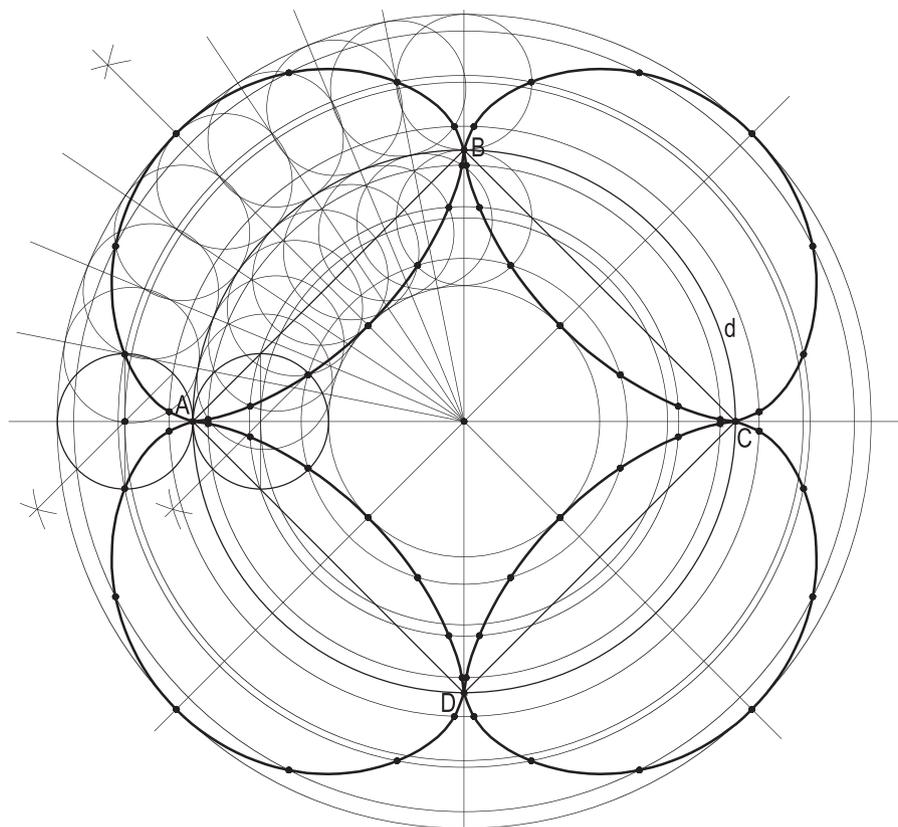


Figura 648

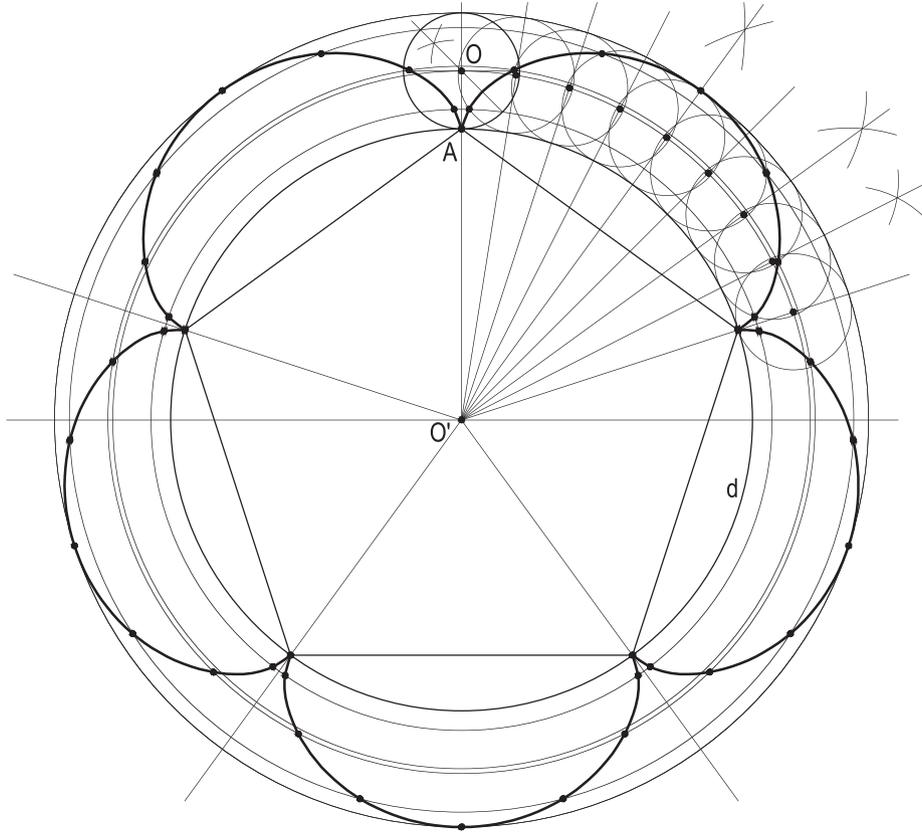


Figura 649

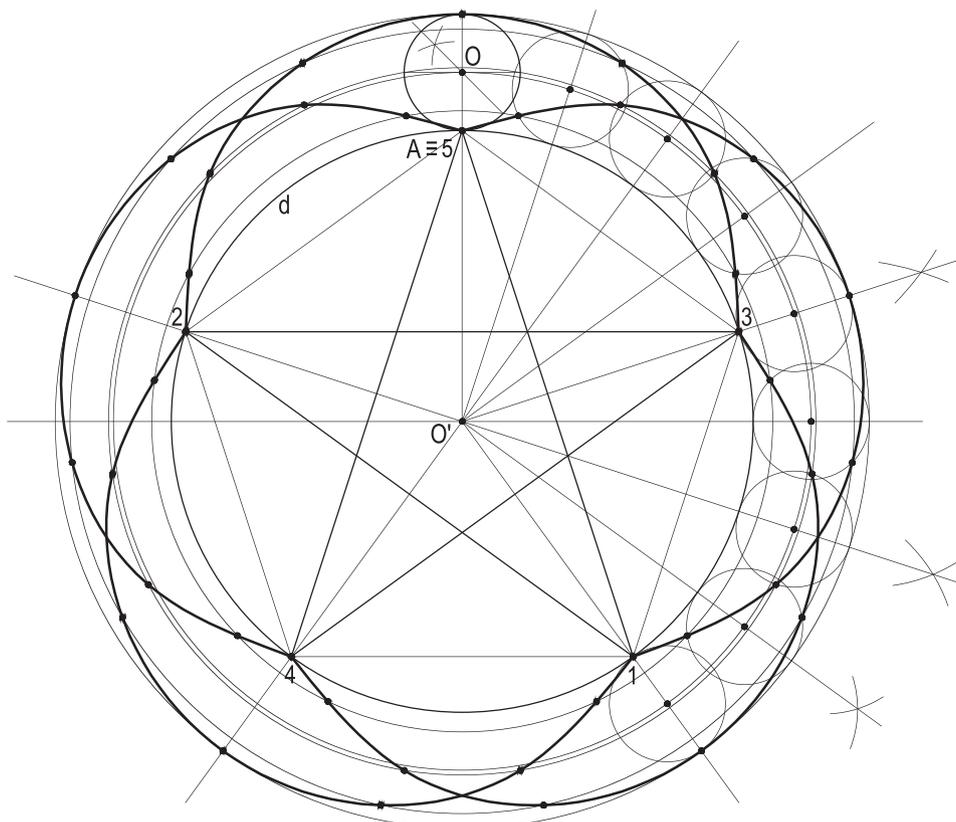


Figura 650

É também o que ocorre para a epicicloide normal construída na Figura 651 abaixo, em que a razão entre os raios da diretriz ($O', O'A$) e da geratriz ($O, O\bar{A}$) vale $\frac{8}{3}$.

Com isso, cada ciclo da curva corresponde a um arco da diretriz subtendendo cada um dos lados do octógono regular estrelado, ABCDEFGH, de espécie 3, inscrito na circunferência diretriz, visto que, tendo ela sido dividida em oito partes iguais, os pontos dessa divisão foram unidos três a três, proporcionando três voltas completas em torno do centro O' .

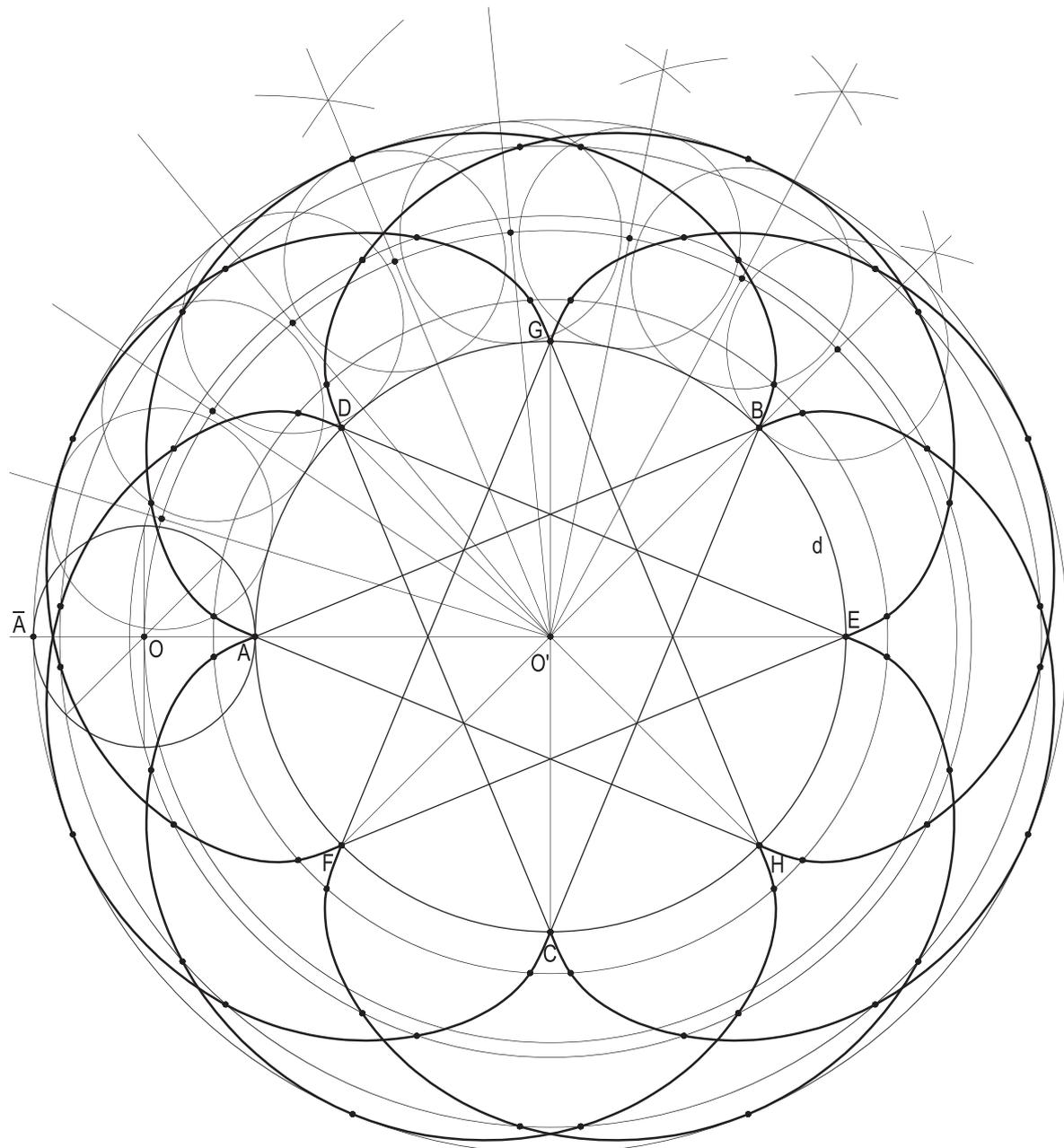


Figura 651

129 – Cardioides

Cardioides são epicicloides normais em que geratriz e diretriz têm raios iguais.

A denominação particular decorre de seu formato semelhante à imagem prática de um coração e vem do grego “kardioeides” (forma de coração).

Sua construção segue, naturalmente, os procedimentos vistos anteriormente (número 125), como exemplificado na Figura 653, abaixo, em que o ponto A da geratriz (O) descreve a curva, de diretriz (O') igual à geratriz. As duas circunferências foram divididas em oito partes iguais, para a marcação dos pontos correntes A_1, A_2, A_3 , etc. e das tangentes t_1, t_2, t_3 , etc.

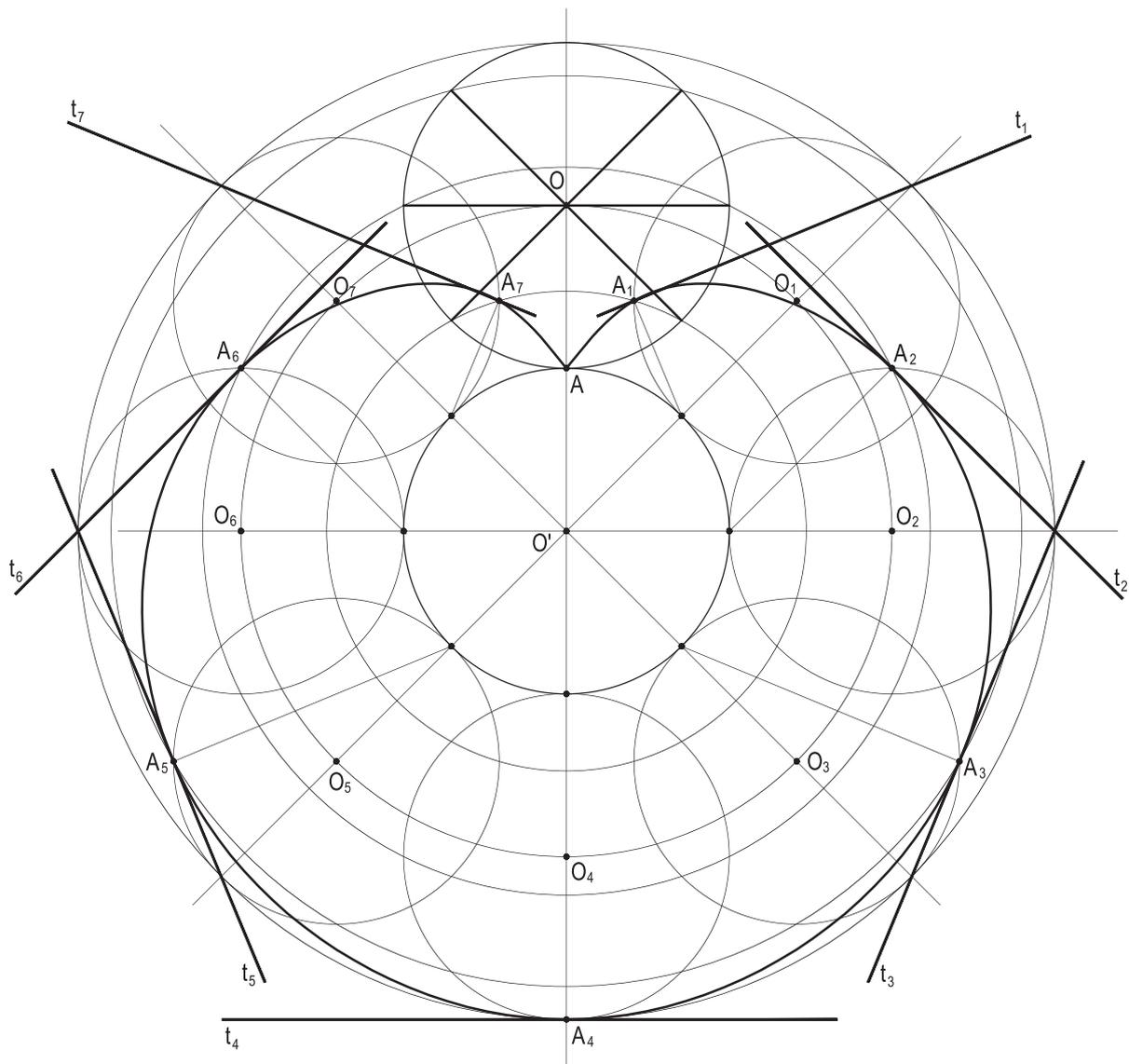


Figura 653

332 – Dadas a diretriz d e as tangentes t_1 e t_2 a uma cicloide normal, num mesmo ciclo, pede-se determinar o ponto de contato T da tangente t_1 com a cíclica e a origem A desse ciclo.

Resolução: Por ser paralela à diretriz, a tangente t_2 proporciona, por sua distância a d , a medida do diâmetro da geratriz, recaindo-se, com isso, no problema anterior.

E a retificação do arco \overline{ET} dá a medida \overline{EF} , que, repetida em EA , traz o ponto gerador A (Figura 656).

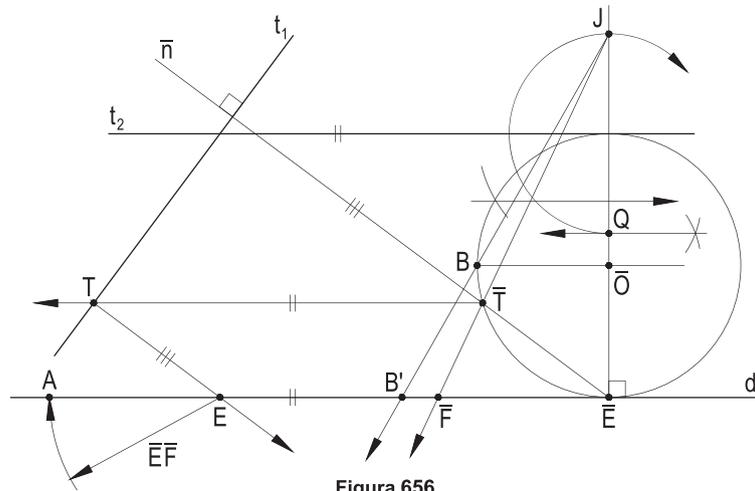


Figura 656

333 – Dadas duas posições (O_1) e (O_2) da circunferência geratriz de uma cicloide normal de diretriz dada d , assim como um ponto P_1 da curva, na geratriz (O_1), pede-se determinar a nova posição P_2 desse ponto, na posição (O_2).

Construir, ainda, as tangentes à curva nesses dois pontos P_1 e P_2 .

Resolução: Retificada a circunferência (O_2), fica simples determinar seu arco E_2F_2 de comprimento igual à porção E_1E_2 da diretriz formada pelos centros instantâneos de rotação da geratriz nas duas posições consideradas. E, então, a partir de P'_2 , trasladado de P_1 , na direção da diretriz, vem o arco $P'_2P_2 = E_2F_2$ que dá o ponto corrente pedido P_2 (Figura 657).

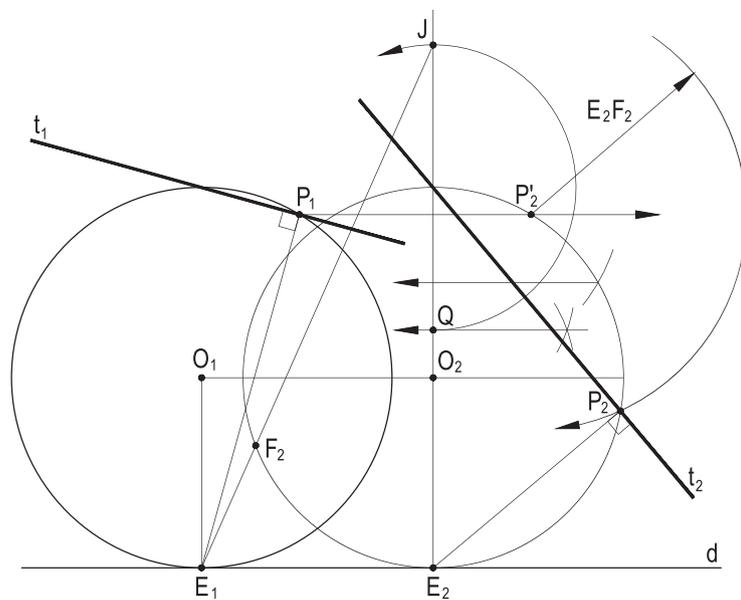


Figura 657

A construção das tangentes t_1 e t_2 , à cicloide, nesses dois pontos P_1 e P_2 , se faz pelos traçados das normais E_1P_1 e E_2P_2 nos dois pontos considerados e pelas perpendiculares t_1 e t_2 a elas, resolvendo a questão.

334 – Construir a circunferência (I), inscrita no triângulo retângulo EAF, de hipotenusa AE, E sendo o ponto médio do primeiro ciclo da cicloide normal de diretriz d e geratriz (O, OA), dadas, A sendo o ponto inicial desse ciclo, F pertencendo a d .

Resolução: Retificada a geratriz (O, OA), obtém-se a medida $\overline{B\bar{D}}$ de seu quadrante e, repetindo $\overline{DE} = \overline{B\bar{D}}$, na paralela, por B, a d , vem E, ponto médio do primeiro ciclo, proporcionando F, em d , na perpendicular a d , por esse ponto E (Figura 658).

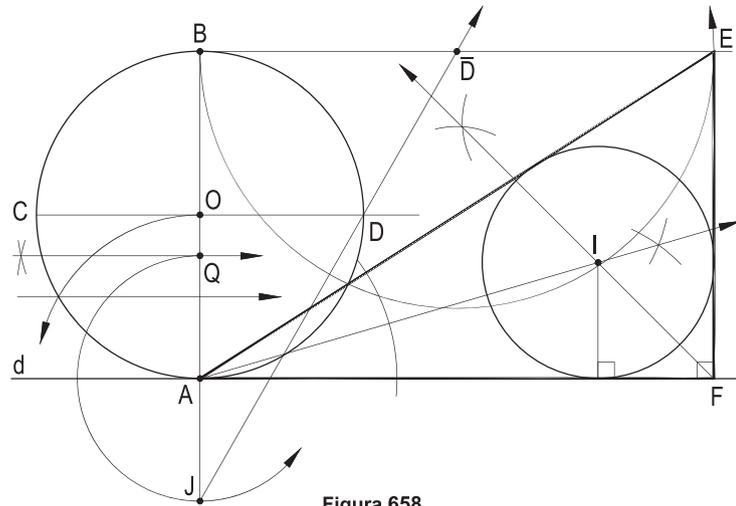


Figura 658

335 – Dada uma cicloide normal por sua diretriz d e por sua geratriz (O, OA), A sendo o ponto gerador, no sentido horário, pede-se, sem construir a curva, inscrever, em seu primeiro ciclo, um retângulo que tenha um lado sobre a diretriz e o oposto tendo seu suporte passando pelo ponto K, dado.

Resolução: A reta s , por K, paralela a d , suporte de um lado do retângulo, dá K_1 , na geratriz e, com a retificação do arco AK_1 , medindo AR, obtido pela soma do quadrante $\overline{A\bar{D}}$, com a retificação $\overline{K\bar{D}}$ do arco DK_2 , igual a DK_1 , obtém-se a abscissa AR de um lado RS do retângulo, perpendicular à diretriz e, por simetria em relação à mediatriz MN do primeiro passo da cicloide, vem o outro lado TU (Figura 659).

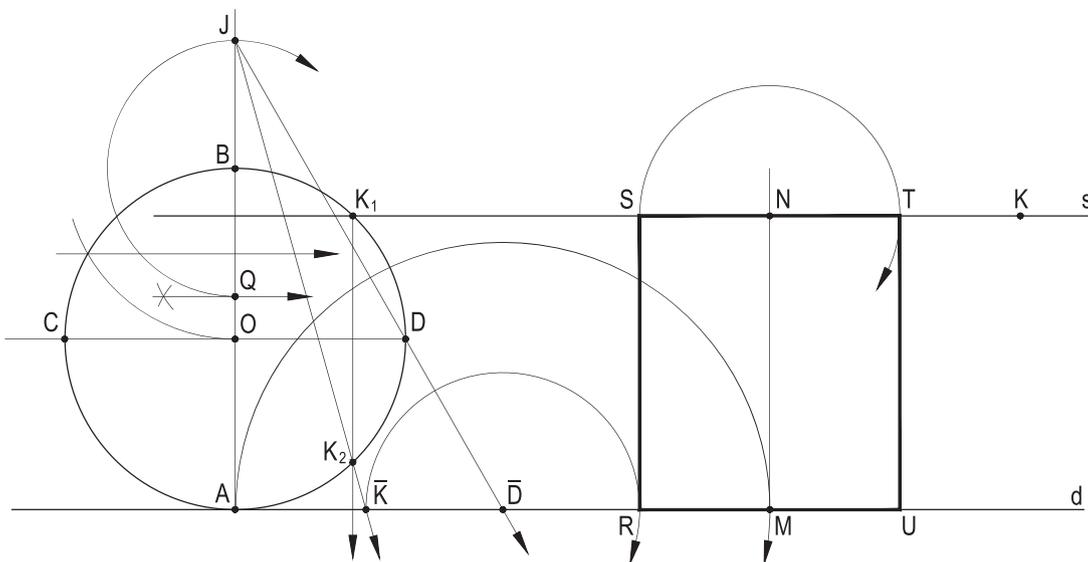
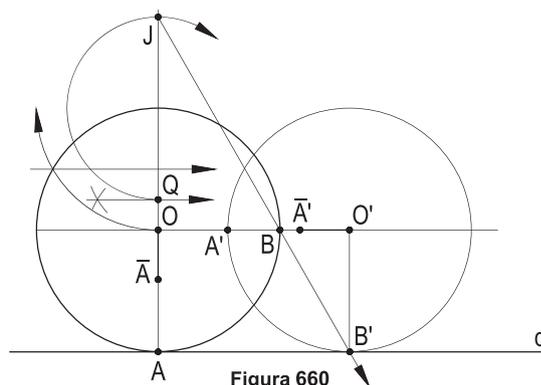


Figura 659

336 – O ponto \bar{A} , rigidamente ligado à circunferência (O, OA), é o ponto inicial do primeiro ciclo da cicloide encurtada proporcionada pelo rolamento, sem desliz, de (O, OA) sobre a reta d, também dada.

Pede-se determinar a posição \bar{A}' de \bar{A} após um quarto do movimento no sentido horário, de (O, OA), no primeiro ciclo da curva.

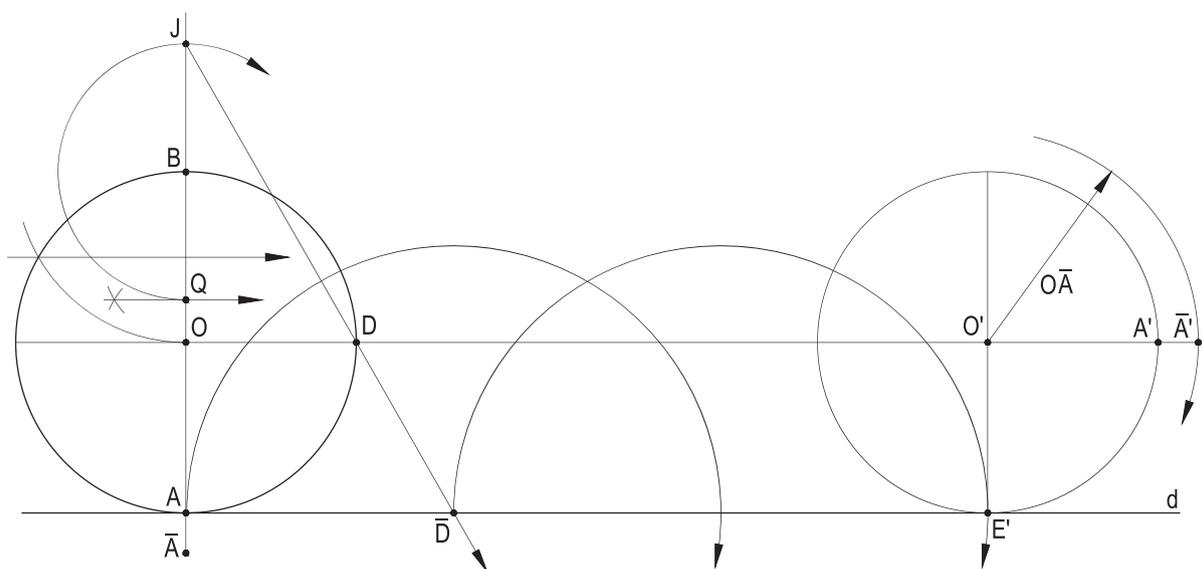
Resolução: Basta obter a retificação AB' de um quadrante AB da geratriz, para marcar a nova posição A' de A para a circunferência (O') igual à dada (O, OA) e aplicar o valor inicial $O\bar{A}$ sobre o raio O'A', determinando a posição \bar{A}' pedida (Figura 660), correspondente à posição A' da cicloide normal gerada por A.



337 – Mesmo problema, agora para uma cicloide alongada, pedindo-se a nova posição \bar{A}' do ponto gerador dado \bar{A} , após três quartos de rolamento de (O, OA), sobre d, no primeiro ciclo.

Resolução: Idêntica à anterior, pela retificação AD de um quadrante AD da geratriz que, aplicada três vezes consecutivas sobre d, proporciona o centro instantâneo E' da posição pedida \bar{A}' , obtida pela marcação da medida $O\bar{A}$ sobre o suporte do raio O'A' (Figura 661).

Há duas soluções, uma dextrógiira, apresentada na figura abaixo, e outra não construída, simétrica da primeira em relação à reta OA, para movimento no sentido anti-horário da geratriz.



338 – Dado o segmento BC, considere o triângulo retângulo e isósceles ABC, de hipotenusa BC, A acima de BC, e duas semicicloides normais, a primeira gerada pelo ponto B, no sentido horário, e a segunda gerada por C, no sentido oposto, de modo que BA e CA sejam as metades dos passos dessas duas cíclicas. Pede-se construí-las e concordá-las por um quadrante de circunferência de centro A.

Resolução: Para determinar o raio R das geratrizes, operou-se, por semelhança em construção auxiliar, com a retificação de uma circunferência (O', r), arbitrada, aplicando-se sobre a reta \overline{QP} a medida $AB/2$, quarta parte dos passos das curvas pedidas.

Construídas as geratrizes (M, R) e (N, R), para traçar as cíclicas foram determinados pontos correntes P e tangentes t (Figura 662), a concordância com o quadrante de circunferência de centro A e raio dobro de AM.

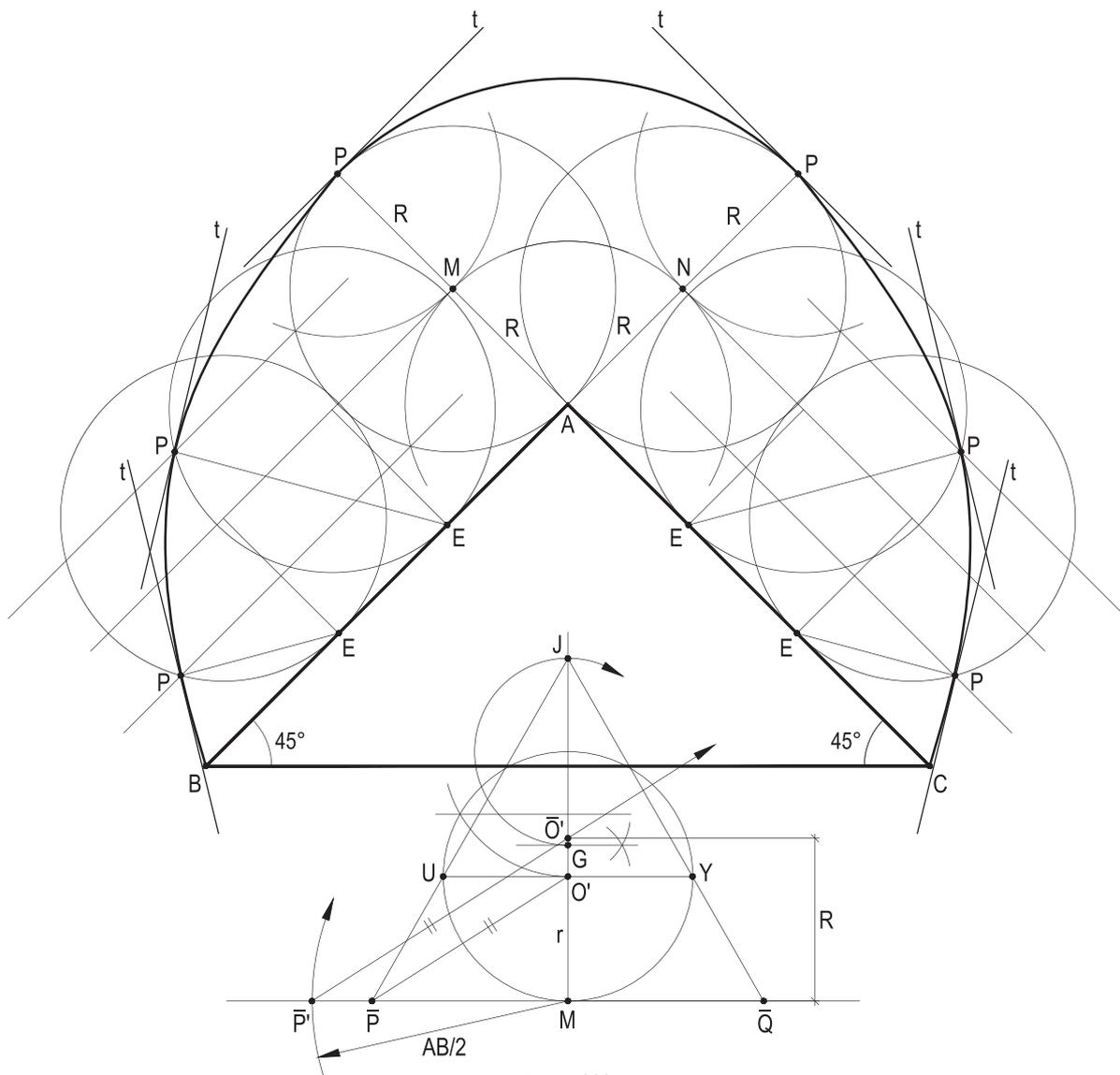


Figura 662

339 – Dada a circunferência (O) e dois de seus pontos A_1 e A_2 , sabendo que eles são os dois extremos de um ciclo da epicloide normal que tem (O) como diretriz, pede-se desenhar esse ciclo da curva.

Resolução: Para definir a geratriz da epicloide pedida, basta observar que seu comprimento deve igualar o do arco A_1A_2 da diretriz (O). Assim, retificado o arco A_1A_2 , a partir do polo J, para o segmento \overline{BD} (soma do quadrante \overline{BA} com o comprimento \overline{AD} do arco \overline{AD} , igual a A_1B da diretriz), e aplicada sua quarta parte \overline{BM} , a partir de \overline{A} , trazendo o ponto L, a paralela LO' a \overline{BO} fornece, por proporção com o triângulo \overline{BOA} , a medida r do raio da geratriz (Figura 663).

A construção da epicloide se faz, então, pelas divisões da geratriz e do arco A_1A_2 em oito partes iguais com a obtenção de pontos correntes P e das tangentes t à curva neles.

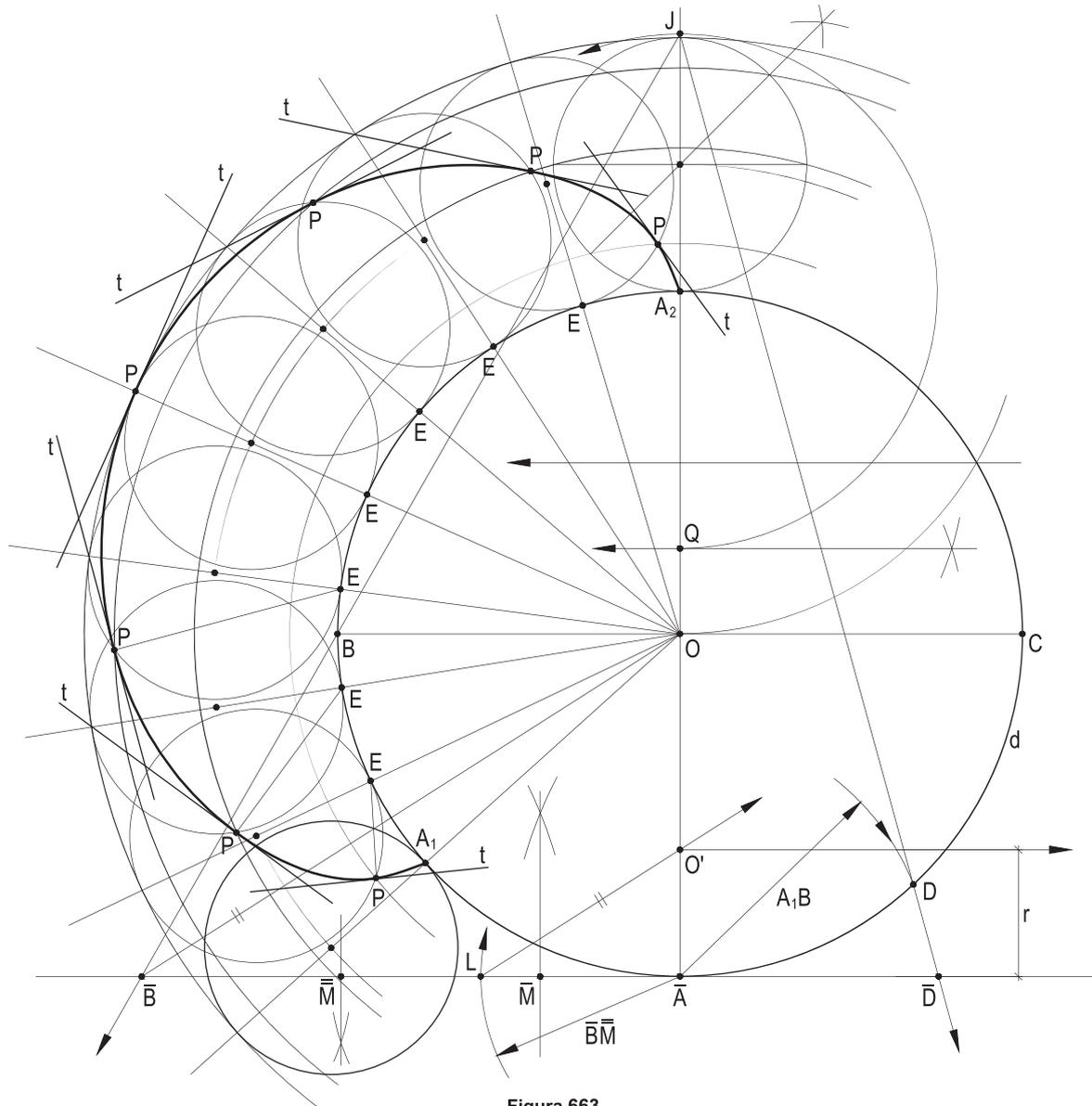


Figura 663

340 – Dado o quadrado ABCD, de centro O, e o ponto \bar{A} sobre o raio OA, pede-se construir a hipocicloide normal que tenha por diretriz a circunferência circunscrita ao quadrado, e que seja gerada pelo ponto A, em movimento anti-horário, contando com quatro ciclos AB, BC, CD e DA, e a hipocicloide alongada descrita pelo ponto \bar{A} , associado rigidamente à circunferência geratriz da hipocicloide normal, em idêntica rotação.

Resolução: Para que sejam quatro os ciclos da hipocicloide normal, o raio da geratriz ($O', O'A$) tem que medir a quarta parte do raio da diretriz.

A construção dessa curva é feita, então, com as divisões em quatro partes iguais da geratriz e do arco AB do primeiro ciclo, os outros três obtidos por simetrias em relação às diagonais do quadrado (Figura 664) e a alongada pelas ampliações dos raios como $O'A$, para o valor $O'\bar{A}$, além das mesmas simetrias antes referidas.

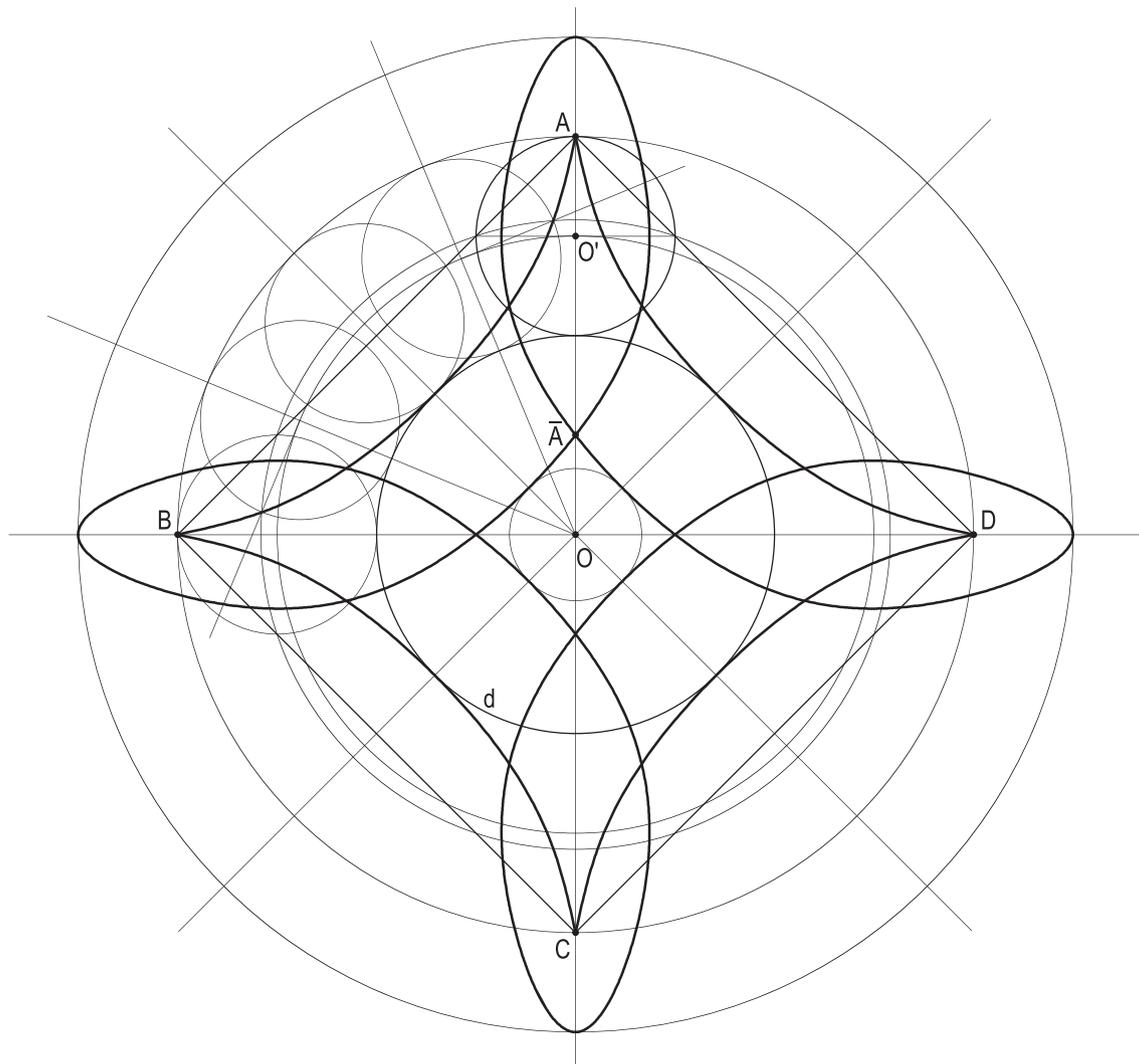


Figura 664

341 – Dadas uma cicloide normal por suas diretriz d , geratriz (O, OA) e ponto gerador A , e as retas r e s , pede-se construir a tangente t ao primeiro ciclo da curva, descrito no sentido horário, sabendo que seu ponto de contato T com a curva situa-se entre A e o ponto M , médio desse ciclo, a tangente procurada inclinando-se igualmente em relação às retas r e s .

Resolução: A tangente t , para formar ângulos iguais com as retas r e s , deve ser paralela a uma das bissetrizes b_1 e b_2 dos ângulos por elas formados e, para interessar à primeira metade do ciclo descrito por A , no sentido horário, tem que ter a direção de b_1 (Figura 665).

Assim, seguindo o procedimento habitual, retifica-se a geratriz, obtendo-se o ponto \bar{D} , médio do primeiro passo da curva, assim como seu arco AL , que, observe-se, vale a diferença entre a semicircunferência geratriz e o arco BL , ou, o que é o mesmo, o arco AL' (Figura 665). E, assim, marca-se o centro instantâneo E da posição da tangência pedida e, então, a normal ET , o ponto de contato T e a tangente t , que resolve a questão.

Observe-se que o ponto M , médio do ciclo estudado, vem com a perpendicular à diretriz pelo ponto \bar{D} , médio desse passo.

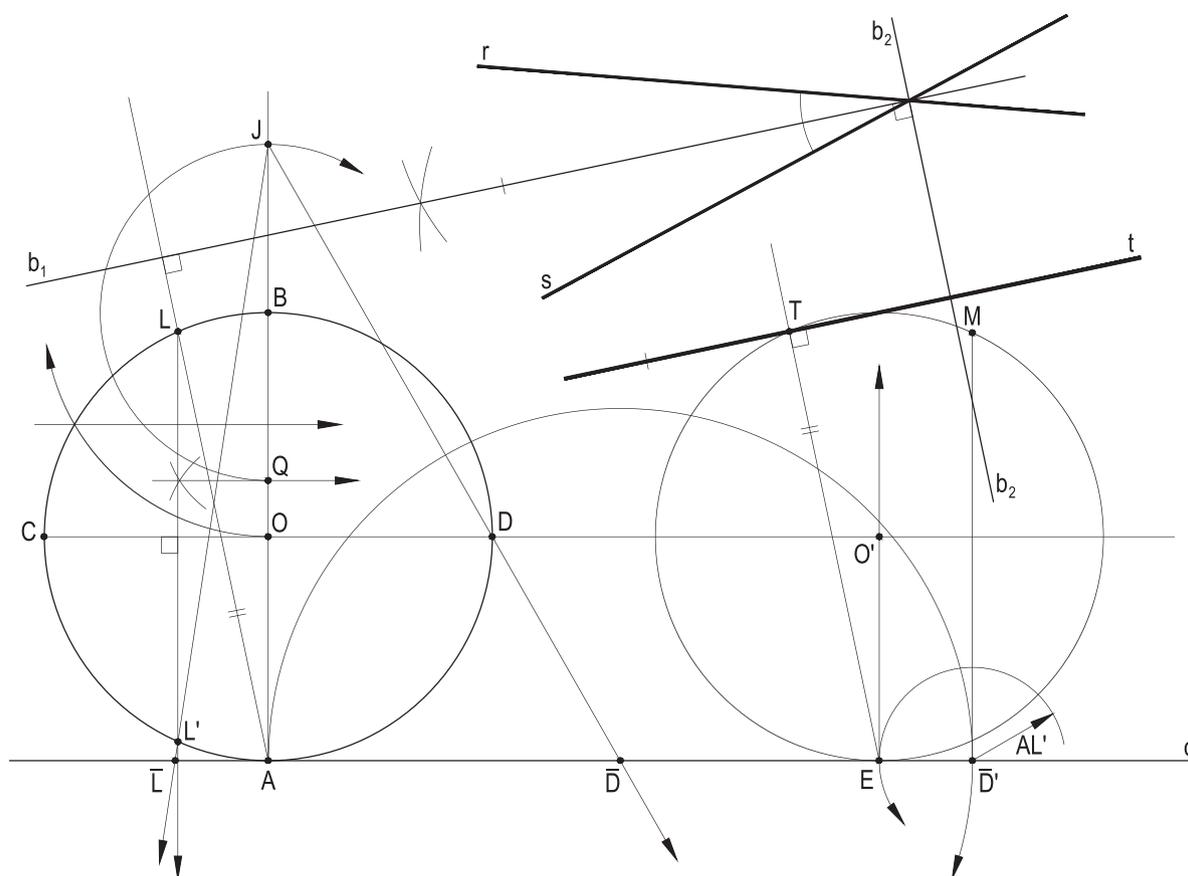


Figura 665

342 – São dados um arco de circunferência XY , de centro inacessível, duas circunferências iguais (O_1) e (O_2), tangentes exteriormente a d , garantido que sejam iguais os arcos dados AE de XY e EB (o menor) de (O_2), além dos pontos A , B e E .

Sabendo que (O_2) decorre do giro, sem escorregar, de (O_1) sobre d , ou seja, que B é um ponto corrente da epicloide normal gerada por A , pede-se determinar o ponto C dessa epicloide, bem como a tangente à curva nesse ponto C , após novo giro, de amplitude igual à do primeiro, e no mesmo sentido, agora de (O_2) para nova posição (O_3).

Resolução: O centro instantâneo \bar{E} da nova posição é de imediata obtenção, com $E\bar{E} = AE$, já que são iguais as amplitudes dos dois intervalos considerados.

Assim, traçada EM perpendicular a $A\bar{E}$, obtém-se o centro O_3 da geratriz na posição final procurada, por corte das circunferências (M, MO_1) e (\bar{E}, R), em que R é a medida dos raios de (O_1) e (O_2) (Figura 666).

E, já que a amplitude do giro de (O_1) para (O_3) deve ser o dobro da de (O_1) para (O_2), a aplicação, em (O_3) e a partir de \bar{E} , do dobro do arco EB proporciona o ponto C pedido, da normal $\bar{E}C$ que lhe corresponde e, por fim, a tangente t buscada (Figura 666).

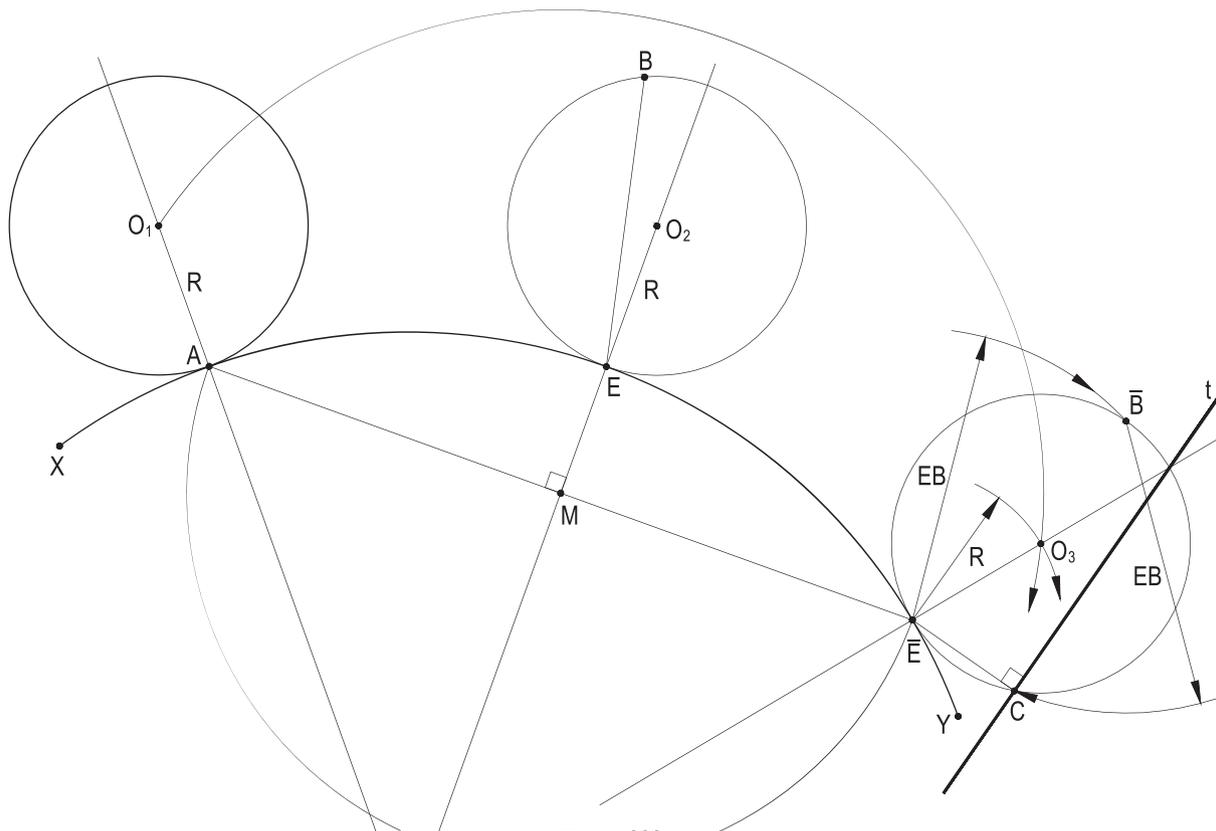


Figura 666

343 – As circunferências (O_1, O_1A) e (O_2, O_2A) , iguais, tangentes exteriormente em A , são tangentes à circunferência fixa (O, OA) , com raio dobro dos diâmetros de cada uma das primeiras nesse mesmo ponto A .

No sentido horário, A gera um ciclo AB de uma epicicloide normal e , no sentido anti-horário, uma hipocicloide normal, com seu primeiro ciclo AC , ambas as curvas tendo (O, OA) como diretriz e, respectivamente, (O_1) e (O_2) como geratrizes.

Pede-se construir estes ciclos das duas curvas.

Resolução: Já que os raios das geratrizes (O_1) e (O_2) valem a quarta parte do raio da diretriz (O) , seus comprimentos igualam o de um quadrante de (O) . Assim, são imediatas as marcações dos extremos B e C dos primeiros ciclos das curvas pedidas, com o traçado da perpendicular BC a OA , pelo centro O da diretriz.

Com as divisões em oito partes iguais das circunferências (O_1) e (O_2) e dos quadrantes AB e AC da diretriz, vêm os pontos correntes das duas curvas pedidas (Figura 667).

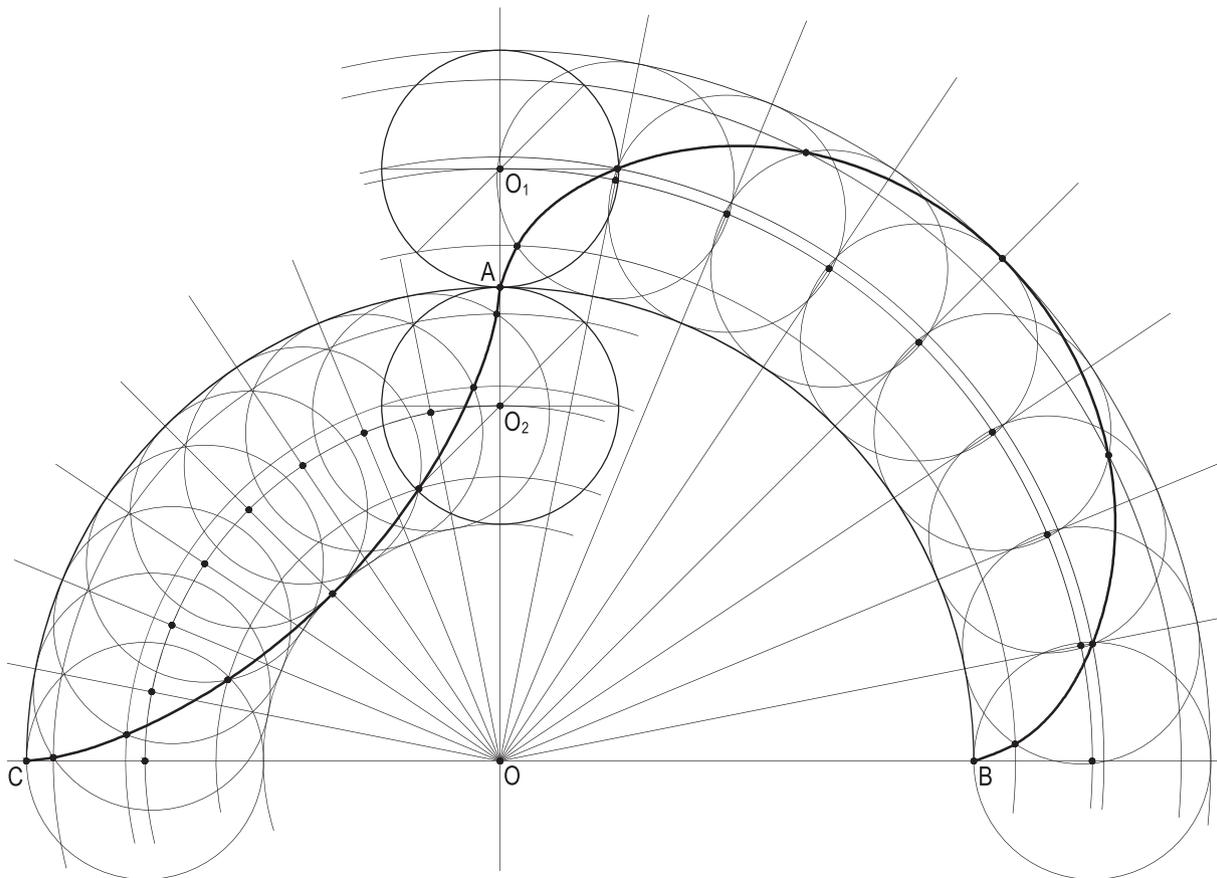


Figura 667

344 – São dadas uma circunferência (O, OA) e uma reta w .

Considere a tangente t a essa circunferência, pelo ponto \bar{A} , diametralmente oposto a A , e, fazendo dela a diretriz de uma cicloide normal de geratriz (O, OA) , que tenha, no ciclo em estudo, o ponto A como o mais distante de t e, sabendo que esse ciclo se desenvolve no sentido horário, completando-se, sobre t , num ponto designado por B , trace a circunferência tangente à reta t nesse ponto B , tendo seu centro O' sobre a reta w .

Fazendo dessa circunferência $(O', O'B)$ a diretriz de uma epicicloide normal, gerada pela circunferência (\bar{O}, \bar{OB}) , última posição daquela inicial (O, OA) , geratriz da cicloide normal antes considerada, e sabendo que essa epicicloide é gerada no sentido horário, pede-se :

1 – Construir o meio ciclo AB da cicloide normal considerada.

2 – Construir um ciclo completo da epicicloide normal gerada pelo ponto B da circunferência geratriz (\bar{O}, \bar{OB}) , que gira, sem deslizar, sobre a circunferência $(O', O'B)$.

Resolução: Desenhada a circunferência (O, OA) e determinado o ponto \bar{A} , diametralmente oposto de A , nessa circunferência, a reta t proposta é a perpendicular, por \bar{A} , ao diâmetro $A\bar{A}$.

Retificada essa circunferência, a partir do polo J , o segmento $\bar{A}\bar{A}_1$ (Figura 668) vale sua quarta parte, que, então, é duplicada para $\bar{A}B$, proporcionando, sobre t , o ponto final B do trecho da cicloide normal pedida.

Para construí-la, divide-se em quatro partes iguais o segmento $\bar{A}B$ e em oito partes iguais a circunferência (O, OA) para, contando com quatro posições da geratriz, determinar os pontos correntes 1, 2 e 3 e, aproveitando as normais à cicloide nesses pontos, traçar as tangentes t_1 , t_2 e t_3 , que auxiliam na construção da metade AB do ciclo da cicloide normal pedida.

Para a segunda parte do problema, inicia-se determinando o ponto O' , cruzamento da reta dada w com a perpendicular p a t , por B , obtendo-se, com isso, a diretriz $(O', O'B)$ da epicicloide pedida (Figura 668).

Para a construção dessa cíclica, retifica-se a diretriz $(O', O'B)$, a partir do polo J' , obtido com a paralela, por D , à reta JC (Figura 668), cuja quarta parte vale $B\bar{D}$, sobre t .

Em construção auxiliar, aplica-se, sobre uma reta arbitrada r , e a partir de um ponto L a ela pertencente, sucessivamente, quatro vezes a medida $\overline{AA_1}$ do quadrante da geratriz e, seguidamente, a medida \overline{BD} do quadrante da diretriz, para determinar o valor a da diferença entre as retificações de três quadrantes da diretriz e do total da geratriz, encontrando, com a circunferência (\overline{D}, a) , sobre t , o ponto \overline{F} , que unido ao polo J' , proporciona, na diretriz (O'), o ponto \overline{F} e, então, com $DF = D\overline{F}$ o extremo F do ciclo da epicloide, que, assim, é construída por pontos.

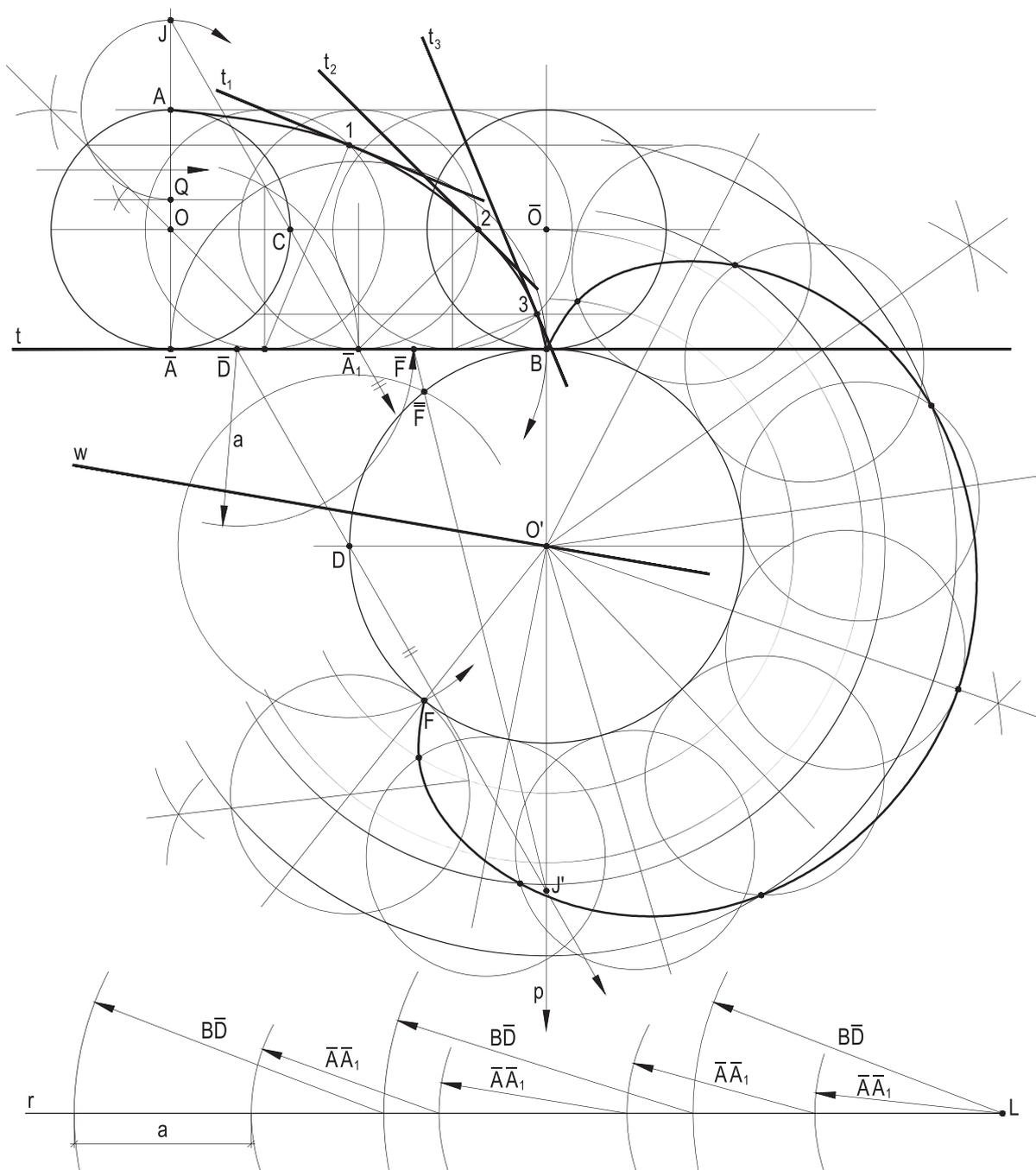


Figura 668

CAPÍTULO X

TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS PLANAS

131 – Transformações geométricas

Transformação geométrica de uma figura original em outra é a associação, ponto a ponto, entre as duas figuras, sob condições determinadas.

Tais transformações podem ocorrer num plano, e, portanto, em duas dimensões, como indica a simetria da Figura 670, ou em ambiente tridimensional, como a translação de um tetraedro exemplificada na Figura 671.

Na presente obra, detalharemos, apenas, transformações geométricas planas.

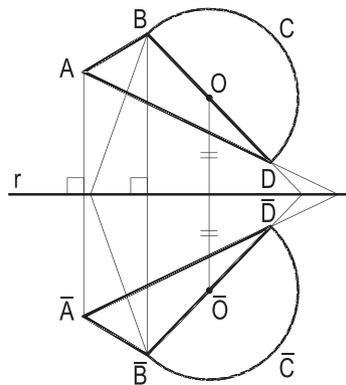


Figura 670

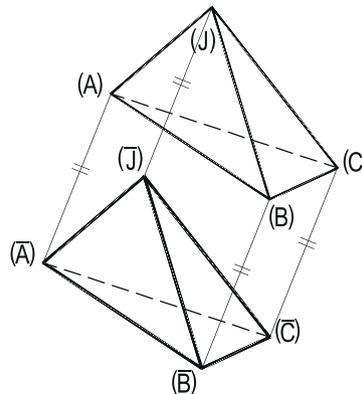


Figura 671

132 – Transformações geométricas planas

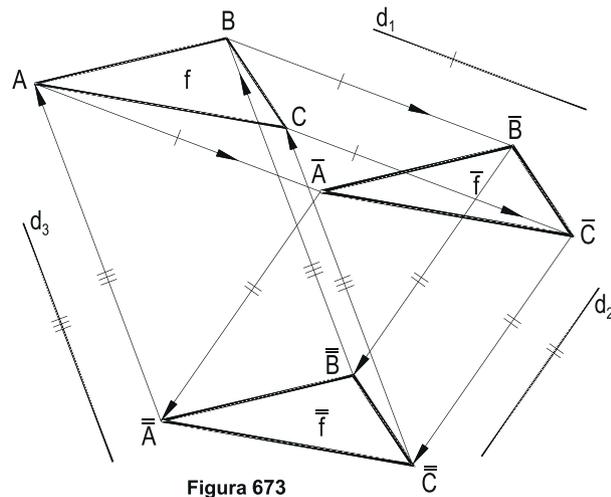
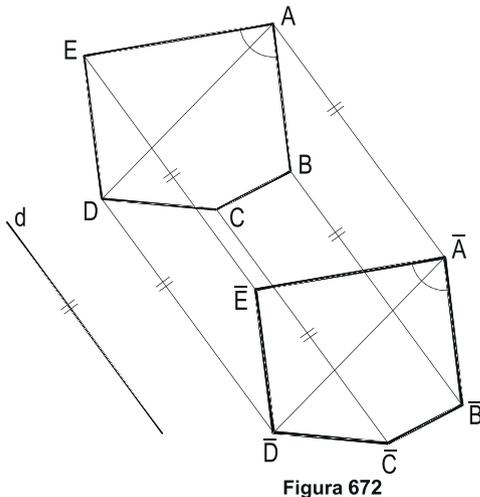
As transformações planas podem manter as dimensões das figuras originais para as posições finais, quando são denominadas isometrias, ou transformações isométricas, ou não, como adiante se verá. As isométricas são as translações, as rotações e as simetrias, além de combinações entre elas, como se passa a detalhar.

133 – Translação

Translação de uma figura é o movimento que faz com que todos os seus pontos se desloquem segundo retas paralelas, no mesmo sentido e com amplitudes iguais. A direção comum é denominada direção da translação e os elementos correspondentes, pontos, retas, ângulos, curvas, etc. da figura original e da transformada são ditos homólogos (Figura 672).

A translação é uma transformação isométrica porque, para cada segmento AB da figura original e seu homólogo $\overline{A\overline{B}}$, o quadrilátero $AB\overline{B}\overline{A}$ formado tem de ser um paralelogramo, por ter dois lados opostos $A\overline{A}$ e $\overline{B}B$ iguais e paralelos (*Geometria Plana*, número 72.4). E, por isso, $\overline{A\overline{B}}$ tem de ser paralelo e igual a AB (Figura 672). E porque os ângulos homólogos têm de ser, aos pares, iguais, por terem lados respectivamente paralelos (*Geometria Plana*, número 60).

Isso significa que a figura transladada de outra é igual a ela.



134 – Determinação do sistema

Uma translação fica precisamente determinada dados sua direção, seu sentido e sua amplitude.

135 – Produto de duas translações

Mais uma vez, por paralelas entre paralelas, cabe observar que, feita uma translação de uma figura f , segundo uma direção qualquer d_1 , proporcionando a figura \overline{f} e, a seguir, nova translação, agora de \overline{f} , segundo outra direção genérica d_2 , levando-a à posição $\overline{\overline{f}}$, esta última pode ser entendida como outra translação da original f , numa certa direção d_3 (Figura 673), ou, reciprocamente, de $\overline{\overline{f}}$ para f . E que são iguais as três figuras, o que permite concluir que o produto de duas translações é uma terceira translação.

136 – Rotação

Rotação de uma figura é o movimento que faz com que todos os seus pontos girem em torno de um ponto fixo em amplitudes angulares iguais, no mesmo sentido. O ponto fixo é, então, denominado centro da rotação. Assim, todos os pontos da figura original descrevem arcos concêntricos correspondendo a ângulos centrais iguais, num mesmo sentido (Figura 674).

A rotação é uma transformação isométrica. De fato, observando a rotação de um segmento genérico AB em torno de um ponto dado O , até sua posição final $\bar{A}\bar{B}$, são iguais os triângulos OAB e $O\bar{A}\bar{B}$, por terem dois lados iguais ($OA = O\bar{A}$ e $OB = O\bar{B}$) e os ângulos compreendidos $\alpha - \beta$ iguais (Figura 674), o que implica na igualdade de AB e $\bar{A}\bar{B}$, situação que se repete para os polígonos $ABCDE\dots$ e $\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}\bar{E}\dots$, proveniente da rotação do primeiro, genérico, em torno de um ponto fixo O (Figura 675), e mesmo de figuras curvilíneas ou mistas, limites de polígonos nelas inscritos.

Além disso, cabe observar que, quando uma reta r gira em torno de um ponto fixo O , ela permanece tangente à circunferência (O, OP) de centro O e raio OP igual à distância de O a r (Figura 676).

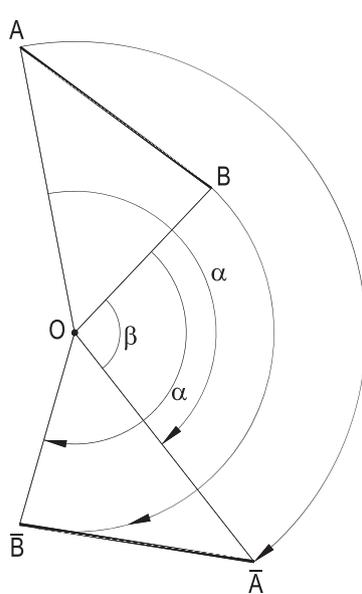


Figura 674

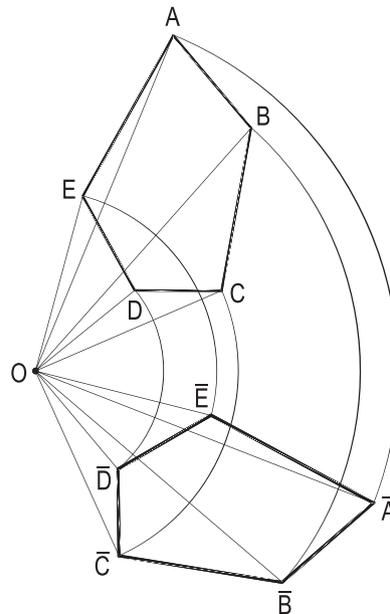


Figura 675

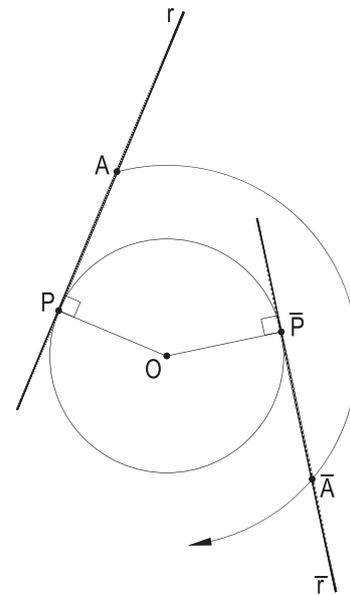


Figura 676

137 – Determinação do sistema

Uma rotação fica precisamente determinada dados o centro da rotação, a amplitude angular e o sentido da transformação.

Outras combinações de dados, como adiante se verá, podem ser utilizadas para determinar o sistema.

138 – Produto de duas rotações

Consideremos a rotação de um ponto A em torno do centro O_1 , proporcionando o ponto \bar{A} e, em seguida, uma segunda rotação, agora de \bar{A} , em torno do centro O_2 , resultando no ponto $\bar{\bar{A}}$ e observemos que O_1 pertence à mediatriz do segmento $A\bar{A}$ e que O_2 pertence à mediatriz m_2 do segmento $\bar{A}\bar{\bar{A}}$ (Figura 677).

O ponto O_3 , de corte de m_1 e m_2 , será, então, o circuncentro do triângulo $A\bar{A}\bar{\bar{A}}$ e, por isso, terá que pertencer à mediatriz m_3 do segmento $A\bar{\bar{A}}$.

Isso garante que $\bar{\bar{A}}$ seja proveniente de uma rotação de A em torno do ponto O_3 , centro dessa rotação.

Como tudo há de se passar da mesma forma para rotações consecutivas, em torno de O_1 e de O_2 , para outros pontos da figura considerada, conclui-se que o produto de duas rotações é uma terceira rotação.

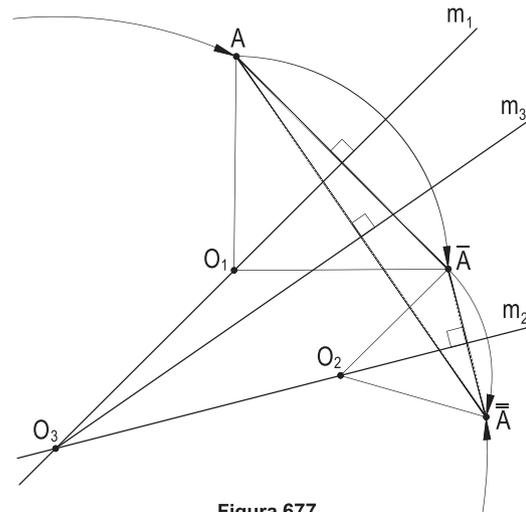


Figura 677

139 – Simetria axial

Dois pontos A e \bar{A} são simétricos em relação a uma reta e quando essa reta é a mediatriz do segmento $A\bar{A}$. A reta é, então, denominada eixo dessa simetria, que é dita axial e os pontos simétricos A e \bar{A} são, também, referidos como homólogos.

Duas figuras são ditas simétricas em relação a uma reta fixa e quando a cada ponto de uma delas corresponde um ponto da outra, sendo os dois simétricos em relação àquela reta e, o eixo dessa simetria axial.

Assim, a construção da figura \bar{f} , simétrica de uma figura dada f , em relação a um eixo fixo e , também dado, se faz pelo traçado a partir de cada ponto A , de f , da perpendicular AM à reta e , M em e , prolongando-a, para além de e de um valor $M\bar{A}$ igual a AM (Figura 678), repetindo-se tal construção para cada novo ponto de f . Para trechos curvos, como AJD e seu simétrico $\bar{A}\bar{J}\bar{D}$, deve-se identificar suas naturezas e peculiaridades.

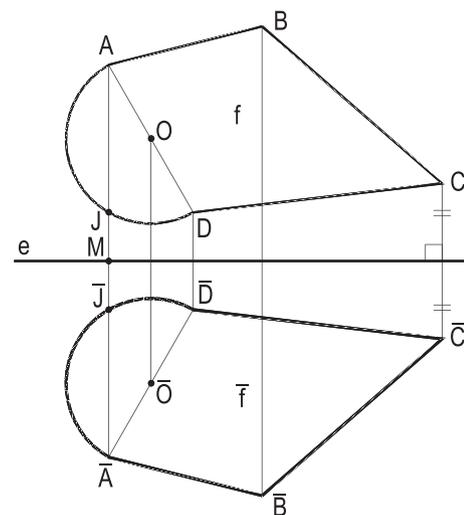


Figura 678

Duas figuras planas axialmente simétricas são iguais, mas com disposições opostas em relação ao eixo de simetria, podendo coincidir por superposição, mediante simples “dobradura”, em torno daquele eixo. É, por isso, que a simetria axial é também denominada simetria de reflexão, reflexiva ou de espelhamento, associando a situação à da reflexão de alguma figura num espelho plano, então representado linearmente pelo eixo da simetria.

A simetria axial é uma transformação isométrica, tal como demonstrado nos itens 64, 65 e 67 do livro *O Bissetor Par*, deste autor.

140 – Produto de duas simetrias axiais

Consideremos duas simetrias axiais consecutivas de um ponto A para os eixos e_1 e e_2 , respectivamente, secantes (Figura 679) ou paralelos (Figura 680) e observemos que, no primeiro caso, e_1 e e_2 são as mediatrizes dos segmentos $A\bar{A}$ e $\bar{A}\bar{\bar{A}}$, onde \bar{A} é o primeiro simétrico e $\bar{\bar{A}}$ o segundo, e que, como circuncentro do triângulo $A\bar{A}\bar{\bar{A}}$, o ponto J (Figura 679) há de pertencer à mediatriz e_3 do segmento $A\bar{\bar{A}}$, o que garante a simetria axial entre A e $\bar{\bar{A}}$, para esse eixo e_3 .

O mesmo raciocínio se aplica aos demais pontos da figura original, a seus primeiros simétricos em relação ao eixo e_1 e aos segundos simétricos destes em relação ao eixo e_2 , garantindo, afinal, a simetria entre a figura original e esta segunda simétrica.

E, no caso particular em que e_1 e e_2 são paralelos, a reta e_3 , a eles paralela e equidistante de A e de $\bar{\bar{A}}$, há de ser o eixo de simetria para o par de pontos A e $\bar{\bar{A}}$ (Figura 680).

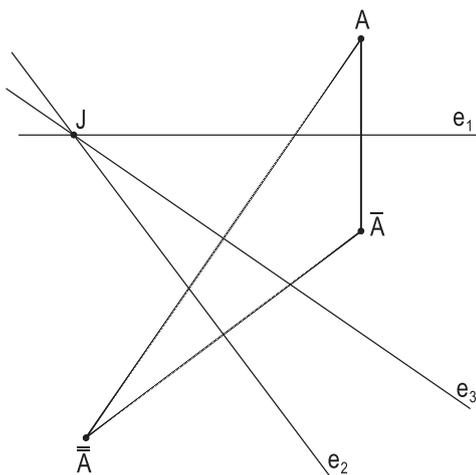


Figura 679

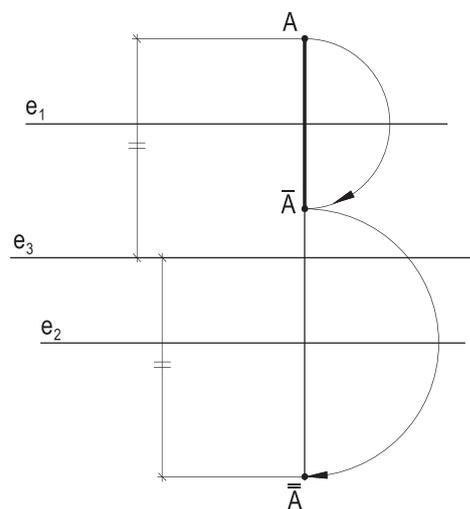


Figura 680

Fica, assim, provado que o produto de duas simetrias axiais é outra simetria axial, além de que, naturalmente, não de ser iguais as três figuras consideradas, a original e as duas simétricas.

141 – Simetria central

Simetria central é a transformação geométrica que faz com que cada ponto de uma figura original produza um outro, tal que um ponto fixo O seja sempre o médio do segmento formado pelo ponto original e pelo seu transformado (Figura 681).

O ponto fixo O é, então, denominado centro da simetria e os pares de elementos simétricos em relação a O são ditos homólogos ou simétricos.

A simetria central é uma transformação isométrica, já que são sempre iguais duas figuras simétricas em relação a um ponto fixo (*O Bissetor Par*, números 47, 48 e 50), como exemplificado na Figura 681, que apresenta duas figuras mistas $ABCDE$ e $\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}\bar{E}$ simétricas em relação ao ponto O .

142 – Observações

1. A simetria central pode ser considerada como uma rotação, em torno do centro O da simetria, com amplitude angular de 180° , seja num sentido ou no oposto (Figura 681).
2. Toda simetria central é, em verdade, uma homotetia de razão -1 , servindo como polo o próprio centro dessa simetria.
3. Por isso mesmo, qualquer par de retas centralmente simétricas, como ED e $\bar{E}\bar{D}$ na Figura 681, mantém o paralelismo e, então, as medidas dos ângulos homólogos, como os ângulos C e \bar{C} nessa figura, são conservadas.

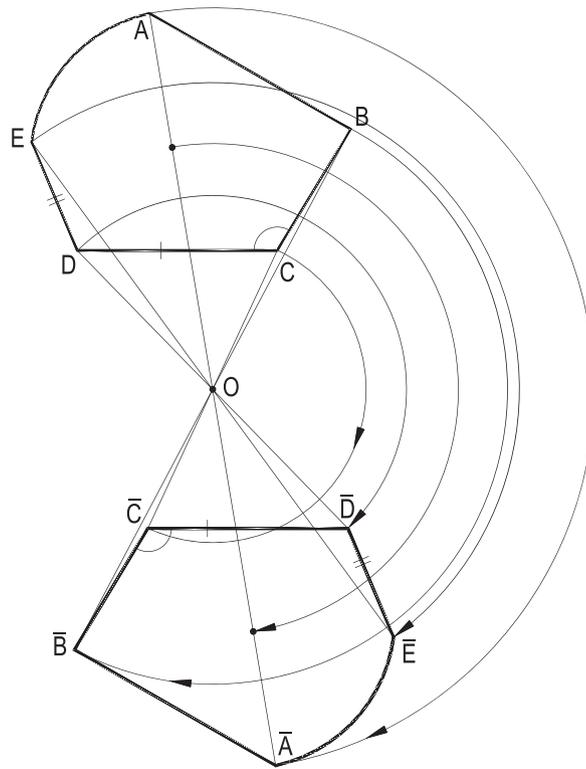


Figura 681

143 – Produto de duas simetrias centrais

Por serem rotações (número 142.1, acima) as simetrias centrais, fica imediato concluir (número 138) que o produto de duas simetrias centrais é uma terceira simetria central, entre a figura original e a simétrica de sua simétrica em relação a um segundo centro de simetria.

144 – Homotetia

Homotetia é a transformação de uma figura f em outra f' , de modo tal que, a partir de um ponto fixo O , todos os pontos de f sejam transformados em outros de f' , sempre alinhados com seus correspondentes de f e com aquele ponto fixo O , obedecendo a uma razão constante entre cada par de segmentos correspondentes e com origem em O (Figura 682).

Este ponto O é, então, denominado centro, ou polo, da homotetia e aquela razão constante é a razão da homotetia.

Os pares de pontos correspondentes como A e A' , B e B' , C e C' , etc. na Figura 682, assim como os elementos correspondentes (AB e $A'B'$, BC e $B'C'$, AD e $A'D'$, etc.) e as próprias figuras f e f' são denominados homotéticos.

Uma homotetia pode implicar numa ampliação (da figura f na f') ou numa redução (de f' para f), como indicado na Figura 682.

E pode ser positiva, ou direta, quando, orientadas as retas que passam pelo centro de homotetia O , os pares de segmentos homotéticos com origem em O têm mesmo sentido, como na Figura 682. Ao contrário, a homotetia é dita inversa ou negativa, quando tais segmentos homotéticos, com origem em O , têm sentidos contrários (Figura 683).

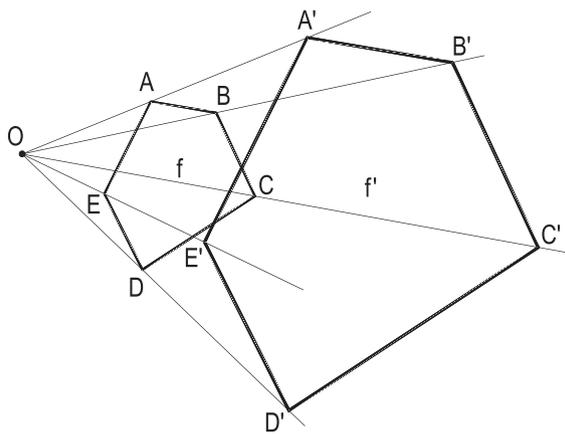


Figura 682

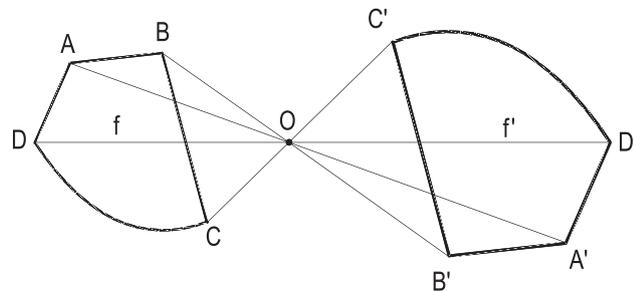


Figura 683

145 – Observações

1. Na homotetia direta, o centro da homotetia é exterior a todo par de elementos homotéticos, mantendo, para a homotética, a disposição da figura original, (Figura 682).
2. Na homotetia inversa, o centro da homotetia se situa entre todos os pares de elementos homotéticos, causando disposições opostas para as duas figuras em estudo, (Figura 683).

3. Sempre que o módulo da razão R da homotetia é maior que 1 há uma ampliação. Quando $R > 1$, a ampliação é direta; quando $R < -1$, a ampliação é inversa.
4. No caso particular em que a razão R da homotetia é igual a -1 , as figuras homotéticas são simétricas em relação ao centro da homotetia. Neste caso, não há ampliação nem redução.

146 – Propriedades

1. Toda homotetia, implicando em uma semelhança entre a figura original e a transformada, mantém o paralelismo das retas envolvidas e a igualdade dos ângulos das figuras.
2. Além disso, conserva o formato da figura original para sua transformada. Como amplia, ou reduz, as dimensões iniciais (salvo quando a razão vale -1), não é uma transformação isométrica.

147 – Produto de duas homotetias

Dada uma figura qualquer e construída sua homotética numa razão e para um polo arbitrado, seguida de uma segunda homotetia, esta para polo e razão mais uma vez quaisquer, obtém-se uma terceira figura homotética da anterior e da original (*Geometria Plana*, número 195). Assim, o produto de duas homotetias é uma outra homotetia. A Figura 684 exemplifica uma homotetia de polo O_1 , seguida por duas outras, de polos O_2 e O_3 , respectivamente.

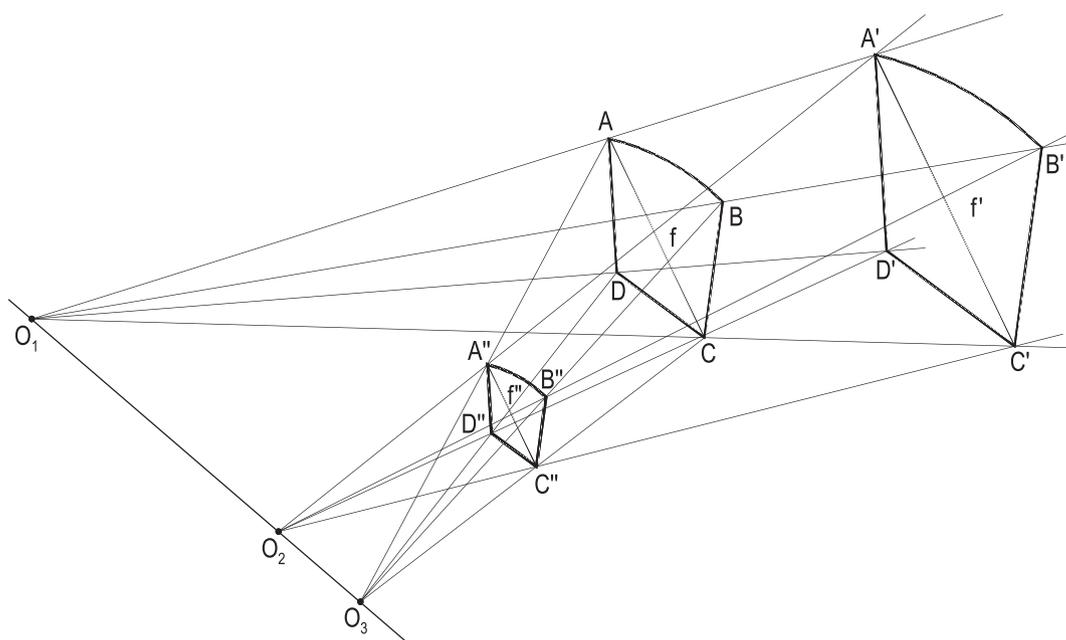


Figura 684

148 – Homologia

Homologia é a transformação geométrica de uma figura plana f em outra \bar{f} , tal que a cada ponto de uma corresponda um, e apenas um, ponto da outra, os dois sempre colineares com um ponto fixo V e tal que duas retas correspondentes, uma dada r e outra \bar{r} , dela transformada, concorram sobre uma reta fixa e ou lhe sejam paralelas.

O ponto fixo V e a reta fixa e são respectivamente denominados centro, ou polo, e eixo da homologia e os entes correspondentes são ditos homólogos. As retas que reúnem dois pontos homólogos são os raios da homologia. Os pontos, como $P \equiv \bar{P}$, comuns a um par de retas homólogas r e \bar{r} e pertencentes ao eixo da homologia são ditos pontos duplos (Figura 685).

Observe-se que a homologia pode associar figuras de semiplanos diferentes em relação ao eixo, ou num mesmo semiplano limitado por esse eixo (Figuras 686 e 687).

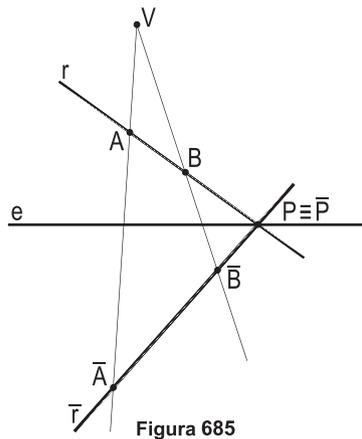


Figura 685

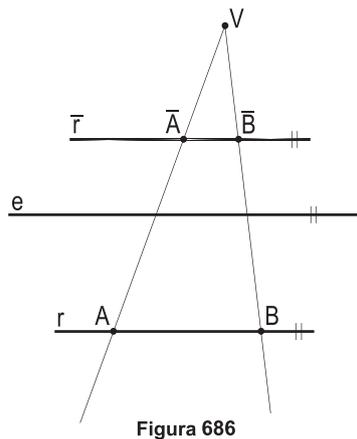


Figura 686

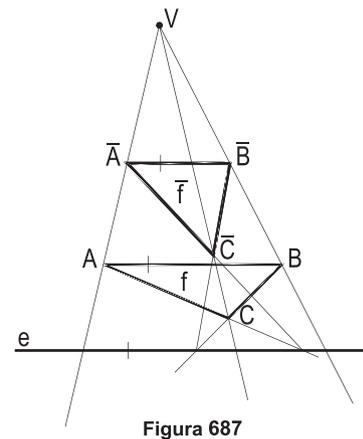


Figura 687

A figura \bar{f} , transformada de outra, dada, f , por homologia, num determinado sistema, pode resultar ampliada ou reduzida, em relação à dada, tudo dependendo das posições relativas entre a figura dada f e dos elementos determinantes do sistema de homologia estabelecido (o centro V e o eixo e).

149 – Observações

1. O eixo da homologia é o lugar geométrico dos pontos duplos.
2. A homóloga da reta que passa pelo centro de uma homologia coincide com ela, visto que ambas têm por suporte o mesmo raio dessa homologia.
3. A homóloga de uma reta dada paralela ao eixo é também paralela ao eixo e , portanto, à dada, pois o ponto duplo de concurso das duas é o ponto impróprio do eixo e das duas retas homólogas em questão.

4. Em toda homologia, mantêm-se as pertinências de pontos a retas. Assim, o homólogo do ponto comum a duas retas concorrentes é o ponto de cruzamento das retas homólogas daquelas duas.
5. Os valores dos ângulos e dos comprimentos dos segmentos não se conservam nas homologias.

150 – Determinação do sistema

Um sistema de homologia fica, habitualmente, determinado quando são dados seu centro V , seu eixo e e um par de pontos homólogos P e \bar{P} , naturalmente alinhados com V (Figura 688).

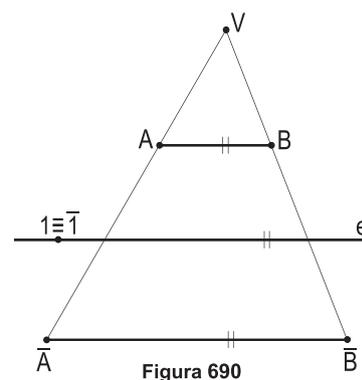
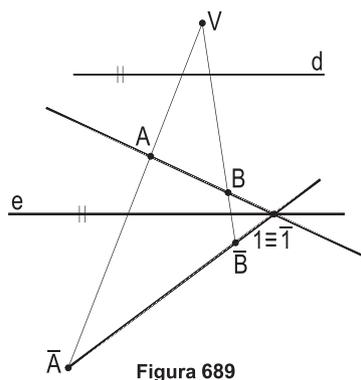
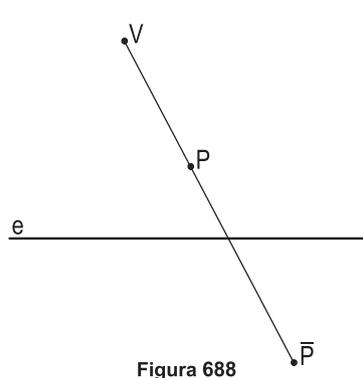
Outras combinações de dados podem, também, definir um sistema homológico, como se passa a exemplificar.

1. Dados dois pares de pontos homólogos A e \bar{A} e B e \bar{B} , tais que sejam oblíquas as retas AB e $\bar{A}\bar{B}$, além da direção d do eixo (Figura 689).

Os raios $V\bar{A}$ e $V\bar{B}$ dão, por corte, o polo V e, pelo ponto duplo $1 \equiv \bar{1}$ das retas AB e $\bar{A}\bar{B}$, com a direção d , vem o eixo e , retornando-se às condições anteriores.

2. Dados dois pares de pontos homólogos A e \bar{A} e B e \bar{B} , tais que sejam paralelas as retas AB e $\bar{A}\bar{B}$, além de um ponto duplo $1 \equiv \bar{1}$.

Os raios $V\bar{A}$ e $V\bar{B}$ trazem, como no caso anterior, o polo V e, pelo ponto duplo, com a direção de AB e $\bar{A}\bar{B}$, vem o eixo e (Figura 690).



151 – Determinação do homólogo de um ponto dado

Para a determinação do ponto \bar{A} , homólogo de um ponto dado A , num sistema dado por seu polo V , por seu eixo e e por um par de pontos homólogos P e \bar{P} , naturalmente alinhados com V , diversas construções podem ser utilizadas.

Há três hipóteses a considerar:

1. Situação genérica, em que A e P formem uma reta não paralela ao eixo, quando basta obter o ponto de corte da reta PA com o eixo, duplo, portanto, e, por ele, a reta homóloga de PA, passando por \bar{P} , que cortará o raio VA, proporcionando \bar{A} (Figura 691).
2. Posição particular, com a reta PA paralela ao eixo e, o que obriga que sua homóloga tenha a mesma direção, dando, no corte com o raio VA, o homólogo \bar{A} procurado (Figura 692).
3. Outra situação particular em que A pertença ao raio $V\bar{P}$, bastando utilizar uma reta auxiliar r, arbitrada, por P, e sua homóloga \bar{r} , além das paralelas A2 e $\bar{2}\bar{A}$ ao eixo, para determinar \bar{A} .

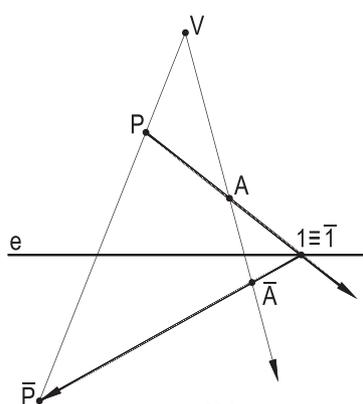


Figura 691

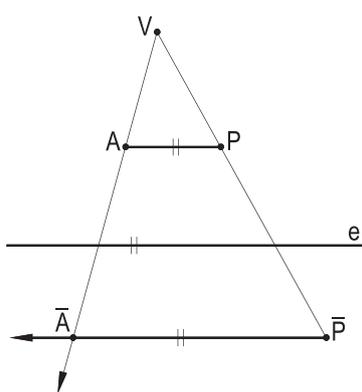


Figura 692

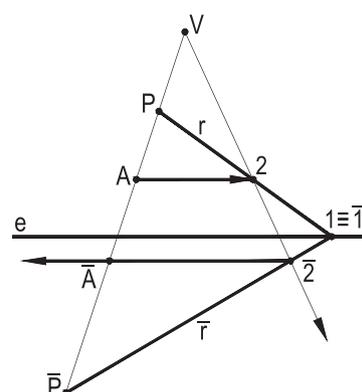


Figura 693

152 – Determinação da homóloga de uma reta dada

Para construir a homóloga \bar{r} de uma reta dada r, num sistema definido por seu polo V, seu eixo e e por um par de pontos homólogos P e \bar{P} , exteriores a r, mas colineares com V, basta operar com uma reta s, por P, e sua homóloga \bar{s} , por \bar{P} , para obter um segundo ponto $\bar{2}$, da reta procurada \bar{r} , além de seu ponto duplo $1 \equiv \bar{1}$ (Figuras 694 e 695), ou, ainda, com uma segunda auxiliar t e com sua homóloga \bar{t} (Figura 696).

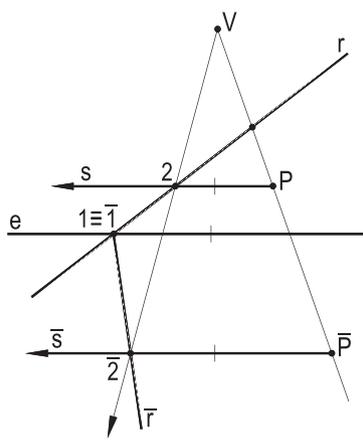


Figura 694

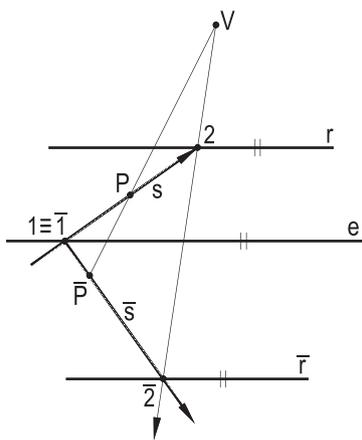


Figura 695

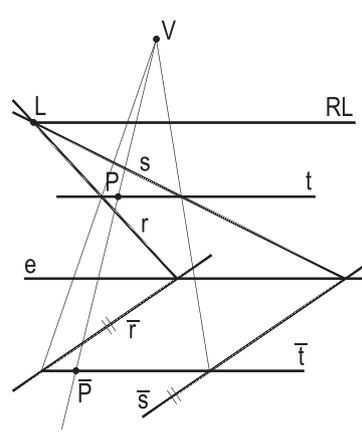


Figura 696

153 – Construção do homólogo de um polígono dado

A construção do polígono homólogo de um polígono dado, num sistema definido por seu polo V , seu eixo e e por um par de pontos homólogos P e \bar{P} , se faz pela obtenção dos vértices e/ou dos lados homólogos dos dados, como antes detalhado.

Os exemplos a seguir apresentados mostram polígonos dados, respectivamente, exteriores (Figura 697) e sendo seccionado pelo eixo (Figura 698).

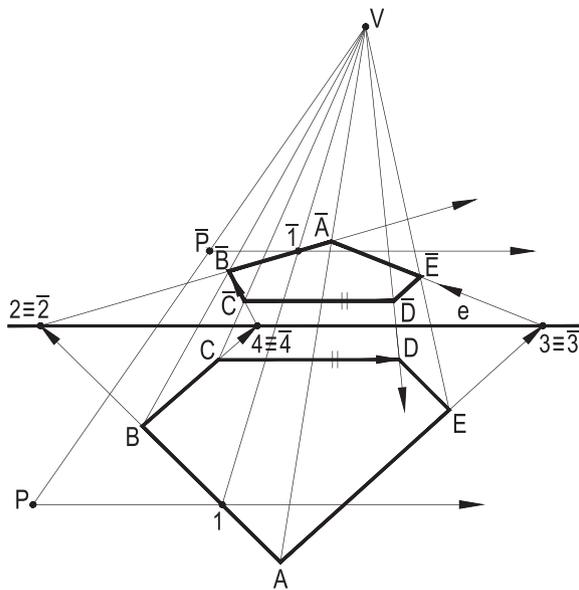


Figura 697

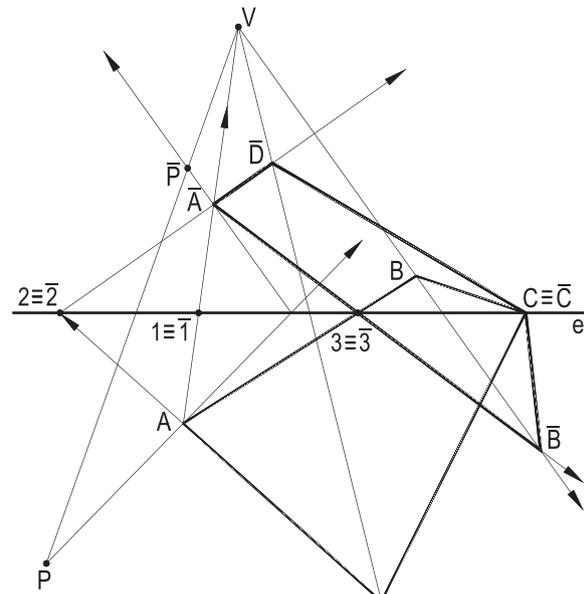


Figura 698

154 – Retas limites

Retas limites, em determinado sistema de homologia, são os lugares geométricos dos homólogos dos pontos impróprios de cada conjunto associado.

Assim, consideradas duas paralelas \bar{r} e \bar{s} , suas homólogas r e s cortam-se num ponto L homólogo do ponto impróprio \bar{L}_∞ de \bar{r} e de \bar{s} (Figura 696).

E, naturalmente, há uma outra reta $\bar{R}\bar{L}$ homóloga de pontos impróprios do outro ambiente, na homologia estudada.

Essas duas paralelas RL e $\bar{R}\bar{L}$ ao eixo são denominadas retas limites do sistema de homologia considerado.

Em todo sistema de homologia, são iguais as distâncias de uma reta limite ao polo e da outra ao eixo da homologia tal como foi demonstrado (*O Bissetor Par*, número 148).

155 – Determinação do sistema a partir de uma reta limite

Algumas hipóteses se põem para a determinação de um sistema homológico, a partir de suas retas limites:

1. Dados o centro V , o eixo e e a reta limite RL do ambiente original.

Arbitrados um ponto L de RL e um ponto duplo 1 do eixo, a paralela \bar{r} a VL , por 1 , é a homóloga da reta r , formada pelos pontos L e 1 (Figura 699), e um raio qualquer proporcional, em \bar{r} e em r , o par de pontos P e \bar{P} , com o que retorna-se às condições mais habituais.

2. Dados o centro V , o eixo e e a reta limite $R\bar{L}$ do ambiente transformado.

Arbitrados um ponto \bar{L} de $R\bar{L}$ e outro 1 do eixo, forma-se o par de retas homólogas r e \bar{r} , r paralela à reta $V\bar{L}$ (Figura 700), e um raio qualquer proporcional o par de pontos homólogos \bar{P} e P procurados, para que se volte às condições mais comuns.

3. Dados o eixo e , a reta limite $R\bar{L}$ e um par de pontos homólogos P e \bar{P} .

Dada a reta limite transformada $R\bar{L}$, arbitrado um ponto duplo 1 do eixo e , $P1$ e $1\bar{P}$ trazem duas retas homólogas r e \bar{r} , e a paralela a $1\bar{P}$, por \bar{L} , ponto de corte de $P1$ com $R\bar{L}$, proporcional, no cruzamento com a reta $P\bar{P}$, o polo V , que completa o sistema (Figura 701).

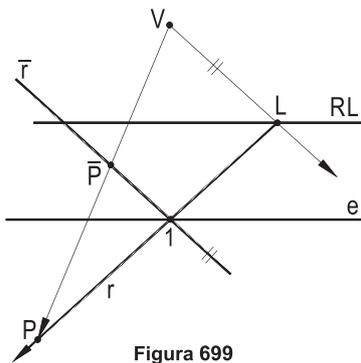


Figura 699

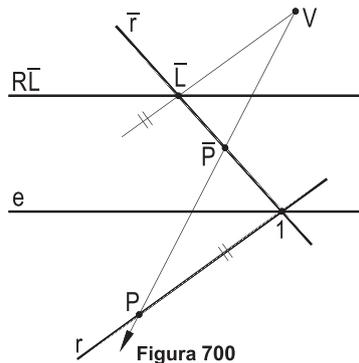


Figura 700

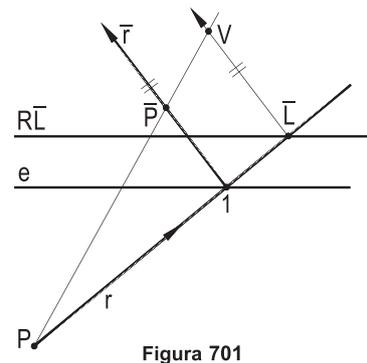


Figura 701

4. Dados o eixo e , a reta limite RL e um par de pontos homólogos P e \bar{P} .

Resolução equivalente à do exemplo anterior (Figura 699).

5. Dados as duas retas limites RL e $R\bar{L}$ e o polo V da homologia.

Construção imediata, por se saber que são iguais as distâncias do centro da homologia a uma das retas limites e da outra ao eixo (número 154).

6. Dados as duas retas limites e o eixo da homologia.

Resolução idêntica ao exemplo anterior.

7. Dados o polo V , um par de pontos homólogos P e \bar{P} e uma das retas limites (RL ou $R\bar{L}$).

Simple, também, a resolução, pela escolha de um ponto qualquer da reta limite dada e pelos traçados de retas auxiliares, dando um ponto duplo, proporcionando o eixo e , retornando-se a condições anteriores (Figuras 699 e 700).

156 – Polígonos com um vértice ou um lado sobre sua reta limite

O homólogo de um polígono apoiado por um vértice em sua reta limite é uma linha poligonal aberta, seus lados limites sendo duas semirretas paralelas, correspondendo ao ponto impróprio homólogo do vértice pertencente à reta limite (Figuras 702 e 703).

Quando o polígono dado se apoia por um lado em sua reta limite, seu homólogo é uma linha poligonal aberta, seus lados extremos sendo duas semirretas divergentes, cada qual trazendo o ponto impróprio homólogo de cada vértice do polígono dado situado na reta limite (Figuras 704 e 705).

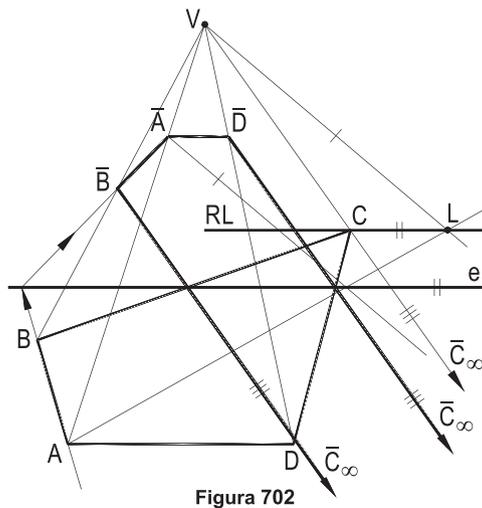


Figura 702

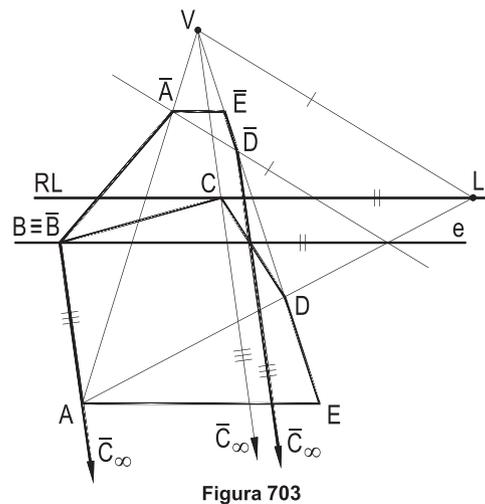


Figura 703

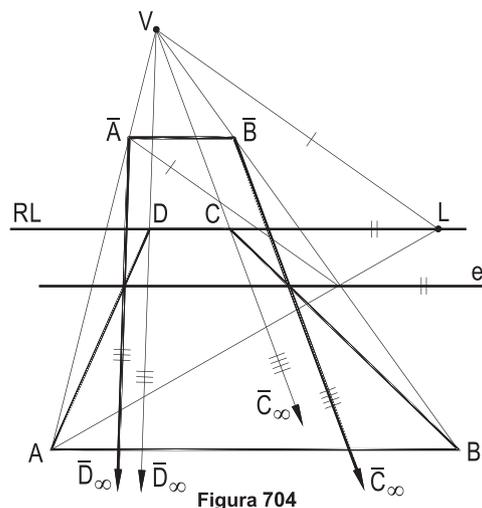


Figura 704

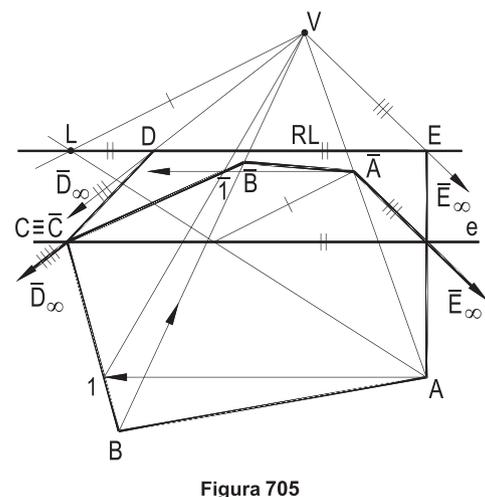


Figura 705

157 – Polígonos seccionados por uma reta limite

Quando o polígono dado é cortado por sua reta limite, tudo se passa como se ele fosse a soma de dois polígonos, ambos apoiados por um lado nessa reta limite (Figuras 706 e 707), lado esse correspondente ao segmento 12 formado pelos pontos de corte, no polígono dado, pela reta limite RL.

Com isso, a figura homóloga do polígono dado será composta por duas linhas poligonais abertas, com aberturas invertidas, cujos lados extremos são semirretas divergentes, cada qual correspondendo ao homólogo impróprio de cada um dos pontos de corte 1 e 2 do polígono dado com a reta limite considerada.

Assim são os dois exemplos (Figuras 706 e 707) ao lado, que trazem, respectivamente, os transformados do quadrilátero ABCD e do retângulo ABCD.

Observe-se que são colineares os pares de semirretas limites das poligonais abertas homólogas dos polígonos dados.

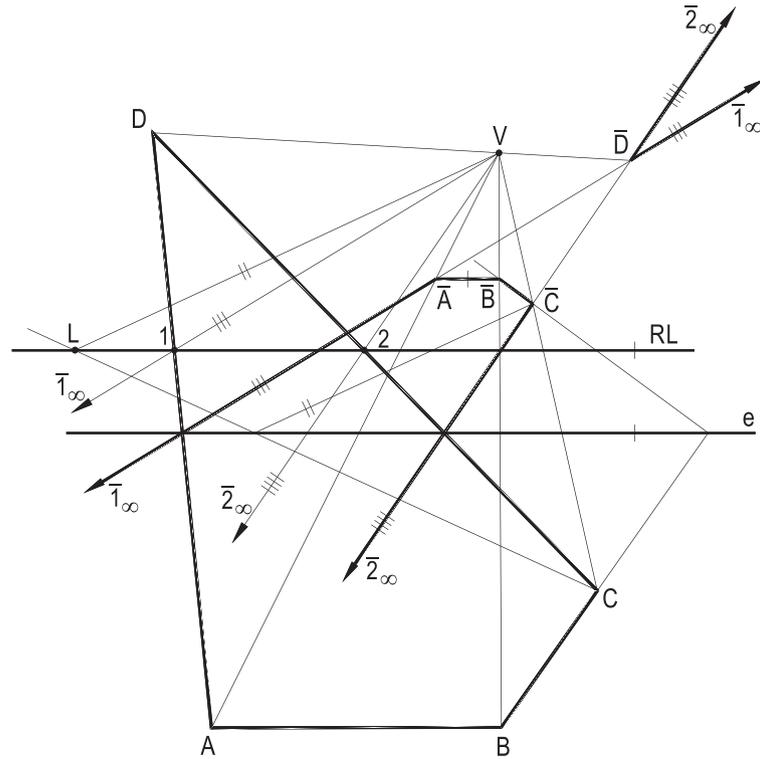


Figura 706

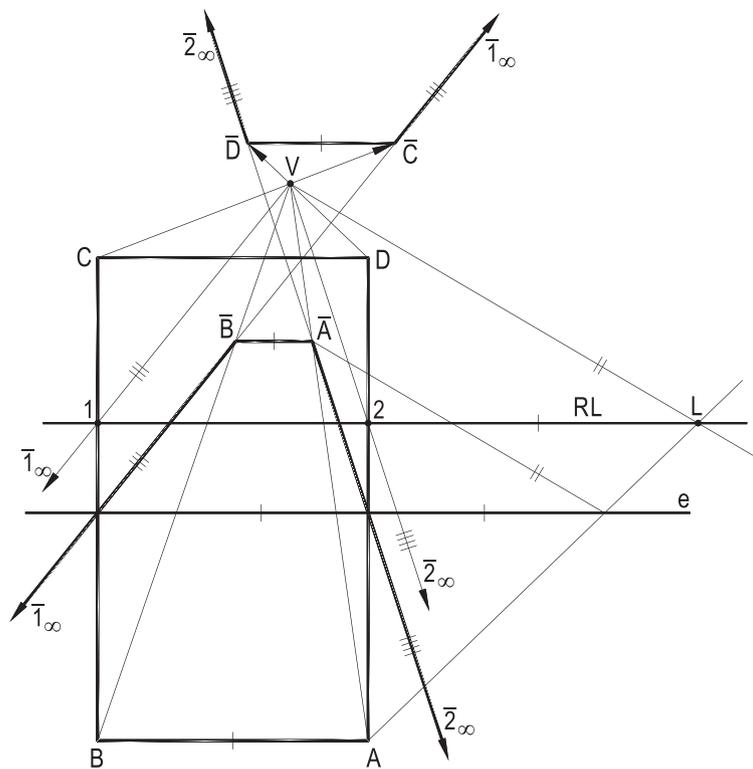


Figura 707

158 – Afinidade

Afinidade é o caso particular da homologia que tem seu polo rejeitado ao infinito, segundo determinada direção. Nessas condições, os raios da transformação geométrica correspondente são paralelos.

Assim, afinidade é a transformação geométrica de uma figura f em outra figura \bar{f} , de modo tal que a cada ponto de uma corresponda um, e apenas um, ponto da outra, os dois sempre situados sobre retas paralelas a uma reta fixa d e tal que duas retas correspondentes, como r e \bar{r} na Figura 708, cortem-se sobre o eixo e da transformação, ou que, como s e \bar{s} , na Figura 709, sejam paralelas a esse eixo.

O eixo da afinidade, tal como na homologia, é o lugar geométrico dos pontos duplos, a direção fixa dos raios é denominada direção da afinidade e os entes correspondentes, pontos, retas ou figuras, são ditos afins.

Conforme a direção d da afinidade seja oblíqua (Figuras 708 e 709), ou perpendicular (Figura 710), ao eixo, a afinidade é qualificada oblíqua ou ortogonal, respectivamente.

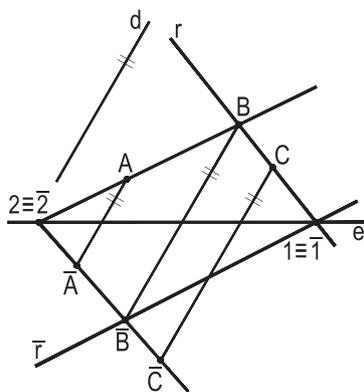


Figura 708

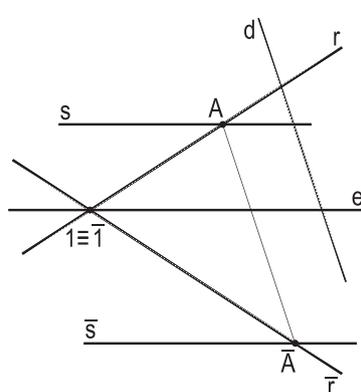


Figura 709

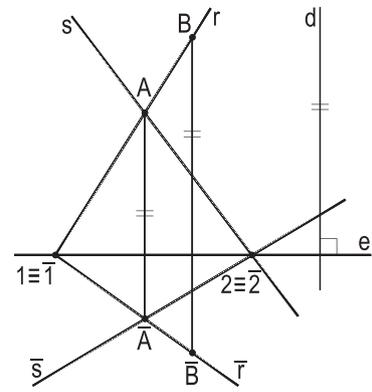


Figura 710

Naturalmente, duas figuras afins f e \bar{f} podem se situar num mesmo semiplano (Figura 711), ou opostos (Figura 712), em relação ao eixo e da afinidade.

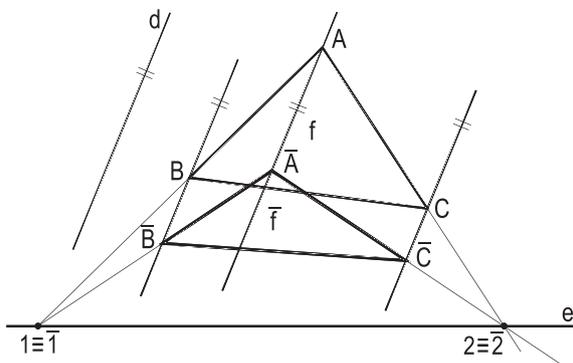


Figura 711

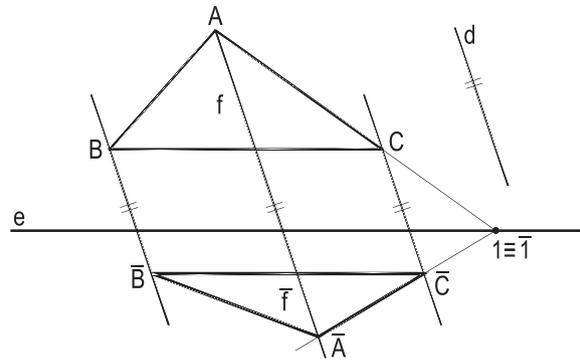


Figura 712

159 – Observações

1. Num determinado sistema de afinidade, é constante a razão entre os segmentos XA e $X\bar{A}$ formados, sobre cada raio, entre seu traço X com o eixo e e o par de pontos afins, como A e \bar{A} , B e \bar{B} , etc. (Figura 713), tais as semelhanças entre os triângulos $JA\bar{A}$, $JB\bar{B}$, etc., que os raios paralelos a d asseguram.

Essa razão $XA/X\bar{A}$, constante para cada sistema, é denominada razão da afinidade e pode, naturalmente orientados os segmentos XA e $X\bar{A}$, ser positiva (Figura 714) ou negativa (Figura 713), cabendo destacar o caso especial da afinidade ortogonal de razão -1 , que resulta numa simetria em relação ao eixo e da afinidade (Figura 715).

2. O paralelismo das retas conserva-se em qualquer afinidade, como, na Figura 713, as indicadas para as paralelas r e s e suas afins \bar{r} e \bar{s} , tudo assegurado pelas semelhanças dos triângulos $JA\bar{A}$ e $JB\bar{B}$.
3. As divisões proporcionais entre segmentos de retas paralelas se conservam nas afinidades, garantidas por essas mesmas semelhanças.
4. O eixo de afinidade é o lugar geométrico dos pontos duplos na transformação, como nas homologias genéricas.
5. Ao contrário do que acontece com as homologias genéricas, nas afinidades não existem retas limites, já que é impossível, nessa transformação geométrica, associar pontos impróprios de uma figura e afins próprios em sua figura correspondente.
6. As afins das retas que tenham a mesma direção da afinidade considerada coincidem com elas.

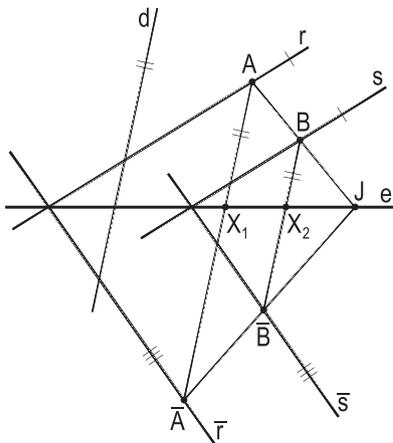


Figura 713

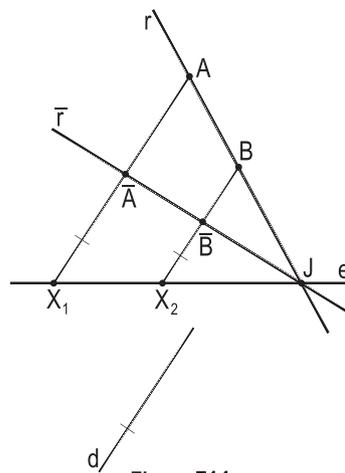


Figura 714

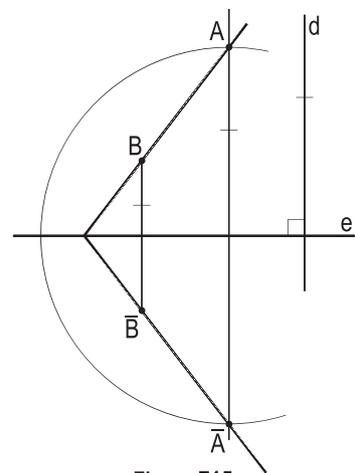


Figura 715

160 – Determinação do sistema

Um sistema de afinidade fica, usualmente, determinado quando são dados seu eixo e e um par de pontos afins A e \bar{A} (Figura 716), embora diversas outras combinações de dados possam ser organizadas para precisar o sistema, como as a seguir exemplificadas:

1. Dados o eixo e , a direção d e a razão $k = \frac{m}{n}$ da afinidade.

Basta aplicar sobre uma reta r paralela a d tais medidas (Figura 717).

2. Dadas duas retas concorrentes r e s e suas afins \bar{r} e \bar{s} .

Os pontos duplos $1 \equiv \bar{1}$ e $2 \equiv \bar{2}$ definem o eixo e a reta $A\bar{A}$ define a direção (Figura 718).

3. Dados três pares de pontos afins A e \bar{A} , B e \bar{B} , C e \bar{C} , situados sobre retas paralelas, em iguais proporções.

As retas AB e AC e suas afins $\bar{A}\bar{B}$ e $\bar{A}\bar{C}$ retornam às condições do item anterior (Figura 719).

4. Dadas duas concorrentes r e s e suas afins \bar{r} e \bar{s} , sendo r e \bar{r} paralelas.

O eixo tem a direção de r e \bar{r} , conduzido pelo ponto duplo $1 \equiv \bar{1}$ de s e \bar{s} (Figura 720).

5. Dados dois pares de pontos afins A e \bar{A} e B e \bar{B} , todos colineares, e a direção w do eixo.

Com uma direção arbitrada, A e \bar{A} proporcionam A' e B e \bar{B} dão B' . A reta $A'B'$ produz o ponto duplo $1 \equiv 1'$, por igualar a proporção nas divisões de $A\bar{A}$ e de $B\bar{B}$ (Figura 721).

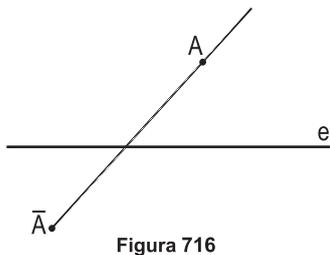


Figura 716

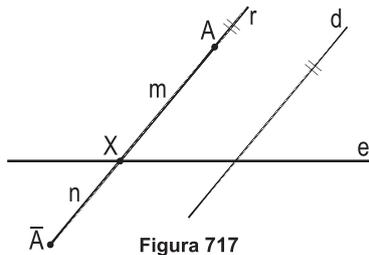


Figura 717

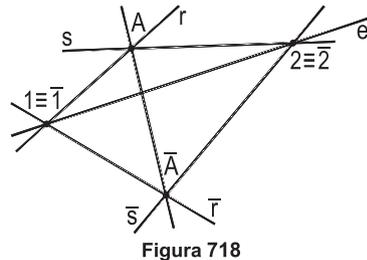


Figura 718

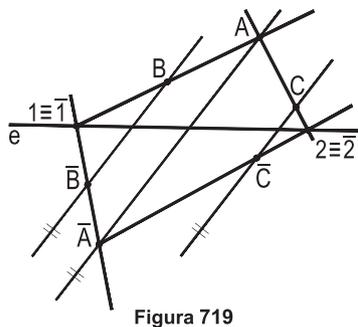


Figura 719

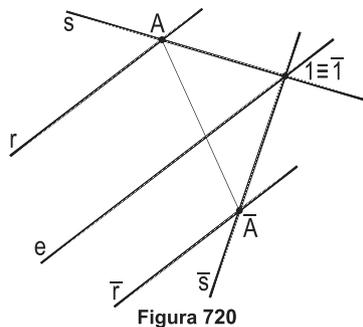


Figura 720

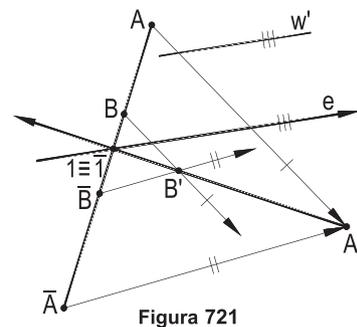


Figura 721

161 – Determinação do afim de um ponto dado

Dados o eixo e e dois pontos afins P e \bar{P} , a construção mais simples para obter, nesse sistema, o ponto \bar{A} , afim de um ponto dado A , consiste em traçar a reta PA , determinar seu traço $J \equiv \bar{J}$ com o eixo, unir \bar{J} a \bar{P} e traçar, por A , a paralela a $P\bar{P}$, que traz o ponto \bar{A} , pedido (Figura 722). No caso, muito particular, de A e P definirem uma paralela a e , as paralelas que completam o paralelogramo $\bar{P}PA\bar{A}$ resolvem a questão (Figura 723) e, na posição desfavorável de A que corresponda a uma reta PA , cujo traço com o eixo e reste inacessível, basta arbitrar um par de retas afins t e \bar{t} , com o par de pontos afins dados P e \bar{P} , para, com as paralelas t_1 e \bar{t}_1 a elas (Figura 724), obter \bar{A} .

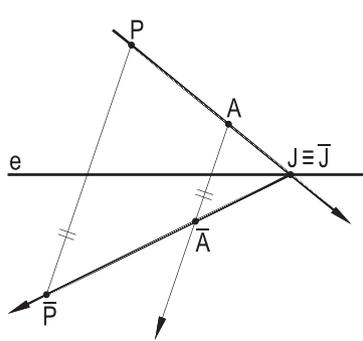


Figura 722

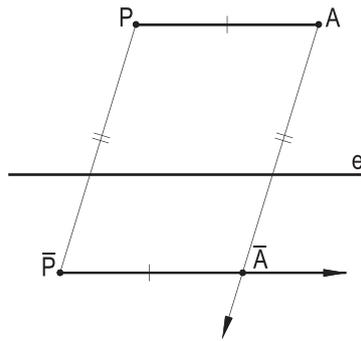


Figura 723

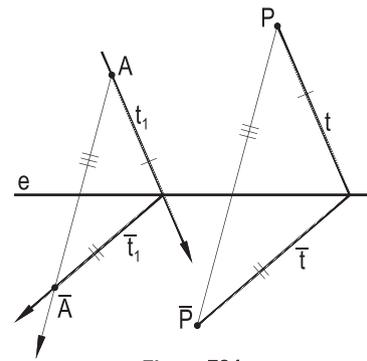


Figura 724

162 – Determinação da afim de uma reta dada

Para construir a reta \bar{r} , afim de uma outra dada, r , num sistema de afinidade dado pelo eixo e e por um par de pontos afins P e \bar{P} , basta determinar um ponto \bar{A} , afim de um arbitrado A , de r , além de seu ponto duplo $J \equiv \bar{J}$, pois sua união traz \bar{r} (Figura 725), ou uma paralela t a r e sua afim \bar{t} , que dá a direção de \bar{r} (Figura 726), ou mesmo um par de paralelas ao eixo, afins, para obter um segundo ponto \bar{A} de \bar{r} (Figura 727).

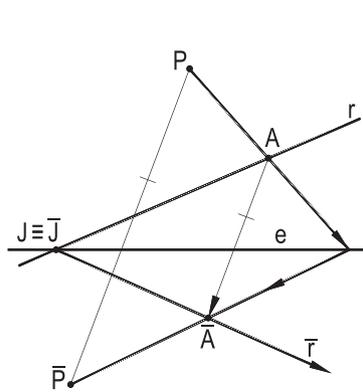


Figura 725

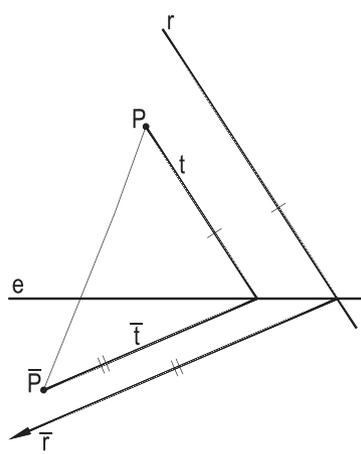


Figura 726

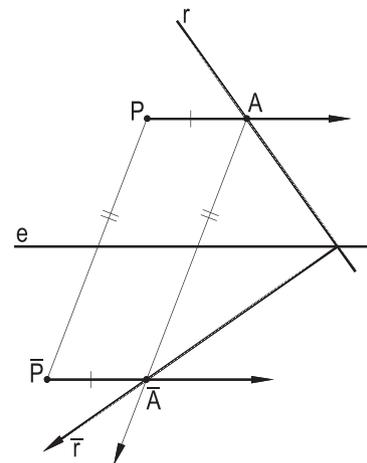


Figura 727

163 – Construção do afim de um polígono dado

Para construir o polígono afim de um polígono dado, basta determinar os afins dos vértices e/ou dos lados desse polígono, usando o anteriormente detalhado.

Os exemplos seguintes enfatizam a utilização de paralelas ao eixo (Figura 728), de lados paralelos (Figura 730), de retas auxiliares (Figuras 730 e 731) e de pontos duplos sobre o eixo da afinidade (Figuras 728, 729, 730 e 731).

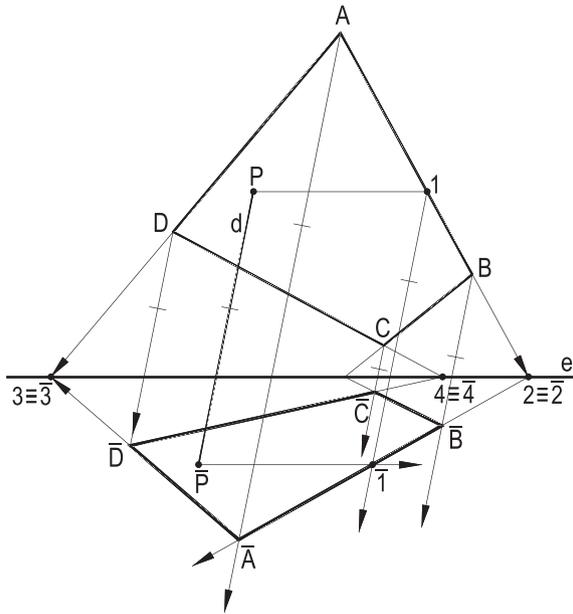


Figura 728

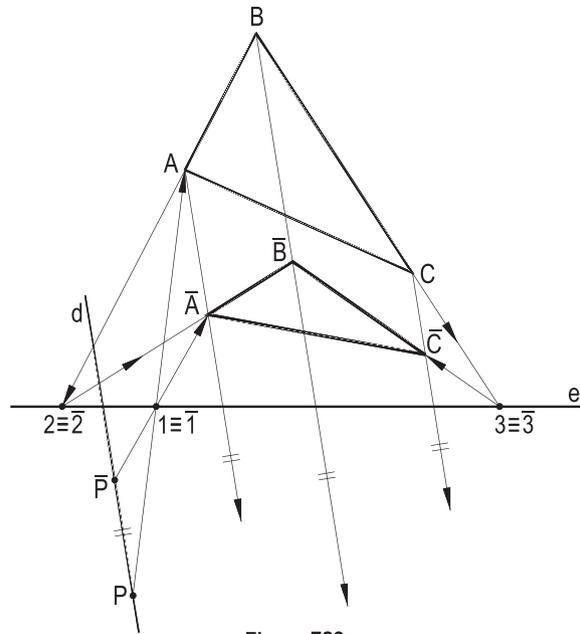


Figura 729

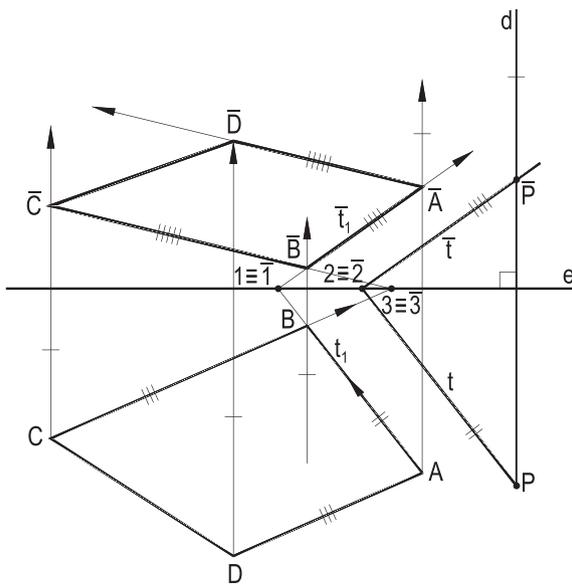


Figura 730

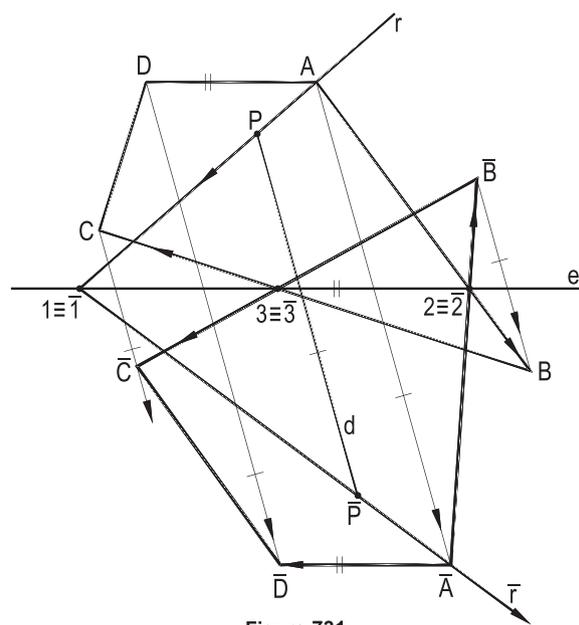


Figura 731

164 – Inversão

Inversão é o movimento que transforma cada ponto A de uma figura f em outro ponto A' de outra figura f' , os pares de pontos correspondentes A e A' sendo sempre colineares com um ponto fixo J e tais que seja constante o produto $JA \cdot JA'$ dos dois segmentos formados por J e cada um dos pares de pontos correspondentes A e A' (Figura 732).

O ponto fixo J denomina-se, então, polo, ou centro, da inversão e o valor constante k^2 do produto $JA \cdot JA'$ é dito a potência da inversão, que pode ser positiva, como na Figura 732, ou negativa, como na Figura 738, naturalmente orientados os segmentos JA e JA' .

165 – Circunferência principal

Estudemos uma inversão de polo J e potência k^2 e consideremos, para análise, a circunferência (J, k) de centro no polo J e raio k igual à raiz quadrada da potência de inversão dada. Para manter constante e igual a k^2 os produtos dos segmentos JA e JA' , formados por pares de pontos correspondentes A e A' , nessa inversão, fica evidente que:

1 – Os pontos A' inversos correspondentes de pontos A interiores a (J, k) ficam exteriores a essa circunferência, assim como os pontos A exteriores a ela provocam correspondentes em seu interior (Figura 732).

2 – Os pontos pertencentes a essa circunferência (J, k) são duplos, ou seja, coincidem com seus correspondentes nessa inversão, o que implica em que, se as figuras dada f e sua invertida f' se cruzarem, devem fazê-lo em pontos dessa circunferência, como $A_4 \equiv A'_4$ (Figura 732).

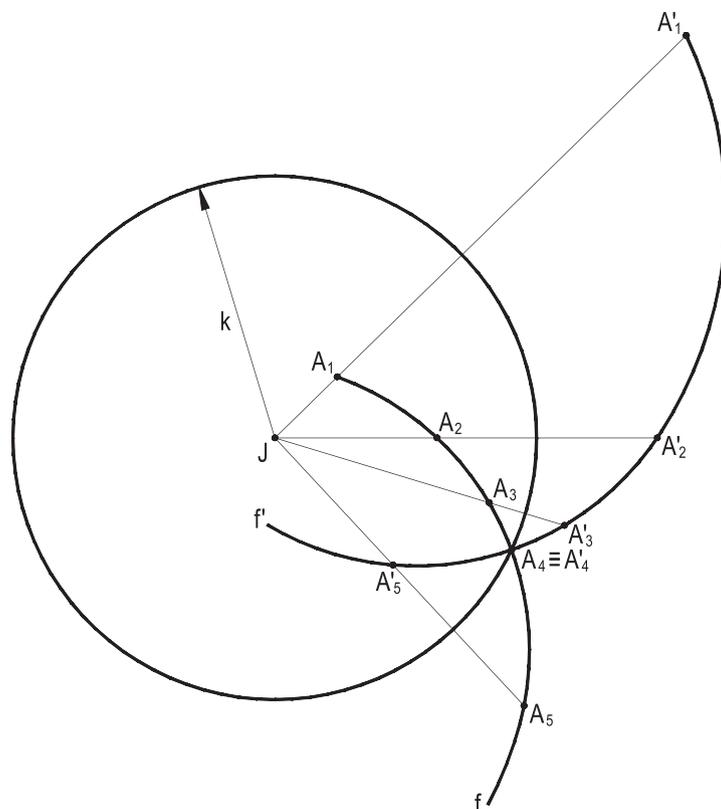


Figura 732

3 – Assim, a circunferência (J, k) é o lugar geométrico dos pontos duplos na inversão em questão, sendo, por isso, denominada circunferência dupla ou circunferência principal em tal inversão.

166 – Inversão da reta

A figura inversa de uma reta é uma circunferência pertencente ao polo da inversão.

De fato, para estudar a inversão de uma reta dada r , para um polo J e uma potência k^2 , todos dados, considere-se a perpendicular JA a r , A em r e um outro ponto B , arbitrado em r , além de seu correspondente B' , tal, naturalmente, que $JB' \cdot JB = JA' \cdot JA = k^2$ (Figuras 733, 734 e 735).

A relação $JB' \cdot JB = JA' \cdot JA$ se escreve $\frac{JB'}{JA} = \frac{JA'}{JB}$, com o que fica assegurada a semelhança dos triângulos $JA'B'$ e JAB , o que implica em que $JA'B'$ seja retângulo, com hipotenusa JA' , ou seja, que os pontos B' , transformados de B , nessa inversão, pertençam, todos, à circunferência (r') (Figura 733) que contém o polo J .

Observe-se que a circunferência (r'), inversa da reta dada r , pode ser a ela exterior (Figura 733), tangente a ela (Figura 734) ou a ela secante (Figura 735), conforme, respectivamente, o valor constante k^2 da potência da inversão seja menor, igual ou maior que o quadrado da distância do polo J à reta dada r .

Além disso, note-se que, nesta última hipótese, os pontos afins da corda EF que r provoca em (r') situam-se no arco EF criado por r em (r'), $E \equiv E'$ e $F \equiv F'$ sendo os pontos duplos nessa inversão (Figura 735).

E mais, que o polo J resta sendo o inverso do ponto impróprio da reta dada r .

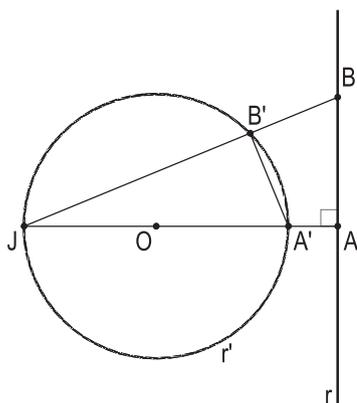


Figura 733

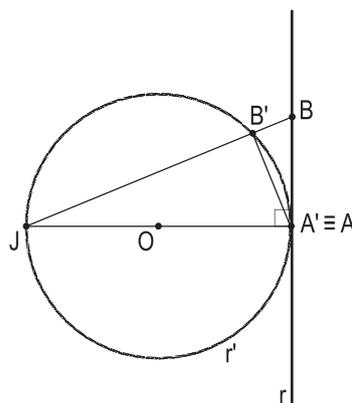


Figura 734

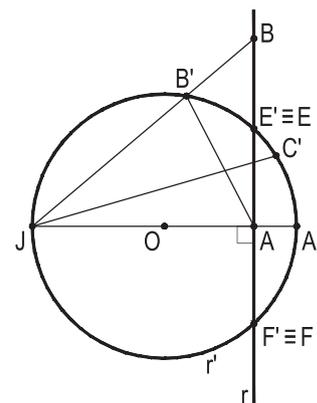


Figura 735

167 – Inversão da circunferência pertencente ao polo

A inversa de uma circunferência (r') que contenha o polo J da inversão é uma reta r , perpendicular à reta formada pelo polo J e pelo centro O da circunferência dada (r'), tal como demonstrado no item anterior (Figuras 733, 734 e 735).

168 – Inversão da circunferência não pertencente ao polo

Quando a circunferência não pertencente ao polo J da inversão, sua transformada, para um determinado valor qualquer da potência de inversão, é outra circunferência (c'), homotética da dada para o polo J .

De fato, dados o polo J e a circunferência (c), considerado um raio qualquer da inversão, que produz os pontos A e A' , A em (c) e A' na curva (c'), inversa de (c) (Figura 736), por serem constantes os produtos $JA \cdot \bar{JA}'$, por hipótese, e $JA' \cdot JA$, potência do ponto J em relação a (c) (ver *Geometria Plana*, número 242), é constante a razão \bar{JA} / JA , o que implica em que (c') seja homotética de (c), para o polo J e, então, também uma circunferência.

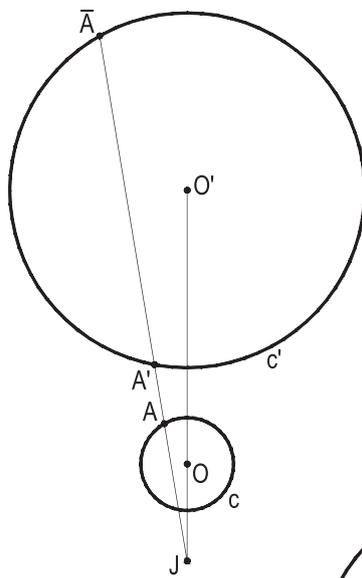


Figura 736

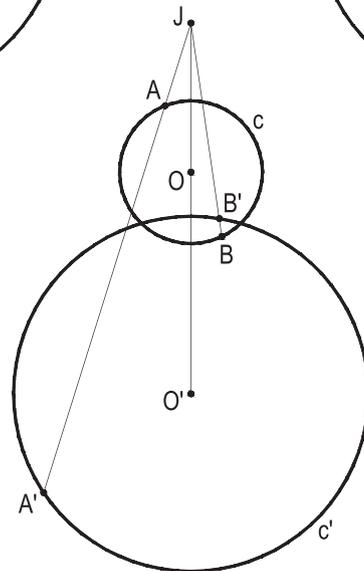


Figura 737

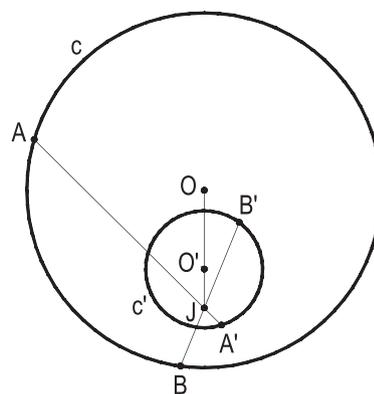


Figura 738

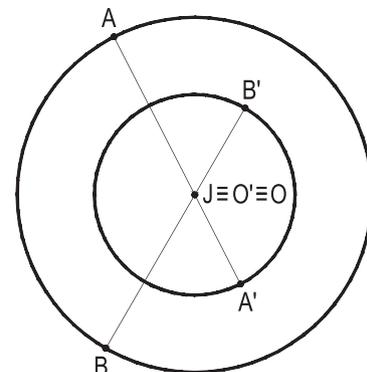


Figura 739

Observe-se que as circunferências (c) e (c'), uma inversa da outra, para o polo J não pertencente a qualquer delas, podem ser exteriores (Figura 736), secantes (Figura 737), tangentes externamente uma interior à outra (Figura 738) e até concêntricas (Figura 739).

Note-se que, em todos os casos, os pares de pontos correspondentes situam-se em arcos opostos, não semelhantes, das duas circunferências, posto que pontos mais próximos do polo da inversão proporcionam correspondentes invertidos mais distantes dele.

169 – Determinação do ponto correspondente A' de um ponto dado A , numa inversão de polo J e potência k^2 dados

Como, em todo triângulo retângulo, cada cateto vale a média geométrica entre a hipotenusa e sua projeção sobre ela (*Geometria Plana*, número 197.1), as simples construções dos triângulos retângulos JEA' e JFA_2 (Figura 740) proporcionam as determinações dos pontos A'_1 e A'_2 correspondentes dos dados A_1 e A_2 , na inversão proposta, com o auxílio da circunferência principal (J, k).

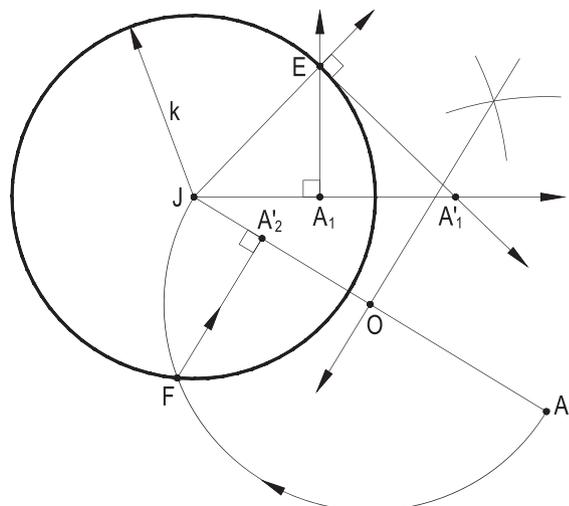


Figura 740

170 – Construção da reta r , inversa da circunferência dada (O, R), pertencente ao polo J dessa inversão, também dado, conhecido o valor k^2 de sua potência

A utilização do ponto A , diametralmente oposto do polo J , na circunferência dada (O, R) e a utilização do arco de centro J e raio k dão o ponto E e, com a perpendicular, por E , à reta JE , vem o correspondente A' e, então, a reta r pedida (Figura 741), já que, com tal construção, temos $JA \cdot JA' = k^2$.

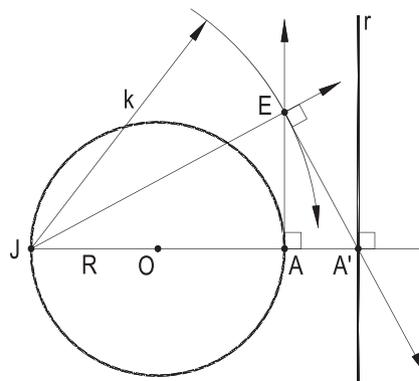


Figura 741

171 – Construção da circunferência inversa de uma reta dada r , dados, ainda, o polo J e o valor k^2 de potência de inversão a utilizar

Traçada a perpendicular JA a r , A em r , a tangente AE à circunferência principal (J, k), com o auxílio do arco capaz de 90° para JA , vem A' projeção ortogonal de E sobre JA e, então, a circunferência (r'), de diâmetro JA' , pedida (Figura 742).

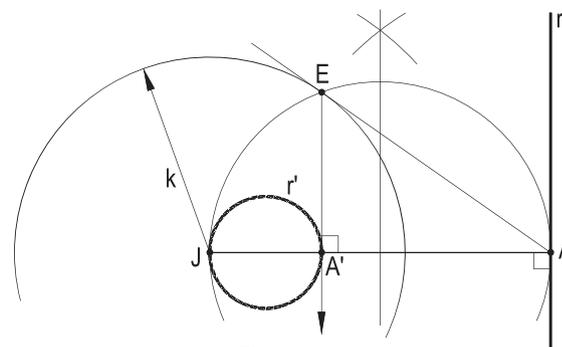


Figura 742

172 – Construção da circunferência (O') inversa de uma circunferência dada (O), conhecidos o polo J e o valor k^2 da inversão a utilizar

Traçada a reta JO, as determinações dos pontos A' e B', inversos correspondentes dos extremos A e B do diâmetro da circunferência dada (O), colineares com o polo J, tal como visto anteriormente (ver item 169), trazem os extremos A' e B' do diâmetro da circunferência (O') procurada (Figura 743).

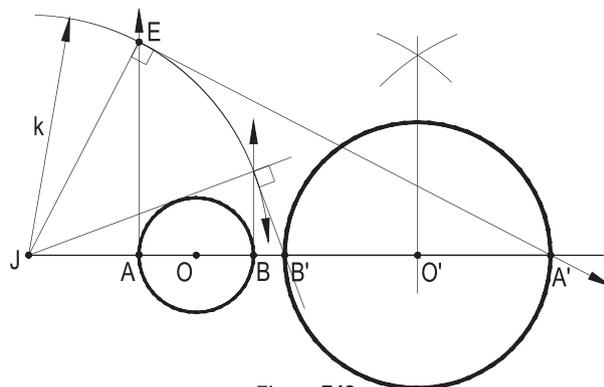


Figura 743

173 – Conservação das secâncias, das tangências e dos ângulos entre duas curvas inversas

Os pontos de corte, ou os de tangências, de duas curvas, ou de uma reta e uma curva, mantêm-se em suas transformações por inversões de mesmo polo e de iguais potências, porque tais pontos, pertencendo a essas duas linhas dadas, hão de ter seus transformados correspondentes pertencendo, portanto, às duas linhas inversas das dadas.

Também, da mesma forma, mantêm-se o ângulo inicial entre as duas linhas dadas e o ângulo entre suas transformadas por uma mesma inversão, observando-se, apenas, que são contrários os sentidos desses ângulos antes e depois da inversão. Assim são os dois exemplos abaixo. No primeiro (Figura 744) as duas circunferências (c_1) e (c_2), ambas contendo o polo J das inversões, proporcionam as correspondentes retas inversas c'_1 e c'_2 , que se cortam no ponto P', transformado do ponto P, de corte daquelas duas circunferências e, no segundo (Figura 745), tudo se passa da mesma forma, para uma potência de inversão de valor k_2 , dado.

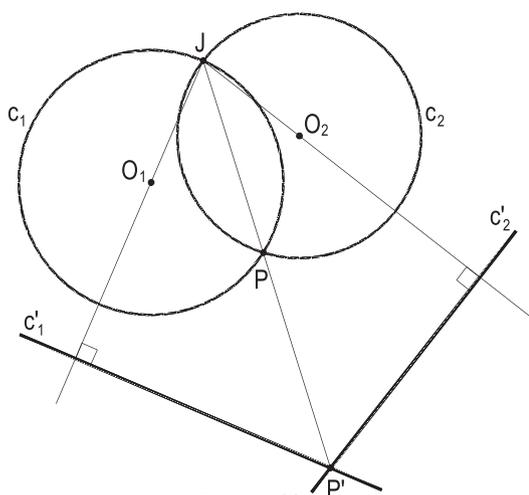


Figura 744

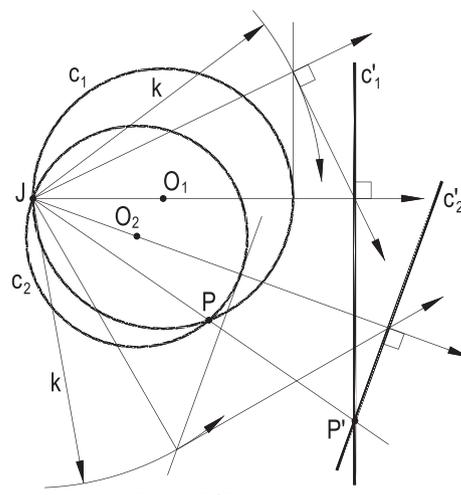


Figura 745

174 – Problemas resolvidos

Seguem algumas dezenas de problemas referentes a transformações geométricas, acompanhando a numeração anterior.

346 – Uma translação de direção d transforma o triângulo ABC noutra $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$. Dados AB e $\bar{B}\bar{C}$, pede-se construir os dois triângulos e determinar a direção d .

Resolução: A reta $\bar{B}\bar{B}$ tem a direção d e, com paralelas, vêm os vértices C e \bar{A} (Figura 747).

347 – O ponto dado \bar{O} é resultado de uma translação do centro O do quadrado $ABCD$, dado por seu lado AB . Pede-se construir seu transformado $\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}$, fruto dessa translação.

Resolução: Determinado o centro O de $ABCD$, $O\bar{O}$ define a direção e a amplitude da translação, o que proporciona, com paralelas, $\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}$ (Figura 748).

Há uma segunda solução para O à esquerda de AB , não construída.

348 – Construir o triângulo retângulo ABC , sabendo que sua hipotenusa BC se situa sobre a semirreta dada Bx , sendo dado ainda o segmento $\bar{A}\bar{C}$, resultado de uma translação de AC .

Resolução: Completado $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$, sua translação, com direção $\bar{B}\bar{B}$, traz o triângulo ABC (Figura 749).

346

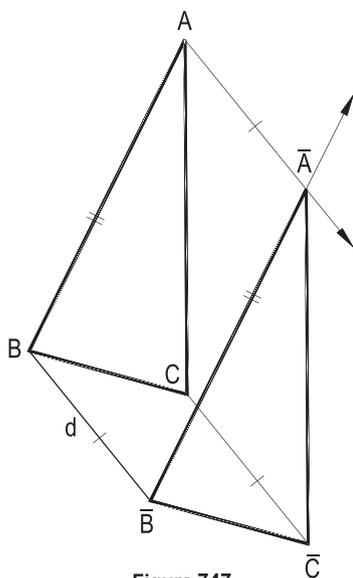


Figura 747

347

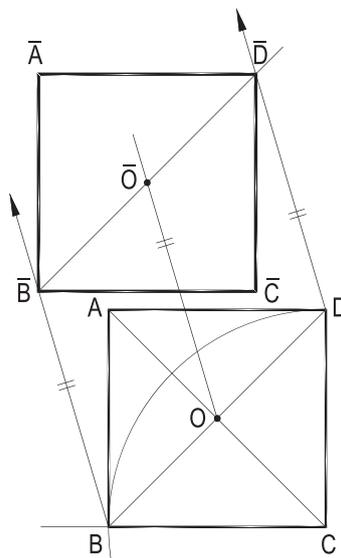


Figura 748

348

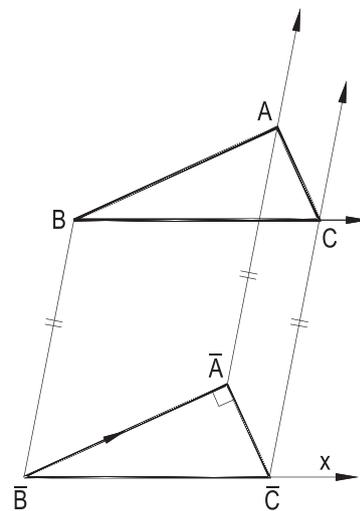


Figura 749

349 – \bar{O} , dado, é o ponto decorrente de uma translação do centro O de um losango $ABCD$, do qual é dada a diagonal BD . Sabendo que, nessa translação, o homólogo do vértice A pertence à reta dada BD , pede-se construir o losango $ABCD$.

Resolução: Marcado o ponto O , médio de BD , $O\bar{O}$ define em direção e em amplitude a translação.

Assim, a perpendicular, por \bar{O} , a BD traz, na reta BD , o vértice \bar{A} , homólogo de A , que é, assim, determinado (Figura 750), completando-se $ABCD$ com paralelas.

350 – Dada a circunferência (O_1, R) , considere três translações consecutivas, proporcionando, respectivamente, (O_2, R) , (O_3, R) e (O_4, R) . Dados os centros O_2 e O_3 , construa a circunferência (O_4, R) , sabendo que ela tangencia (O_1, R) e (O_3, R) .

Resolução: As quatro circunferências têm de ser iguais e o centro O_4 há de ser o corte das circunferências $(O_1, 2R)$ e $(O_3, 2R)$.

Duas soluções, apenas uma desenhada (Figura 751).

351 – Dados o triângulo ABC e a circunferência (O) , pede-se construir a circunferência (\bar{O}) obtida com duas translações da dada nas direções e amplitudes, respectivamente, iguais aos lados AB e BC , assim orientados, do triângulo ABC .

Resolução: A primeira translação, de direção, amplitude e sentido AB , proporciona (O') e a segunda vem, da mesma forma, com BC (Figura 752). E, é claro, a circunferência final (\bar{O}) tem de ser igual à dada (O) (número 135).

349

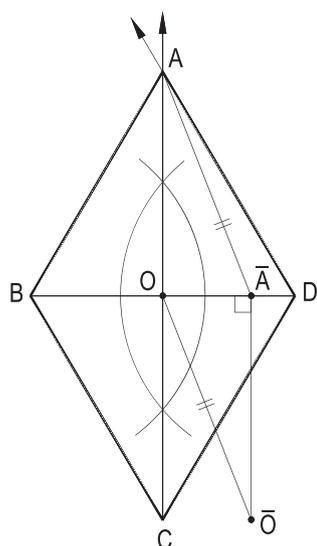


Figura 750

350

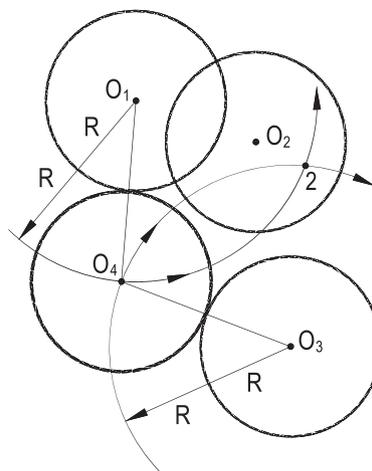


Figura 751

351

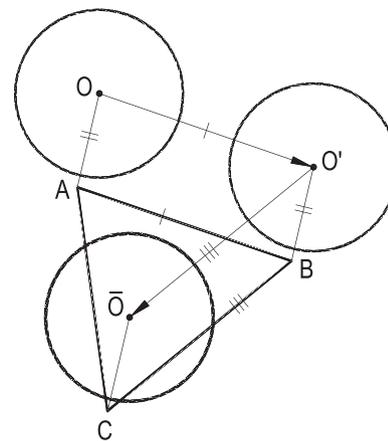


Figura 752

352 – Construir o quadrilátero $A'B'C'D'$ proveniente da translação que, fazendo com que D' , homólogo do vértice D do quadrilátero dado $ABCD$, tenha a menor amplitude possível, levando D' a pertencer à circunferência dada (O) .

Resolução: Para a translação ter a menor amplitude possível, D' há de ser o primeiro ponto de corte de DO com a circunferência dada (Figura 753).

Fica, assim, determinada a translação.

353 – Completar o paralelogramo $ABCD$, dado seu lado AB , sabendo que os vértices C e D pertencem, respectivamente, à reta r e à circunferência (O) , dadas.

Resolução: D há de ser o corte com (O) da reta \bar{r} , transladada de r na direção, amplitude e sentido de BA , obtida com o auxílio de $\bar{B}\bar{A}$ (Figura 754) (duas soluções).

354 – Construir o retângulo $ABCD$ inscrito na circunferência dada (O) , sabendo que AB provém de uma translação do segmento dado $A'B'$.

Resolução: A translação (\bar{O}) de (O) , segundo direção, sentido e valor de $A'B'$, proporciona, por corte em (O) , o primeiro vértice B do retângulo $ABCD$ procurado, então de imediata construção (Figura 755).

352

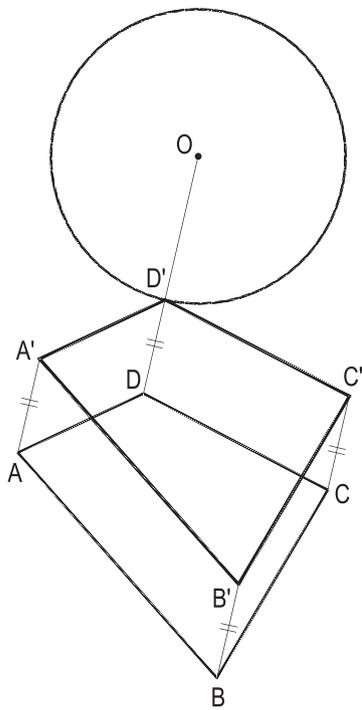


Figura 753

353

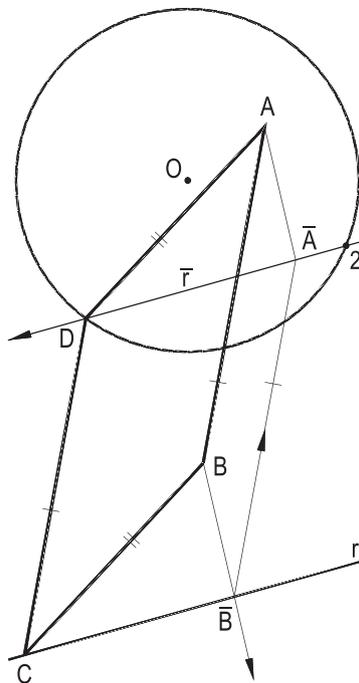


Figura 754

354

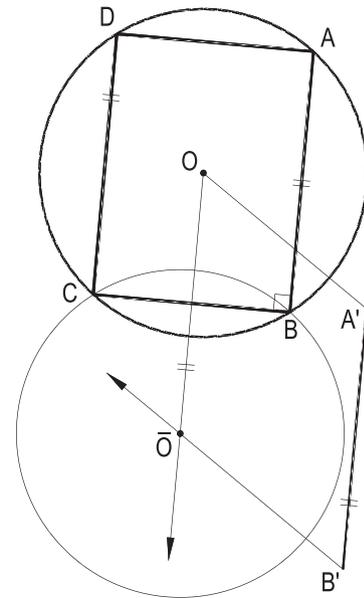


Figura 755

Para todos os seis casos a seguir, pede-se girar o ponto A, em torno de J, dado, de modo a atender as condições estabelecidas, caso a caso.

355 – A venha a equidistar das paralelas dadas a e b.

Resolução: A_1 e A_2 na reta e, equidistante de a e de b (Figura 756).

356 – A venha a equidistar dos pontos dados P e Q.

Resolução: A_1 e A_2 na mediatriz m de PQ (Figura 757).

357 – A venha a equidistar das retas r e s, dadas.

Resolução: Usar as bissetrizes b_1 e b_2 de r e s (Figura 758).

358 – A venha a distar o valor k, dado, do ponto P, dado.

Resolução: A_1 e A_2 na circunferência (P, k) (Figura 759).

359 – A venha a distar o valor k, dado, da reta r, dada.

Resolução: Usar as paralelas r_1 e r_2 , distando k de r (Figura 760).

360 – A venha a distar k, dado, da circunferência (O, OP), dada.

Resolução: Circunferências (O, $OP + k$) e (O, $OP - k$) (Figura 761).

355

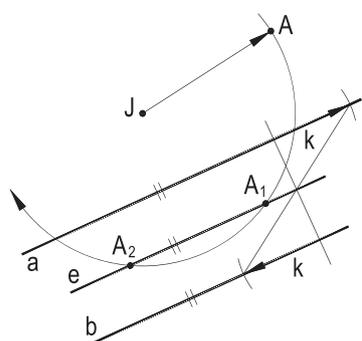


Figura 756

356

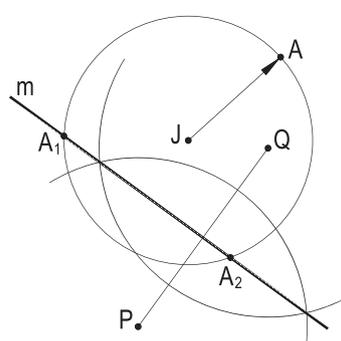


Figura 757

357

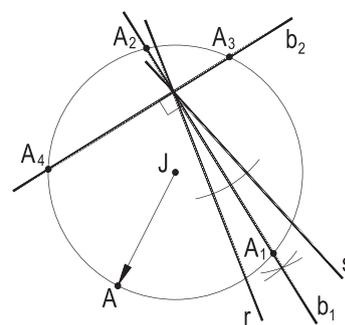


Figura 758

358

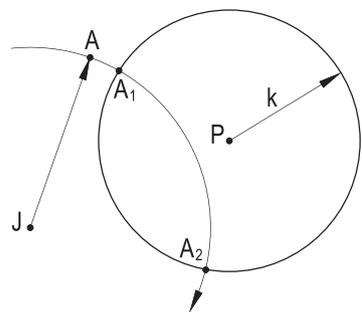


Figura 759

359

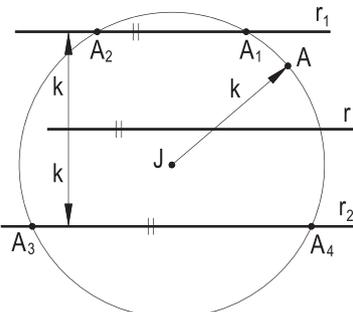


Figura 760

360

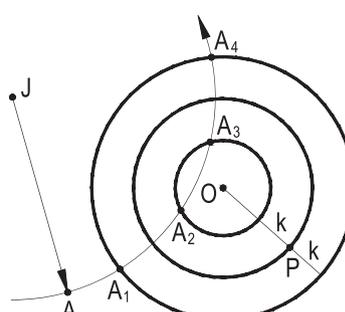


Figura 761

361 – Dados as circunferências (C, R) e (A, r) , além do ponto J , pede-se girar a segunda em torno de J até que ela tangencie a primeira.

Resolução: O centro da circunferência procurada tem que pertencer à circunferência (J, JA) , para atender à rotação imposta e à circunferência $(C, R + r)$, para assegurar a tangência pedida. Há, assim, duas soluções (Figura 762), as circunferências (A_1, r) e (A_2, r) .

Para os valores dados de R e r não há mais soluções, porque a circunferência $(C, R - r)$ resta exterior à (J, JA) .

362 – Gire o triângulo equilátero dado ABC em torno do vértice C , até que o lado AB venha ficar paralelo à reta dada d .

Resolução: Já que em suas duas soluções, o novo triângulo terá seus vértices A_1, B_1, A_2 e B_2 coincidindo com os de um hexágono regular inscrito na circunferência (C, CA) , a paralela CJ a d proporciona um vértice J desse hexágono, centro de (J, CA) , que dá as duas soluções (Figura 763), a segunda apenas indicada pelo número 2.

363 – Girar o ponto J comum às retas dadas r e s , em torno do ponto dado C , até que ele venha a equidistar de r e de s .

Resolução: Em suas novas posições, J há de pertencer a uma das bissetrizes b_1 e b_2 dos ângulos formados por r e s , sendo, assim, os pontos J_1 e J_2 , cortes de cada uma dessas bissetrizes com a circunferência (C, CJ) da rotação (Figura 764), com apenas duas soluções, visto que o ponto dado J também equidista (valor nulo) das retas dadas.

361

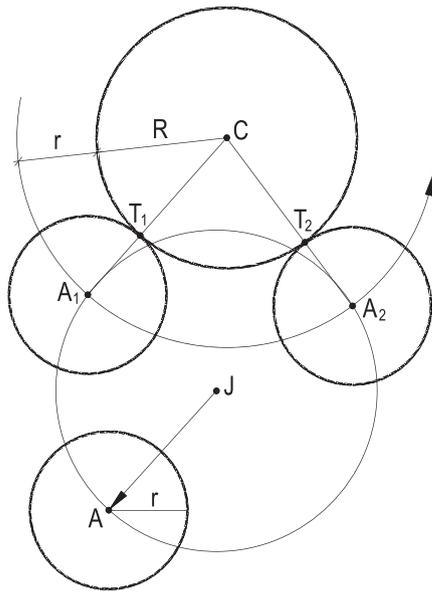


Figura 762

362

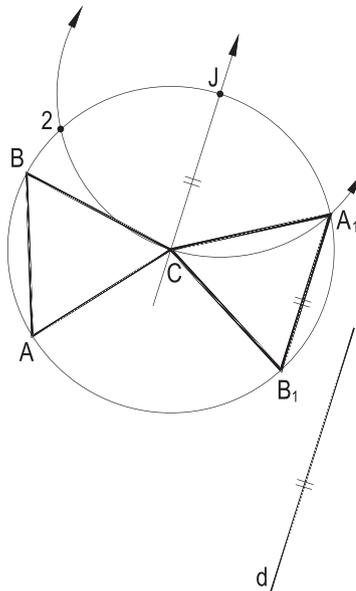


Figura 763

363

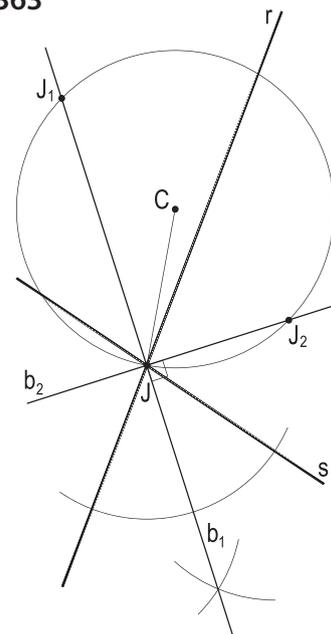


Figura 764

364 – Dados os pontos B e C e as retas r e w, pede-se girar w em torno de J, até que ela venha a ser o suporte da mediana AM do triângulo ABC, A em r e, em seguida, construir o triângulo.

Resolução: A mediana AM há de ser a tangente, por M, médio da BC, à circunferência de centro J e raio igual à distância JP de J à reta w. Duas soluções (Figura 765), a segunda indicada pelo número 2.

365 – Dados os segmentos AB e XY, pede-se girar o ponto Y em torno de X, até que, em sua nova posição, denominada \bar{Y} , os quadriláteros $ABC\bar{Y}$ e $XYZ\bar{Y}$, que se pede construir, sejam losangos.

Resolução: Para que se obtenha dois losangos, $A\bar{Y}$ deve ser igual a AB e $X\bar{Y}$ igual a XY. Assim, \bar{Y} há de ser o corte das circunferências (A, AB) e (X, XY) (Figura 766), com uma segunda solução, não completada, decorrente do segundo ponto comum a essas duas circunferências, correspondendo a outra posição para o vértice comum aos dois losangos.

366 – Dados o ponto J e as retas a e b, exteriores, pede-se girar a em torno de J, até que fique paralela à reta b.

Resolução: Para girar a em torno de J, deve-se traçar a perpendicular JT a a, T em a, e descrever a circunferência (J, JT), à qual a, em seu movimento, deve se manter tangente. Há, então, duas soluções a_1 e a_2 (Figura 767).

364

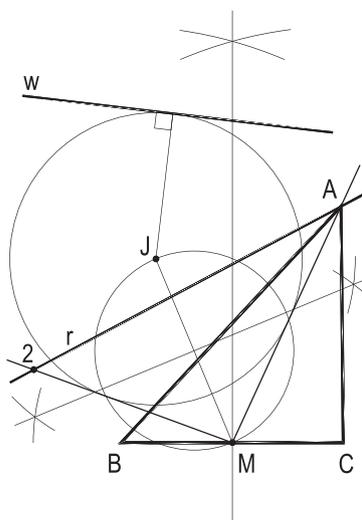


Figura 765

365

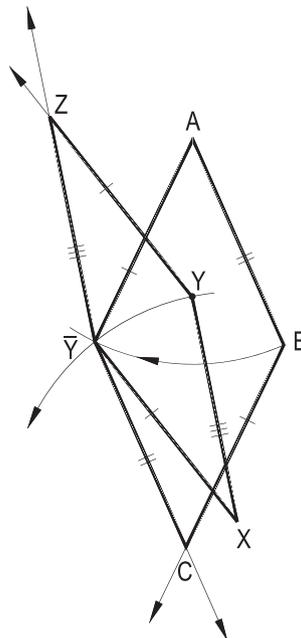


Figura 766

366

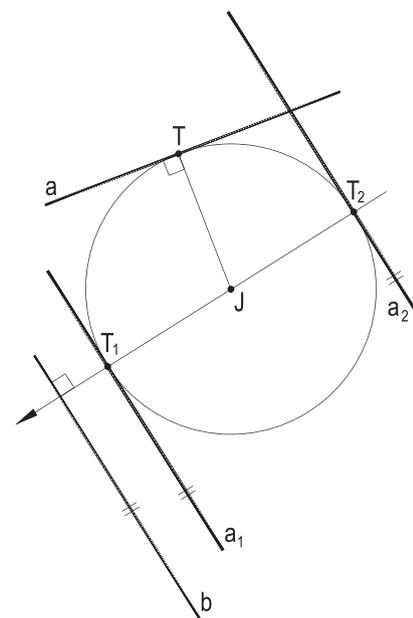


Figura 767

367 – Dados o ponto J e as retas a e w, pede-se girar a em torno de J, até que, com duas rotações distintas de a, nas posições a_1 e a_2 , venham a formar, com uma terceira posição sua, a_3 , esta paralela a w, um triângulo equilátero, escolhendo a situação que dê a esse triângulo a menor dimensão possível e o situe entre J e w.

Resolução: Traçada a circunferência (J, JL), com JL perpendicular a a, L em a, seu raio JT perpendicular a w e as rotações T_1 e T_2 de T, em torno de T, entregam com os raios JT_1 e JT_2 inclinados de 60° com a perpendicular, por J, à reta w, as posições a_1 e a_2 pedidas, com a_3 por T, paralela a w (Figura 768). ABC é o triângulo solução.

368 – Gire a reta dada a em torno do ponto dado J, até que, após duas rotações independentes, ela venha a ocupar as posições dos dois lados iguais de um triângulo isósceles, cujo vértice A, oposto à base, também proveniente de uma rotação de a, é também dado. Basta apenas uma solução.

Resolução: Construída, como no exemplo anterior, a circunferência da rotação (J, JL), as tangentes t_1 e t_2 a ela, por A, definem, com a posição t, perpendicular a AJ, o triângulo isósceles ABC pedido (Figura 769).

369 – Dadas as retas secantes a, b e c, produzindo o triângulo ABC, pede-se determinar os pontos em torno dos quais elas podem girar, em rotações independentes, até que venham a coincidir.

Resolução: Os pontos pedidos são o incentro I do triângulo ABC e seus três excentros E_1 , E_2 e E_3 , dos quais apenas o primeiro E_1 foi determinado na Figura 770, os outros dois E_2 e E_3 exteriores aos limites concedidos.

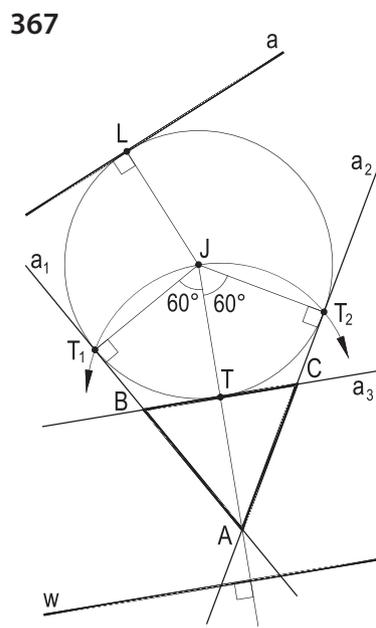


Figura 768

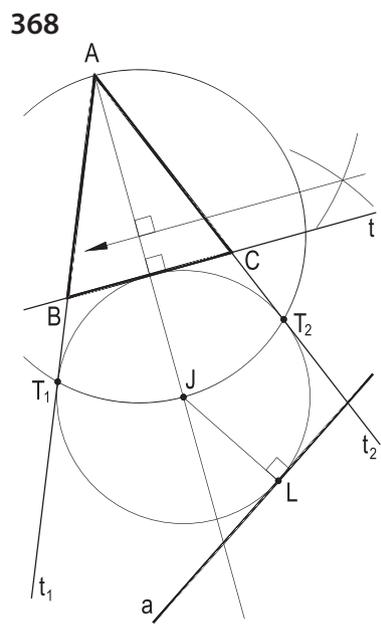


Figura 769

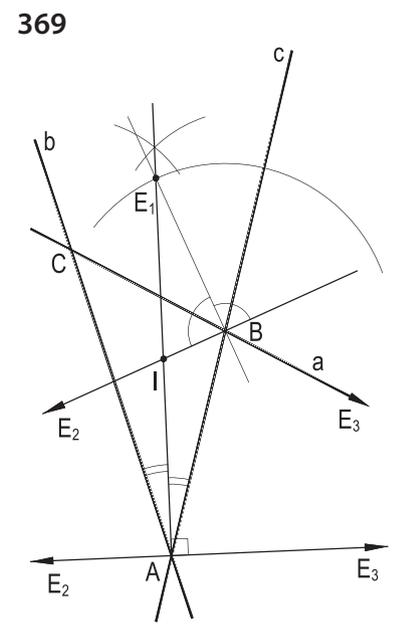


Figura 770

370 – Gire a reta a em torno do ponto J , até que ela venha formar ângulos iguais com as retas r e s . Dados J , a , r e s .

Resolução: Nas posições finais t_1 , t'_1 , t_2 , t'_2 , a reta solução deverá ser paralela a uma das bissetrizes b_1 ou b_2 dos ângulos formados por r e s (Figura 771).

371 – Dados o ponto A e as retas a , b , c e r , pede-se construir o pentágono $ABCDE$, sabendo que B é simétrico de A em relação a a , C simétrico de B em relação a b , D simétrico de C em relação a c e que são iguais os lados DE e EA , E pertencendo a r .

Resolução: Imediatas as obtenções de B , C e D . E vem com a mediatriz m de AD (Figura 772).

372 – Construir o paralelogramo $ABCD$, C em s e D em r , assim como o retângulo $EFGH$, dados os segmentos AB e EF e as retas r e s , sabendo que HG provém de uma translação, para a direita, de EF numa amplitude dobro daquela que transforma AB em DC .

Resolução: Com \bar{s} paralela a s , decorrendo de uma translação de direção e amplitude BA , obtém-se o vértice D e, então, o paralelogramo $ABCD$ para, com o dobro da medida AD , completar o retângulo $EFGH$ (Figura 773).

370

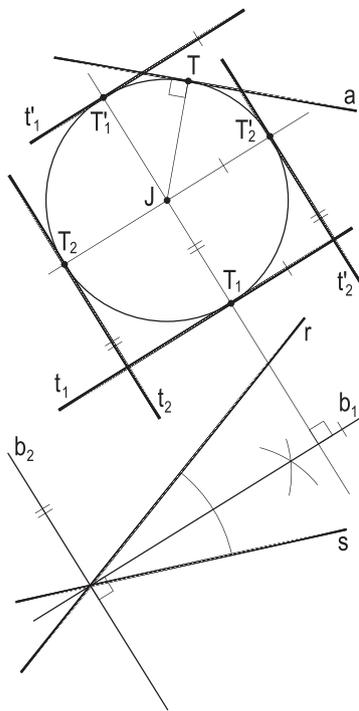


Figura 771

371

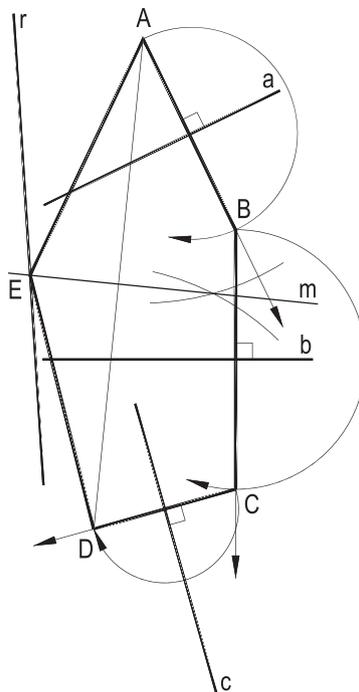


Figura 772

372

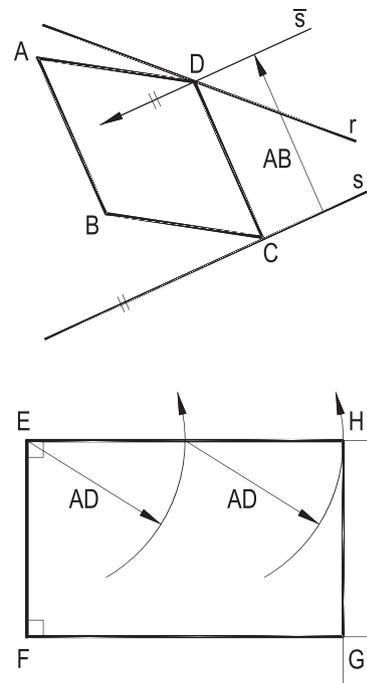


Figura 773

373 – Determinar a posição da reta w proveniente, simultaneamente, de uma rotação da reta a em torno do ponto J e de uma translação da reta b , dados as retas a e b e o ponto J .

Resolução: A reta w pedida, ao girar em torno do ponto J , há de permanecer tangente à circunferência de centro J e raio igual à distância JP de J a r , trazendo, com a perpendicular s , por J a b , as duas soluções w_1 e w_2 (Figura 774).

374 – Dados o segmento AB e o ponto J , pede-se transladar AB para a direita, na direção dada d , para a posição $A'B'$, tal que $ABB'A'$ seja um losango. Em seguida, gire o segmento $A'B'$ em torno de J no sentido anti-horário, numa amplitude de 90° .

Resolução: Imediatas a construção do losango $ABB'A'$ e a determinação da posição $\bar{A}\bar{B}$ decorrente da rotação imposta, pelo giro do ponto P para a posição \bar{P} e pelas aplicações das medidas PA' e $A'B'$, para a posição final $\bar{A}\bar{B}$ pedida (Figura 775).

375 – Dados o segmento AB e a reta r , pede-se construir o triângulo isósceles acutângulo ABC , de base BC , C em r , e o triângulo equilátero CDE , CD em r , igual a BC , D abaixo de BC e E à esquerda de r . Em seguida, gire A em torno de E , até que A pertença a r .

Resolução: A rotação de B em torno de A traz C e a rotação de B em torno de C proporciona D e a de C em torno de D completa o triângulo CDE .

As duas rotações de A em torno de E , como pedido, proporcionam as novas posições desse ponto em A_1 e A_2 , esta apenas indicada pelo número 2 (Figura 776).

373

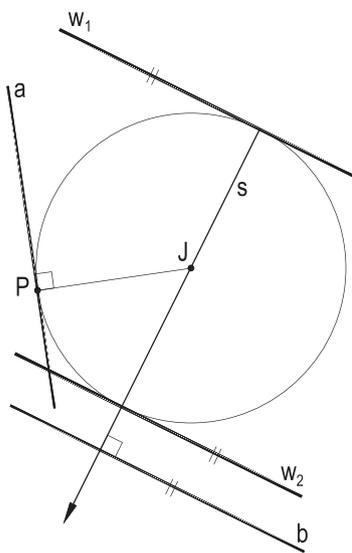


Figura 774

374

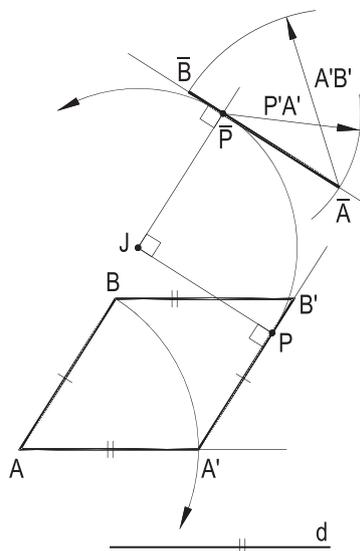


Figura 775

375

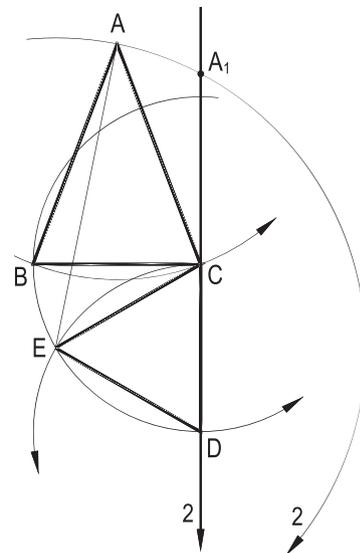


Figura 776

376 – Dados a semirreta Ax e os pontos J e P , pede-se construir o hexágono regular $ABCDEF$ que tenha o lado AB sobre Ax e o vértice C proveniente de uma rotação de P em torno de J , na menor das duas soluções possíveis para o hexágono.

Resolução: Construindo um hexágono regular $AB'C'D'E'F'$ de lado AB' arbitrado sobre Ax , uma homotetia de polo A resolve a questão (Figura 777), o vértice C situado na circunferência (J, JP) , no corte dessa circunferência com a reta AC mais próximo de A .

377 – Dados os pontos A, B, C e E , tais que $AE = BC$, pede-se construir o pentágono convexo $ABCDE$, tal que $CD = AE$ e $ED = BC$, e inscrever nele um retângulo $RSTU$, que tenha a base TU em AB , medindo um terço da altura ST .

Resolução: Determinado o vértice D , uma homotetia de polo D , de um retângulo auxiliar $R'S'T'U'$, com a base $R'S'$ paralela a AB e com a proporção estipulada, resolve o problema (Figura 778).

378 – Dados a semirreta Ax , a reta r e o ponto J , pede-se girar r em torno de J , até que, em sua nova posição r' , ela possa ser suporte do lado BC de um quadrado $ABCD$, assente por seu lado AB em Ax .

Resolução: Basta girar r até que venha a ser perpendicular a Ax , para obter B em Ax e, então, com a medida do lado AB , o quadrado $ABCD$ pedido (Figura 779). Há uma segunda solução, não completada, correspondendo à rotação levógira de r .

376

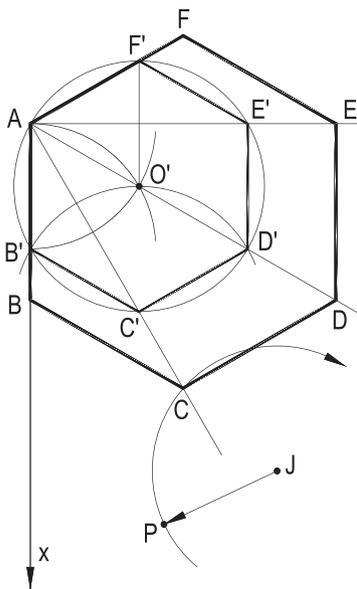


Figura 777

377

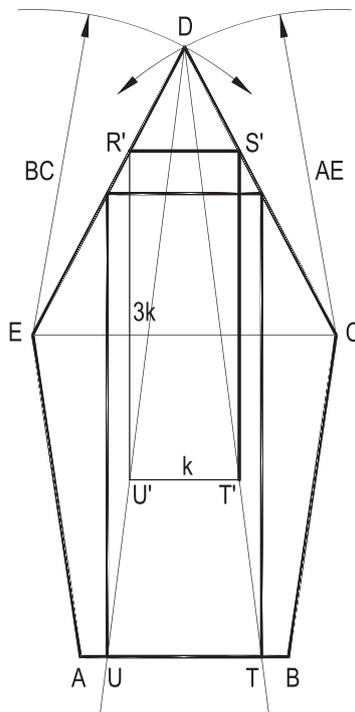


Figura 778

378

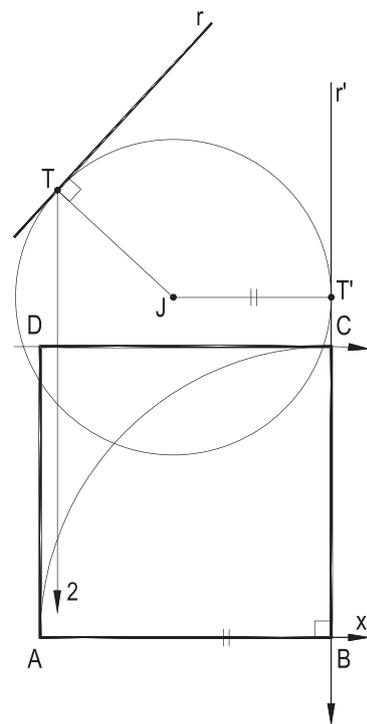


Figura 779

379 – Numa afinidade ortogonal, o quadrado $ABCD$ tem a diagonal AC paralela ao eixo e , com o vértice B no eixo. Construir o afim $\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}$ do quadrado, sabendo que seu centro \bar{O} pertence à reta dada \bar{w} . Dados ainda e e A .

Resolução: Construindo o quadrado $ABCD$ e determinado \bar{O} , pelo corte de \bar{w} com a perpendicular BD ao eixo, completa-se o losango $\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}$ afim de $ABCD$ (Figura 780).

Há uma segunda solução, para o vértice B à esquerda de A .

380 – Numa afinidade de eixo dado e , pede-se construir o afim do paralelogramo dado $ABCD$, conhecendo \bar{A} , afim de A .

Resolução: $A\bar{A}$ dá direção à afinidade e as retas paralelas AD e BC proporcionam, com $1\bar{A}\bar{D}$, afim de AD , e com sua paralela pelo ponto duplo $2 \equiv \bar{2}$, completar o paralelogramo solução $\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}$ (Figura 781).

381 – Construir o triângulo $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$, afim do dado ABC , cortado pelo eixo e dessa afinidade, também dado, conhecendo um ponto P e seu afim \bar{P} .

Resolução: Aproveitando a direção do lado BC , traça-se $P\bar{1}$ e sua afim $1\bar{P}$, que dá a direção do lado $\bar{B}\bar{C}$, afim de BC e, com a direção $P\bar{P}$ da afinidade, determina-se o vértice \bar{C} , afim de C . A utilização do ponto 3, duplo do lado AC , entrega o último vértice \bar{C} do triângulo procurado (Figura 782).

379

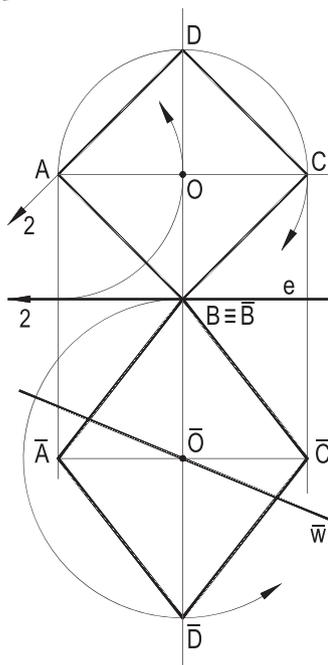


Figura 780

380

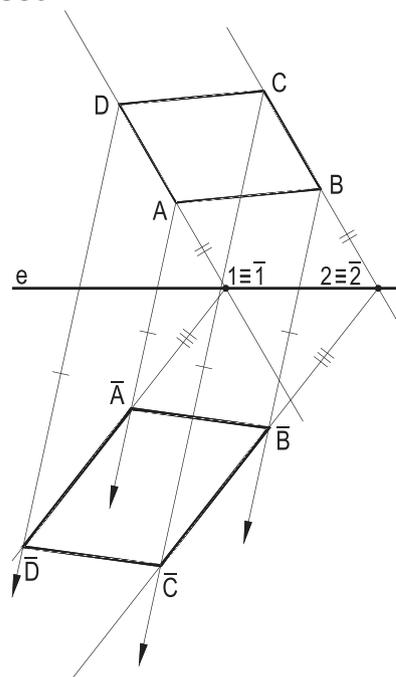


Figura 781

381

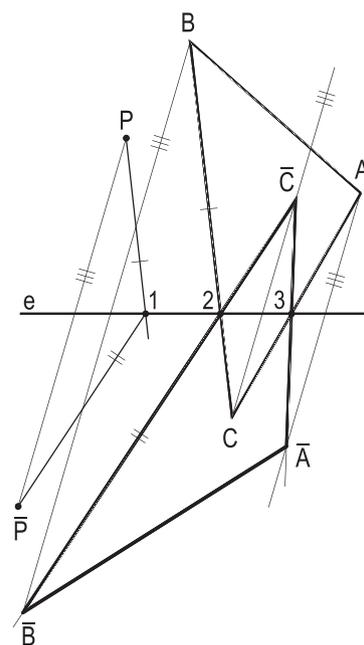


Figura 782

382 – Numa afinidade ortogonal, são dados dois pontos A e B e seus afins \bar{A} e \bar{B} , todos situados numa reta perpendicular ao eixo e , que se pede determinar.

Resolução: Para manter as divisões proporcionais, conservadas nas afinidades, basta traçar duas paralelas genéricas por A e B e outras duas, por \bar{A} e \bar{B} , obter seus correspondentes pontos de corte A' e B' e uni-los, para obter, sobre a reta $A\bar{A}$, um ponto J do eixo e , traçado, então, perpendicular a $A\bar{A}$ (Figura 783).

383 – Num sistema afim, são dados duas retas r e s , secantes no ponto A , e suas afins \bar{r} e \bar{s} , secantes em \bar{A} , além do ponto B , pertencente a r . Pede-se determinar o eixo e da afinidade, construir o triângulo isósceles ABC , com C , da base BC , em s e seu afim $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$.

Resolução: Os pontos duplos 1 e 2 definem o eixo e a reta $A\bar{A}$ dá a direção da afinidade, com o que se obtém $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$ (Figura 784).

384 – Dadas as semirretas paralelas Ax e sua afim $\bar{A}\bar{x}$, pede-se desenhar o triângulo equilátero ABC , AB em Ax e seu afim $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$, nesse sistema, sabendo que coincidem C e \bar{C} , escolhendo a solução que corresponde ao menor perímetro para o triângulo $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$.

Resolução: Sendo paralelas Ax e sua afim $\bar{A}\bar{x}$, sua direção é a própria direção do eixo da afinidade, que há de passar pelo vértice C do triângulo equilátero ABC , com uma única posição, C entre Ax e $\bar{A}\bar{x}$ (Figura 785). Imediato, assim, o traçado do eixo e .

E o vértice \bar{B} vem com a paralela $B\bar{B}$ a $A\bar{A}$.

382

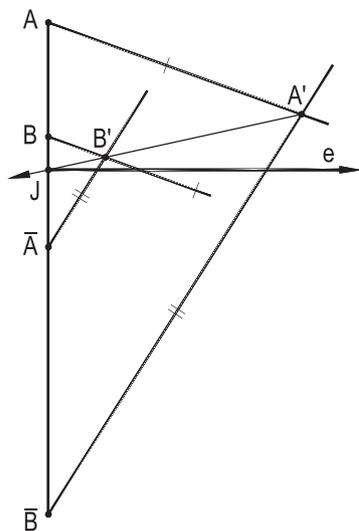


Figura 783

383

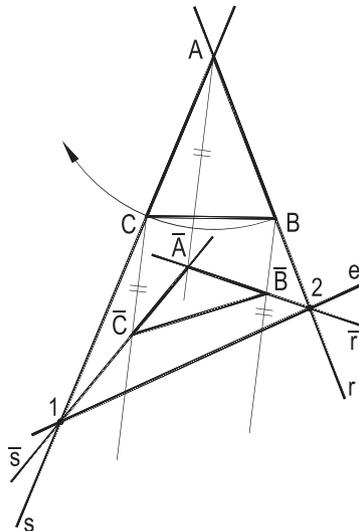


Figura 784

384

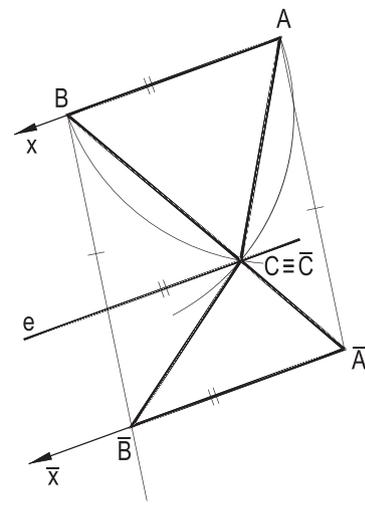


Figura 785

385 – Numa transformação homológica, de polo dado V , o paralelogramo $ABCD$ transforma-se num trapézio de bases $\overline{A\overline{B}}$ e $\overline{C\overline{D}}$.

Dados os vértices A, B e C e os homólogos \overline{B} de B e \overline{C} de C , pede-se completar o paralelogramo, determinar o eixo e da homologia e construir o trapézio $\overline{A\overline{B}\overline{C}\overline{D}}$.

Resolução: O paralelismo de $AB, CD, \overline{A\overline{B}}$ e $\overline{C\overline{D}}$ dá, por sua direção, o eixo e , conduzido pelo ponto J , duplo de BC e $\overline{B\overline{C}}$ (Figura 786).

386 – Determinar as duas retas limites do sistema de homologia definido pelo eixo e , pelo polo V e pelo par de pontos homólogos P e \overline{P} , naturalmente alinhados com V , todos dados.

Resolução: Com duas paralelas, em cada ambiente, determina-se os pontos L e \overline{L} , homológicos de seus pontos impróprios, para, por eles, com a direção do eixo, traçar as retas limites RL e $\overline{R\overline{L}}$ pedidas (Figura 787).

387 – Num sistema de homologia de polo V e eixo e , dados, o retângulo $ABCD$ dado transforma-se num quadrilátero tal que seu lado $\overline{A\overline{B}}$ iguale o dobro da medida BC da altura daquele retângulo. Pede-se construir $\overline{A\overline{B}\overline{C}\overline{D}}$.

Resolução: $\overline{A\overline{B}\overline{C}\overline{D}}$ há de ser um trapézio, com uma base $\overline{C\overline{D}}$ já conhecida. Marcado $PQ = 2 \cdot BC$, paralelo ao eixo, sua translação na direção do raio VB da homologia dá o vértice \overline{A} e, em seguida, \overline{B} e o trapézio pedido (Figura 788).

385

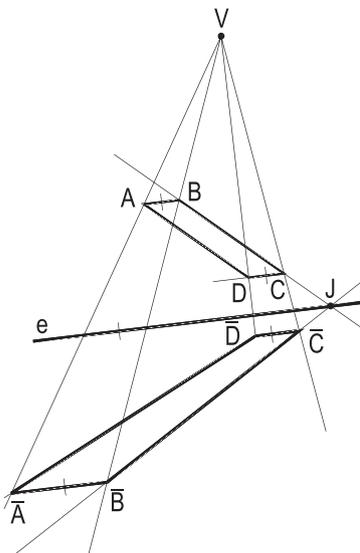


Figura 786

386

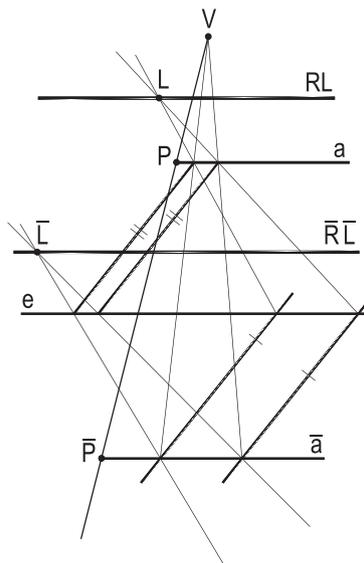


Figura 787

387

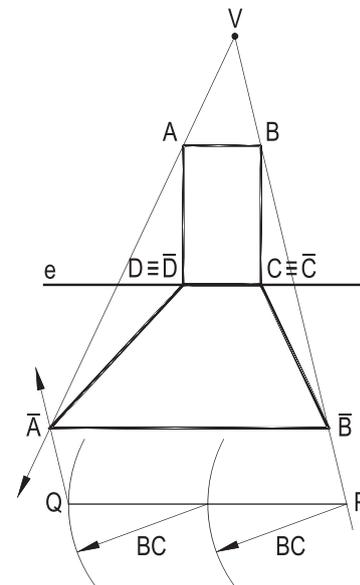


Figura 788

388 – Construir o homólogo $\overline{\overline{\overline{ABC}}}$ do homólogo $\overline{\overline{ABC}}$ do homólogo \overline{ABC} do triângulo dado ABC , num produto de homologias de polos V_1, V_2 e V_3 , para eixos paralelos e_1, e_2 e e_3 , todos dados, sabendo que \overline{A} pertence à reta w , dada, e $\overline{\overline{A}}$ à reta z , também dada. O primeiro sistema conta com dois pontos homólogos P e \overline{P} , dados.

Resolução: Imediata pelas utilizações dos pontos duplos das retas AB e AC e de suas consecutivas homólogas (Figura 789).

389 – Construir o triângulo $\overline{\overline{\overline{ABC}}}$ afim de $\overline{\overline{ABC}}$, afim de \overline{ABC} , afim do triângulo dado ABC , após três afinidades de eixos paralelos e_1, e_2 e e_3 , sob direções também dadas d_1, d_2 e d_3 , sabendo que os pontos $\overline{A}, \overline{\overline{A}}$ e $\overline{\overline{\overline{A}}}$ pertencem, respectivamente, às retas dadas w, z e t .

Resolução: Semelhante à do problema anterior pelas utilizações de pontos duplos sobre os eixos dados (Figura 790).

388

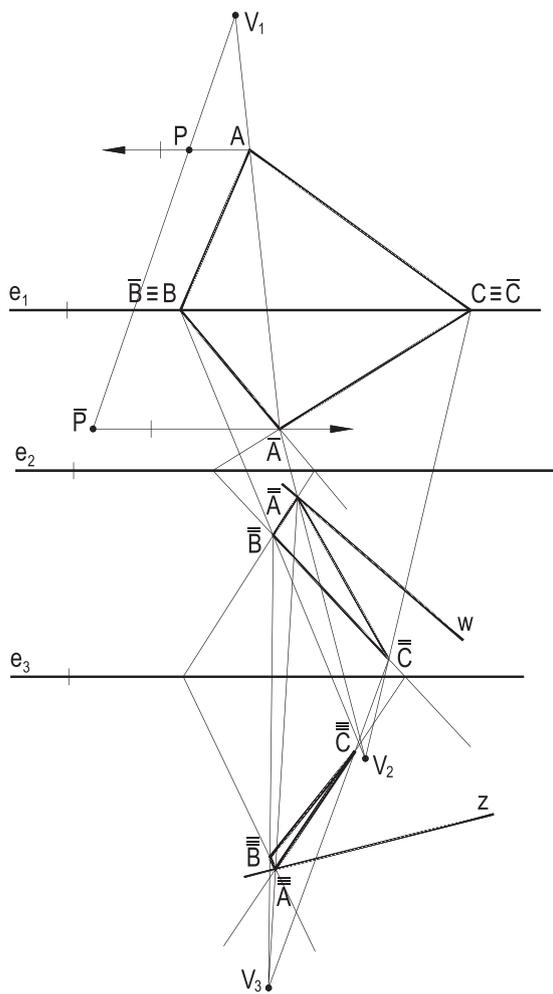


Figura 789

389

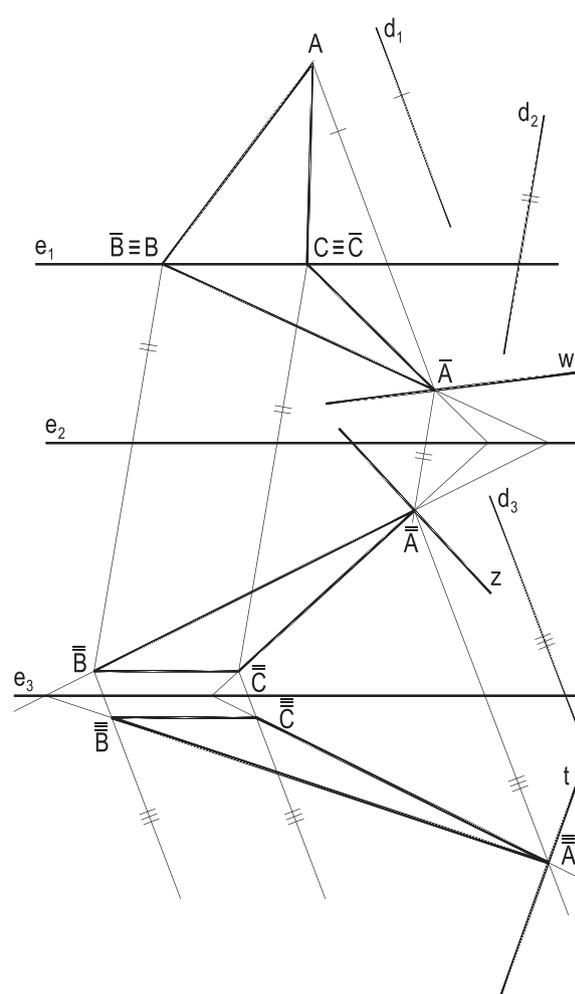


Figura 790

390 – Num sistema de homologia de eixo e e polo V , dados, são dados também os pontos O e \bar{O} , numa perpendicular, por V a e , além da medida k .

Pede-se construir o hexágono regular de centro O , raio k , com dois lados paralelos a e e determinar seu homólogo.

Resolução: Com centro O e raio OC paralelo a e e medindo k , vem o hexágono regular $ABCDEF$, como imposto, e, para construir seu homólogo $\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}\bar{E}\bar{F}$, foram utilizadas as retas homólogas OA e $\bar{O}\bar{A}$, com seu ponto duplo 1 , além de paralelas ao eixo (Figura 791).

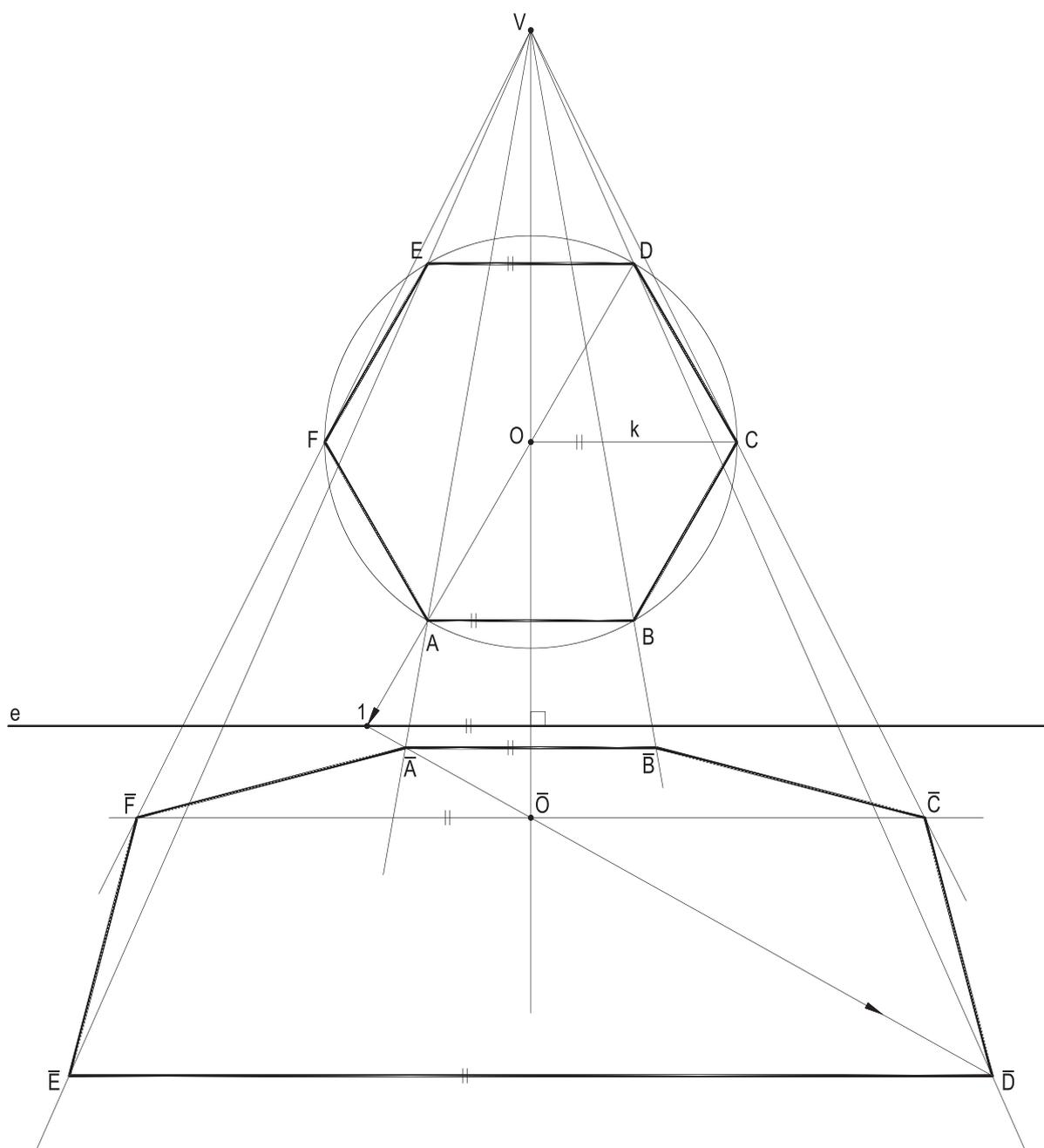


Figura 791

391 – Dada a circunferência (O, OA) , construa o pentágono convexo regular $ABCDE$ nela inscrito, assim como o sistema homológico que tenha por eixo a reta suporte da diagonal BE e por vértice o ponto V , obtido no prolongamento do raio OA , além de A e tal que AV seja igual à diagonal BE , para construir, nesse sistema, o homólogo de $ABCDE$, sabendo que o vértice \bar{A} , homólogo de A , coincide com o ponto O .

Resolução: Construído o pentágono $ABCDE$ e marcado V como imposto, seu homólogo $\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}\bar{E}$ vem aproveitando-se os pontos duplos $\bar{B} \equiv B$ e $\bar{E} \equiv E$, e, nesta ordem, as retas homólogas $\bar{A}\bar{C}$ e AC e a paralela ao eixo $\bar{C}\bar{D}$ (Figura 792).

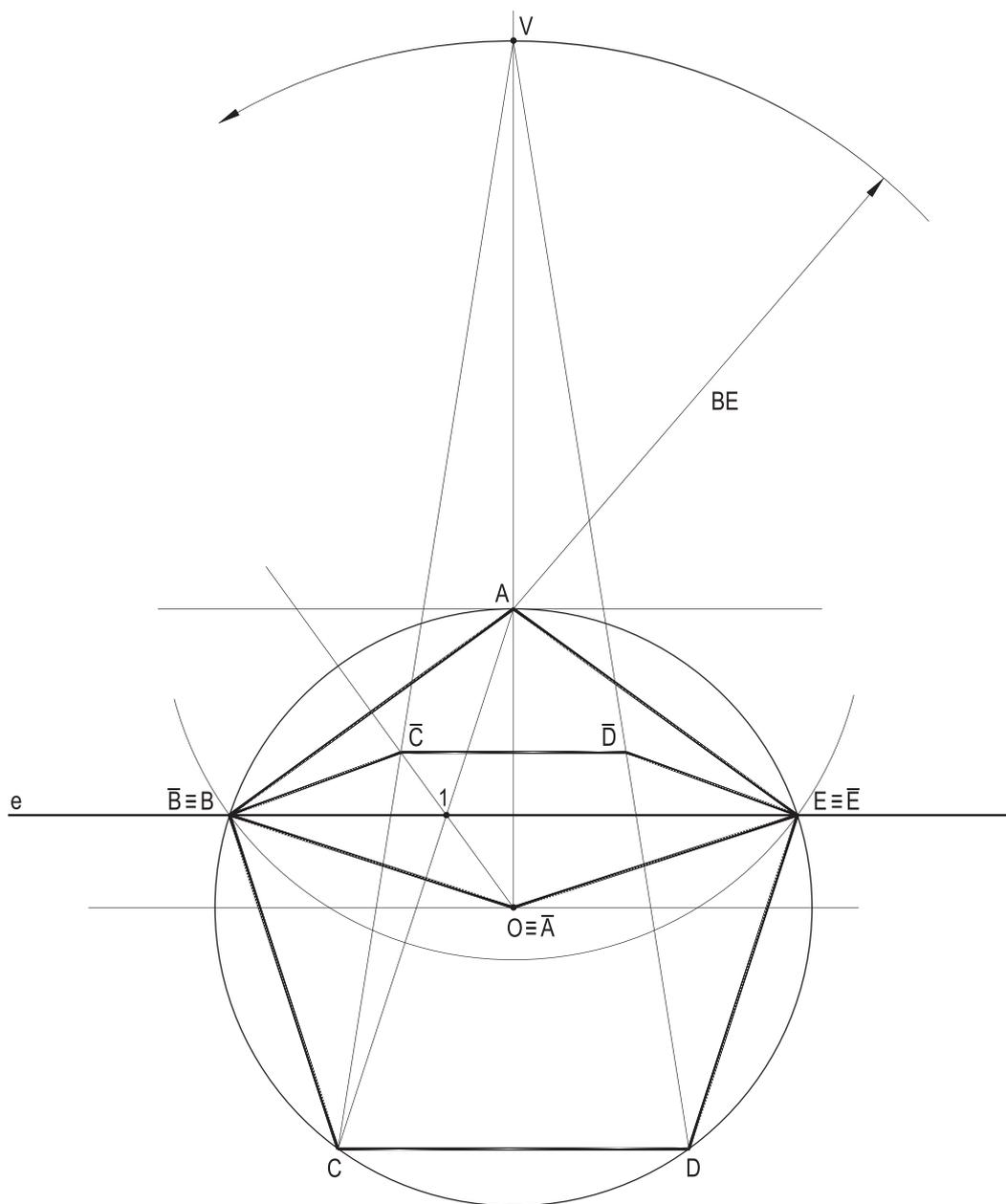


Figura 792

392 – Inscrever na circunferência (O, OA) , dada, um pentágono regular estrelado $ABCDE$ e construir seu afim $\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}\bar{E}$, no sistema de afinidade oblíqua dado por seu eixo e , sua direção d e pela informação que as retas \bar{a} e \bar{b} , afins das dadas a e b , são perpendiculares entre si, no semiplano oposto ao de $ABCDE$, em relação ao eixo e .

Resolução: Construído o pentágono $ABCDE$ como estipulado e traçadas por dois pontos arbitrados J e L do eixo as paralelas a' e b' às retas dadas a e b , suas afins \bar{a}' e \bar{b}' têm de se cortar no ponto P do arco capaz de 90° para JL , obtido com a paralela $P'\bar{P}'$ à direção d , o que completa o sistema da afinidade em questão.

A construção da solução $\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}\bar{E}$ é, então, imediata (Figura 793).

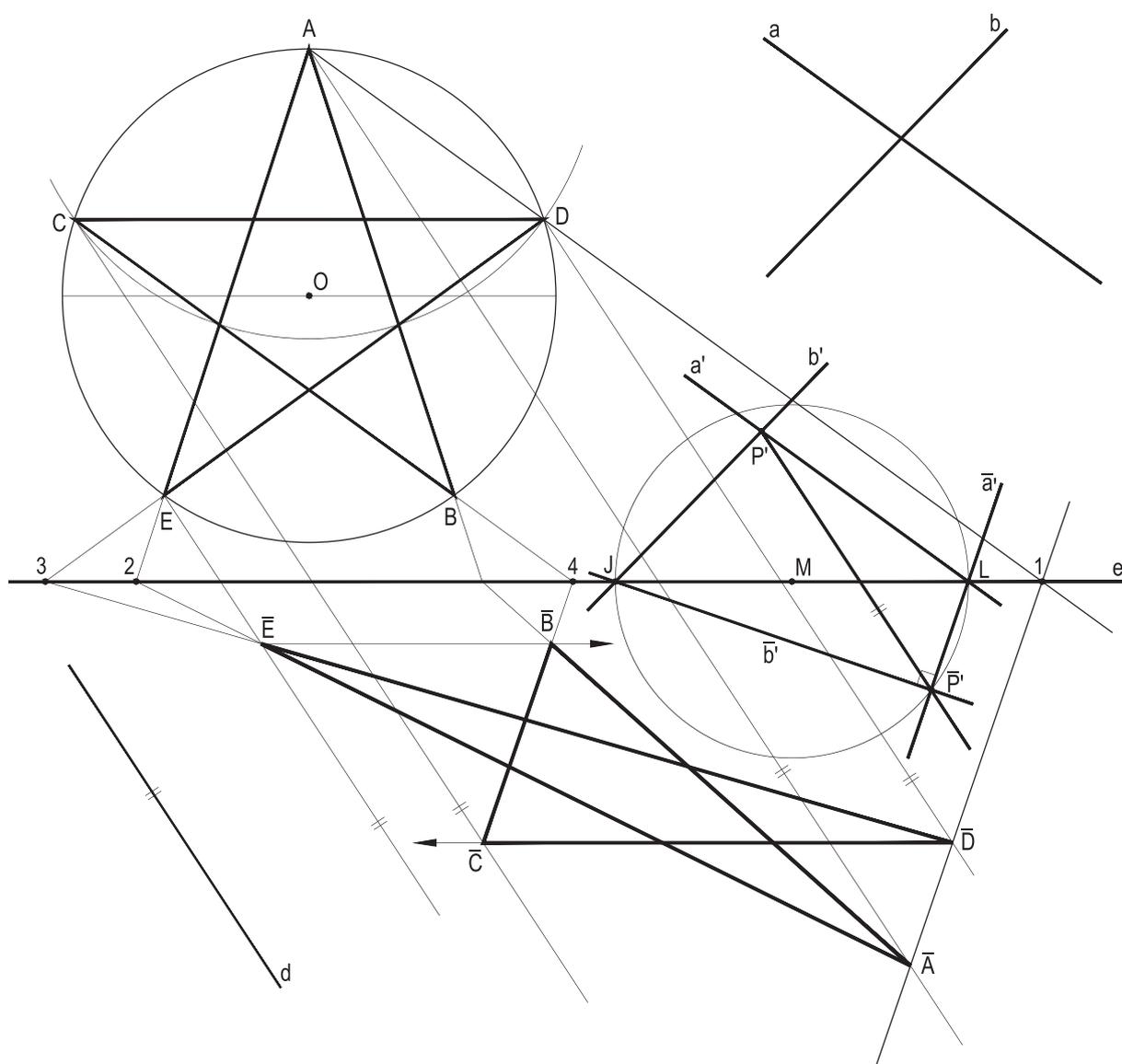


Figura 793

393 – Dado um sistema de homologia, determinado por seu eixo e , por seu polo V e por um par de pontos homólogos P e \bar{P} e construída sua reta limite RL , pela utilização de duas retas paralelas \bar{a} e \bar{b} e de suas homólogas a e b , pede-se desenhar a figura homóloga do quadrilátero $ABCD$, dado, observado que sua diagonal BD pertence ao eixo e que seu vértice A pertence àquela reta limite.

Resolução: Aproveitando a reta CP e sua homóloga por \bar{P} e utilizando seu ponto duplo 1, obtém-se o homólogo \bar{C} de C .

Como o raio de homologia VA dá a direção do ponto impróprio \bar{A}_∞ , as paralelas, por B e por D a VA , definem a poligonal aberta com lados extremos paralelos a VA e com vértices \bar{B} , \bar{C} e \bar{D} (Figura 794).

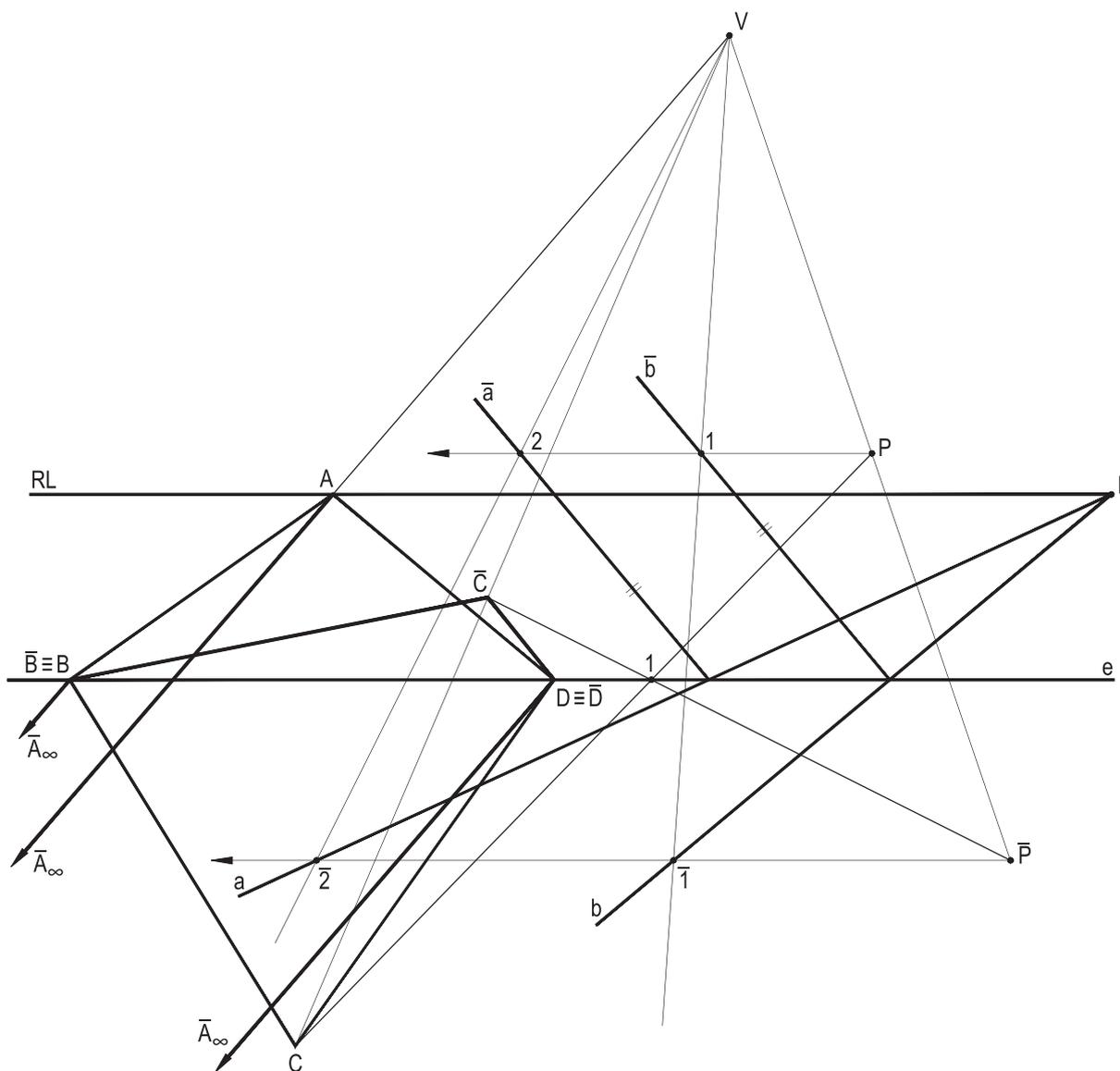


Figura 794

CAPÍTULO XI

PROBLEMAS GERAIS

Combinando os capítulos anteriores, seguem problemas propostos e resolvidos.

396 – Dadas as semirretas Ox e Oy , construa o quadrilátero $OPQR$, sabendo que os vértices P e R pertencem respectivamente a Ox e a Oy , que os ângulos internos P e R são retos, que o lado PQ mede o dobro de QR e que Q pertence à reta dada a .

Resolução: O vértice chave Q há de pertencer à semirreta Oz , determinada por um ponto J , distante um valor arbitrado u de Oy e o dobro, $2u$, de Ox (Figura 797).

397 – Dadas as retas paralelas a e b e as oblíquas c e d , pede-se determinar o ponto J , que, equidistante de a e de b , também equidiste de c e de d .

Resolução: O ponto J tem de ser a interseção da reta e , paralela às dadas a e b e delas equidistante, com uma das bissetrizes b_1 e b_2 dos ângulos formados pelas retas c e d , havendo, assim, para as retas dadas, duas soluções J_1 e J_2 (Figura 798).

398 – Construir o quadrilátero $ABCD$, inscrito numa circunferência, com os vértices B e D pertencendo às semirretas dadas Ax e Ay , BD paralela à reta dada r , sabendo que o ângulo interno D é reto e que C pertence à reta s , também dada.

Resolução: Se D é reto, seu oposto B também tem de ser. Assim, traçada uma reta $B'D'$ paralela a r , as perpendiculares a Ax e a Ay , por B' e D' , respectivamente, dão C' e, por homotetia de polo A , vem C (Figura 799).

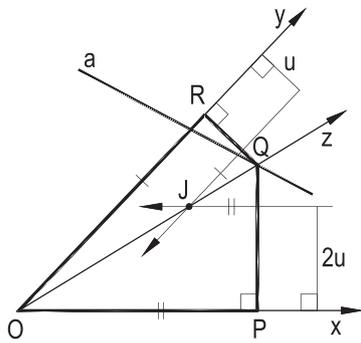


Figura 797

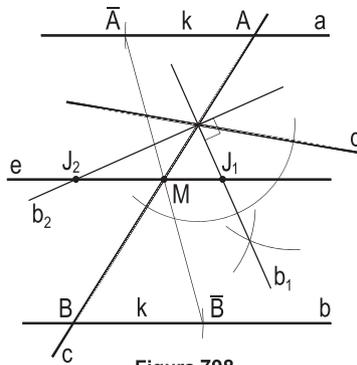


Figura 798

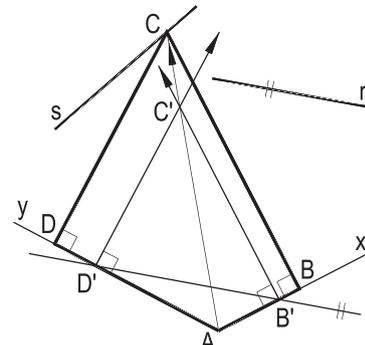


Figura 799

399 – Determinar todas as posições dos pontos J, que, equidistando das retas dadas r e s, vejam o segmento dado AB sob o ângulo de 60° .

Resolução: Para equidistar das secantes dadas r e s, os pontos procurados devem pertencer a uma das bissetrizes b_1 e b_2 dos ângulos formados por r e s e, para avistarem o segmento dado AB, sob o ângulo 60° , têm que pertencer a um dos arcos capazes de 60° para AB, havendo, então, para as posições dadas de A, B, r e s, quatro soluções, os pontos J_1, J_2, J_3 e J_4 , as duas primeiras na bissetriz b_1 e as outras duas em b_2 (Figura 800).

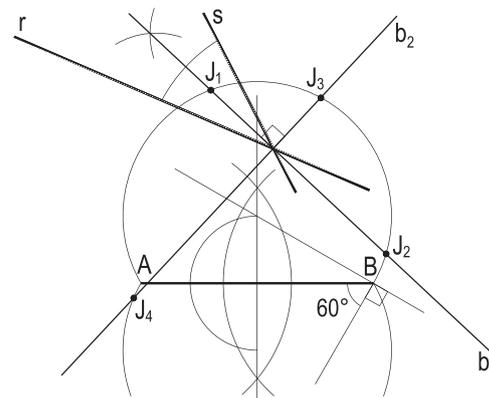


Figura 800

400 – Construir os triângulos ABC e ARS, dadas suas hipotenusas BC e RS, escolhendo a solução que deixe o vértice A mais próximo da reta dada r.

Resolução: Já que os dois triângulos têm de ser retângulos em A, seu vértice comum A deve ser um dos pontos de corte das circunferências de diâmetros BC e RS. Marcados seus centros O_1 e O_2 , A há de ser a interseção dessas duas circunferências, dispensado o ponto 2 (Figura 801), por distar mais da reta dada r que a solução A.

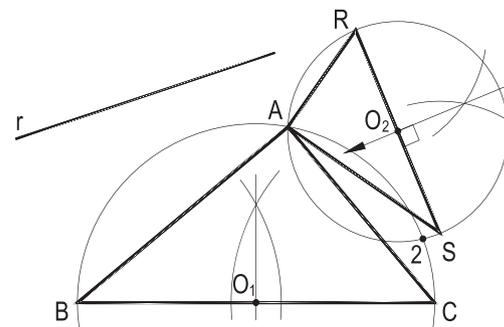


Figura 801

401 – Construir o quadrilátero ABCD, côncavo em B, sendo dada a diagonal AC e sabendo que os lados AB e BC são perpendiculares entre si, que o ângulo interno D vale 45° e que a diagonal BD é paralela à reta dada r, medindo a metade de AC.

Resolução: B e D devem pertencer, respectivamente, aos arcos capazes de 90° e de 45° para AC e, com uma translação da semicircunferência de diâmetro AC, na direção r e de amplitude MM' igual à metade MA de AC, obtém-se sua trasladada de diâmetro $A'C'$ e, por corte com o arco capaz de 45° para AC, o vértice D e, em seguida, B (Figura 802). Há uma segunda solução, situada no semiplano oposto, em relação a reta AC.

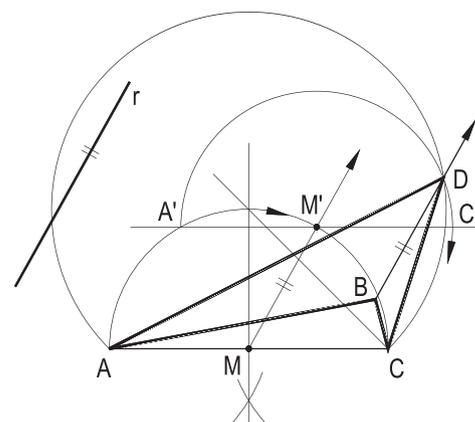


Figura 802

402 – Dadas as circunferências (O) e (O') e a reta r, pede-se construir o triângulo isósceles ABC, que tenha os lados iguais AB e AC tangenciando (O) e (O'), B em (O) e C em (O'), sabendo que A pertence à reta r, escolhendo a solução que corresponda ao maior perímetro para o triângulo.

Resolução: Para possibilitar o envio de tangentes iguais às circunferências dadas (O) e (O'), o ponto A tem que pertencer ao seu eixo radical ER, construído com o auxílio de uma circunferência auxiliar (J, r), arbitrada.

Obtido o vértice A, interseção de r com ER (Figura 803), basta construir a tangente AB a (O) e girá-la, em torno de A, para determinar o vértice C, escolhidos B e C, dando ao lado BC o maior comprimento possível, dispensadas, por isso, as segundas posições B' e C'.

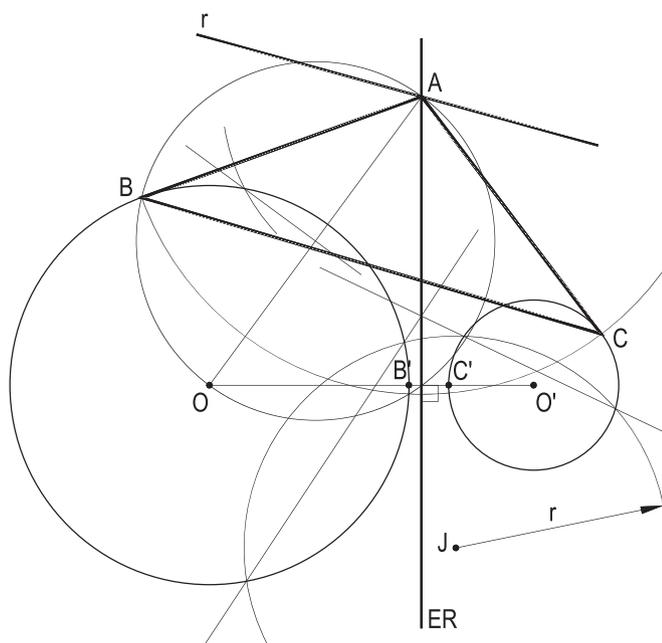


Figura 803

403 – Construir a circunferência (J) ortogonal às três circunferências dadas (O₁), (O₂) e (O₃).

Resolução: O centro J da circunferência ortogonal às três dadas nada mais é que seu centro radical, que, no presente caso, se obtém com o eixo radical ER₁₂ das duas circunferências secantes (O₁) e (O₂), imediato, e, com o auxílio de uma circunferência auxiliar (P), o eixo radical ER₁₃ das circunferências (O₁) e (O₃) para, por interseção, chegar ao centro radical procurado J (Figura 804). O raio da circunferência pedida é a tangente JT a (O₂), construída com precisão.

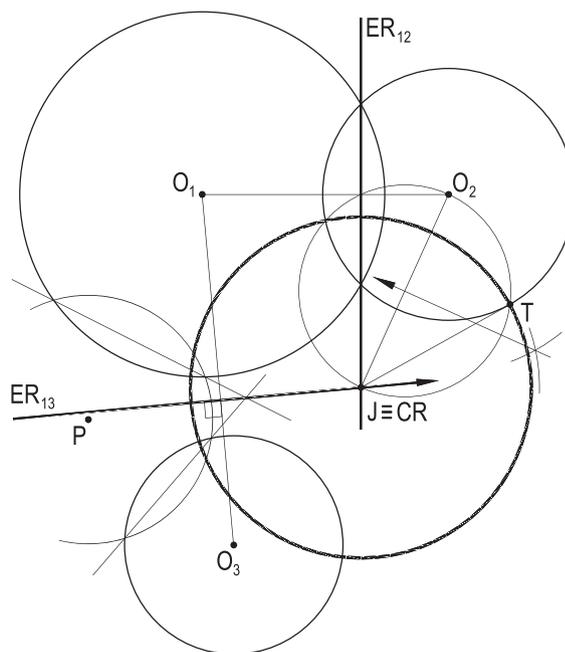


Figura 804

404 – Dadas as semirretas Ax e By, além da circunferência exterior (O), pede-se construir o quadrilátero ABCD circunscritível a um círculo, sabendo que seu lado CD tem a mesma direção que o eixo radical da circunferência dada (O) e da circunferência inscrita no quadrilátero, C em By e D em Ax. Determine, ainda, esse eixo radical.

Resolução: Imediata a determinação do centro I da circunferência inscrita no quadrilátero, pela construção das bissetrizes de seus ângulos internos A e B.

O lado procurado CD será, então, tangente a essa circunferência (I, IT), com a direção perpendicular à reta IO, ou seja, a mesma do eixo radical ER dessas duas circunferências, obtido pela união de seus pontos de corte P e Q (Figura 805).

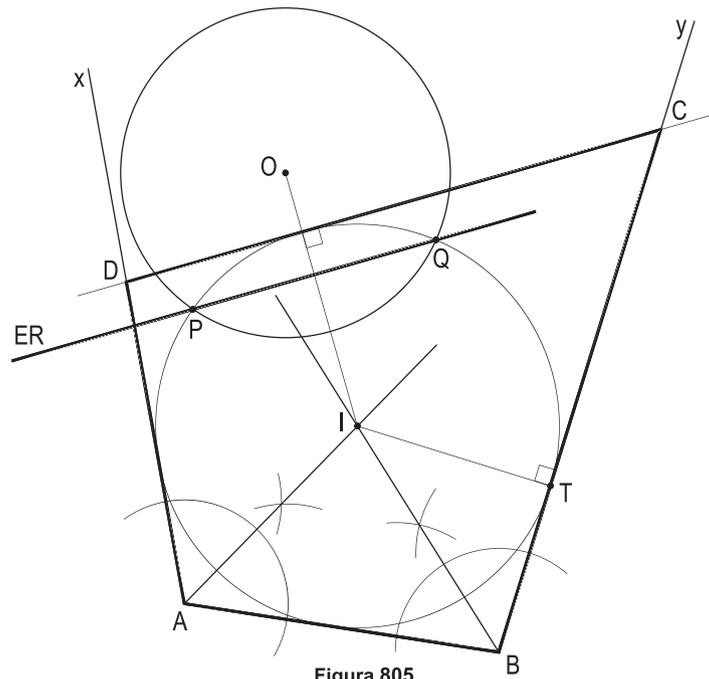


Figura 805

405 – Dadas duas circunferências secantes (O) e (O'), pede-se construir a circunferência (J) a elas ortogonal e igual à menor (O') dentre as duas dadas.

Resolução: O ponto J, centro da circunferência pedida, há de pertencer ao eixo radical ER das duas dadas, de imediata obtenção, assim como à circunferência (O', O'P), construída com o auxílio de uma tangente TP a (O'), com medida R' igual ao raio desta circunferência, havendo então, duas soluções para a circunferência (J) pedida (Figura 806), a segunda indicada pelo ponto 2, mas não completada.

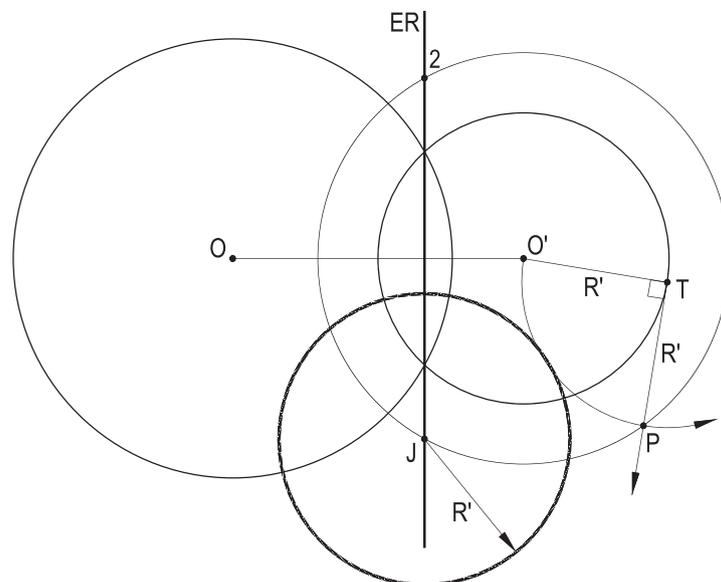


Figura 806

406 – Dadas duas circunferências (O) e (O') e uma coroa circular (J), limitada pelas circunferências de raios JP e JQ, todas exteriores, pede-se construir o triângulo equilátero ABC, sabendo que os vértices B e C equidistam das circunferências limítrofes da coroa e são capazes de enviar tangentes iguais a (O) e a (O'), limitadas a seus pontos de contato.

Resolução: Os pontos B e C devem pertencer à circunferência (J, JM), equidistante das limítrofes da coroa dada e também ao eixo radical ER das circunferências dadas (O) e (O'), obtido com o auxílio de uma circunferência auxiliar (P) (Figura 807), havendo, para as posições dadas, duas soluções ABC e A'BC, para o triângulo pedido, simétricas em relação a ER.

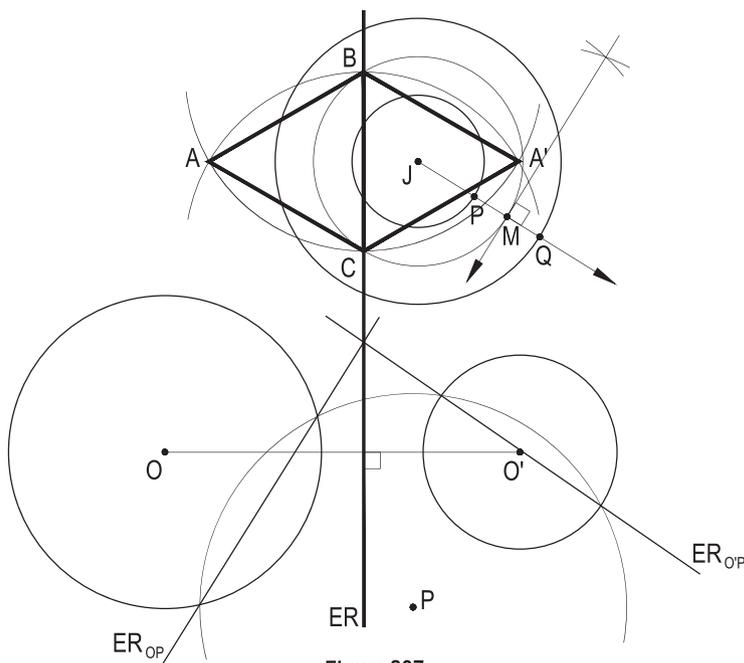


Figura 807

407 – Determinar os pontos J dos quais se pode enviar tangentes iguais às duas circunferências dadas (O) e (O'), limitadas a seus pontos de contato, sabendo que as duas tangentes desse ponto J a (O) e a (O') devem ser perpendiculares entre si.

Resolução: Traçadas duas tangentes LT_1 e LT_2 , perpendiculares entre si à circunferência (O'), com auxílio do quadrado $O'T_1LT_2$, bem como o eixo radical ER das duas circunferências dadas, os pontos J_1 e J_2 , simétricos em relação a OO' (Figura 808), resolvem, por interseção, a questão.

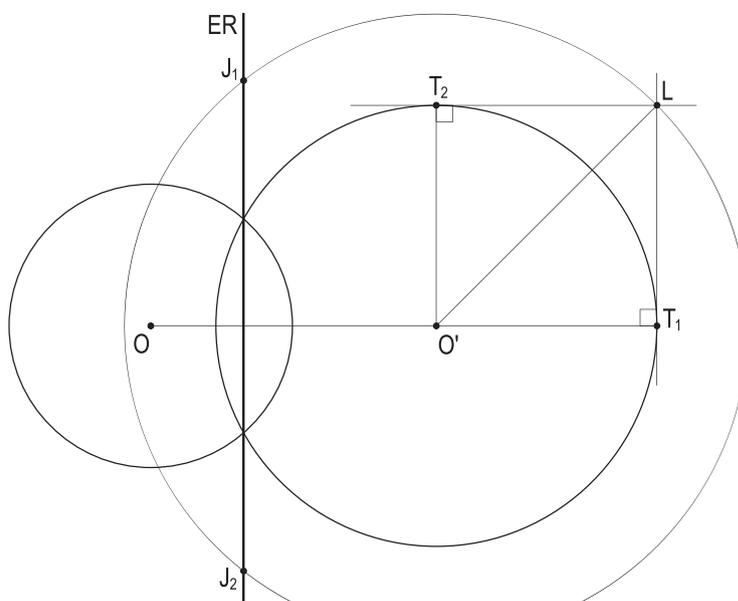


Figura 808

408 – Dadas as circunferências tangentes internamente (O) e (O') e a reta exterior r, pede-se construir todos os triângulos isósceles ABC que tenham o vértice A em r e os lados iguais AB e AC tangentes às circunferências dadas, B e C sendo seus pontos de contato com tais circunferências.

Resolução: Para poder enviar tangentes iguais às duas circunferências dadas, o ponto A tem que pertencer ao seu eixo radical ER, construído com facilidade, por ser a própria tangente externa comum a (O) e (O').

Obtido o vértice A, interseção de ER com r, a simples rotação de $\overline{AB} \equiv \overline{AC}$, em torno de A, traz os pontos B e C e, então, as três soluções ABC, $AB\bar{C}$ e $\bar{A}BC$ pedidas (Figura 809).

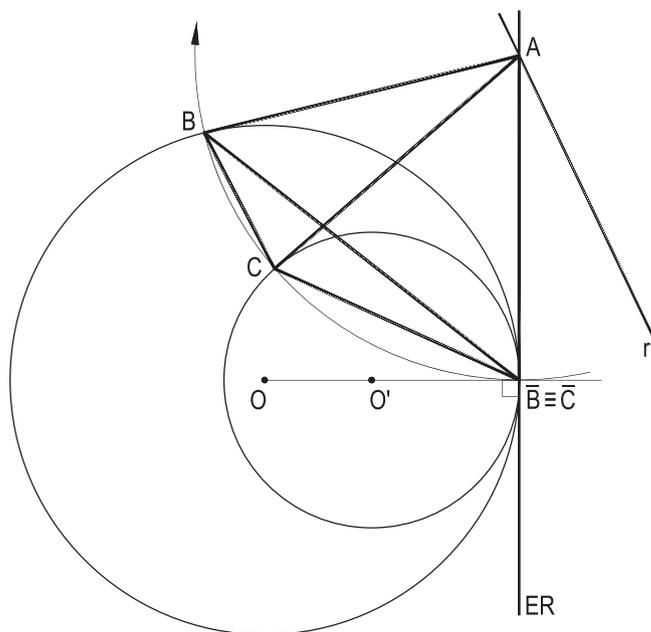


Figura 809

409 – Sabendo que o ponto dado J é capaz de ver o pentágono irregular dado ABCDE e a circunferência (O, R), de centro dado O, sob ângulos iguais, pede-se construir tal circunferência.

Resolução: Determinado o ângulo α , sob o qual J vê o pentágono, pelo traçado das retas JA e JD, que o envolvem, sem seccioná-lo, o transporte de sua metade $\alpha/2$, a partir da reta JO, traz t, reta à qual a circunferência pedida deve ser tangente.

Assim, a perpendicular OT a t dá o raio R da circunferência (O, R) solução (Figura 810).

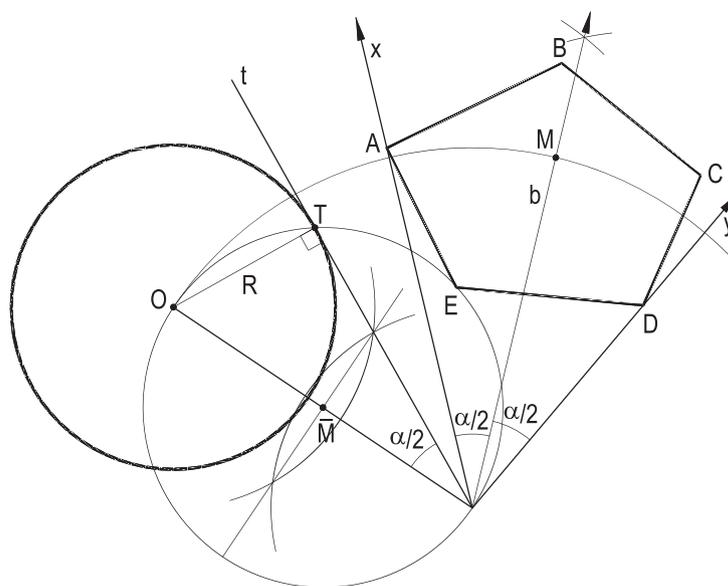


Figura 810

410 – Dado o segmento AB, pede-se construir o hexágono regular ABCDEF e inscrever nele um quadrado com dois lados paralelos a AB e vértices sobre os lados AF, FE, DC e CB, apresentando apenas uma solução.

Resolução: Construído o hexágono, com auxílio de sua circunferência circunscrita (O, OA), uma simples homotetia (de polo F, na Figura 811), para um quadrado auxiliar, R'S'T'U', arbitrado, mas atendendo às condições impostas, traz a solução RSTU.

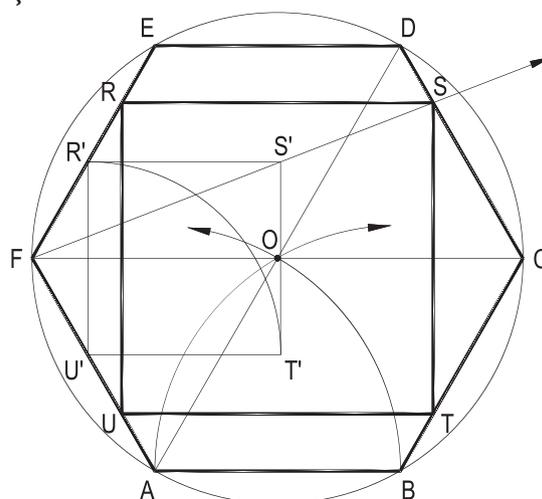


Figura 811

411 – Mesmo problema para o pentágono convexo equilátero ABCDE, dados o lado AB e os suportes Ax e By dos lados AE e BC, o quadrado inscrito com lados paralelos a AB e vértices sobre os lados AE, ED, DC e CB.

Resolução: Determinado o vértice D, a construção é idêntica à do problema anterior, com uma homotetia de polo E (Figura 812), a partir de um quadrado auxiliar R'S'T'U', com lados paralelos a AB.

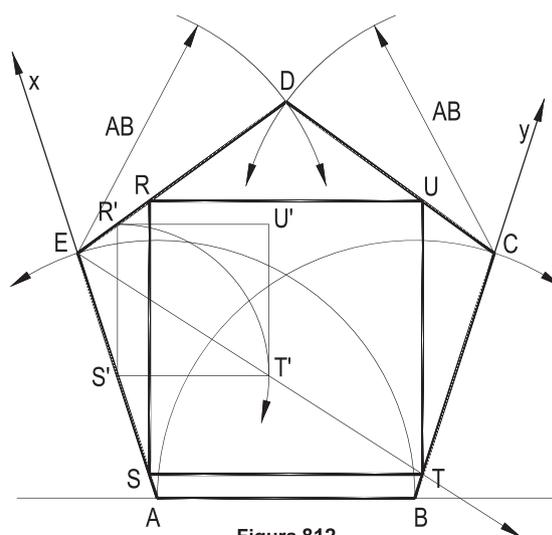


Figura 812

412 – Construir o triângulo equilátero ABC, B na semirreta dada Ax, sabendo que as distâncias do ponto J, interior, dado, aos lados AB, AC e BC guardam a proporção 1 : 2 : 3.

Apresente apenas uma solução.

Resolução: Construído um triângulo equilátero AB'C', auxiliar, como a altura do pedido deve ser igual ao sêxtuplo de JH (ver problema número 149), soma das distâncias aos três lados, a paralela h a Ax traz o vértice C, que resolve a questão (Figura 813).

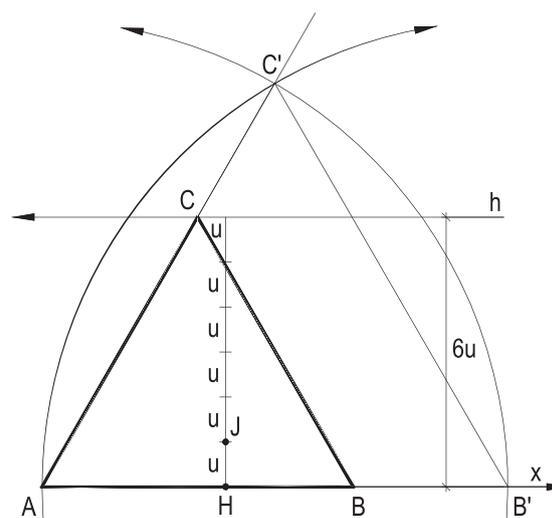


Figura 813

413 – Dadas duas circunferências exteriores (O) e (O'), pede-se construir a circunferência (C) a elas ortogonal, sabendo que seu centro C pertence à linha dos centros OO'.

Resolução: O ponto C procurado há de ser o traço do eixo radical ER das duas circunferências dadas com a reta OO' e a construção da tangente CT a (O) traz o raio CT da circunferência (C, CT) ortogonal às duas dadas (Figura 814).

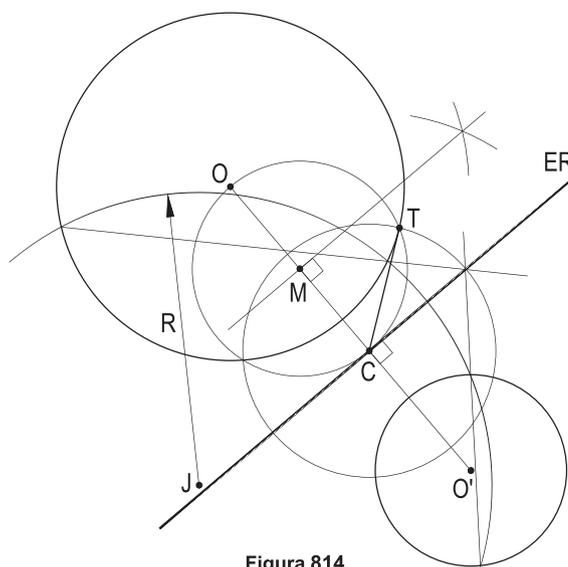


Figura 814

Observe-se a obtenção de ER pela utilização da circunferência auxiliar (J, R), arbitrada.

414 – Dadas as circunferências (O) e (O'), pede-se construir o triângulo equilátero ABC, que tenha os lados AB e AC tangentes a (O), B e C sendo os pontos de contato, sabendo que seu baricentro situa-se o mais próximo possível da circunferência (O').

Resolução: Para analisar a questão, considere-se um triângulo equilátero ABC, como pedido, e observe-se que seu baricentro M, também seu incentro, é o médio do segmento AO (Figura 815), pertencendo a (O), tais as repetições dos ângulos de 30°.

O ponto M, de (O), mais próximo de (O'), é o corte de (O) com a linha dos centros OO' (Figura 816), B e C sendo permutáveis.

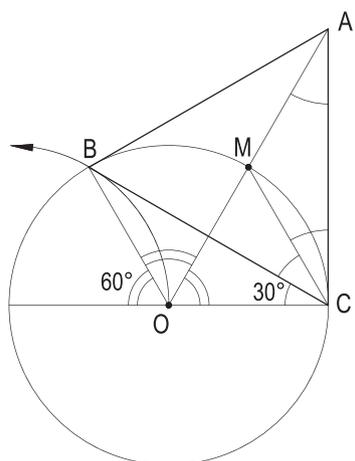


Figura 815

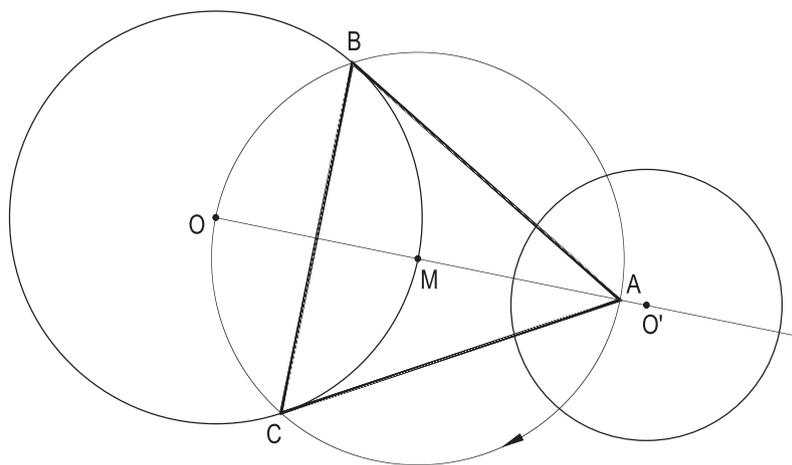


Figura 816

415 – Construir um pentágono convexo regular, sendo dados, em posição, os pontos \bar{M} e \bar{N} , médios de dois de seus lados.

Análise: Construído um pentágono convexo regular $ABCDE$ inscrito num círculo (O) , arbitrado, e tomado o ponto M , médio do lado AB , observa-se que, com o ponto médio N de um outro lado, duas hipóteses existem: N_1 , pertencendo a um lado consecutivo AE e N_2 , situado num lado alternado ED ou CD (Figura 817).

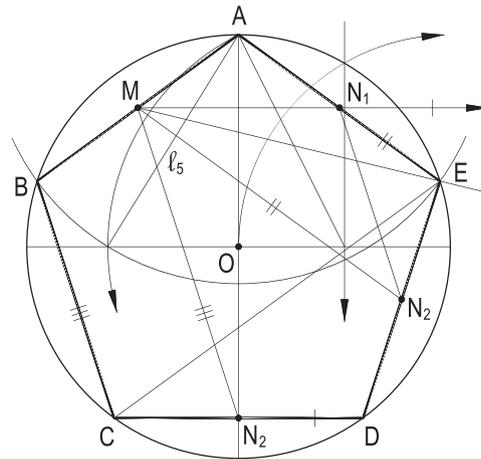


Figura 817

Mais, que o triângulo AMN_1 é isósceles com a base MN_1 , paralela a CD , e que MN_2 é paralela, ou ao lado AE ou a BC (Figura 818).

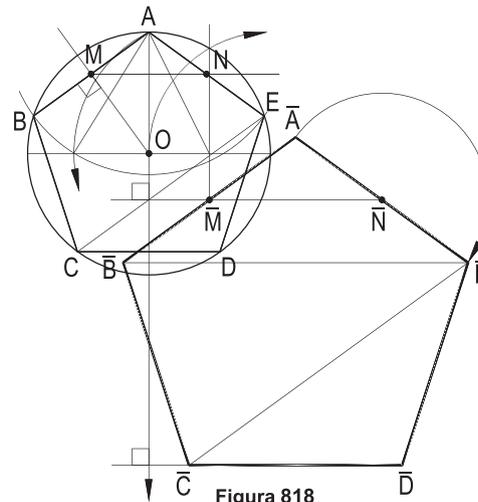


Figura 818

Resolução: Basta, para a primeira hipótese, em que \bar{M} e \bar{N} são médios de dois lados consecutivos, construir um pentágono convexo regular $ABCDE$ inscrito num círculo (O) arbitrado, que tenha um lado CD paralelo ao segmento dado $\bar{M}\bar{N}$ (Figura 818), para, com paralelas aos lados de $ABCDE$, completar o pentágono pedido $\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}\bar{E}$.

E, igualmente, para o caso de \bar{M} e \bar{N} serem médios de dois lados alternados, a construção de um pentágono convexo regular $ABCDE$, com o lado CD paralelo a $\bar{M}\bar{N}$, proporciona completar o pentágono $\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}\bar{E}$, lançando mão de $\bar{O}\bar{M}$ e $\bar{O}\bar{N}$, respectivamente, paralelas a OM e ON do pentágono auxiliar e com paralelas aos seus lados (Figura 819).

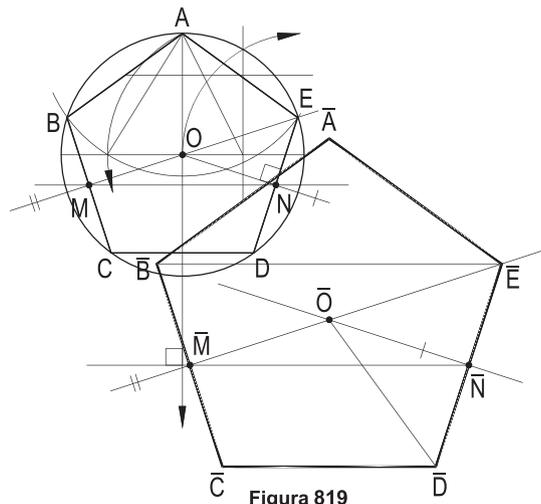


Figura 819

416 – Dadas duas circunferências tangentes exteriormente (O) e (O') e a reta r, a elas exterior, pede-se construir o retângulo ABCD, cujas diagonais AC e BD sejam tangentes respectivamente a (O) e a (O'), A em (O) e B em (O'), sabendo que AC é paralela à reta r. Apresente apenas uma solução.

Resolução: Já que as diagonais dos retângulos têm de ser iguais, cortando-se ao meio, o centro J do retângulo tem que pertencer ao eixo radical ER de (O) e (O'), obtendo-se o vértice A e a diagonal AC, paralela a r, com a perpendicular, por O, à reta r e, girando a tangente comum JT, em torno de J, vem o vértice B, completando-se, então, o retângulo ABCD (Figura 820), indicadas outras soluções A' e J' para o vértice A e para o centro J do retângulo.

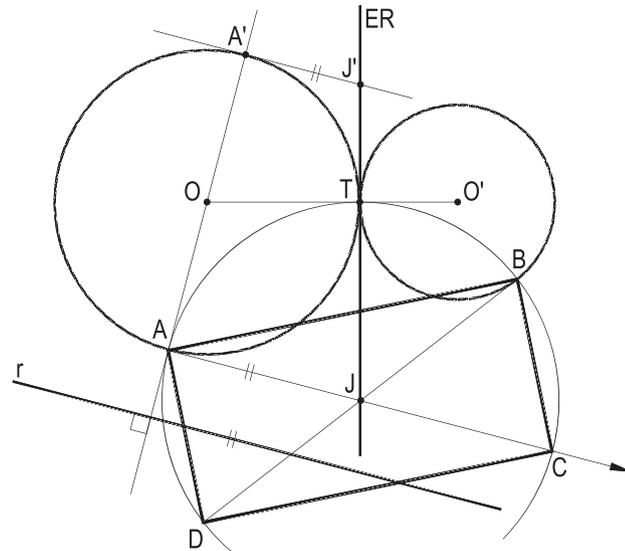


Figura 820

417 – Construir o triângulo isósceles ABC, que tenha seus lados iguais AB e AC tangentes à circunferência dada (O), B e C sendo os pontos de contato, sabendo que cada um desses lados mede os 3/2 da base BC e que o vértice A pertence à reta dada r.

Resolução: Com a construção de um triângulo isósceles auxiliar \overline{ABC} , com lados obedecendo à razão 3/2 imposta, obtém-se o ângulo α (Figura 821), que proporciona traçar duas tangentes A'B' e A'C' a (O), atendendo a tal ângulo, o que permite desenhar a circunferência (O, OA'), que corta a reta dada r, determinando o vértice A com duas soluções (Figura 822), a segunda indicada pelo número 2.

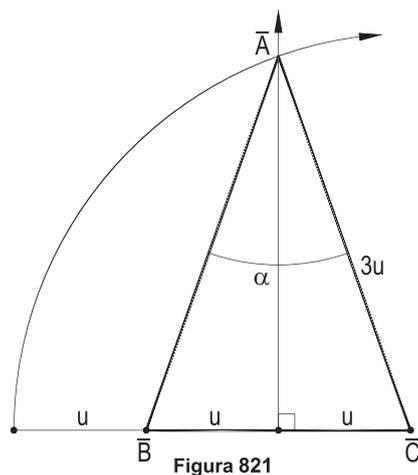


Figura 821

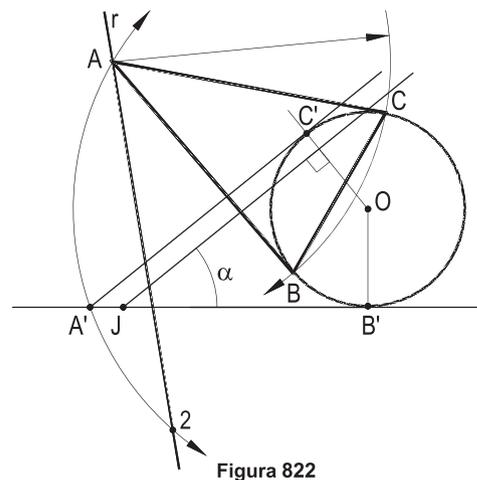


Figura 822

418 – Construir o hexágono regular ABCDEF, dados a semirreta Ax, suporte do lado AB, e o centro O da circunferência tangente aos suportes dos lados AB e BC e exterior ao hexágono.

Resolução: Construída a reta auxiliar r, inclinada de 60° em relação a Ax, consegue-se a tangente s, paralela a r, à circunferência dada (O, OT), que proporciona B e, então, o hexágono pedido, inscrito na circunferência (J, JA) (Figura 823).

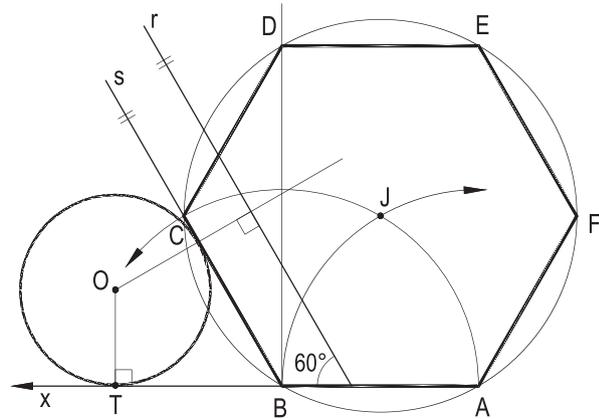


Figura 823

419 – Inscrever no quadrado dado ABCD um octógono convexo regular, tendo lados alternados sobre os lados do quadrado.

Resolução: Aproveitadas a circunferência (O), circunscrita ao quadrado dado, e o octógono convexo regular 123... nela inscrito, uma homotetia de polo O traz a solução RSTUVXZW pedida (Figura 824).

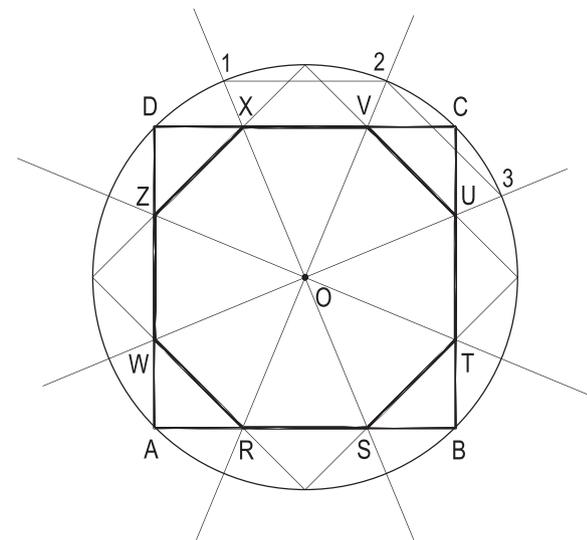


Figura 824

420 – Construir o octógono regular estrelado ABCDEFGH inscrito na circunferência dada (O), o vértice A distando o máximo possível da reta dada r.

Resolução: A perpendicular, por O, à reta r traz o vértice A e, com a divisão de (O) em oito partes iguais e a união dos pontos dessa divisão de 3 em 3 vem o octógono de espécie 3 pedido (Figura 825).

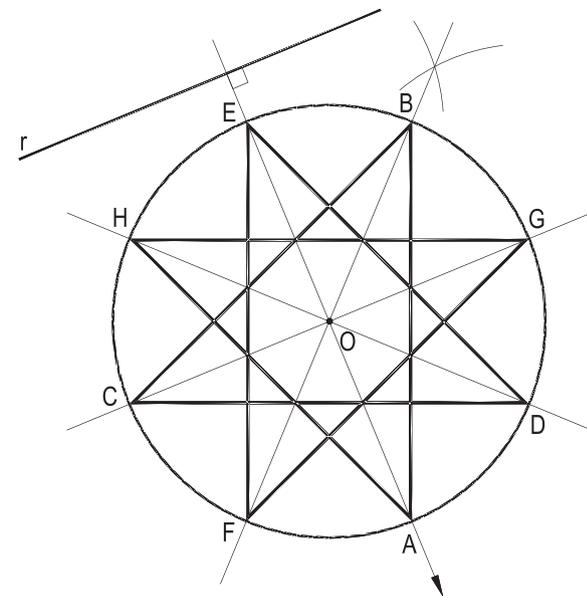


Figura 825

421 – Construir o pentágono convexo regular $ABCDE$, sabendo que o lado CD e a diagonal BE pertencem, respectivamente, às retas paralelas r e s , dadas, e que o centro O do polígono forma com os pontos dados J e K um triângulo isósceles de base JK .

Resolução: Construído um pentágono convexo regular $\overline{A\overline{B}C\overline{D}E}$, auxiliar, inscrito numa circunferência arbitrada (O), tendo o lado \overline{CD} com a mesma direção que a reta dada r , observa-se a proporção que as retas \overline{r} , \overline{s} e \overline{t} produzem na altura \overline{AM} , que, transportada, por uma homotetia de polo arbitrado P , proporciona a reta t e, com sua interseção com a mediatriz m de JK , o centro O do pentágono pedido, então, de simples construção (Figura 826).

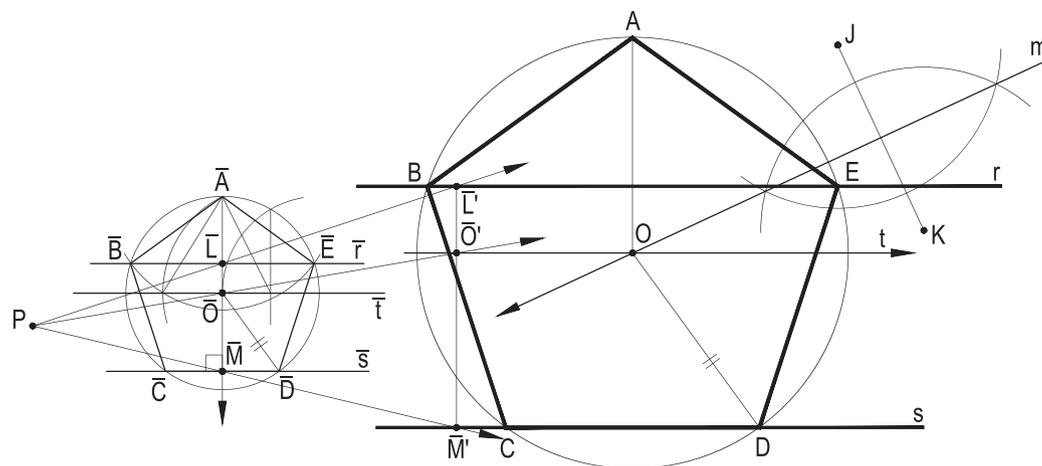


Figura 826

422 – Construir o triângulo ABC , cujos lados AB , AC e BC sejam respectivamente iguais aos lados dos heptágonos regulares de espécies 1, 2 e 3 inscritos no círculo dado (O), o vértice C situado na semirreta dada Bx .

Resolução: Utilizado o método de Rinaldini (número 54), obtêm-se (Figura 827) as medidas P_1 , P_2 e P_3 dos lados dos heptágonos pedidos e a solução ABC , com as marcações de $BC = P_3$, $CA = P_2$ e $BA = P_1$ (Figura 828).

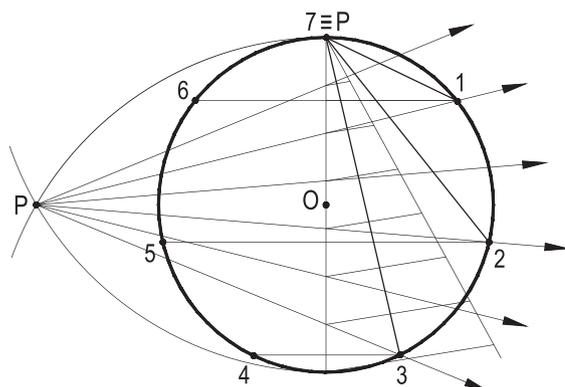


Figura 827

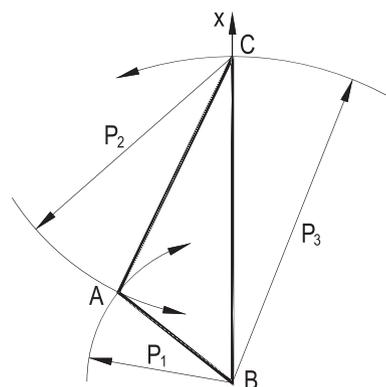


Figura 828

423 – Dados os pontos J, A e B, colineares, e C, externo, pede-se determinar os pontos D e E, tais que $JA \cdot JB = JC \cdot JD = (JE)^2$, sabendo que J, C e D são colineares e que E pertence à circunferência que contém A, B e C.

Resolução: Construída a circunferência (O) pertencente aos pontos A, B e C, a potência do ponto J em relação a (O) garante as relações pedidas (Figura 829), com duas soluções para o ponto E, contatos das tangentes t_1 e t_2 à circunferência (O).

424 – Instituir o lugar geométrico dos pontos P, cujas somas de distâncias a duas retas perpendiculares dadas r e s sejam constantes e iguais a um valor dado k.

Resolução: O lugar geométrico pedido é composto pelos quatro lados do quadrado ABCD, de centro O, interseção de r e s, tal que $OA = OB = OC = OD = k$, pois, para todo ponto P, pertencente a qualquer de seus lados, os triângulos retângulos e isósceles como PBP_2 e PAP_1 dão $PP_1 + PP_2 = OB = k$ (Figura 830) e, para todo ponto Q não pertencente a um dos lados desse quadrado, os mesmos triângulos e o retângulo QQ_1OP_2 dão: $QP_2 + QQ_1 = QP + PP_2 + PP_1 = QP + k \neq k$ (Figura 830), logo, Q não pertence ao lugar.

425 – Instituir o lugar geométrico dos pontos P, cujas distâncias a duas retas perpendiculares r e s, dadas, ofereçam diferenças constantes e iguais a um valor dado k.

Resolução: Para o quadrado ABCD (Figura 831), todo ponto P pertencente ao prolongamento de qualquer dos lados proporciona, com os triângulos retângulos isósceles como PP_1C e PP_2B , a relação: $PP_1 - PP_2 = PP_1 - BP_2 = k$. E, para todo ponto Q não pertencente a qualquer prolongamento de lados, os mesmos triângulos e o retângulo QQ_1OP_2 dão: $QQ_1 - QP_2 = PP_1 - (QP + PP_2) \therefore QQ_1 - QP_2 = PP_1 - PP_2 - QP = k - QP \neq k$

Assim, o lugar geométrico pedido é composto por oito semirretas, prolongamentos dos lados do quadrado ABCD, com diagonais sobre r e s, iguais a $2k$.

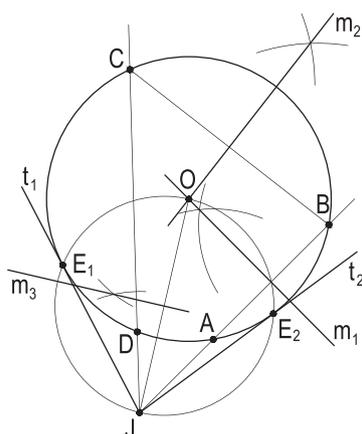


Figura 829

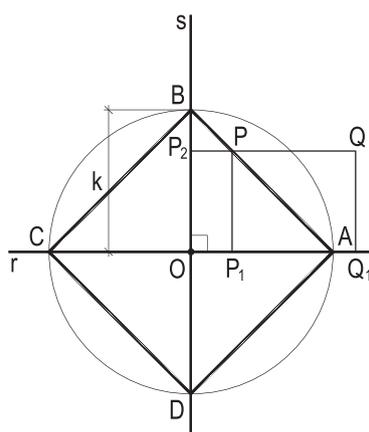


Figura 830

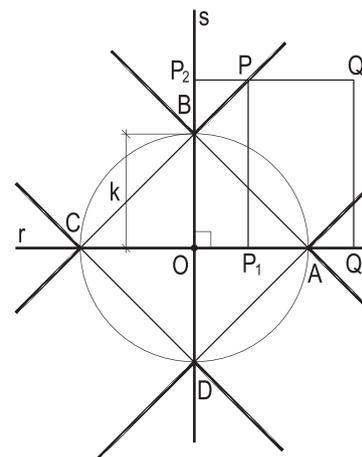


Figura 831

426 – Dadas duas retas perpendiculares r e s e outra, genérica, t , pede-se determinar os pontos P de t , cujas distâncias a r e a s somem o valor dado k .

Resolução: Construindo o quadrado $ABCD$, com diagonais AC e BD sobre as retas dadas r e s , medindo $2k$, os pontos P_1 e P_2 , interseções de t com dois lados do quadrado $ABCD$, tal como instituído no número 424, anterior, (Figura 832), são as soluções.

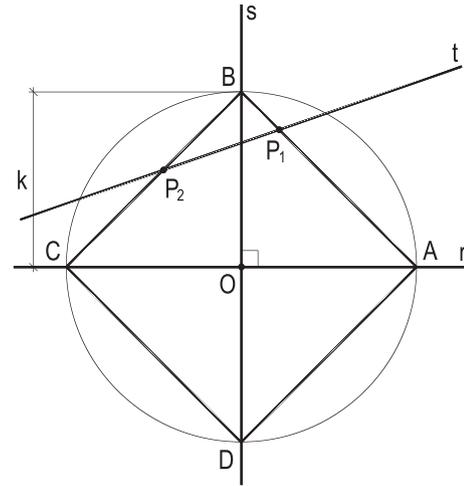


Figura 832

427 – Dadas as retas perpendiculares r e s e a reta t a elas oblíqua, pede-se determinar as posições dos pontos P , de t , que ofereçam diferença de distâncias, em qualquer ordem, às retas r e s , medindo o valor k , também dado.

Resolução: Construindo o quadrado $ABCD$, com diagonais sobre r e s , tais que $AO = OB = OC = OD = k$, as interseções P_1, P_2, P_3 e P_4 da transversal t com os prolongamentos dos lados do quadrado (Figura 833) são as soluções, tal como instituído no número 425, anterior, o quarto ponto P_4 apenas indicado na Figura 833, por ser exterior aos limites apresentados para o problema.

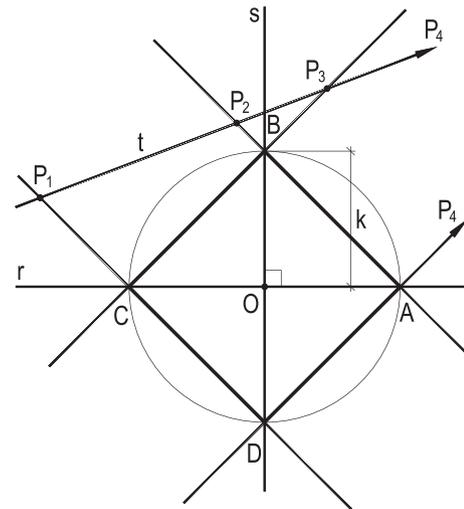


Figura 833

428 – Dadas duas retas perpendiculares r e s e duas paralelas a e b , determine os pontos P e Q , equidistantes de a e de b e tais que valham a medida dada k tanto as somas das distâncias de P a r e s , quanto as diferenças das distâncias de Q a r e s .

Resolução: Os pontos procurados hão de pertencer à reta c , equidistante de a e de b , obtida com uma transversal genérica KL e com a determinação de seu ponto médio M (Figura 834), as soluções P_1 e P_2 nos lados AB e AD e os pontos Q_1 e Q_2 nos prolongamentos dos lados BC e CD do quadrado $ABCD$, com diagonais em r e s , medindo $2k$ (números 424 e 425).

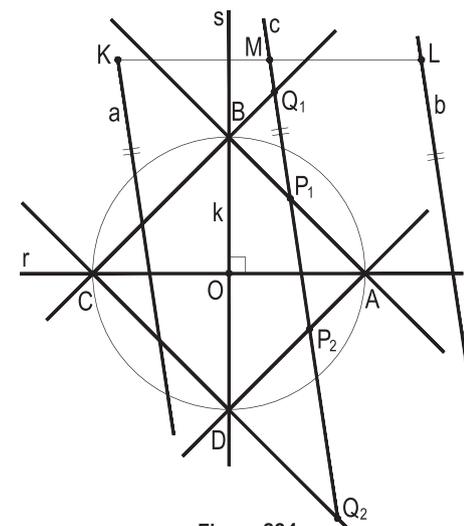


Figura 834

429 – Construir o dodecágono estrelado regular de espécie 5, inscrito na circunferência (O, OJ) dada, sendo J um dos vértices do polígono.

Resolução: Dividida a circunferência (O, OJ) em doze partes iguais, a união desses pontos de divisão, de cinco em cinco, traz o polígono pedido (Figura 835).

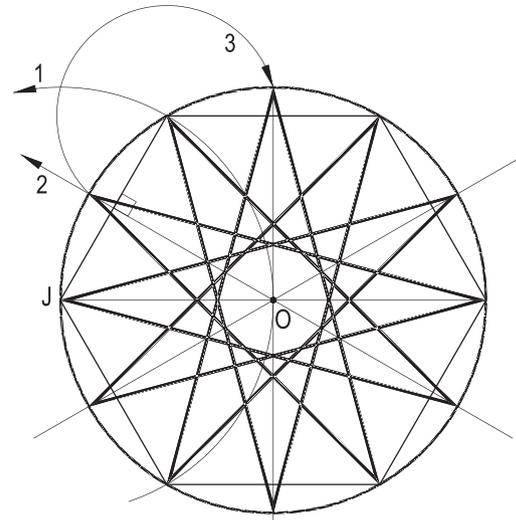


Figura 835

430 – Construir os triângulos ABC, AXY e AJK, todos retângulos em A, dadas as hipotenusas XY e JK, sabendo que C pertence à semirreta Bw, também dada.

Resolução: O vértice A há de ser o ponto comum às circunferências (M) e (N) de diâmetros JK e XY, respectivamente, com uma segunda solução, não completada na Figura 836 e AC traçada perpendicularmente a AB.

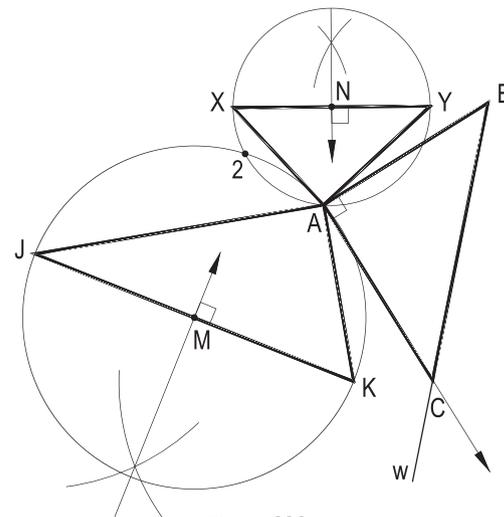


Figura 836

431 – Construir o triângulo ABC, retângulo e isósceles, sabendo que os catetos AB e AC são tangentes à circunferência dada (O), B e C sendo os pontos de contato, A pertencendo à circunferência (O'), também dada.

Resolução: Basta construir duas tangentes \bar{AT} e \bar{AT}' a (O), perpendiculares e iguais, com auxílio do quadrado $TOT'\bar{A}$, para, com a circunferência (O, $\bar{O}\bar{A}$), obter as duas soluções A_1 e A_2 para o vértice A, em (O'), e completar cada solução com catetos A_1B_1 , A_1C_1 , A_2B_2 e A_2C_2 , todos iguais ao lado daquele quadrado (Figura 837).

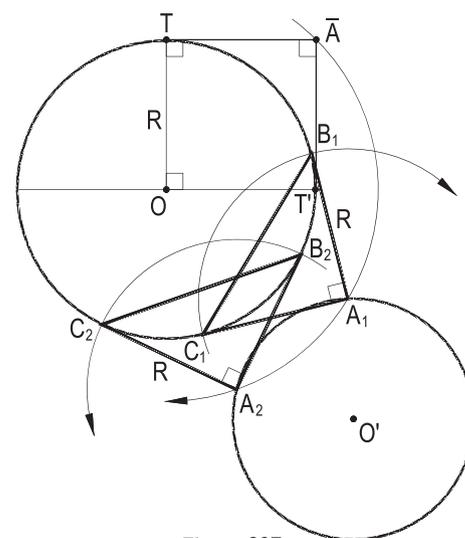


Figura 837

432 – Construir o pentágono convexo ABCDE inscrito na circunferência dada (O, OA), sabendo que seus lados AB, BC, CD, DE e EA são respectivamente iguais aos lados dos pentadecágonos regulares inscritos nessa circunferência, com espécies 1, 2, 4, 7 e 1.

Resolução: Utilizando o método de Rinaldini (número 54), para o polo J, obtêm-se os valores AB , $A\bar{C}$, $A\bar{D}$ e $A\bar{E}$ dos lados dos pentadecágonos regulares de espécies 1, 2, 4 e 7 inscritos na circunferência dada, que sucessivamente aplicados, a partir de A, definem o pentágono ABCDE pedido (Figura 838), que poderia ter outra disposição, por simetria em relação ao diâmetro $A\bar{A}$.

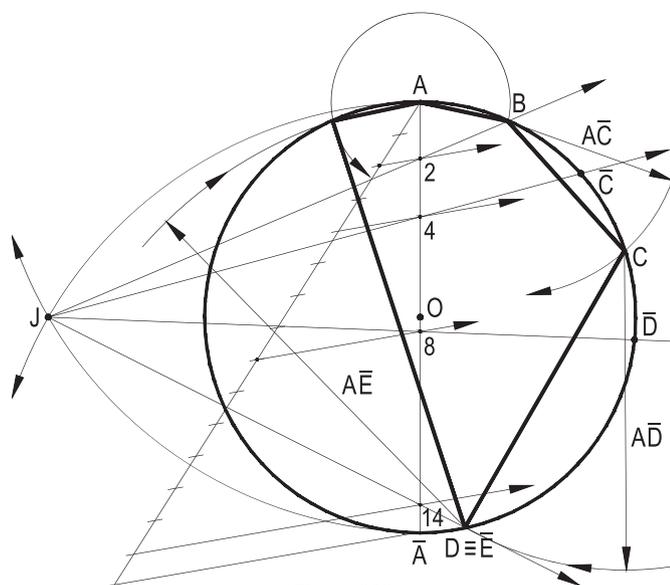


Figura 838

433 – Construir o triângulo ABC, sabendo que o ponto J, a ele interior, equidista dos lados AB e AC, equidistante, também, das paralelas a e b e das secantes r e s. Dados os vértices B e C, as retas a, b, r e s e o ângulo interno $A = 45^\circ$.

Resolução: Determina-se o ponto J, traço da reta e, paralela a a e b e delas equidistante, com a bissetriz b_1 de um dos ângulos formados por r e s. Para ser equidistante de AB e de AC, sendo interior ao triângulo, J há de pertencer à bissetriz do ângulo interno A desse triângulo, a qual deve passar (Geometria Plana, número 134) pelo ponto M médio do arco BC replemter do arco capaz de 45° para BC, o que origina a reta MJ e, então, o vértice A (Figura 839).

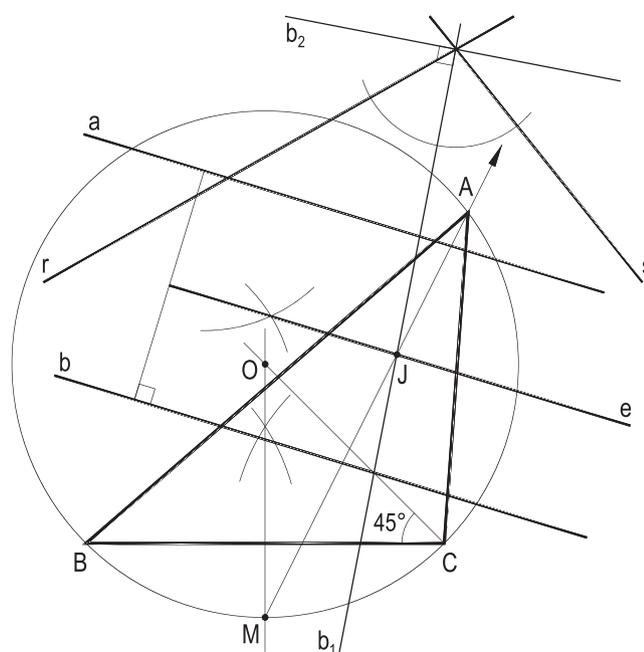


Figura 839

A interseção de e com a segunda bissetriz b_2 não serve ao problema, por ser exterior ao arco capaz e, então, ao triângulo pedido.

434 – Dados um segmento AM e uma semirreta Ax, pede-se construir o triângulo equilátero ABC, sabendo que são isogonais, nesse triângulo, as cevianas AM e AN, N pertencendo à semirreta Ax, que sucedem-se, alinhados, nesta ordem, os pontos B, M, N e C e que o ângulo que AM forma com Ax mede 20° .

Resolução: Como os lados AB e AC terão que formar também 20° com cada uma das cevianas, já que o ângulo A do triângulo mede 60° , e como, aliás, no caso, devem ser iguais essas cevianas, por ser o triângulo pedido ABC equilátero, basta fazer $AN = AM$ e replicar o ângulo $\widehat{M\hat{A}N}$, em ambos os sentidos, a partir das cevianas, para obter os lados AB e AC do triângulo pedido (Figura 840).

435 – Construir o triângulo retângulo ABC de hipotenusa BC paralela à reta d, sabendo que o ângulo $\widehat{M\hat{A}N}$ formado por suas cevianas isogonais AM e AN vale 30° , dadas a ceviana AM e a reta d.

Resolução: Os catetos terão que formar 30° com cada ceviana mais próxima, para garantir o ângulo reto A, o que proporciona os suportes dos catetos AB e AC, BC devendo conter M, traçado com a direção d (Figura 841).

São permutáveis as denominações dos vértices B e C.

436 – Construir o triângulo escaleno ABC, dadas duas cevianas isogonais AM e AN, sabendo que seu ângulo interno A vale o quántuplo do ângulo $\widehat{M\hat{A}N}$.

Resolução: Se o ângulo interno A vale o quántuplo do ângulo α formado por duas cevianas isogonais AM e AN, os lados que formam tal vértice A devem se inclinar, ambos, o dobro de α em relação a cada ceviana, o que permite traçar as semirretas Ax e Ay, suportes desses lados e, por interseção com a reta MN, obter os vértices B e C (Figura 842).

Observe-se que as denominações dos vértices B e C são permutáveis.

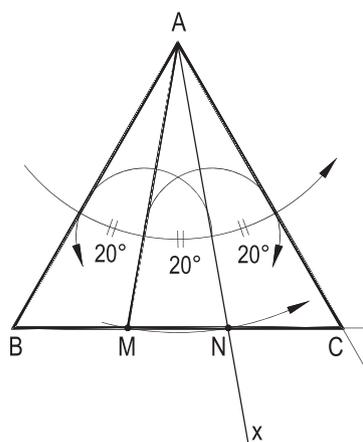


Figura 840

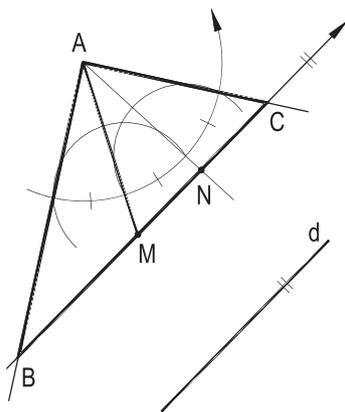


Figura 841

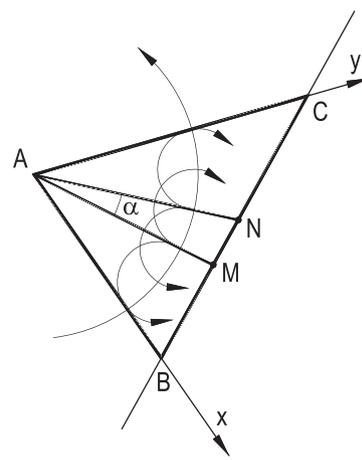


Figura 842

437 – Construir o triângulo isósceles ABC, conhecendo a medida $JL = k$ de sua base BC, dadas as semirretas Ax e Ay, suportes de duas cevianas isogonais do triângulo, externas a ele, sabendo que o ângulo interno A do triângulo mede 100° .

Resolução: Sendo o triângulo isósceles, de base BC, a bissetriz interna de seu ângulo A há de ser também a bissetriz do ângulo formado pelas semirretas dadas e, como a base BC deve ser perpendicular a essa bissetriz, a construção das semirretas Az e Aw inclinadas de 50° com tal bissetriz b_i e a aplicação da medida k sobre uma perpendicular \overline{BC} a b_i , uma simples translação desse segmento $\overline{BC} = k$, na direção dessa bissetriz, proporciona os vértices B e C sobre as semirretas Az e Aw (Figura 843).

As denominações dos vértices B e C são permutáveis.

438 – Dadas duas cevianas isogonais AM e AN de um triângulo ABC, pede-se, sem construí-lo, traçar a semirreta Ay isogonal da dada Ax, do mesmo triângulo.

Resolução: Já que coincidem as bissetrizes de todos os pares de cevianas isogonais de um mesmo vértice A de qualquer triângulo (*Geometria Plana*, número 211.2), basta transportar o ângulo α que Ax forma com AM, no sentido oposto e a partir de AN, para obter a semirreta pedida Ay (Figura 844).

439 – Dadas duas cevianas isogonais AM e AN de um triângulo ABC retângulo em A, pede-se construí-lo.

Resolução: Basta traçar a bissetriz b_1 do ângulo \widehat{MAN} e conduzir, por A, as retas inclinadas de 45° com ela (Figura 845), em sentidos opostos, para obter os suportes Ax e Ay dos catetos AB e AC, naturalmente com denominações permutáveis, B e C, situados, é claro, sobre a reta MN.

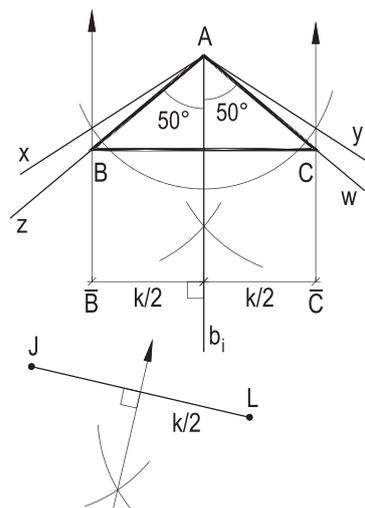


Figura 843

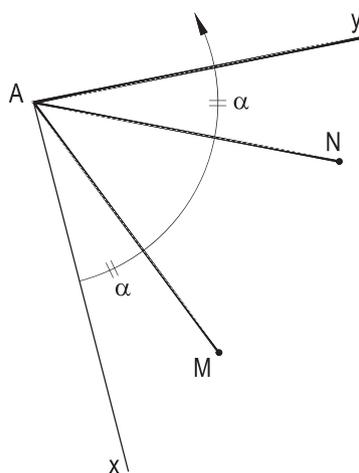


Figura 844

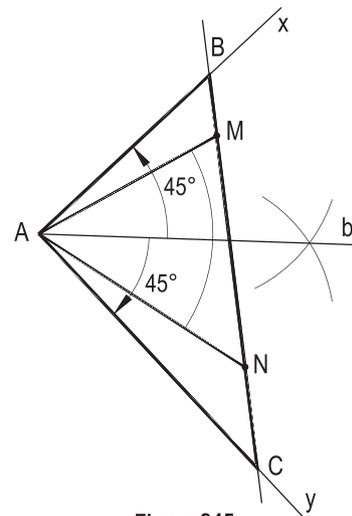


Figura 845

440 – Duas cevianas isogonais relativas ao vértice A do triângulo dado ABC têm suportes coincidentes. Pede-se determinar a posição de seu pé M.

Resolução: Para serem coincidentes, as cevianas isogonais pedidas têm de ser ou a bissetriz interna AM_1 ou a externa AM_2 , de construções imediatas (Figura 846).

441 – As retas a e b são antiparalelas em relação às retas secantes r e s. Construir a reta a, sabendo que ela pertence ao ponto dado J, de r, dadas, ainda, as retas b, r e s.

Resolução: A repetição do ângulo α traz uma reta \bar{a} e proporciona sua paralela a, por J, resolvendo a questão (Figura 847).

O procedimento permanece válido mesmo para situações particulares, como a da Figura 848, em que J é o ponto comum às retas dadas r e b.

442 – Dadas a circunferência (O) e a semirreta Jx, que a corta nos pontos A e B, pede-se construir o triângulo ABC, sabendo que o segmento JC, perpendicular a JO, é igual à média geométrica entre JA e JB.

Resolução: A medida t da média geométrica entre JA e JB se obtém com a tangente JT à circunferência (O) (*Geometria Plana*, número 241), o que proporciona duas soluções para o terceiro vértice C (Figura 849), apenas um apresentado.

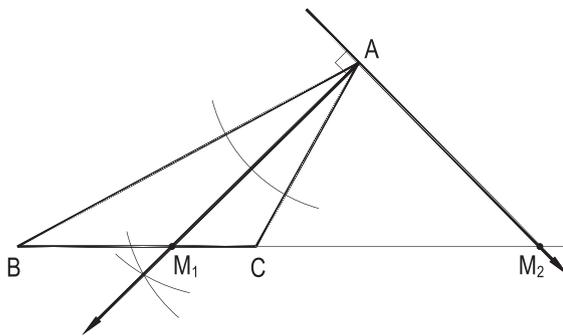


Figura 846

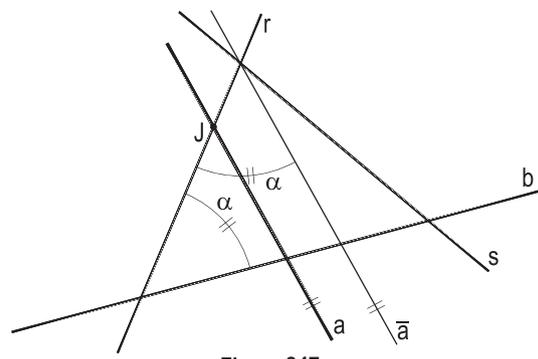


Figura 847

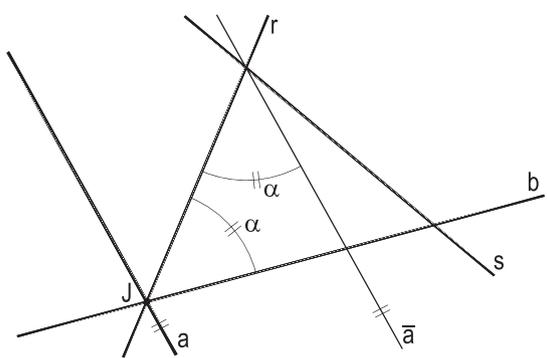


Figura 848

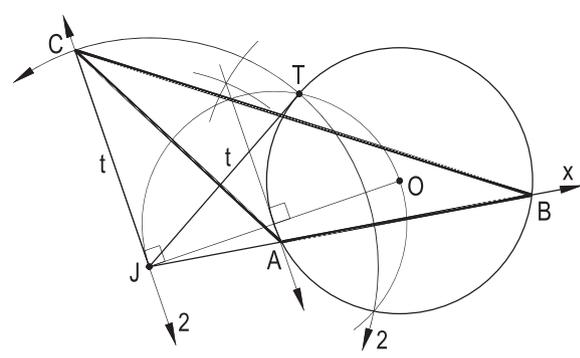


Figura 849

443 – Concorde as paralelas dadas a e b e as secantes, também dadas, x e y por dois arcos de circunferências concêntricas. Basta uma solução.

Resolução: O centro O das duas circunferências procuradas há de ser a interseção da reta e, paralela e equidistante de a e b, com uma das bissetrizes b_1 ou b_2 dos ângulos formados por x e y, para proporcionar os arcos AB e XY, uma das soluções do problema (Figura 850).

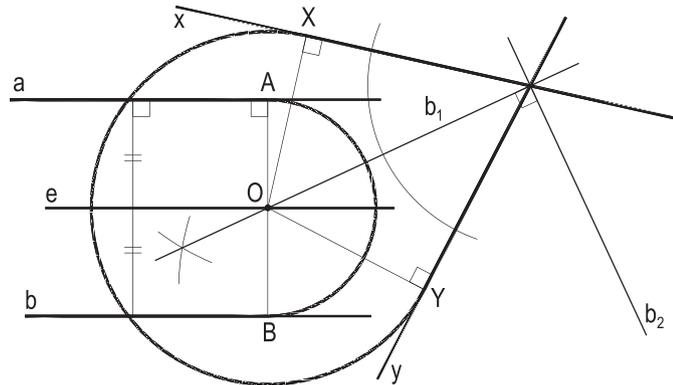


Figura 850

444 – Dadas as retas a, b e c, pede-se concordar a e b por um arco de circunferência que seja tangente à reta c.

Resolução: O centro O do arco da circunferência pedida, para garantir sua tangência à reta c, tem que pertencer a uma das bissetrizes dos ângulos formados por a e c, e, para concordar a e b, tem que pertencer à bissetriz de um dos ângulos formados por a e b (Figura 851), numa das quatro soluções do problema.

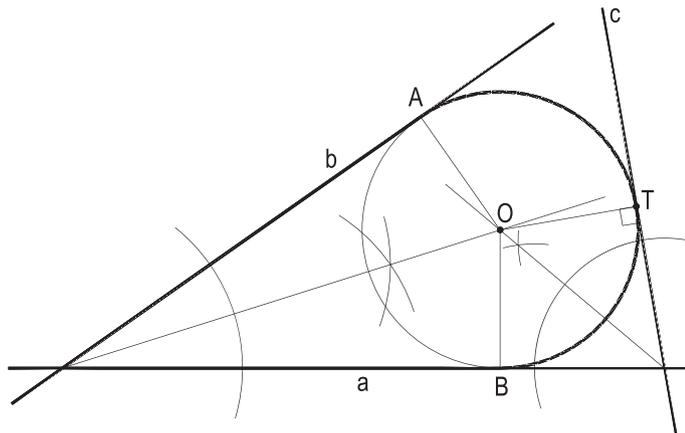


Figura 851

445 – Concordar cada uma das semirretas paralelas dadas Ax e By por uma semicircunferência que seja tangente à circunferência dada (O, r). Apresentar apenas uma solução.

Resolução: O centro J do arco da concordância pedida deve pertencer à reta e, paralela e equidistante das semirretas dadas, e, para tangenciar a circunferência (O, r), deve distar dessa circunferência um valor R igual à metade da distância entre Ax e By, ou seja, deve pertencer à circunferência (O, R + r) (Figura 852).

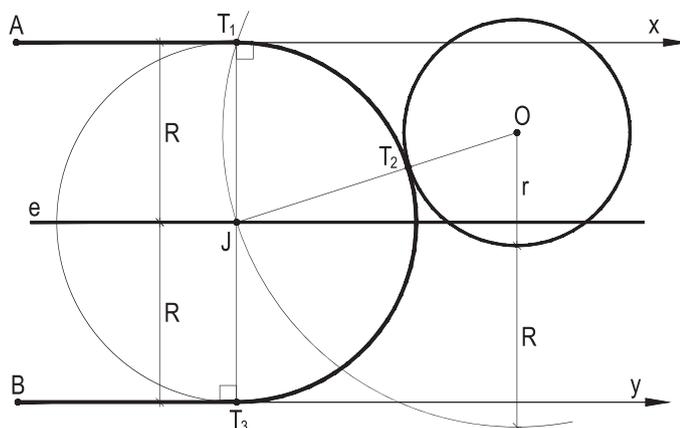


Figura 852

446 – Concordar as retas paralelas dadas a e b por um arco de circunferência que seja visto do ponto dado J sob o ângulo 60° . Basta uma solução.

Resolução: Utilizando uma circunferência auxiliar (\bar{O}) tangente a a e b e duas tangentes, a ela, $\bar{J}\bar{T}$ e $\bar{J}\bar{T}'$, inclinadas de 60° entre si, obtém-se a medida da distância d do ponto procurado J ao centro O do arco AB da concordância pedida (Figura 853), pertencente, é claro, à reta e equidistante de a e de b.

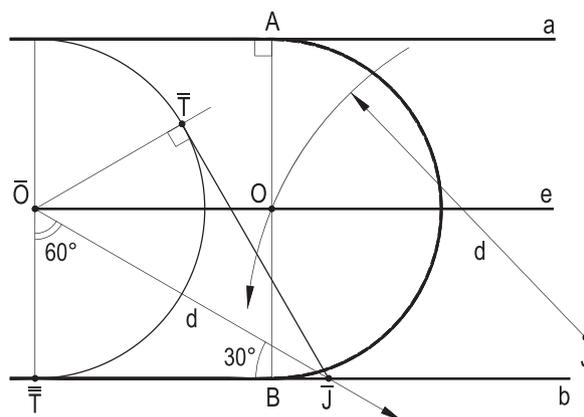


Figura 853

447 – Concordar as semirretas dadas Ax e Ay por um arco de circunferência que passe pelo ponto dado J, apresentando a concordância para as semirretas divergindo.

Resolução: Uma simples homotetia de polo A possibilita a determinação do centro O do arco T_1T_2 da concordância, a partir de uma circunferência auxiliar (\bar{O}), tangente a Ax e Ay, arbitrada, com centro, é claro, na bissetriz do ângulo formado pelas semirretas dadas (Figura 854).

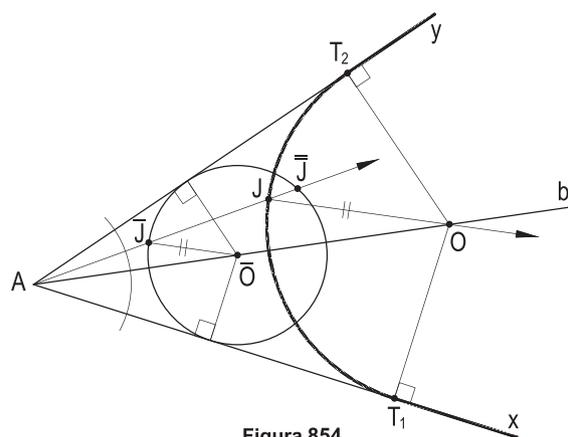


Figura 854

Nessa homotetia, que leva \bar{J} à posição dada J, não interessa o segundo ponto de corte \bar{J} , para atender à restrição imposta pelo enunciado.

448 – Construir o trapézio isósceles ABCD, circunscritível a um círculo, dadas as semirretas Ax e Dy, suportes de suas bases AB e CD.

Resolução: Determinado o centro O da circunferência inscrita, pelo corte das bissetrizes b_1 e b_2 , e marcado o ponto T de tangência do lado AD, T' , ponto de contato do lado CD, com tal circunferência, é de imediata obtenção (Figura 855), com TT' paralela às semirretas dadas.

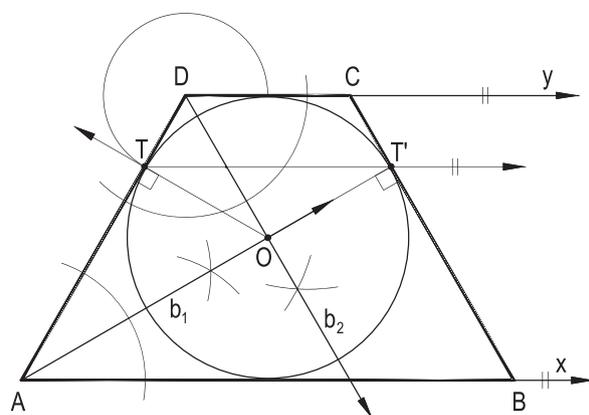


Figura 855

449 – Dado um triângulo escaleno ABC, pede-se concordar, aos pares, as retas suportes de seus lados por arcos de uma mesma circunferência que seja interior ao triângulo, tangenciando o terceiro lado, apresentando todas as soluções.

Resolução: Para que seja apenas uma circunferência que proporcione os três arcos de concordância e tendo que ser interior ao triângulo dado, seu centro há de ser o incentro I desse triângulo.

As soluções são seis, considerando-se, para cada par de lados do triângulo, arcos de concordância maiores que 180° , como, respectivamente, $\overline{B\bar{A}C}$, $\overline{A\bar{B}C}$ e $\overline{B\bar{C}A}$ nas Figuras 856, 857 e 858, ou arcos de concordância menores que 180° , como $\overline{B\bar{C}}$, $\overline{A\bar{C}}$ e $\overline{A\bar{B}}$ nas Figuras 859, 860 e 861, respectivamente.

Observe-se que, em três soluções (as três primeiras), as concordâncias fazem as semirretas concordadas convergirem, cortando-se, aos pares, em vértices do triângulo, ocorrendo o contrário nas três seguintes, com as semirretas concordadas divergindo.

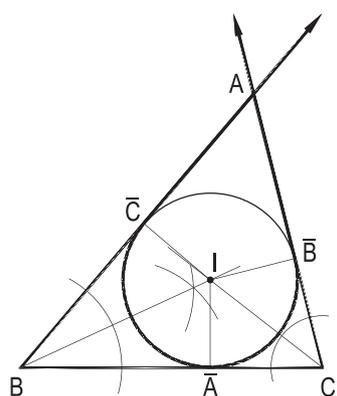


Figura 856

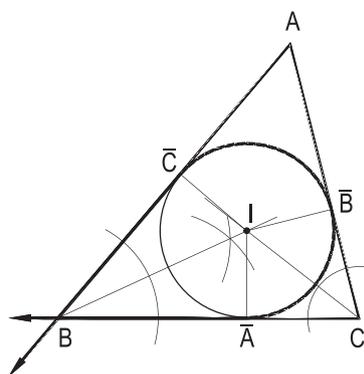


Figura 857

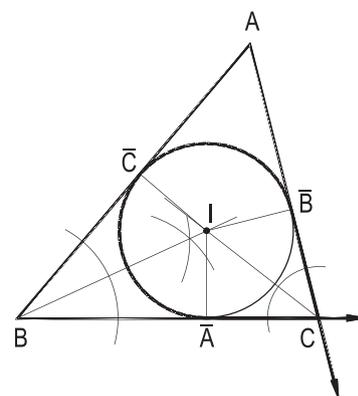


Figura 858

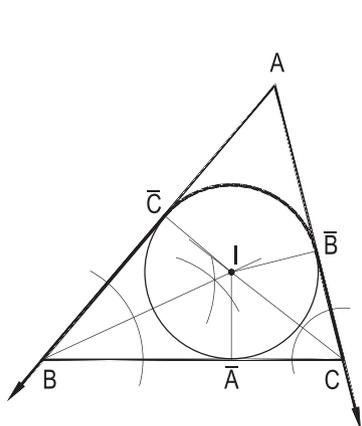


Figura 859

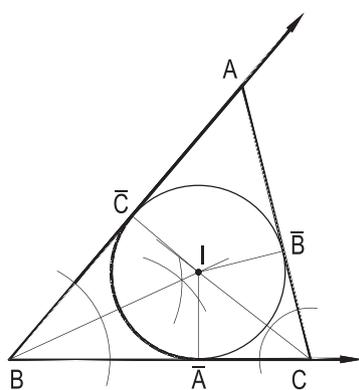


Figura 860

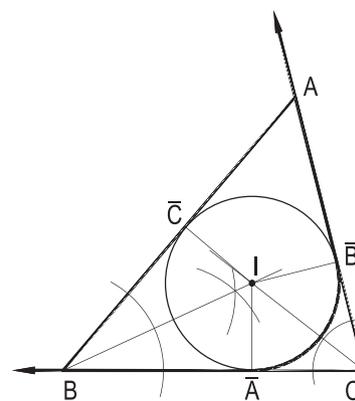


Figura 861

453 – Dadas duas semirretas paralelas Ax e By, pede-se concordá-las por três arcos de circunferência, todos com raio R, valor também dado, sabendo que A é o ponto de contato da semirreta Ax com a primeira das três circunferências e que o centro da segunda pertence à reta w, dada.

Resolução: Imediata a construção da primeira circunferência (O_1, O_1A), de raio R conhecido. Simples, também, a determinação do centro O_2 da segunda, no cruzamento da reta w com a circunferência ($O_1, 2R$) e, então, a construção de (O_2, R), com a marcação do ponto T_1 de contato dessas duas circunferências (Figura 865).

O centro O_3 da terceira vem no corte da paralela a By, dela distante R, com a circunferência ($O_2, 2R$).

A partir de O_3 vêm os pontos de contato T_3 com a semirreta By e T_2 com (O_2) e, então, completa-se a concordância pedida com os arcos AT_1 , T_1T_2 e T_2T_3 (Figura 865).

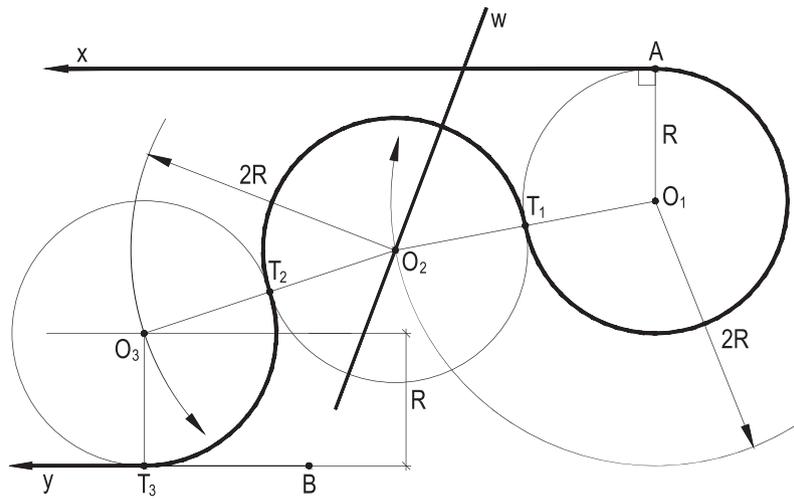


Figura 865

454 – Concordar as duas semicircunferências de diâmetros AB e CD, centros O_1 e O_2 e raios R e r, dadas, por um arco de circunferência que contenha o ponto B.

Resolução: O centro O_3 do arco da concordância BT é obtido no cruzamento da reta O_1B com a mediatriz m do segmento $O_2\bar{B}$, \bar{B} obtido com $B\bar{B} = r$, garantindo a igualdade dos raios O_3B e O_3T para o arco concordante BT (Figura 866).

O ponto de concordância T vem com a reta O_3O_2 .

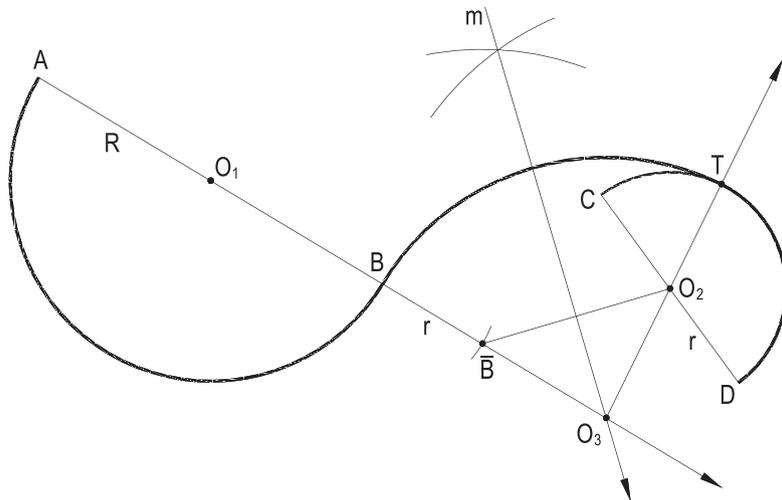


Figura 866

455 – Dado um quadrado ABCD, considere as circunferências de centros A e C e raios iguais à metade do lado do quadrado e as concorde por arcos de 90° de circunferências iguais àquelas, com centros B e D e interiores ao quadrado.

Resolução: Simples a construção pela determinação da mediatriz m dos lados AD e BC, para a obtenção dos quadrantes MN e PQ (Figura 867).

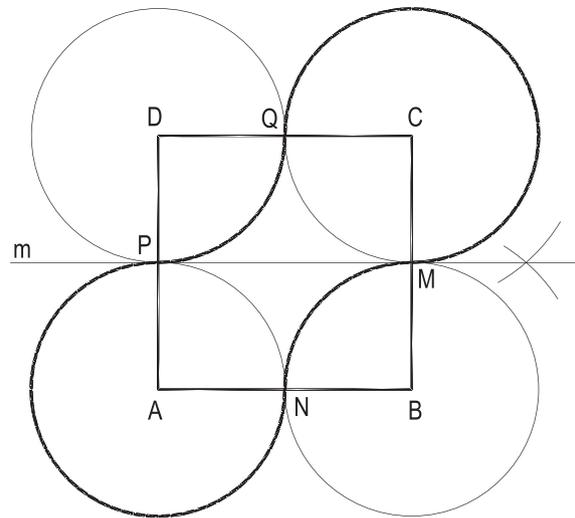


Figura 867

456 – Concordar as circunferências dadas (O, R) e (O', R') por dois arcos de circunferências iguais à segunda, que sejam, ambos, maiores que a metade dessas circunferências.

Resolução: Os centros C_1 e C_2 dos dois arcos de concordância são obtidos com os cruzamentos das circunferências $(O, R + R')$ e $(O', 2R')$ (Figura 868), aproveitando os maiores arcos AB e CD dessas circunferências (C_1) e (C_2), A, B, C e D sendo os pontos de concordância.

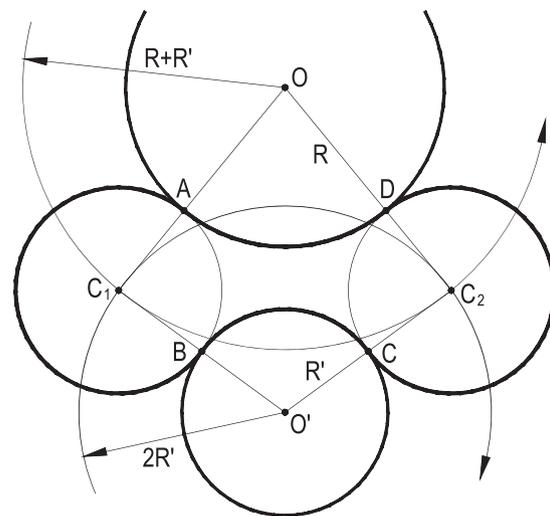


Figura 868

457 – Concordar a reta a e a circunferência (O, R) , dadas, por dois arcos de circunferência iguais, de raio R' , dado, tudo no semiplano com origem na reta a , contendo o ponto O.

Resolução: Os centros A e B dos arcos das concordâncias são os pontos de corte da circunferência $(O, R + R')$ com a reta a' , distante R' de a , no semiplano considerado (Figura 869). T e T', respectivamente, nas retas OA e OB, T_1 e T_2 pés das perpendiculares por A e por B à reta a são os pontos de concordância.

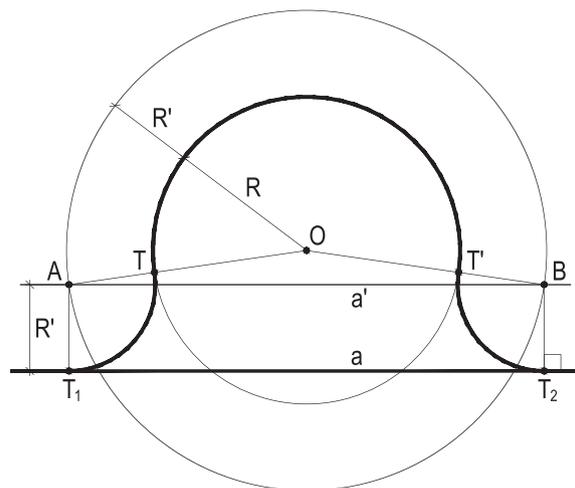


Figura 869

458 – Dada a coroa circular de centro O e raios R e $3R$, pede-se concordar suas circunferências limítrofes por arcos de circunferências de raio R , e centros pertencendo à reta dada a , conduzida pelo ponto O , apresentando apenas uma solução.

Resolução: Traçada a circunferência $(O, 2R)$, por seus cortes com a reta a , obtêm-se os centros O_1 e O_2 dos arcos da concordância pedida (Figura 870), todos com diâmetro medindo $2R$.

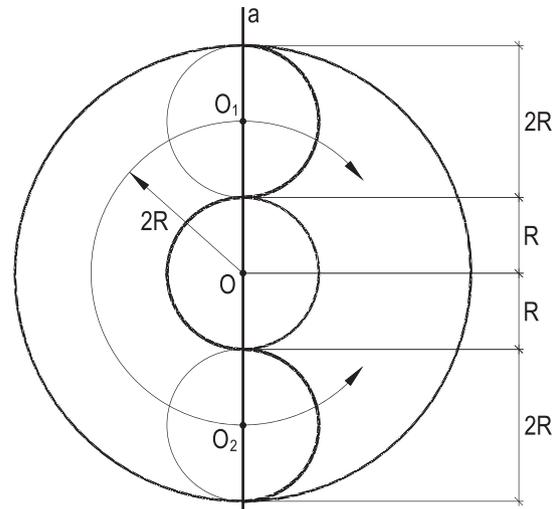


Figura 870

459 – Concordar as circunferências iguais (O, R) e (O', R) , dadas, por um arco de circunferência de raio dado k , correspondendo a um ângulo central maior que 180° . Basta uma solução.

Resolução: O centro C do arco da concordância é o ponto de corte das circunferências $(O, R + k)$ e $(O', R + k)$ (Figura 871).

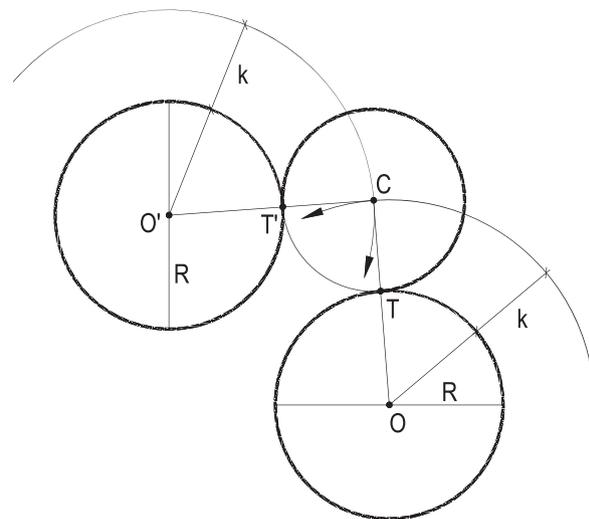


Figura 871

460 – Concordar as duas circunferências dadas (O) e (O') , iguais e tangentes exteriormente no ponto A , por um arco de circunferência, parte de uma oval perfeita de quatro centros, dos quais O e O' sejam os primeiros.

Resolução: Obtido o vértice \bar{O} do triângulo equilátero $OO'\bar{O}$, vêm os pontos de concordância T e T' sobre as retas $\bar{O}O$ e $\bar{O}O'$, do arco construído TT' , de centro \bar{O} , com as circunferências dadas (Figura 872).

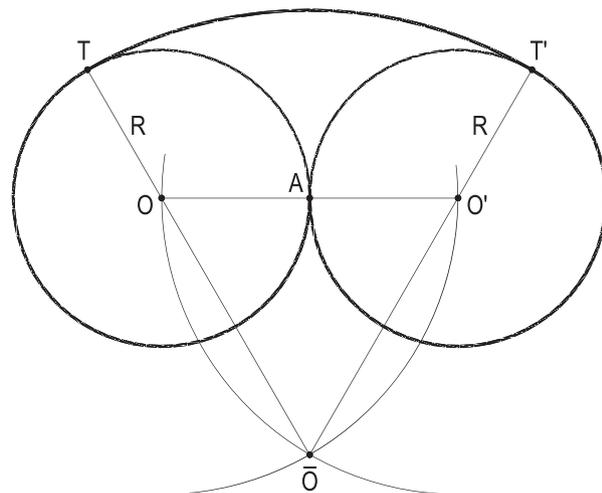


Figura 872

461 – Dado o triângulo equilátero ABC, por seu lado BC, A abaixo de BC, considere as três circunferências iguais (A), (B) e (C), tangentes exteriormente duas a duas, e construa duas ovais perfeitas de quatro centros, a primeira aproveitando A e B como centros e a segunda A e C como centros e a segunda A e C.

Feito isso, concorde essas duas ovais por um arco de uma circunferência igual às três primeiras e tangente exteriormente a (B) e a (C), aproveitando seu menor arco.

Resolução: Construídas as duas ovais, a quarta circunferência, que faz a concordância pedida, tem seu centro D obtido com paralelas CD e BD a AB e AC e seus pontos de concordância T_1 e T_2 nas retas DB e DC (Figura 873).

462 – Dadas as circunferências iguais (O_1) e (O_2), tangentes à reta dada r, nos pontos dados T_1 e T_2 , pede-se construir a circunferência (O_3), igual àquelas, tangente exteriormente a elas e exterior à reta r, bem como a reta s, tangente a (O_3), paralela a r e exterior às duas circunferências dadas para, em seguida, concordar (O_1) e (O_3) com as retas r e s, a concordância dando sentidos contrários às semirretas assim formadas.

Resolução: O centro O_3 da terceira circunferência vem com o corte de duas outras concêntricas com (O_1) e (O_2) e raios iguais aos dobros destas.

Para a mesma figura, há duas soluções iguais, pelas inversões dos sentidos das semirretas de origens T_1 e T_3 , com suportes r e s, apenas uma apresentada na Figura 874.

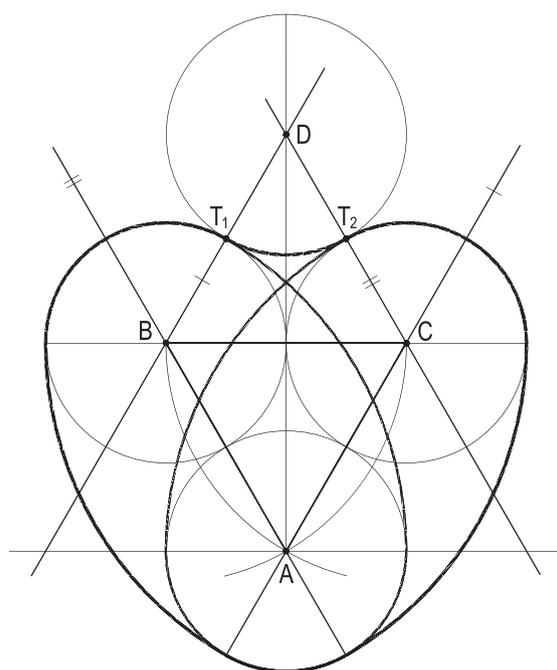


Figura 873

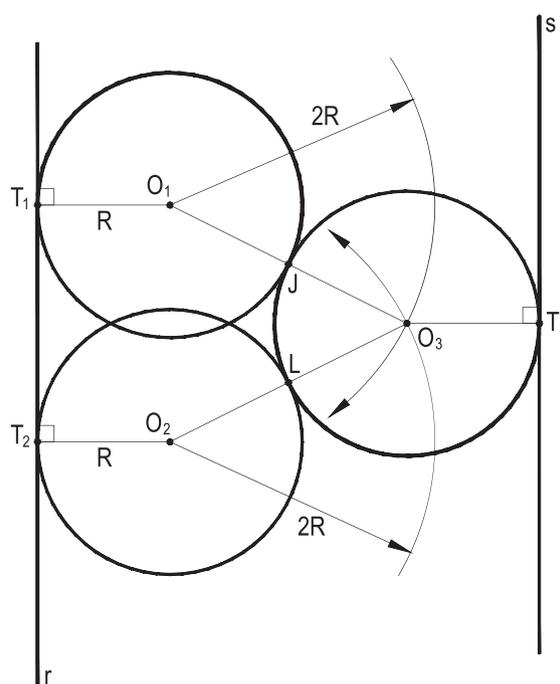


Figura 874

463 – Dados os triângulos equiláteros iguais ABJ e BCL , de lados AB e BC colineares, pede-se construir as circunferências neles inscritas e uma terceira tangente exteriormente a elas, nos pontos T_1 e T_2 , respectivamente, dos lados BJ e BL , para, enfim, concordar as três entre si e com duas semirretas divergentes, ambas tendo por suporte a reta AC .

Resolução: As alturas AT_1 e CT_2 de cada um dos triângulos dados cortam-se, produzindo o centro O da circunferência que concorda as duas inscritas, permitindo o traçado dos arcos T_1T_2 , de (O) , e T_1M e T_2N nas inscritas nos triângulos dados, resolvendo a questão (Figura 875).

464 – Dadas duas semicircunferências de diâmetros colineares AB e AC , tangentes internamente em A , pede-se concordá-las por um arco de circunferência de raio dado k que deixe o ponto B em seu exterior.

Resolução: Marcados sobre a reta AB , os segmentos $A\bar{A}$, exterior ao segmento AB , e $B\bar{B}$, interior, ambos medindo o valor dado k , o centro \bar{O} do arco de concordância T_1T_2 há de ser o cruzamento das circunferências $(O, \bar{O}\bar{B})$ e $(O', O'\bar{A})$, O e O' sendo, respectivamente, os médios de AB e de AC . Os pontos de concordância T_1 e T_2 ficam, então, situados, nas retas $O\bar{O}$ e $O'\bar{O}$ (Figura 876).

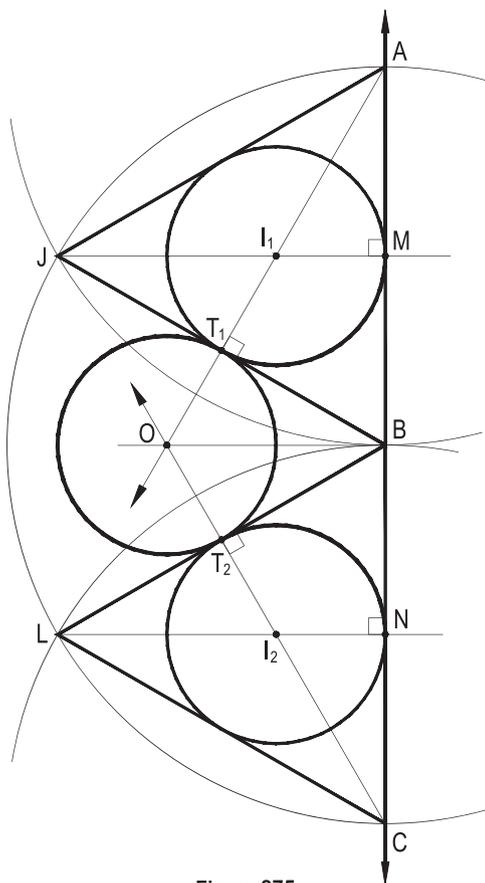


Figura 875

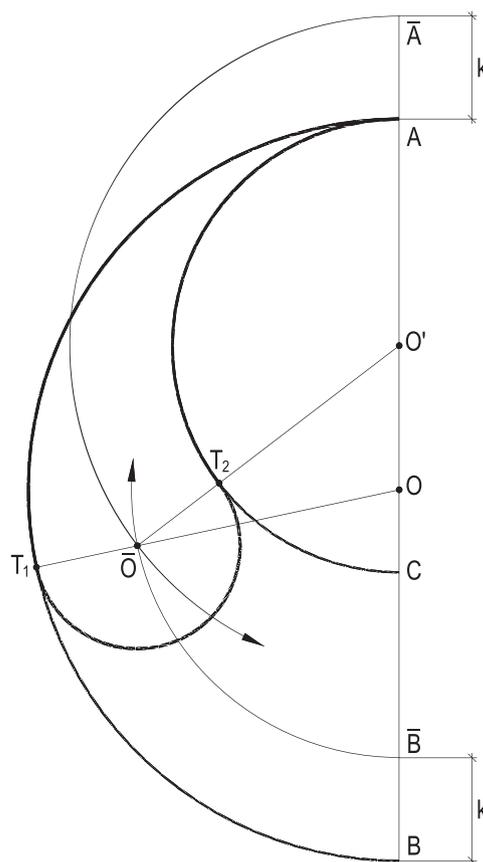


Figura 876

465 – Dada a circunferência (O, OA), considere a espiral de Arquimedes, dextrógira, de polo O pertencente ao eixo referencial dado XY, e primeira espira completada no ponto A, para construir essa espira, o triângulo equilátero OAJ e a circunferência a ele circunscrita apresentando apenas uma solução.

Resolução: Conhecido o passo OA da espiral, tal como detalhado nos itens 79 e 80 anteriores, com sua divisão em oito partes iguais, obtêm-se os pontos correntes 1, 2, 3, 4..., etc. da curva, traçada então.

Construída a primeira espira OA da curva, fica simples, então, a construção do triângulo equilátero OAJ pedido (Figura 877), J escolhido acima do eixo XY, bem como da circunferência (C) a ele circunscrita, seu centro C sendo a interseção das alturas por J e por A.

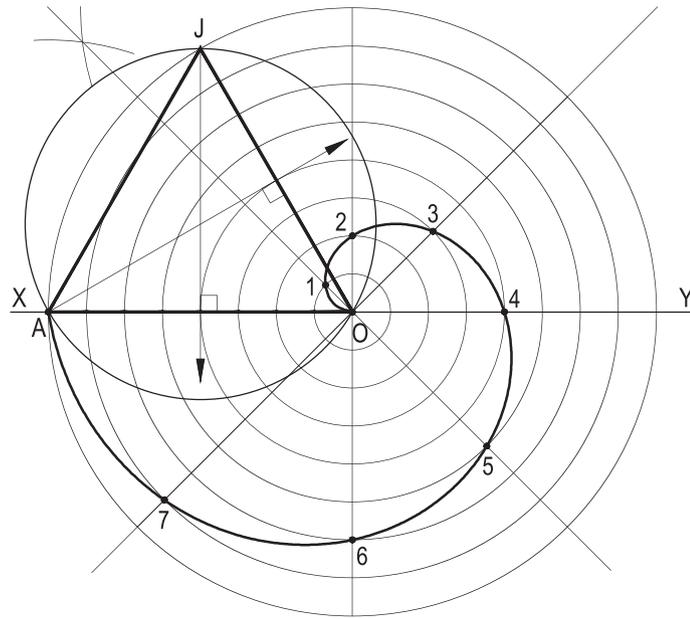


Figura 877

466 – De uma espiral aritmética levógira são dados os pontos A e D de sua primeira espira, os raios vetores \vec{OA} e \vec{OD} formando o ângulo $\widehat{DOA} = 135^\circ$.

Pede-se determinar os pontos B e C, cujos raios vetores dividam \widehat{DOA} em três partes iguais, e construir o trecho ABCD da curva.

Resolução: Dividido o ângulo dado \widehat{DOA} em três partes iguais, pelas perpendiculares w a OA e z a OD, criando, com isso, os ângulos \widehat{AOB} , \widehat{BOC} e \widehat{COD} , todos medindo 45° , para garantir a progressão aritmética angular, e determinada a diferença $\overline{D\bar{A}}$ entre as amplitudes dos vetores \vec{OD} e \vec{OA} , a aplicação de sua terça parte $\overline{A\bar{B}}$ em z e de seus dois terços $\overline{A\bar{C}}$ em w (Figura 878) traz os pontos procurados B e C.

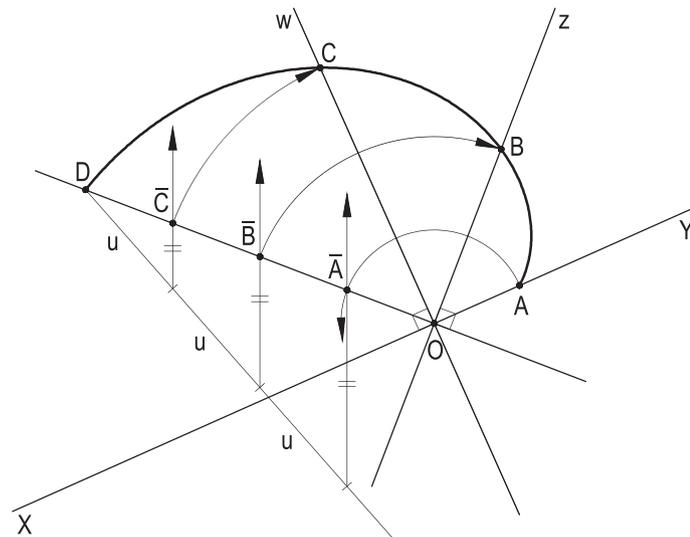


Figura 878

467 – Dado um sistema cartesiano, considere o ponto $A_1 (0, k)$ e determine os pontos A_2, A_3, A_4 e A_5 de uma espiral levógira gerada pelo ponto A_1 , tal que os raios vetores OA_2, OA_3 e OA_4 e OA_5 , com origens na origem cartesiana O , se sucedam a cada 30° , com amplitudes em progressão aritmética de razão k , e construa o trecho A_1A_5 da curva.

Resolução: As marcações dos termos $2k, 3k, 4k$ e $5k$ da progressão aritmética estabelecida sobre as retas inclinadas sucessivamente a cada 30° (Figura 879) trazem os pontos A_2, A_3, A_4 e A_5 , que, então, resolvem a questão.

468 – Num sistema cartesiano de origem O , é dado o ponto $A (-k, 0)$, inicial de uma espiral especial, dextrógira, que se pede construir pela marcação de seus pontos B, C e D , respectivamente, nos raios vetores que se sucedem com inclinações de $90^\circ, 45^\circ$ e $22^\circ 30'$, em relação a cada anterior, obedecendo a uma progressão geométrica de razão 2 , quanto a suas amplitudes, a primeira referente ao ponto A .

Construa, então, a circunferência de diâmetro AD .

Resolução: As determinações das bissetrizes b_1 e b_2 , respectivamente, do ângulo reto \widehat{xOy} e do ângulo que b_1 forma com o eixo Ox , para atender à sequência angular imposta, e as marcações, nelas, dos valores $2k, 4k$ e $8k$ (Figura 880), trazem os pontos B, C e D , que solucionam o problema, pela precisa construção da circunferência (M) , de diâmetro AD .

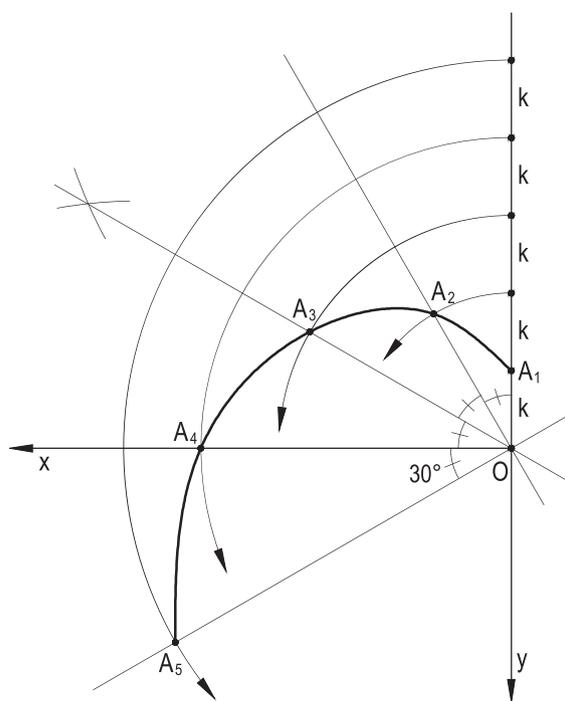


Figura 879

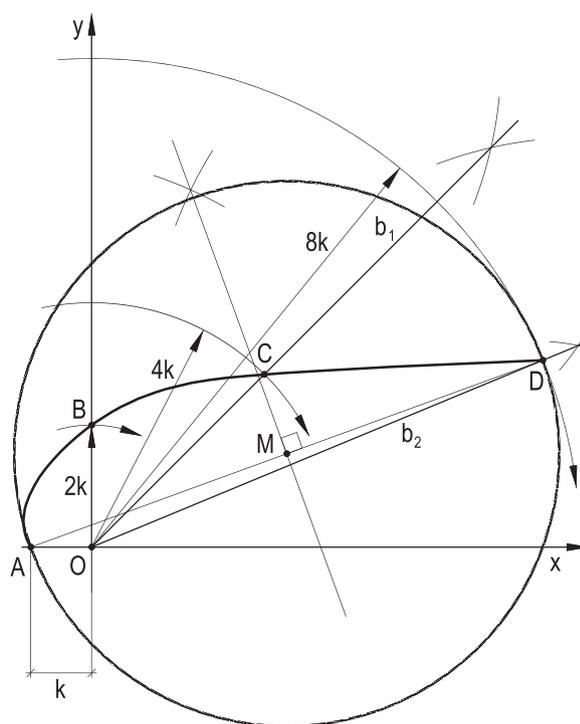


Figura 880

469 – Construir o trecho da espiral dextrógira formada pelos extremos A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 e A_6 dos raios vetores $OA_1, OA_2, OA_3, OA_4, OA_5$ e OA_6 , que se sucedem angularmente a cada 30° a partir da reta referencial dada xy , por O , com amplitudes iguais, respectivamente, ao valor inicial OA_1 dado e as demais segundo uma progressão aritmética de razão igual a OA_1 .

Resolução: Traçadas as retas, por O , repetindo a inclinação de 30° estabelecida, vêm os pontos pedidos, marcados consecutivamente sobre essas retas, distantes de O os valores $k = OA_1, 2k, 3k, 4k, 5k$ e $6k$ (Figura 881).

470 – Dados dois retângulos áureos $ABCD$ e $ABJK$, iguais, pede-se construir dois trechos de três quadrantes cada, de duas espirais áureas iguais, ambas iniciando-se no ponto A , uma dextrógira, outra levógira, concluindo-se os dois trechos num mesmo ponto, situado sobre o lado comum AB , para, então, construir as tangentes às curvas inclinadas de 45° em relação à reta AB .

Resolução: Construção simples, pelas decomposições sucessivas dos retângulos dados em quadrados e novos retângulos áureos (ver número 89), formando os trechos $A123$ e $A543$ das espirais áureas pedidas, permitindo os traçados das retas t_1, t_2, t_3, t_4, t_5 e t_6 , tangentes, cada uma a cada um dos seis quadrantes construídos (Figura 882).

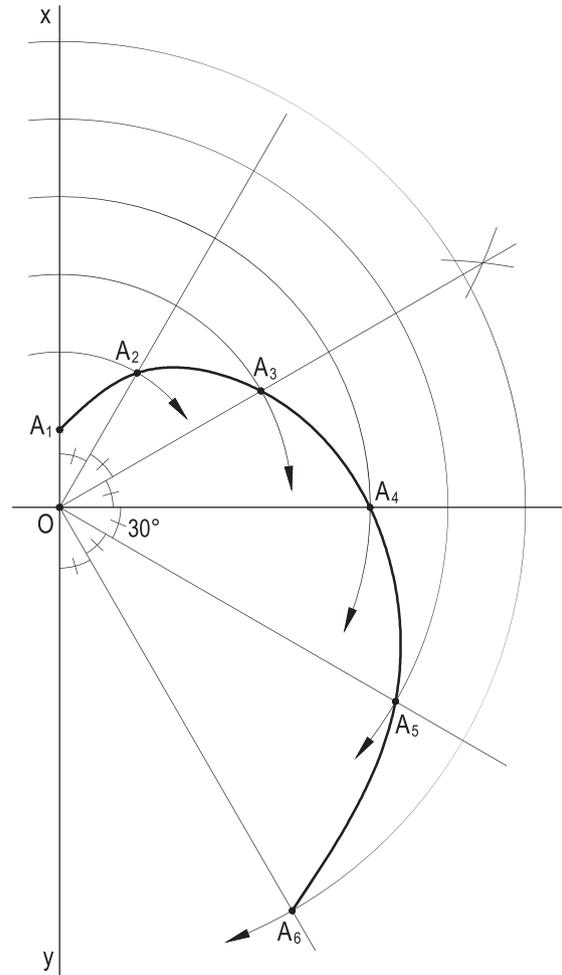


Figura 881

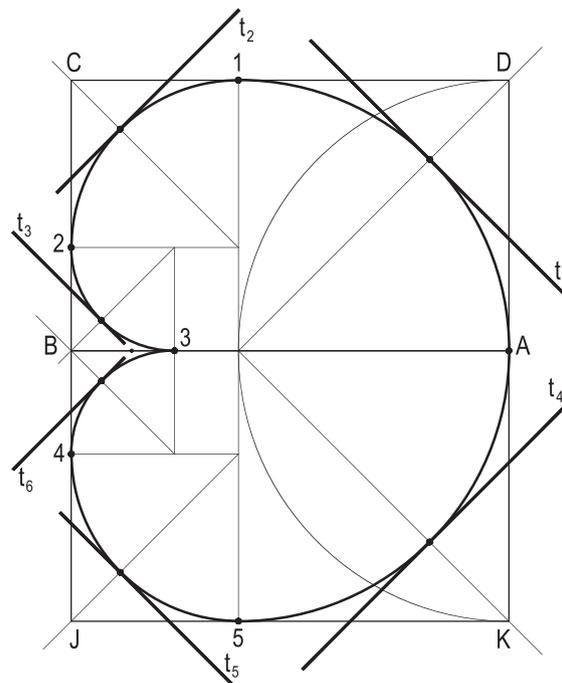


Figura 882

471 – Construir o trecho da falsa espiral de dois centros A e B, dados, com sentido horário, limitado, em sua primeira espira, entre o ponto inicial B e o ponto de contato da tangente paralela à reta dada r, no segundo arco da espiral.

Resolução: O ponto de contato T, extremo do trecho pedido, vem com a perpendicular a r por B, proporcionando a tangente t (Figura 883).

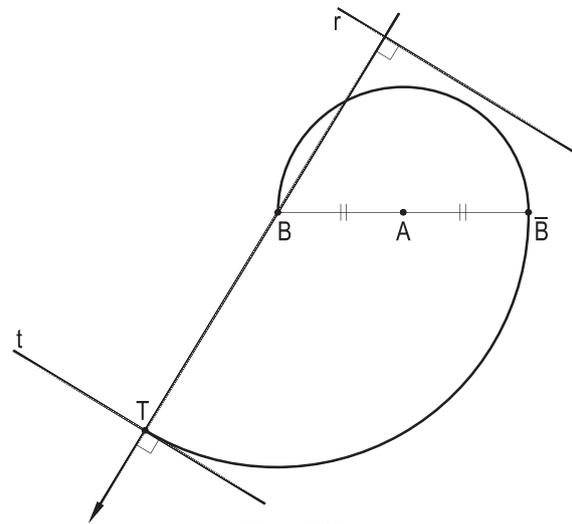


Figura 883

472 – Dado o triângulo equilátero ABC, pede-se desenhar o trecho da primeira espira da falsa espiral de centros A, B e C, com sentido anti-horário, limitado entre os pontos C e J, este pertencente à tangente t à curva, em seu arco inicial de centro B, e paralela à reta dada r.

Resolução: Obtido o ponto de contato T, com a perpendicular, por B, a r, vem a tangente t, que traz o extremo J no corte de t com o arco de 120° , de centro C e raio C2 (Figura 884).

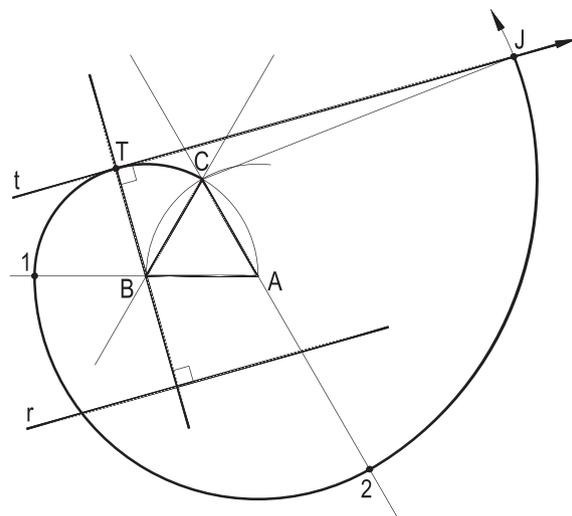


Figura 884

473 – Dado o quadrado ABCD, pede-se construir o trecho da primeira espira da falsa espiral de centros A, B, C e D, de sentido horário, limitado entre o ponto inicial D e o de contato T com a tangente à curva paralela ao lado AB, situado no quadrante de centro D.

Resolução: A tangente t é obtida com a normal DT, perpendicular a AB (Figura 885).

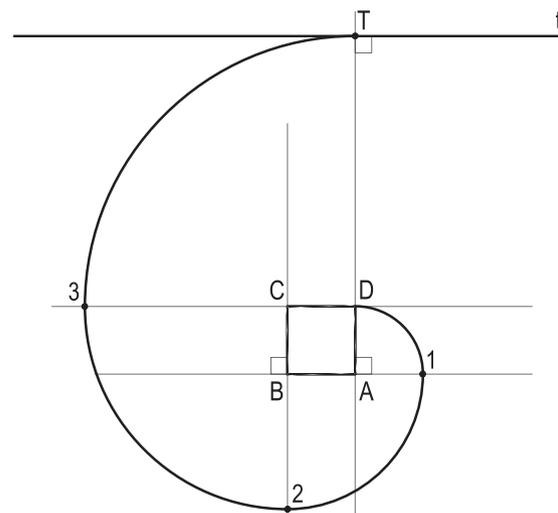


Figura 885

474 – De uma cicloide normal de diretriz r e geratriz (O, OA) , dadas, pede-se determinar a nova posição P do ponto gerador A , para o centro instantâneo dado A' , bem como traçar a tangente à curva nesse ponto P .

Resolução: A determinação do arco $A'P$ de comprimento AA' (ver número 106) traz o ponto P , e, então, a normal n e a tangente pedida t (Figura 886).

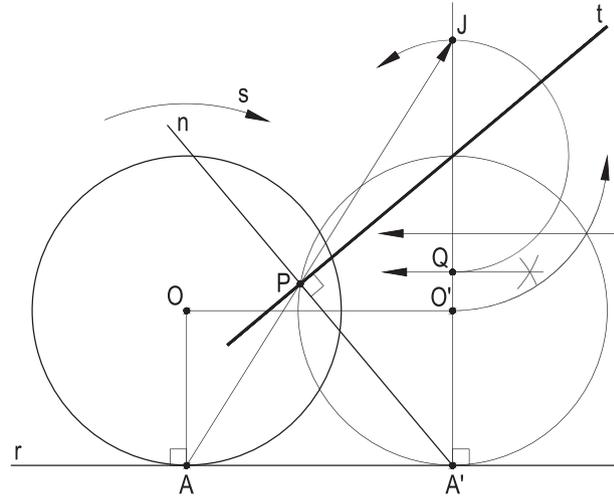


Figura 886

475 – O ponto dado A , gerador da cicloide normal de diretriz d e geratriz (O, OA) , também dada, alcança a posição A_1 após um giro de 90° da geratriz no sentido horário.

Pede-se determinar A_1 e construir a tangente à curva nesse ponto.

Resolução: Basta retificar um quadrante da geratriz, para retornar-se ao problema anterior (Figura 887).

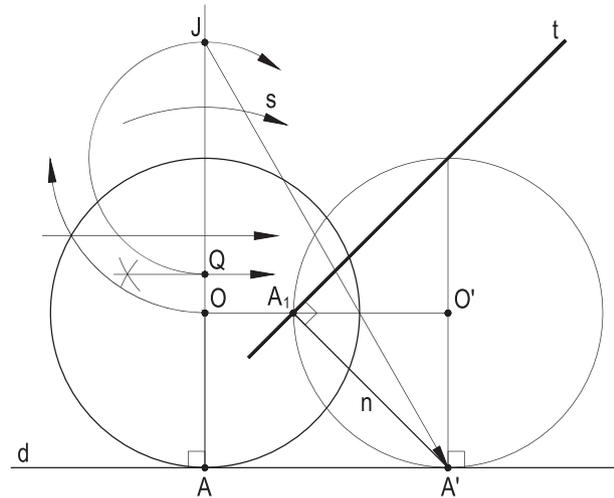


Figura 887

476 – Para os mesmos dados do problema anterior, pede-se determinar o ponto M , médio do primeiro passo, e a tangente t , nele, à curva, sem traçá-la.

Resolução: Com a mesma construção anterior, retificada a semicircunferência geratriz, vem o ponto A'' , que traz M e t pedidos, t , naturalmente, paralela a d (Figura 888).

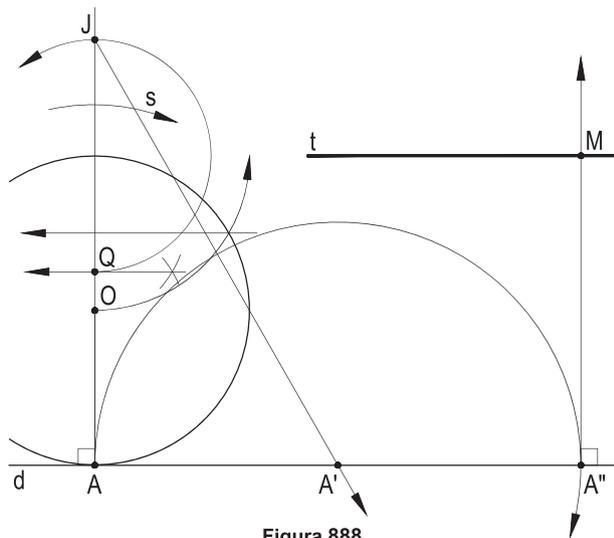


Figura 888

477 – A circunferência dada (O, OA) gira, sem deslizar, sobre a reta fixa d, também dada. Pede-se determinar seis pontos da curva descrita pelo ponto A, a intervalos iguais, em sua primeira espira, construir essa curva e as tangentes a ela naqueles seis pontos.

Resolução: As construções são as detalhadas no item 108, após dividir a circunferência dada em seis partes iguais, até o extremo A_6 da curva pedida (Figura 889).

478 – A circunferência dada (O, OA) gira, sem deslizar, sobre a reta fixa d, também dada, descrevendo a primeira metade da cicloide normal correspondente, passando, em intervalo seguinte, de amplitude linear metade, a deslizar sobre d, sem girar, para, afinal, voltar a girar, sem deslizar, no mesmo sentido, sobre d, em novo intervalo linear igual ao inicial. Pede-se construir a trajetória do ponto A, durante esses três intervalos.

Resolução: A trajetória será composta por dois arcos de cicloide normal, iguais a meio ciclo, contando, entre eles, com um segmento de reta MN, paralelo a d, MN medindo a metade de AA_1 (Figura 890).

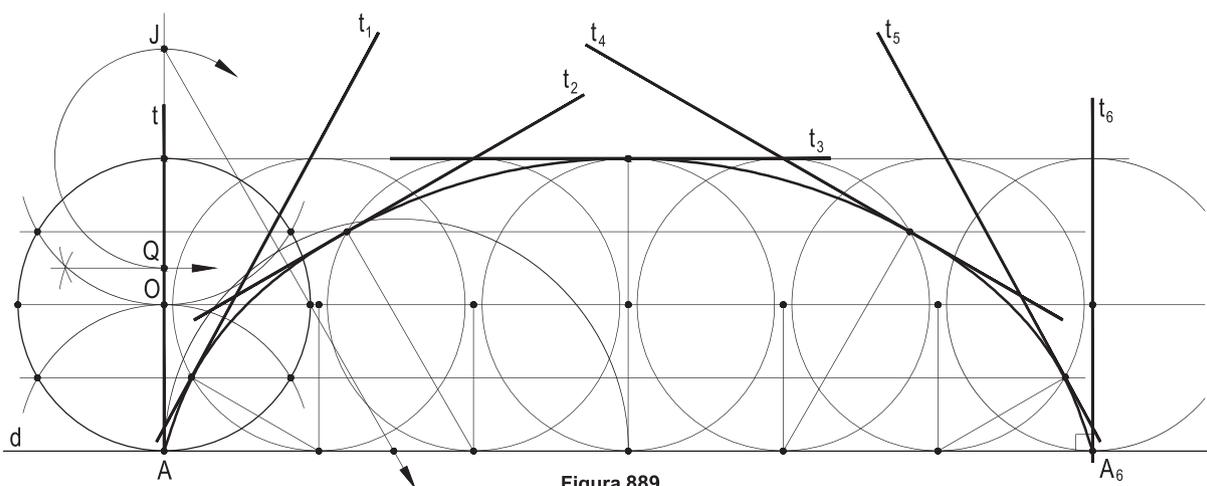


Figura 889

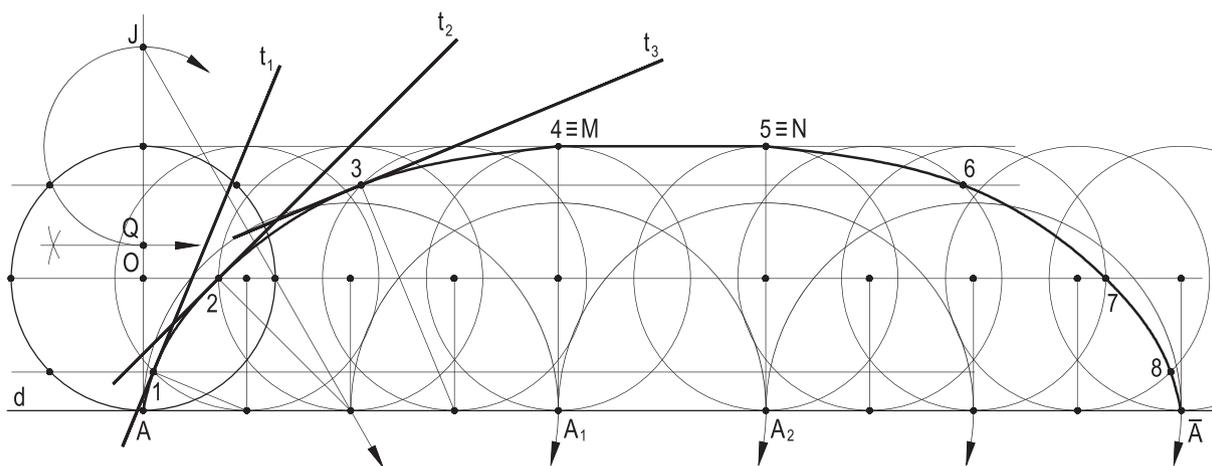


Figura 890

479 – A reta t tangencia uma cicloide normal de diretriz d no ponto T . Dados t , T e d , pede-se construir a tangente \bar{d} a essa cicloide, paralela a d , no ciclo considerado.

Resolução: A normal n , em T , traz A e a mediatriz m da corda TA dá o centro O da geratriz, que, retificada, proporciona o ponto gerador inicial \bar{A} e o centro instantâneo M da posição média do primeiro passo da cicloide (Figura 891).

A reta \bar{d} , paralela à diretriz d , é a tangente pedida, no ponto \bar{T} , médio desse ciclo da cicloide.

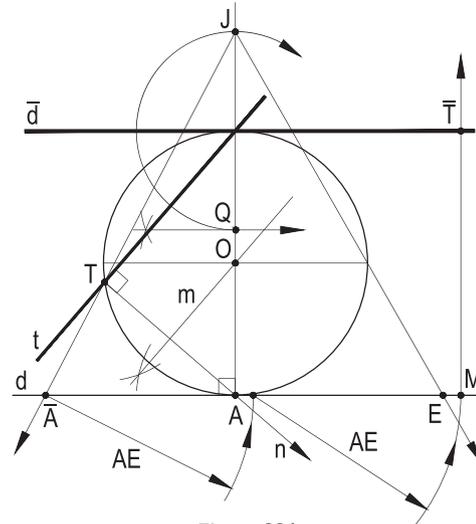


Figura 891

480 – Uma cicloide normal de diretriz d é tangente à reta t no ponto T . Dados d , t e T , pede-se construir a tangente à curva paralela à reta s , também dada.

Resolução: Tal como no problema anterior, determina-se a geratriz (O, OA) e, utilizando o detalhado no item 107, a perpendicular n , por A , à reta s traz o ponto T' , que, transladado na direção d , numa amplitude igual à retificação do arco TT' proporciona o centro instantâneo A' da geratriz ($O', O'A'$), na posição correspondente à tangente pedida r , no ponto \bar{T}' , transladado de T' (Figura 892).

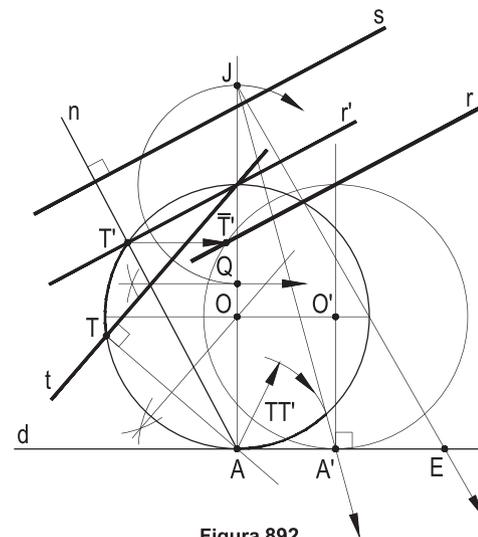


Figura 892

481 – A reta dada t é tangente a uma cicloide normal de diretriz dada d , gerada por uma circunferência (O) de raio R , dado. Determinar o ponto T de contato de t e a posição correspondente da geratriz.

Resolução: O traçado de uma circunferência auxiliar (\bar{O}, R) igual à geratriz proporciona a normal \bar{n} e o ponto \bar{T} de contato da tangente \bar{t} , paralela a t , que dá, com $\bar{T}T$ paralelo a d , o ponto de contato T e, então, a circunferência (O) pedidos (Figura 893).

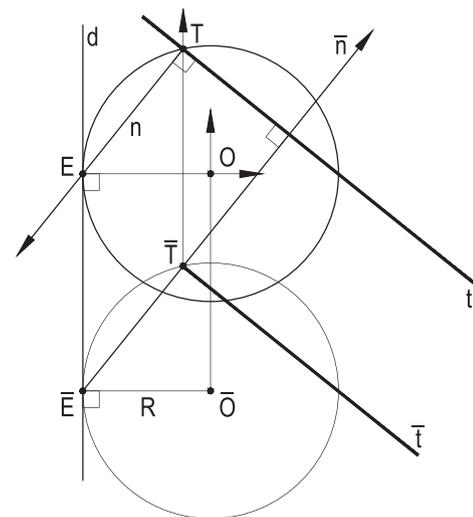


Figura 893

482 – De uma cicloide normal são dados uma tangente t , seu ponto de contato T , a direção w de sua diretriz e o valor R de sua geratriz. Pede-se determinar a diretriz d .

Resolução: Aplicados numa perpendicular p a w os segmentos $EF = FG = R$, suas translações, na direção da normal n , entregam os pontos \bar{G} e \bar{E} e o centro O da geratriz e , então, a diretriz d (Figura 894), por \bar{E} .

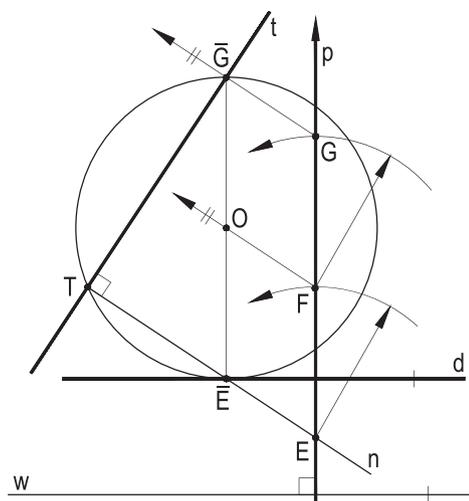


Figura 894

483 – Mesmo problema, dados T , t e w , sabendo que o centro O da geratriz no instante em que a curva tangencia t equidista das retas dadas a e b .

Não é dado o valor do raio da geratriz.

Resolução: O centro O da geratriz no instante do contato em questão é o ponto de corte de uma das bissetrizes dos ângulos formados por a e b com a mediana TM do triângulo auxiliar TEF , retângulo em T , EF perpendicular a w (duas soluções). OP , P na reta TE , é o raio da geratriz. A diretriz d é a perpendicular d a OP , por P (Figura 895).

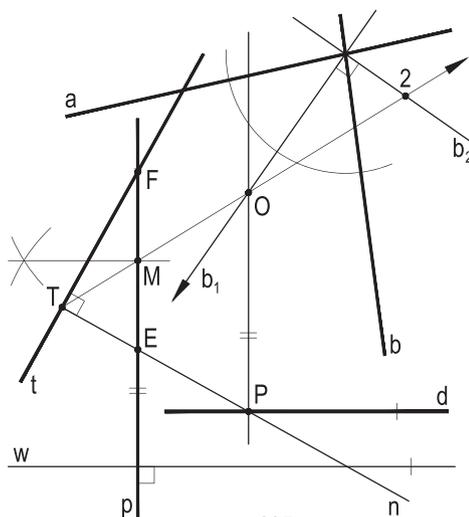


Figura 895

484 – Mesmo problema, dados T , t e w , sabendo que o centro da geratriz no instante do contato correspondente a t pertence à circunferência dada (J).

Mais uma vez, é desconhecido o valor do raio da geratriz.

Resolução: Agora, o centro O é o corte da circunferência dada (J) com a mediana do triângulo auxiliar TEF , retângulo em T , construído com EF perpendicular a w (Figura 896), limitado entre a tangente t e a normal n .

A circunferência (O , OP) é a geratriz e , então, d , conduzida por P , a diretriz pedida.

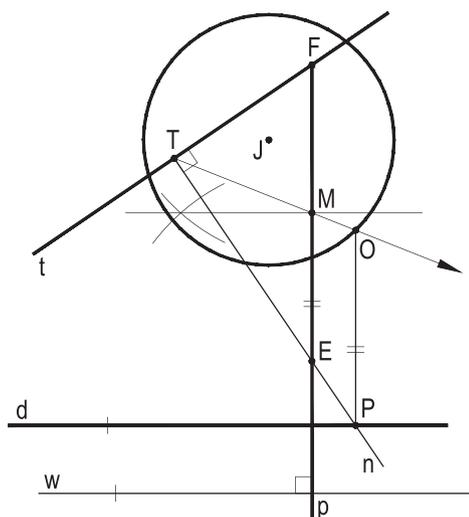


Figura 896

485 – A circunferência (O, OA), tangente à reta d no ponto A, rola, sem deslizar, sobre d, no sentido horário. Dados O, A e d, OA perpendicular a d, além dos pontos J e L situados sobre o suporte do raio OA e rigidamente ligados a (O, OA), pede-se desenhar as trajetórias de J e de L, durante o primeiro ciclo completo do giro de (O, OA), além de traçar as tangentes a essas duas curvas nos instantes correspondentes a 3/8 e a 5/8 desse giro.

Resolução: Os pontos J e L descrevem, respectivamente, uma cicloide encurtada e outra alongada.

Para suas construções, basta retificar a circunferência dada (O, OA), determinando a medida AC de um quadrante seu, que, quadruplicado, proporciona o ponto \bar{A} , extremo do ciclo em estudo da cicloide normal, gerada.

Divididas a geratriz (O, OA) e o passo $A\bar{A}$ em oito partes iguais, obtêm-se pontos correntes da cicloide normal gerada por (O, OA).

Com as aplicações das medidas dadas OJ e OL sobre os suportes dos raios das circunferências nas posições intermediárias vêm os pontos correntes J_1, J_2, J_3 , etc. e L_1, L_2, L_3 , etc. das duas cicloides pedidas (Figura 897).

Aproveitando-se os centros instantâneos A_3 e A_5 dos dois movimentos estabelecidos, consegue-se as normais A_3J_3, A_3L_3, A_5J_5 e A_5L_5 nos instantes propostos, que proporcionam as tangentes pedidas, t_3 e t_5 à cicloide alongada e t'_3 e t'_5 à encurtada.

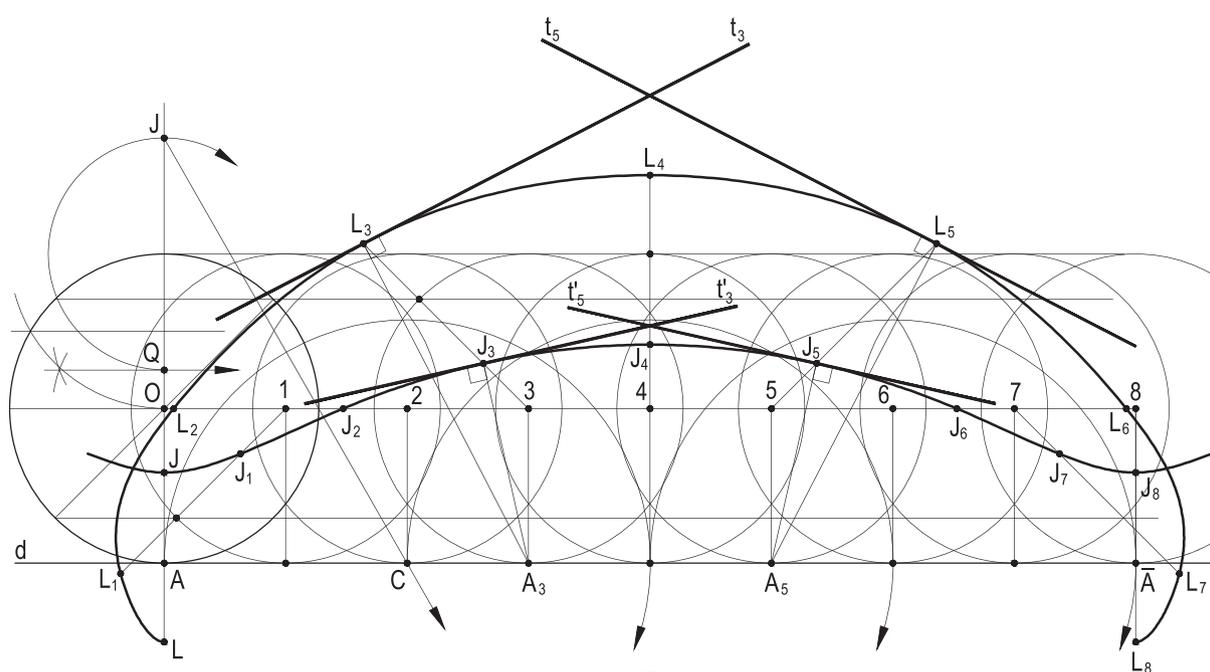


Figura 897

486 – Dado o triângulo ABC, determine a posição do ponto J a ele interior, tal que J veja os lados AB, BC e CA, respectivamente, sob ângulos que formem uma progressão aritmética crescente de razão 30° .

Resolução: Por somarem 360° , os três ângulos formados em J, têm de ser: $\widehat{A}JB = 90^\circ$, $\widehat{B}JC = 120^\circ$ e $\widehat{C}JA = 150^\circ$, para atenderem à progressão determinada, J sendo, assim, o ponto de corte dos arcos capazes de 90° para AB e de 120° para BC (Figura 898).

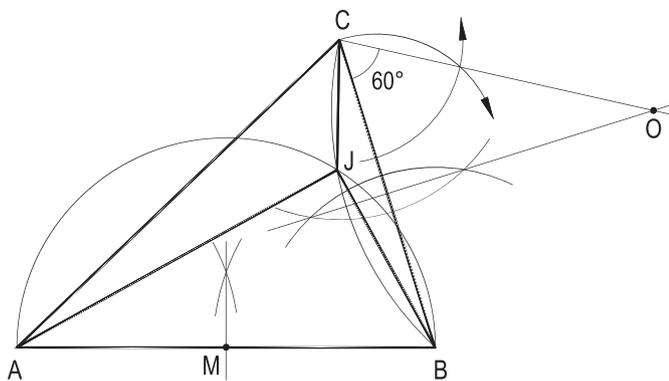


Figura 898

487 – Dadas duas circunferências iguais (O_1, R) e (O_2, R), tangentes exteriormente, considere uma terceira (O_3) tangente exteriormente àquelas duas, com raio igual à metade dos raios de (O_1) e (O_2). Sendo T e T' os pontos de contato de (O_3) com (O_1) e com (O_2), respectivamente, determine os pontos A e B extremos das primeiras espiras das epicicloides normais geradas por T e por T' em sentidos opostos, sem cruzamento, para as diretrizes (O_1) e (O_2), da geratriz (O_3).

Resolução: Obido O_3 no cruzamento de ($O_1, \frac{3}{2}R$) e ($O_2, \frac{3}{2}R$), os pontos A e B pedidos hão de ser os diametralmente opostos de T e de T', em (O_1) e em (O_2), para atender à razão (1/2) entre os raios da geratriz e das diretrizes (Figura 899), o que obriga a igualdade dos comprimentos da geratriz e das metades das diretrizes (duas soluções, para o ponto O_3 , simétricas em relação à reta O_1O_2).

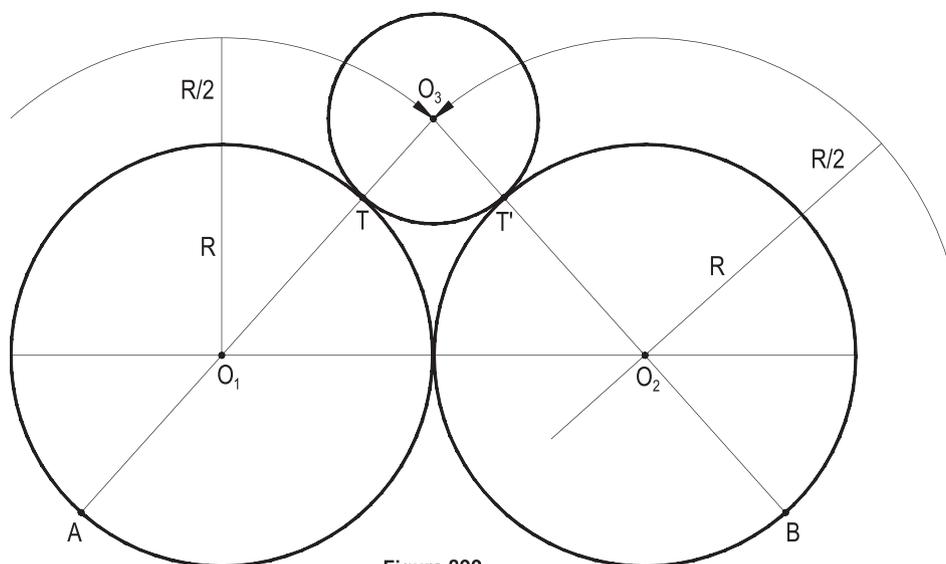


Figura 899

488 – Dado o triângulo obtusângulo áureo ABC, de base BC, divida em três partes iguais o ângulo interno A, decompondo o triângulo dado em outros três ABJ, AJK e AKC. Analise tais triângulos, detalhando suas naturezas, e construa a figura curvilínea não convexa, formada pelos arcos AB, BC e CA, de centros respectivamente em J, A e K.

Resolução: A decomposição se faz pelo traçado das mediatrizes dos lados AB e AC (ver número 86), criando outros dois triângulos isósceles e obtusângulos áureos JAB e KAC, além do áureo acutângulo AJK (Figura 900), possibilitando as construções dos arcos pedidos.

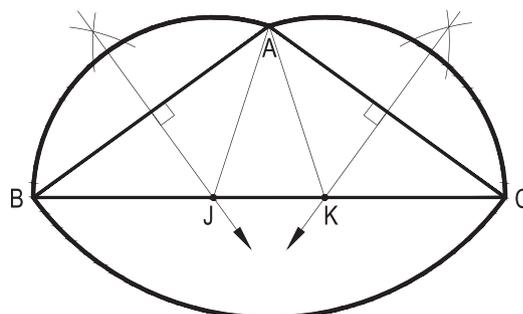


Figura 900

489 – Dados um eixo XX' e um ponto O a ele pertencente, trace semirretas por O inclinadas sucessivamente 30° em relação a cada anterior, a partir de XX' , marque, em XX' , $OA = k$, um valor dado, e, no sentido anti-horário, considere, sobre aquelas semirretas, 9 pontos tais que suas distâncias a O sejam os termos de uma progressão aritmética de razão k e, para retornar ao ponto A , considere a espiral de Arquimedes, no mesmo sentido, cobrindo o último quadrante assim organizado. Desenhe os trechos $A/9$ e $9/A$ dessas duas curvas.

Resolução: Traçadas as semirretas, obedecendo à sucessão angular imposta, e marcados os pontos 1, 2, 3, ..., 9, tais que $O1 = 2k$, $O2 = 3k$, $O3 = 4k$, etc., atendendo à progressão aritmética de razão k determinada no enunciado, pode-se construir, por pontos, o trecho $A123456789$ da primeira espiral.

Para assegurar nova progressão aritmética das amplitudes dos três raios vetores $O9$, $O10$ e $O11$, ainda aproveitando as retas, por O , inclinadas a 30° , em relação a cada anterior, basta dividir em três partes iguais o segmento $\bar{A}9$, que mede a diferença entre $O9$ e OA (Figura 901).

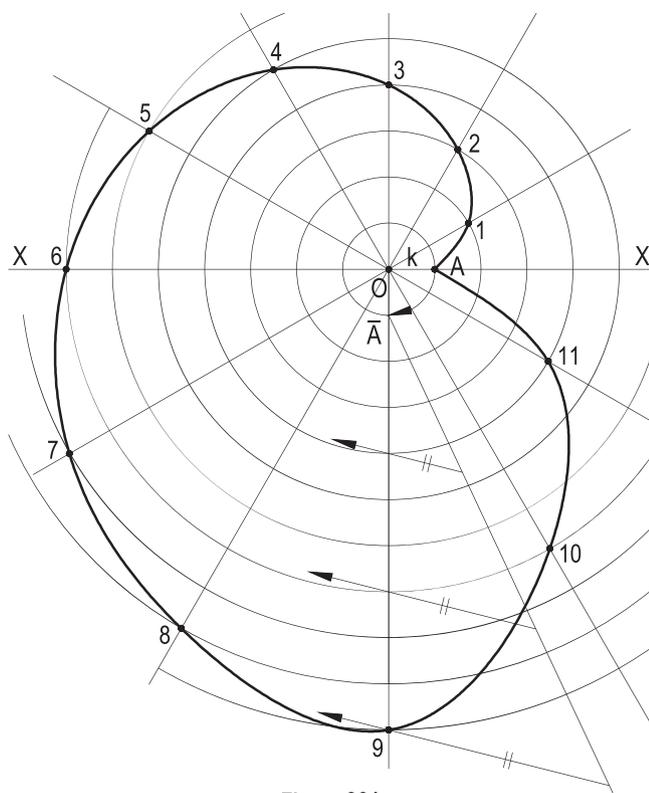


Figura 901

492 – Inscrever na circunferência dada (O, R) um triângulo ABC com lados proporcionais aos do triângulo dado $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$ e determinar o lugar geométrico dos incentros I dos triângulos ABC que, assim, se pode obter.

Resolução: Determinado o circuncentro \bar{O} do triângulo dado, o raio $\bar{O}\bar{A}$ paralelo a $\bar{O}\bar{A}$ traz, com paralelas, um triângulo ABC pedido, semelhante ao dado e, já que seu incentro I é rigidamente ligado a ele, o lugar geométrico pedido é a circunferência (O, OI), concêntrica à dada (Figura 904), descrita por I quando ABC gira, sempre nela inscrito e igual ao inicial.

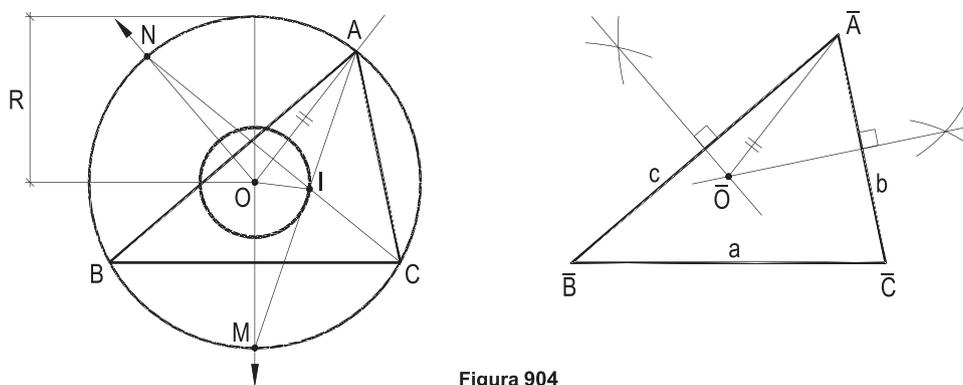


Figura 904

493 – Dada a semicircunferência de centro O e diâmetro $AB=12R$, construa as cíclicas geradas pelo ponto A, de tangência com a dada, das circunferências $(O_1, 3R)$ e $(O_2, 3R)$, girando, sem deslizar, no sentido horário, sobre a semicircunferência dada.

Resolução: As cíclicas pedidas são dois ciclos de uma epicloide e de uma hipocicloide normais geradas ambas com seus primeiros ciclos cobrindo um quadrante AC da diretriz, tal a razão 1 : 4 entre seus raios (Figura 905).

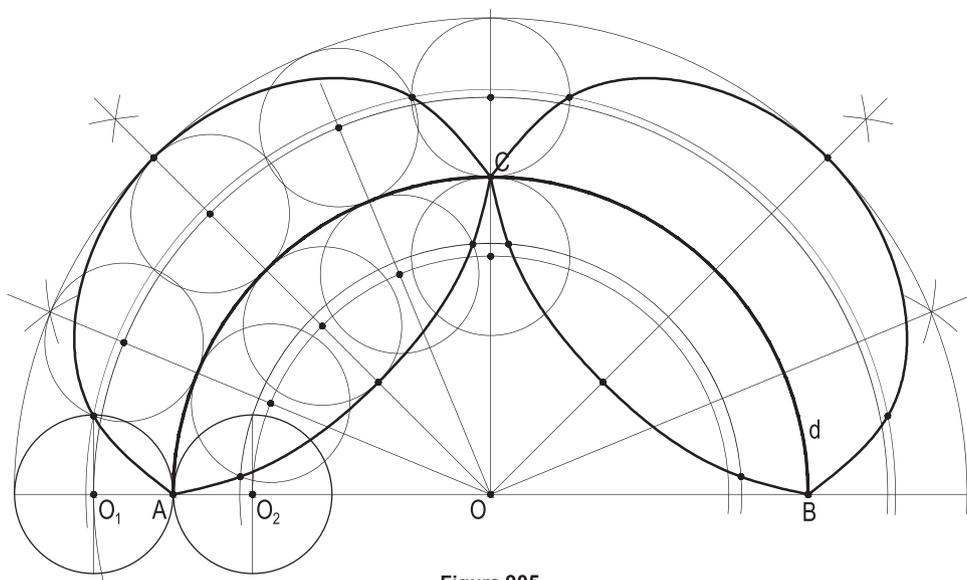
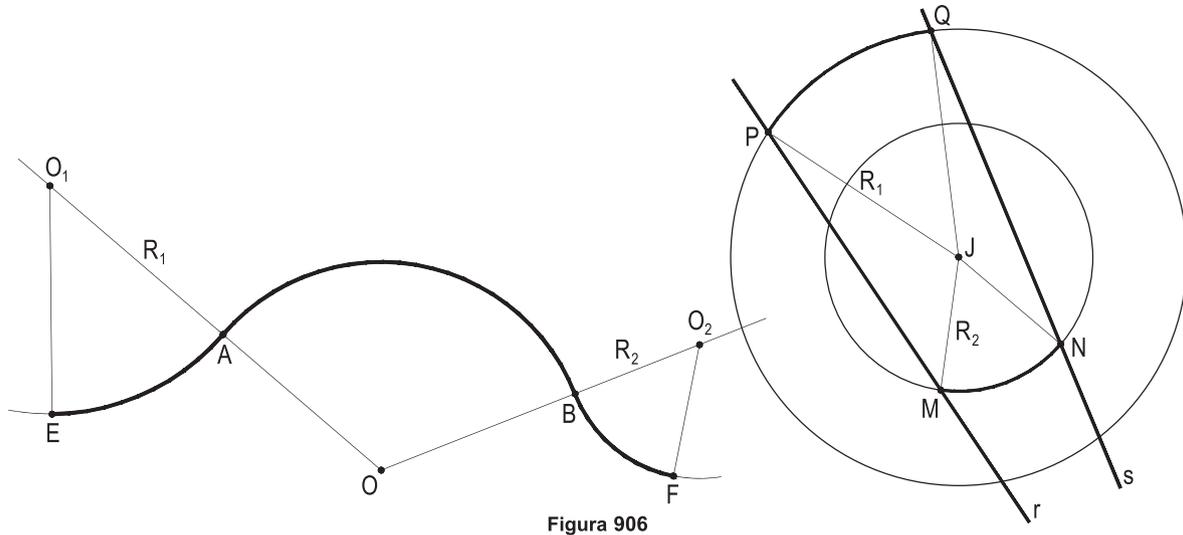


Figura 905

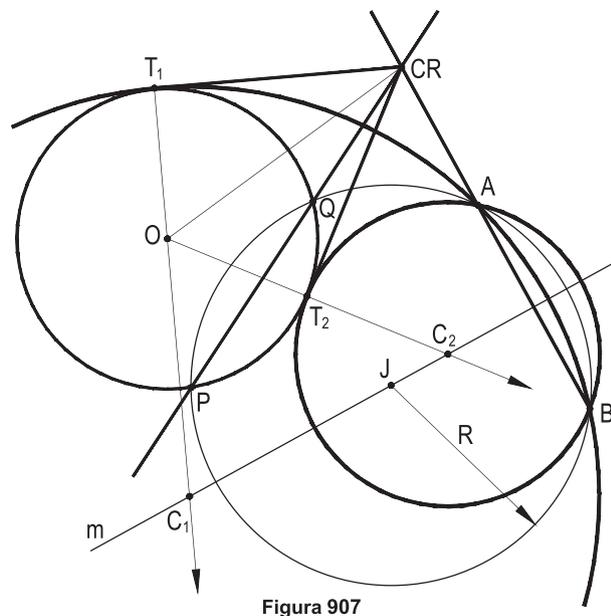
494 – Dados o arco de circunferência AB, de centro O, e os arcos PQ e MN das circunferências (J, JP) e (J, JM), que as retas r e s, dadas, provocam nas circunferências limítrofes da coroa circular (J), também dada, pede-se concordar o arco AB com outros dois, respectivamente, iguais a PQ e a MN, com centros situados no semi-plano oposto ao de O, em relação à reta AB.

Resolução: Basta situar os centros O_1 e O_2 dos arcos pedidos AE e BF nos prolongamentos dos raios OA e OB (Figura 906) e transportar os arcos dados PQ e MN.



495 – Dados dois pontos A e B e a circunferência (O), exterior, pede-se construir as circunferências que, pertencendo a A e a B, tangenciem (O).

Resolução: Com o traçado de uma circunferência auxiliar (J, R), arbitrada e pertencente a A e a B, vem o centro radical CR dela, de (O) e da circunferência (C) procurada, pelo corte das retas AB e PQ (Figura 907), permitindo obter as tangentes CRT_1 e CTR_2 à circunferência dada (O), e, pelas uniões de O a T_1 e a T_2 , as determinações dos centros C_1 e C_2 das duas soluções, naturalmente pertencentes à mediatriz m do segmento AB (Figura 907), para construir as circunferências (C_1, C_1T_1) e (C_2, C_2T_2) pedidas.



496 – Dadas as circunferências (O, OA) e (O', R') e a reta w , exteriores, pede-se construir o trecho da falsa espiral de cinco centros A, B, C, D, E , cujos centros sejam os vértices do pentágono regular inscrito na primeira, com sentido horário, limitada desde seu ponto inicial A até o ponto T em que seu arco de centro E , pela primeira vez, corta a reta w , para, em seguida, concordá-lo, por arco de circunferência, com a segunda circunferência dada (O', R') .

Resolução: Construída a falsa espiral (ver número 96) e determinado o ponto T , para que seja ele o ponto de tangência com o arco concordante $\overline{T\bar{T}}$ (há uma segunda solução $\overline{T\bar{T}'}$) procurado, basta aplicar, sobre a reta ET , a partir do ponto T , a medida R' do raio da segunda circunferência, obtendo os pontos P e Q e, com as mediatrizes m_1 e m_2 de $O'P$ e de $O'Q$, determinar, sobre a reta ET , os centros \bar{O} e \bar{O}' dos arcos $\overline{T\bar{T}}$ e $\overline{T\bar{T}'}$ das concordâncias pedidas, garantidas pelos alinhamentos dos centros das três circunferências concordadas, aos pares (Figura 908).

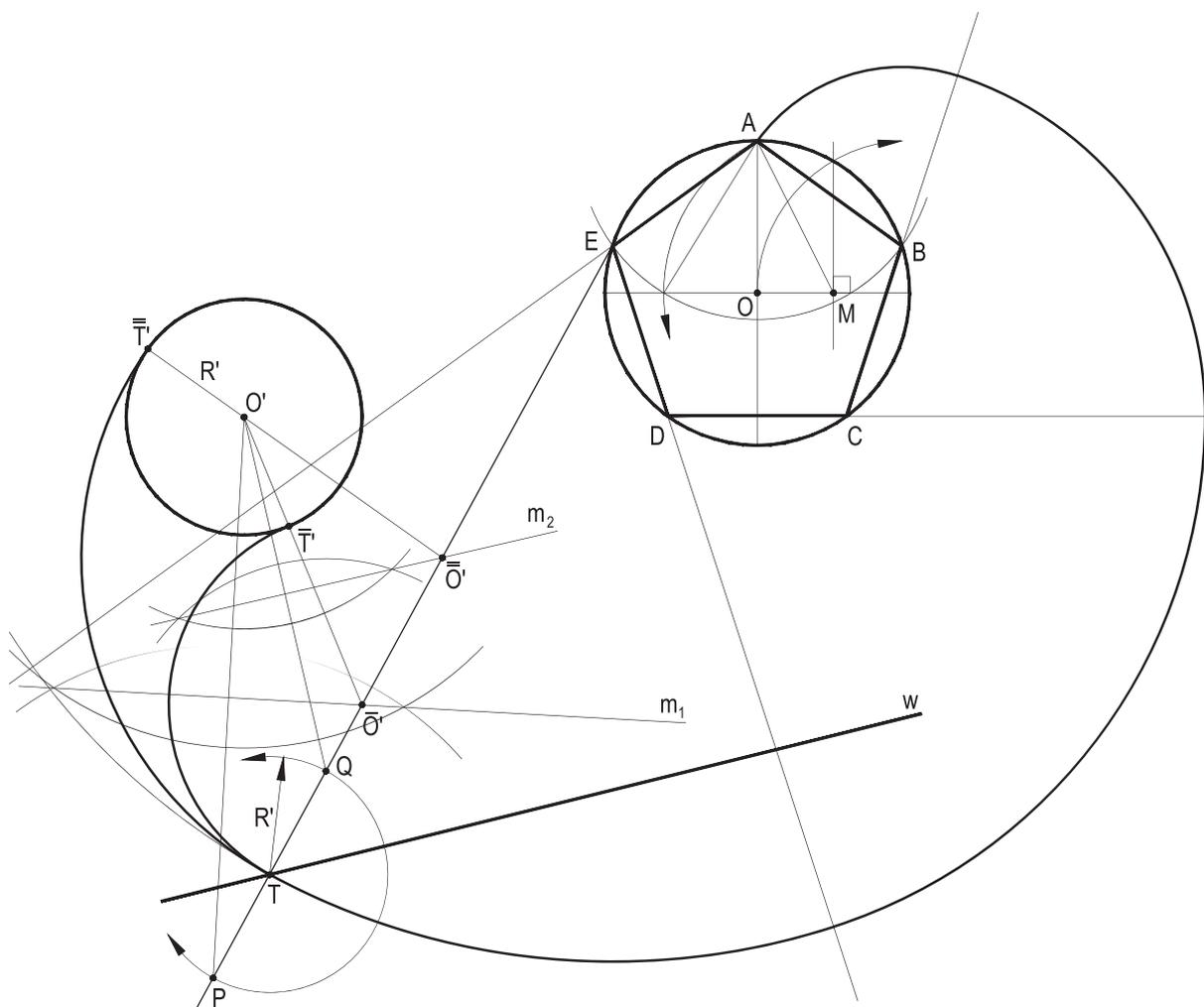


Figura 908

497 – Num sistema cartesiano são dados os pontos A ($16k, 0$) e Q ($-2k, 2k$), A deslocando-se no sentido anti-horário, descrevendo um trecho de espiral logarítmica.

Pede-se localizar os pontos B, C, D e P dessa espiral, os três primeiros situados em raios vetores que se sucedem, a partir do eixo das abscissas a cada 30° , com amplitudes compondo uma progressão geométrica de razão $(1/2)$, e o último, P, sendo a interseção da curva com a semirreta Oz que, no primeiro quadrante, forma 15° com Ox, determinando, por último, o ponto comum à espiral e à circunferência de centro Q e tangente ao eixo das abscissas.

Resolução: O traçado da espiral, pela determinação de seus pontos B, C e D, é simples pelas marcações das medidas $8k$, $4k$ e $2k$ sobre os raios vetores inclinados de 30° , 60° e 90° com Ox, e, para localizar o traço P de Oz com a curva, basta determinar a média geométrica OS entre OA e \overline{OB} , ou seja entre OA e OB, o que se consegue com a ajuda da semicircunferência de diâmetro \overline{BA} , já que a altura OS do triângulo retângulo inscrito \overline{SBA} vale (*Geometria Plana*, número 197.2) a média geométrica entre \overline{OB} e OA, visto que o ângulo que o suporte Oz de seu raio vetor forma com Ox vale a metade daquele que OB forma com Ox (Figura 909).

Enfim, pelos dados particulares, o ponto comum à espiral e à circunferência (Q) é o próprio ponto D ($0, 2k$), antes determinado.

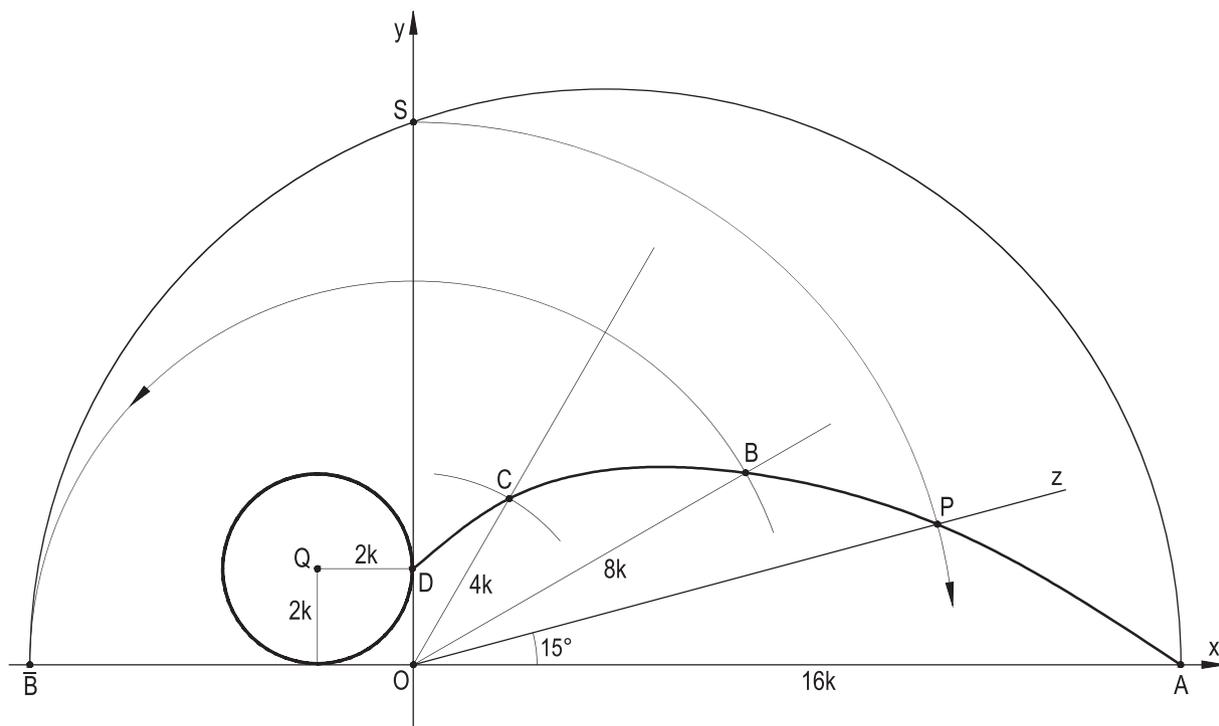


Figura 909

498 – Dada uma parábola por seu foco F e sua diretriz d , considere seu vértice A e seus pontos P e Q distantes da diretriz três metades do parâmetro p da cônica e concorde as duas circunferências $(P, 3p/2)$ e $(Q, 3p/2)$ por um arco de circunferência de raio $(p/2)$ e ângulo central maior que 180° , situado no semiplano oposto ao da diretriz, em relação à reta PQ , além de concordá-las com a diretriz d .

Resolução: Marcados os pontos P e Q (ver *Cônicas*, número 145), construídas as duas circunferências a concordar e determinado o ponto M , distante $(p/2)$ de cada uma delas, pela interseção das circunferências de centros P e Q e raios iguais a $3p/2 + p/2$, suas uniões aos pontos P e Q proporcionam os pontos de concordância T_1 e T_2 , que definem o arco T_1T_2 da circunferência de concordância pedida com os arcos T_1T e T_2T' das duas dadas, que, enfim, as concordam com a diretriz d (Figura 910).

Assinaladas as semirretas divergentes, de origens T e T' , com suportes na diretriz dada d , compondo a concordância.

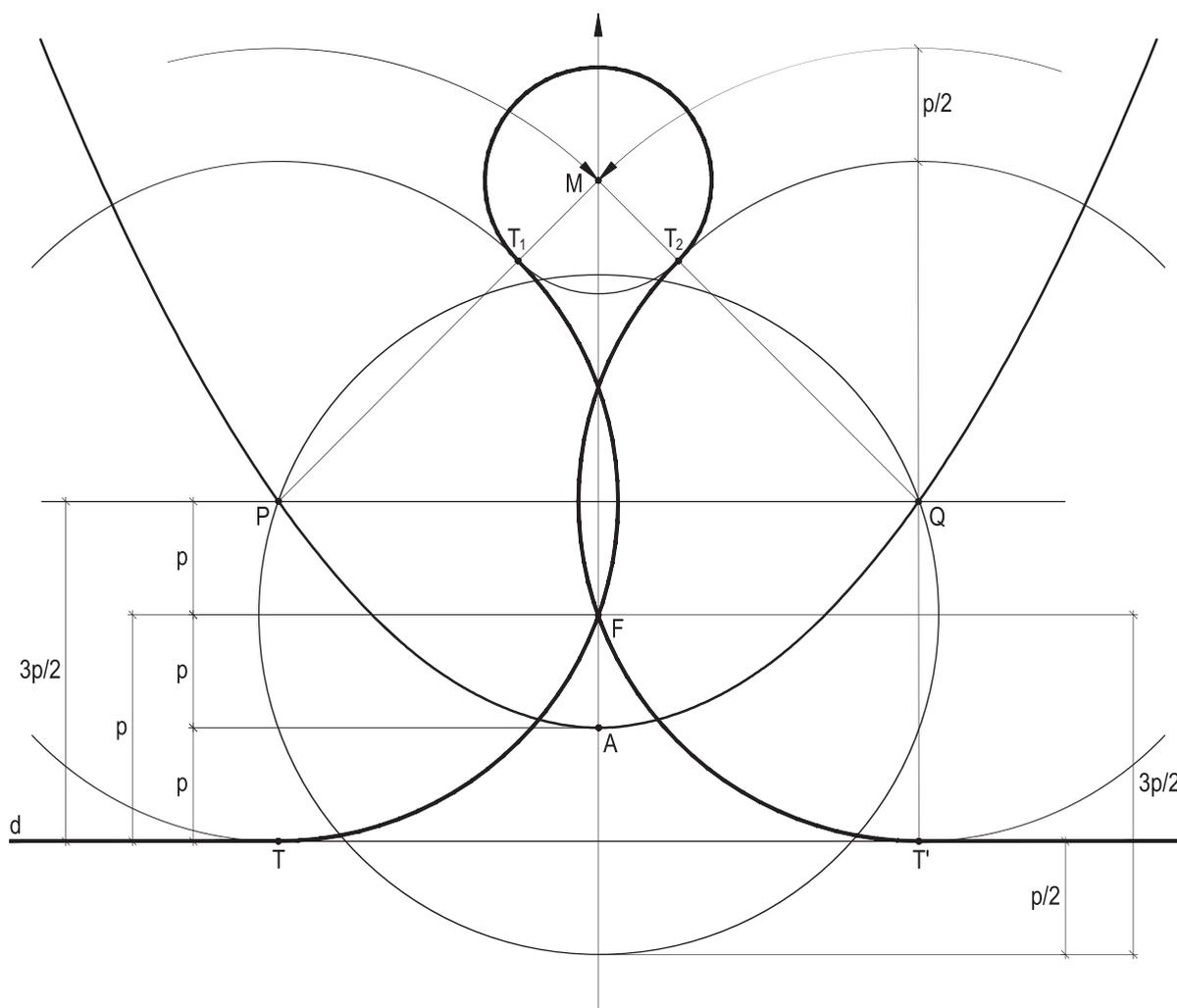


Figura 910

499 – Dada uma semicircunferência de centro M e diâmetro AB , considere as circunferências (O, OA) e $(O', O'T)$, respectivamente, tangentes a ela internamente em A e externamente em T , ponto médio da semicircunferência dada, tais que seus raios valham a sexta parte do raio MA , e construa a curva formada pelas hipocicloides normais geradas por (O, OA) e por sua diametralmente oposta $(\bar{O}, \bar{O}B)$, para a diretriz de diâmetro AB , com sentidos opostos, e pela epicicloide normal gerada por $(O', O'T)$ para a mesma diretriz, num sentido e no outro, unindo-a àquelas hipocicloides. Os pontos A, B e T' , diametralmente oposto de T em (O') , são os geradores dessas três cíclicas.

Resolução: Traçadas as semirretas Mx e My que dividem a semicircunferência dada em três partes iguais, para obedecer a razão entre os raios das geratrizes e da diretriz, basta construí-las por pontos, tal como detalhado nos números 125 e 126, um ciclo de cada uma das três curvas, que têm, aos pares, os pontos P e Q em comum (Figura 911).

Observe-se que, para os traçados das três curvas, é muito conveniente obedecer às simetrias existentes em relação à mediatriz m do diâmetro AB .

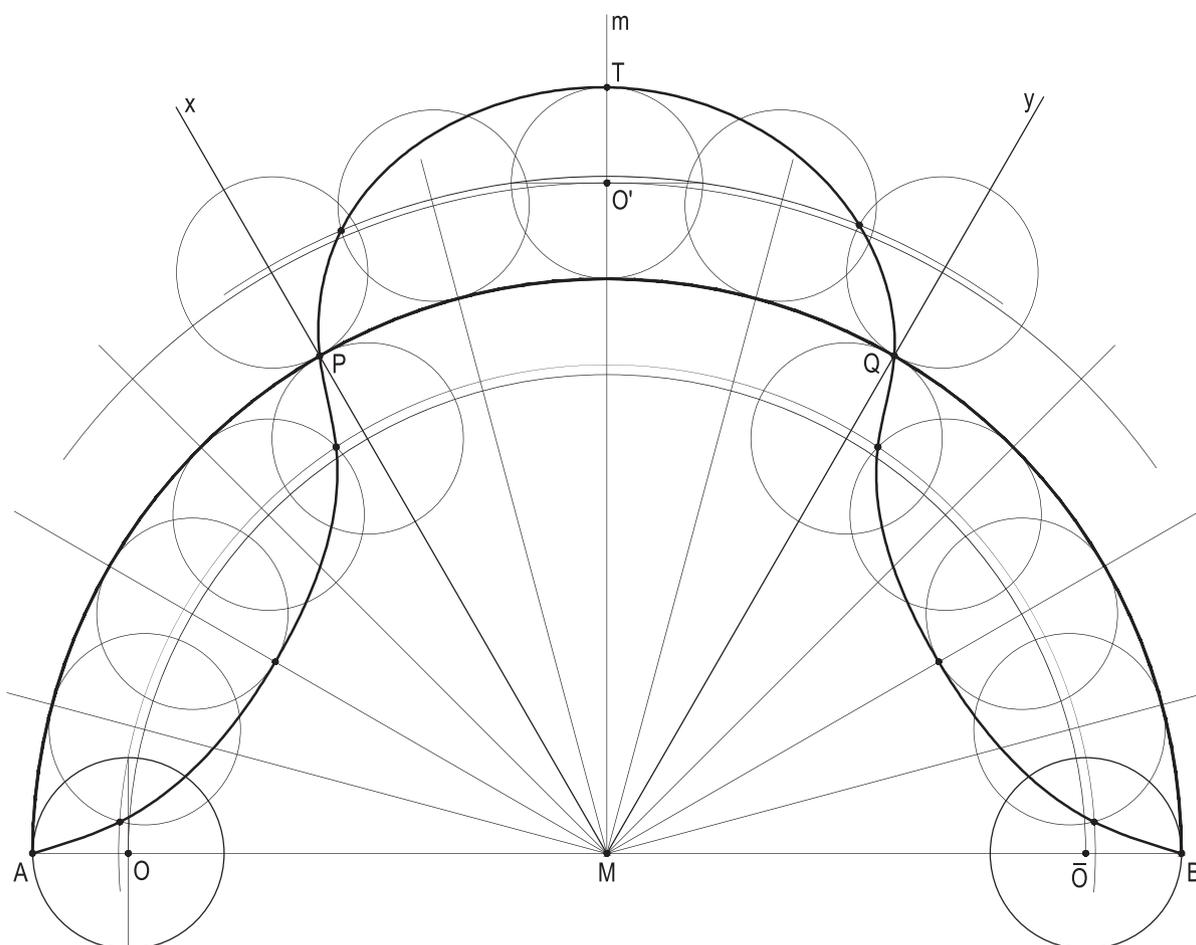


Figura 911

500 – Dadas a reta d e as circunferências (O, OT) , tangente a d no ponto T , e $(O', O'A)$, tangente exteriormente à primeira, com raio $O'A$ igual à metade do raio $OT = OA$, da primeira, pede-se construir a primeira metade do primeiro ciclo da epicloide normal gerada pelo ponto A , quando (O') rola, sem deslizar, apoiada em (O) , no sentido horário. Determinado o ponto B , extremo desse arco de epicloide, considere a circunferência (C, CB) , igual à $(O', O'A)$, tangente à reta d e, fazendo-a girar, para a direita, apoiada em d , sem deslizamentos, construa o arco de cicloide normal, gerada pelo ponto B , até a posição D , quando a curva encontra d pela primeira vez.

A seguir, em nova construção, acrescente um ciclo DK da cicloide gerada pela circunferência simétrica da última anterior em relação à reta d , K entre D e T .

Resolução: Como o raio da geratriz (O') da epicloide mede a metade do da diretriz (O) , a metade pedida de seu primeiro ciclo completa-se com o ponto B na paralela, por O , à reta d , correspondendo a um giro de 90° sobre a diretriz. E, como B é o ponto médio do ciclo da cicloide normal pedida, a retificação de (C, CB) , proporcionando a medida $B\bar{D}'$ (Figura 912) de sua semicircunferência, dá o ponto D , extremo desse arco, pé da perpendicular, por \bar{D} , a d , \bar{D}' sendo o simétrico de B em relação a \bar{D} .

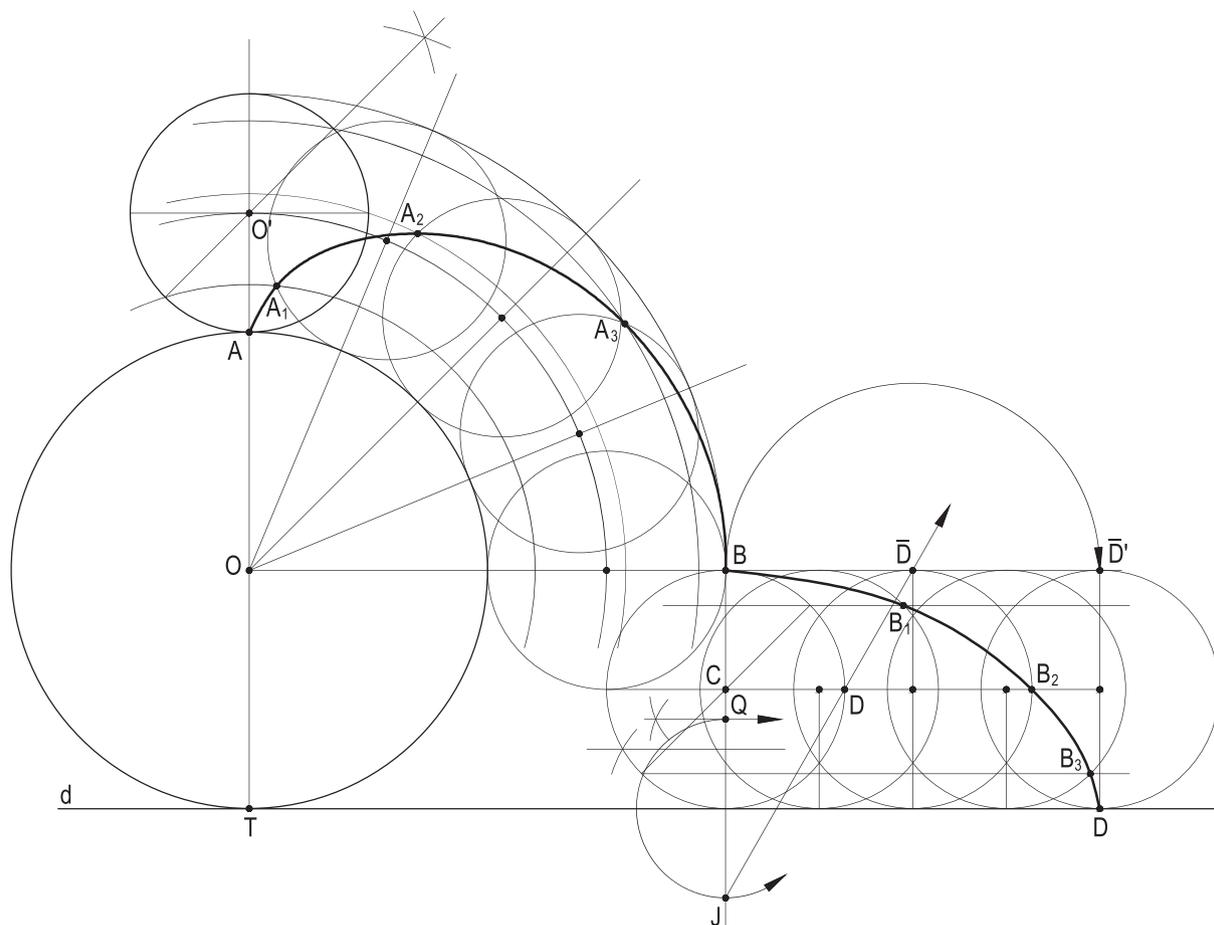


Figura 912

DADOS INTERNACIONAIS DE CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO (CIP)
(CÂMARA BRASILEIRA DO LIVRO, SP, BRASIL)

Almeida, Célio Pinto de

Construções geométricas / Célio Pinto de Almeida.

– Rio de Janeiro : G. Ermakoff Casa Editorial, 2024.

320 p.: il. ; 28 cm.

ISBN 978-65-87730-08-0

1. Geometria I. Título.

24-206616

CDD-516

CIBELE MARIA DIAS - BIBLIOTECÁRIA - CRB-8/9427

Este livro foi composto na tipologia Minion pro em
corpo 12,5/17,3, impresso em papel offset 90g/m²,
na gráfica Edelbra – Rio Grande do Sul.

