

O BISSETOR PAR  
( $\beta_{24}$ )



Célio Pinto de Almeida

O BISSECTOR PAR  
( $\beta_{24}$ )

G.Ermakoff CASA EDITORIAL  
RIO DE JANEIRO | 2023

O BISSETOR PAR

( $\beta_{24}$ )

Copyright © 2023 by Célio Pinto de Almeida

*Coordenação editorial:*

George Ermakoff

*Capa:*

Miriam Lerner e Michelle Bulhões

*Diagramação:*

Marcelo Domingues

*Desenhos:*

Michelle Bulhões

*Digitação:*

Gilmar Lessa

*Revisão:*

Luciana Messeder e Patrícia Souza Leal

Imagem da capa:

Projeção ortogonal de um tetraedro sobre ( $\beta_{24}$ )

Primeira edição

Tiragem: 1.000 exemplares – Distribuição gratuita

# O BISSETOR PAR

Cinco são os planos principais para a Geometria Descritiva: os dois planos de projeção ( $\pi$ ) e ( $\pi'$ ), encarregados de trazer a duas dimensões as questões espaciais em estudo, uma vez que, após rotação de  $90^\circ$  em torno de sua interseção, venham a coincidir, criando a *épura*.

Além desses dois, por ordem, o plano de perfil ( $\pi''$ ), de abscissa nula, e os dois bissetores dos ângulos formados por ( $\pi$ ) e ( $\pi'$ ).

Os planos de perfil, importantes no esclarecimento das questões pertinentes às figuras, ou aos detalhes, que, em *épura* se representem sobre uma mesma linha de chamada, têm em ( $\pi''$ ), com abscissa nula, o principal de sua família, por ser o referencial para as medições dessa coordenada.

Em sequência de importância estão os dois planos bissetores dos ângulos retos entre ( $\pi$ ) e ( $\pi'$ ), um desses planos atravessando o primeiro e o terceiro diedros e, por isso, denominado Bissetor Ímpar, sendo habitualmente representado por  $\beta_I$ , ou  $\beta_1$ , ou, como preferimos, ( $\beta_{13}$ ).

O outro bissetor, o par, passando pelo segundo e pelo quarto diedros, representado por  $\beta_P$ ,  $\beta_2$  ou ( $\beta_{24}$ ), é o objeto do presente estudo.

O ( $\beta_{24}$ ) é o mais peculiar dentre os cinco planos primordiais da Descritiva, como nos propomos a detalhar, no desenvolvimento deste livro, que culminará com sua mais notável propriedade: a possibilidade de operar *épuras* mesmo com a exclusão da linha de terra.

A primeira escolha para o título deste trabalho foi simplesmente ( $\beta_{24}$ ), tal como sempre nos referimos ao Bissetor Par, mas, devido às outras designações que ele recebe de diferentes autores, optamos por intitulá-lo BISSETOR PAR, utilizando o símbolo ( $\beta_{24}$ ) como subtítulo.

Ao longo de seu desenrolar, o presente estudo passará pelos diversos compartimentos da Geometria Descritiva, destacando, sempre, as propriedades especiais do Bissetor Par e suas utilizações na resolução, em *épura*, dos problemas propostos.

Espero que os leitores o apreciem.



# LISTAGEM DE ASSUNTOS

A listagem abaixo apresenta, em cada capítulo, os principais assuntos, definições e teoremas, ao invés do habitual sumário de títulos, tais as quantidades de conceituações e demonstrações.

<b>Capítulo I – Coordenadas especiais</b>	Planos referenciais .....	11
	Lugares geométricos dos pontos que têm constante a razão entre duas coordenadas .....	12
	Pontos com duas coordenadas iguais ou simétricas .....	15
	Retas com pares de coordenadas constantes .....	20
	Lugar geométrico dos pontos que têm as três coordenadas iguais .....	20
	Ponto equicoordenado de um plano dado .....	21
	Pontos equicoordenados de uma superfície dada .....	22
<b>Capítulo II – Bissetores – pertinências, traços e paralelismos</b>	Pertinência de uma figura a $(\beta_{24})$ .....	24
	Traço de reta com $(\beta_{24})$ .....	24
	Traço de plano com $(\beta_{24})$ .....	25
	Retas paralelas a $(\beta_{24})$ .....	26
	Planos paralelos a $(\beta_{24})$ .....	28
	Pertinência de uma figura a $(\beta_{13})$ .....	29
	Traço de reta com $(\beta_{13})$ .....	29
	Retas paralelas a $(\beta_{13})$ .....	30
	Traço de plano com $(\beta_{13})$ .....	31
	Planos paralelos a $(\beta_{13})$ .....	32
<b>Capítulo III – Bissetores – perpendicularidade</b>	Retas perpendiculares a $(\beta_{24})$ .....	34
	Planos perpendiculares a $(\beta_{24})$ .....	37
	Construção de plano perpendicular a $(\beta_{24})$ .....	39
	Retas perpendiculares a $(\beta_{13})$ .....	40
	Planos perpendiculares a $(\beta_{13})$ .....	43
	Construção de plano perpendicular a $(\beta_{13})$ .....	44
<b>Capítulo IV – Simetria central</b>	Figuras simétricas e assimétricas .....	45
	Simetria em relação a um ponto .....	46
	Projeções de pontos centralmente simétricos .....	48
	Projeções de retas centralmente simétricas .....	48
	Projeções de polígonos centralmente simétricos .....	49
	Projeções de figuras centralmente simétricas .....	50
	Planos centralmente simétricos .....	51
	Traços de planos centralmente simétricos .....	52
	Projeções de poliedros centralmente simétricos .....	53

## Capítulo V – Simetria axial

Simetria em relação a uma reta .....	55
Projeções de pontos axialmente simétricos .....	59
Projeções de retas axialmente simétricas coplanares com o eixo de simetria .....	62
Projeções de polígonos axialmente simétricos em relação a um eixo coplanar .....	64
Projeções de retas simétricas em relação a um eixo reverso a elas .....	67
Simetria de polígono em relação a um eixo não coplanar ...	68
Simetria de poliedro em relação a um eixo genérico .....	68

## Capítulo VI – Simetria em relação a um plano

Planos simétricos em relação a um plano .....	72
Projeções de pontos simétricos em relação a um plano .....	73
Projeções de retas simétricas em relação a um plano .....	74
Projeções de polígonos simétricos em relação a um plano ..	86
Traços de planos simétricos em relação a um plano .....	88
Projeções de poliedros simétricos em relação a um plano .....	100

## Capítulo VII – Simetrias particulares

Simetrias de um ponto em relação aos planos referenciais ....	107
Simetria de um ponto em relação à linha de terra .....	108
Projeções da reta simétrica de uma reta dada em relação a $(\pi)$ .....	111
Projeções da reta simétrica de uma reta dada em relação a $(\pi')$ .....	112
Projeções da reta simétrica de uma reta dada em relação a $(\pi'')$ .....	112
Projeções da reta simétrica de uma reta dada em relação a $(\pi'\pi)$ .....	112
Projeções do polígono simétrico de um polígono dado em relação a $(\pi)$ .....	113
Projeções do polígono simétrico de um polígono dado em relação a $(\pi')$ .....	114
Projeções do polígono simétrico de um polígono dado em relação a $(\pi'')$ .....	114
Projeções da figura simétrica de uma figura dada em relação a $(\pi)$ .....	114
Projeções da figura simétrica de uma figura dada em relação a $(\pi')$ .....	115
Projeções da figura simétrica de uma figura dada em relação a $(\pi'')$ .....	116
Projeções do poliedro simétrico de um poliedro dado em relação a $(\pi)$ .....	117
Projeções do poliedro simétrico de um poliedro dado em relação a $(\pi')$ .....	117
Projeções do poliedro simétrico de um poliedro dado em relação a $(\pi'')$ .....	118
Simetria de plano em relação a cada um dos planos referenciais .....	119
Simetria de plano em relação a $(\pi'\pi)$ .....	120



**Capítulo VIII – Simetrias em relação aos  
bissetores**

Projeções do simétrico de um ponto em relação a $(\beta_{24})$ ....	121
Projeções da simétrica de uma reta em relação a $(\beta_{24})$ .....	121
Projeções da simétrica de uma figura plana em relação a $(\beta_{24})$ .....	122
Projeções do simétrico de um poliedro em relação a $(\beta_{24})$ ...	123
Traços do plano simétrico de um plano em relação a $(\beta_{24})$ ...	123
Projeções do simétrico de um ponto em relação a $(\beta_{13})$ ...	125
Projeções da simétrica de uma reta em relação a $(\beta_{13})$ .....	125
Projeções da simétrica de uma figura em relação a $(\beta_{13})$ ....	126
Projeções do simétrico de um poliedro em relação a $(\beta_{13})$ ...	126
Traços do simétrico de um plano em relação a $(\beta_{13})$ .....	127
Produto de simetrias em relação aos bissetores .....	128

**Capítulo IX – Homologia e afinidade**

Homografia .....	129
Homologia .....	129
Determinação do sistema .....	131
Determinação do homólogo de um ponto dado .....	131
Determinação da homóloga de uma reta dada .....	132
Determinação do homólogo de um polígono dado .....	133
Retas limites .....	135
Determinação do sistema de homologia a partir das retas limites .....	136
Polígonos com um vértice ou um lado sobre sua reta limite .....	138
Polígonos seccionados por uma reta limite .....	139
Afinidade .....	141
Determinação do sistema .....	143
Determinação do afim de um ponto dado .....	144
Determinação da afim de uma reta dada .....	144
Construção do afim de um polígono dado .....	145

**Capítulo X – Projeções cônicas sobre  $(\beta_{24})$**

Projeções cônicas .....	149
Projeções cônicas sobre planos .....	149
Homologia como projeção cilíndrica de uma projeção cônica .....	151
Projeções cônicas sobre $(\pi)$ e sobre $(\pi')$ .....	152
Projeções cônicas sobre $(\pi'')$ .....	152
Projeções cônicas sobre um plano projetante .....	153
Projeções cônicas sobre um plano não projetante .....	154
Projeção cônica de poliedro .....	156
Projeção cônica de ponto sobre $(\beta_{24})$ .....	158
Projeção cônica de reta sobre $(\beta_{24})$ .....	158
Projeção cônica de polígono sobre $(\beta_{24})$ .....	160
Projeção cônica de poliedro sobre $(\beta_{24})$ .....	161

<b>Capítulo XI – Projeções cilíndricas sobre <math>(\beta_{24})</math></b>	Projeções cilíndricas.....	165
	Afinidade como projeção cilíndrica de um sistema de projeção cilíndrica entre dois planos secantes.....	167
	Projeções cilíndricas sobre $(\pi)$ e sobre $(\pi')$ .....	169
	Projeções cilíndricas sobre $(\pi'')$ .....	169
	Projeções cilíndricas sobre planos projetantes.....	170
	Projeções cilíndricas sobre planos não projetantes.....	171
	Projeção cilíndrica de poliedro.....	174
	Projeção cilíndrica de ponto sobre $(\beta_{24})$ .....	176
	Projeção cilíndrica de reta sobre $(\beta_{24})$ .....	176
	Projeção cilíndrica de polígono sobre $(\beta_{24})$ .....	178
	Projeção cilíndrica de poliedro sobre $(\beta_{24})$ .....	180
<b>Capítulo XII – Projeções cilíndricas ortogonais</b>	Projeção cilíndrica ortogonal .....	185
	Projeções ortogonais sobre os planos referenciais .....	188
	Projeções ortogonais sobre planos projetantes .....	189
	Projeções ortogonais sobre planos não projetantes .....	190
	Projeções ortogonais de poliedro .....	192
<b>Capítulo XIII – Projeções ortogonais sobre <math>(\beta_{24})</math></b>	Projeção ortogonal sobre $(\beta_{24})$ .....	197
	Projeção ortogonal de ponto sobre $(\beta_{24})$ .....	197
	Projeção ortogonal de reta sobre $(\beta_{24})$ .....	198
	Projeção ortogonal de polígono sobre $(\beta_{24})$ .....	199
	Projeção ortogonal de poliedro sobre $(\beta_{24})$ .....	201
<b>Capítulo XIV – A supressão da linha de terra</b>	Os principais planos .....	205
	Supressão da linha de terra .....	206
	Aplicações a pontos e retas .....	206
	Aplicações aos planos .....	209
	Aplicações aos métodos descritivos .....	218
	Aplicações aos problemas métricos .....	227
	Aplicações aos poliedros .....	233

# CAPÍTULO I

## COORDENADAS ESPECIAIS

### 1 – Planos referenciais

Por proporcionarem as medições de cada uma das coordenadas dos pontos, os planos  $(\pi)$ ,  $(\pi')$  e  $(\pi'')$  são denominados planos referenciais, respectivamente, para as cotas, os afastamentos e as abscissas desses pontos.

### 2 – Distâncias de pontos a planos

Considerando dois planos quaisquer  $(\gamma)$  e  $(\varphi)$ , para estudar as distâncias a eles de dois pontos genéricos  $(A)$  e  $(B)$ , as perpendiculares, por esses dois pontos, a  $(\gamma)$  e a  $(\varphi)$ , sendo todas ortogonais à interseção  $(\gamma\varphi)$  dos dois planos, definem planos perpendiculares a  $(\gamma\varphi)$ .

Assim, as verdadeiras grandezas de suas distâncias a  $(\gamma)$  e a  $(\varphi)$  podem ser apreciadas numa projeção ortogonal sobre um plano  $(\theta)$ , perpendicular a  $(\gamma\varphi)$ , então, todas elas situadas num único plano (Figura 1).

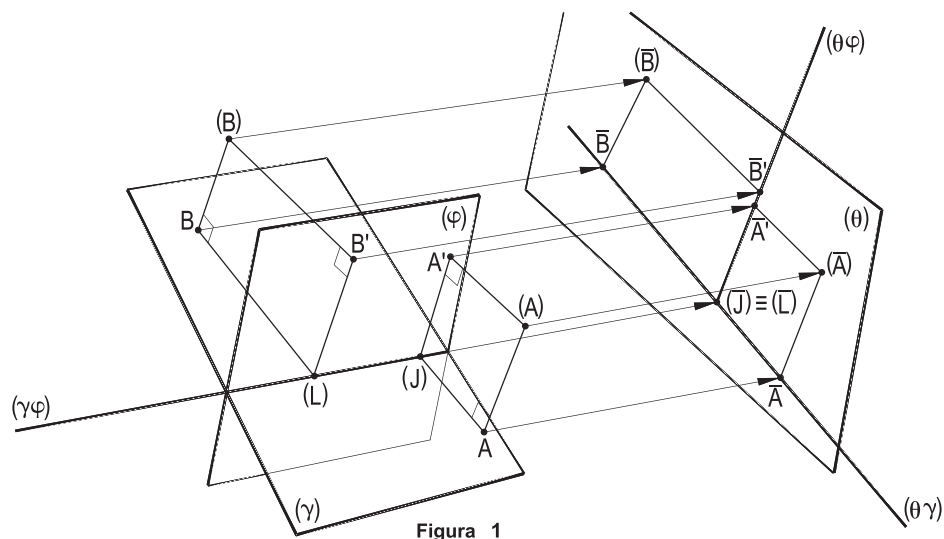


Figura 1

Observe-se que, apreciando esta vista lateral, em V.G., sobre o plano  $(\theta)$ , as distâncias de  $(A)$  e de  $(B)$  aos planos dados repetem-se nas perpendiculares  $(\bar{A})\bar{A}$ ,  $(\bar{A})\bar{A}'$ ,  $(\bar{B})\bar{B}$  e  $(\bar{B})\bar{B}'$ , respectivamente, às interseções  $(\theta\gamma)$  e  $(\theta\varphi)$  desse plano referencial  $(\theta)$  com os dois planos dados  $(\gamma)$  e  $(\varphi)$  (Figura 2), o que será de grande valia, como, em seguida (números 3 e 4), se verá.

### 3 – Teorema

O lugar geométrico dos pontos que guardam uma razão constante entre as distâncias a dois planos secantes dados é constituído por um par de planos pertencentes à interseção dos planos dados, exceto essa interseção.

Demonstração: Consideremos, inicialmente, dois planos  $(\gamma)$  e  $(\varphi)$  oblíquos e, tal como detalhado no item anterior, apreciemos os quadriláteros  $(\bar{A})\bar{A}(\bar{J})\bar{A}'$  e  $(\bar{B})\bar{B}(\bar{L})\bar{B}'$ , projeções sobre um plano auxiliar  $(\theta)$ , perpendicular à interseção  $(\gamma\varphi)$ , dos quadriláteros  $(A)A(J)A'$  e  $(B)B(L)B'$  (Figura 3) que trazem as distâncias de  $(A)$  e de  $(B)$  aos dois planos dados, as quais, devendo ter a mesma razão, conforme a hipótese, obrigam que sejam homotéticos os quadriláteros  $(\bar{A})\bar{A}(\bar{J})\bar{A}'$  e  $(\bar{B})\bar{B}(\bar{L})\bar{B}'$  (Figura 4), assim como todos os demais, correspondentes aos pontos que, situados nos diedros considerados, formados pelos planos  $(\gamma)$  e  $(\varphi)$  guardem constante a razão entre suas distâncias a eles, o que os obriga à pertinência a um plano  $(\alpha)$ , que contém a reta  $(J)(L)$ , representado na Figura 4 pela reta  $(\theta\alpha)$ .

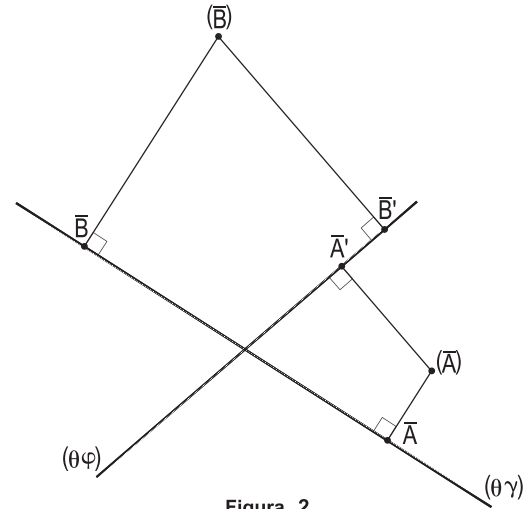


Figura 2

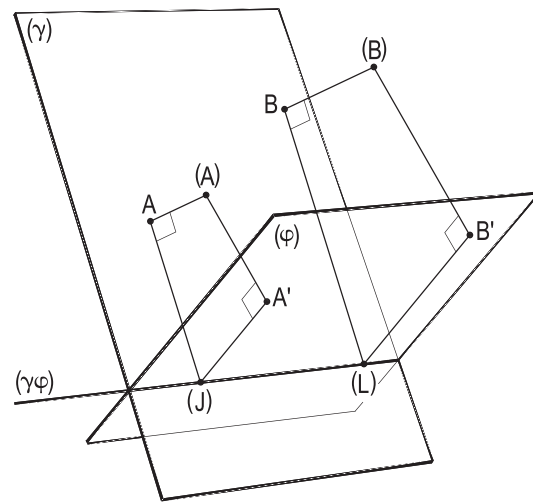


Figura 3

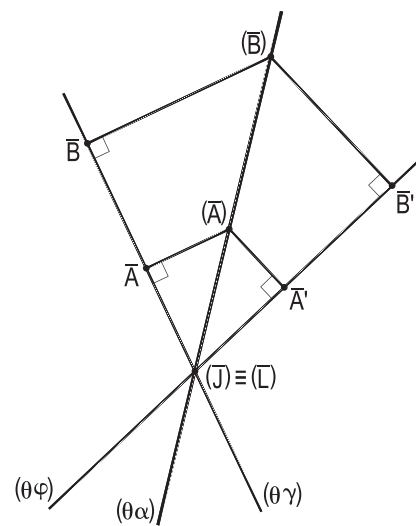


Figura 4

E, é claro, para o outro par de diedros, opostos pela aresta  $(\gamma\varphi)$  dos dois planos dados, com o mesmo raciocínio, fica simples concluir que, para respeitar uma mesma razão entre as distâncias  $(\bar{C})\bar{C}$  e  $(\bar{C})\bar{C}'$ , do ponto (C) e as  $(\bar{D})\bar{D}$  e  $(\bar{D})\bar{D}'$  do ponto (D) aos dois planos dados, todos os pontos devem estar num plano  $(\beta)$  pertencente à interseção  $(\gamma\varphi)$  dos dois planos dados.

Além disso, naturalmente, não podem pertencer ao lugar geométrico instituído os pontos da interseção dos dois planos dados, por oferecerem distâncias nulas a elas, completando-se, assim, a demonstração do teorema.

#### 4 – Observações

1 – Quando os dois planos dados  $(\gamma)$  e  $(\varphi)$  são perpendiculares, os dois planos  $(\alpha)$  e  $(\beta)$  que, exceto sua interseção, constituem o lugar geométrico dos pontos que obedecem a uma razão constante entre suas distâncias a  $(\gamma)$  e  $(\varphi)$  são também perpendiculares entre si.

De fato, a semelhança dos triângulos  $(\bar{A})\bar{J}\bar{A}$  e  $(\bar{C})\bar{J}\bar{C}$  (Figura 6) acarreta a igualdade de seus ângulos  $\hat{x}$  e  $\hat{y}$  e, portanto, a perpendicularidade entre suas hipotenusas  $\bar{J}(\bar{A})$  e  $\bar{J}(\bar{C})$ .

2 – Quando os dois planos dados  $(\gamma)$  e  $(\varphi)$  são paralelos, o lugar geométrico dos pontos que mantêm constante a razão  $k = \frac{m}{n}$  entre as distâncias a eles é um par de planos  $(\alpha)$  e  $(\beta)$ , também paralelos aos dados (*Geometria Espacial*, número 20), um situado entre os planos  $(\gamma)$  e  $(\varphi)$  e o outro exterior (Figura 7).

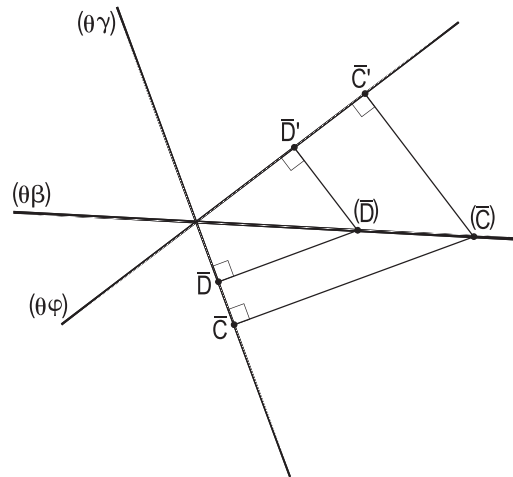


Figura 5

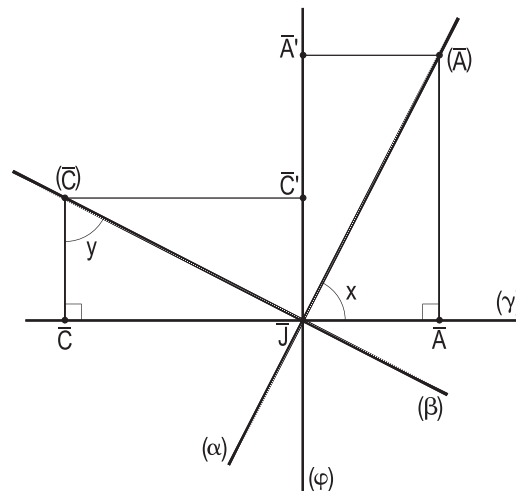


Figura 6

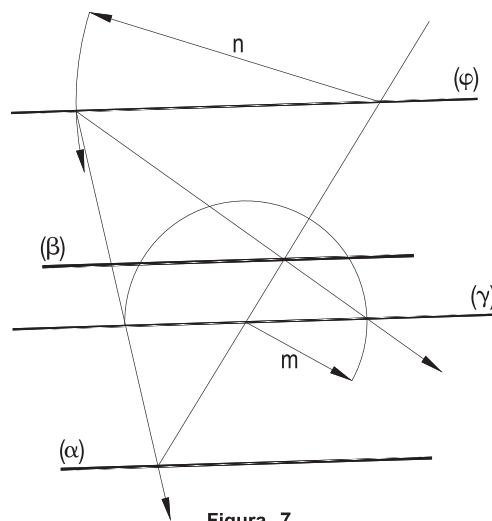


Figura 7

## 5 – Corolários

1 – O lugar geométrico dos pontos para os quais é constante e igual a determinado valor  $k$  a razão entre cotas e afastamentos é um plano  $(\theta)$ , pertencente à linha de terra, exceto esta reta.

Tal valor  $k$  se mede pela tangente trigonométrica do ângulo  $\alpha$  que esse plano  $(\theta)$  forma com  $(\pi)$ , podendo ser positivo (Figuras 8 e 9), ou negativo (Figuras 8 e 10), conforme, respectivamente,  $(\theta)$  atravesse os diedros ímpares ou pares.

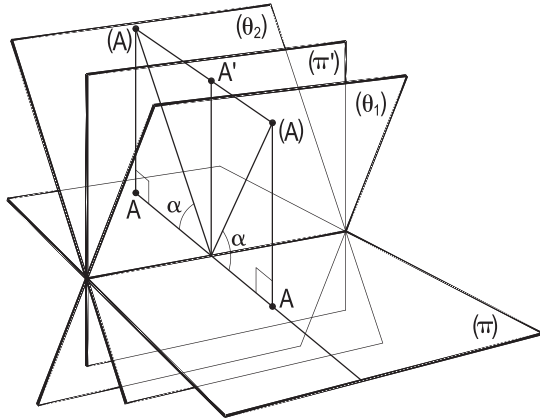


Figura 8

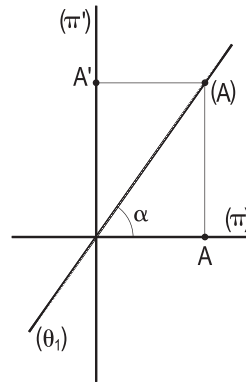


Figura 9

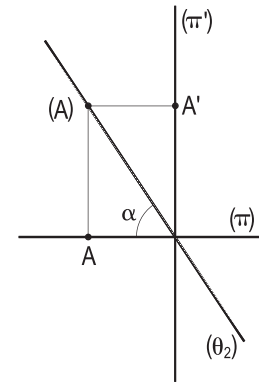


Figura 10

2 – O lugar geométrico dos pontos para os quais é constante e igual a determinado valor  $k$  a razão entre cotas e abscissas é um plano de topo  $(\theta)$ , pertencente à origem das abscissas, exceto sua interseção  $\theta\pi$ , com  $(\pi)$ , plano esse que contém a aresta  $\theta\pi \equiv \theta\pi''$  dos diedros formados por  $(\pi)$  e  $(\pi'')$ .

Tal valor  $k$  se mede pela tangente trigonométrica do ângulo  $\alpha$  que esse plano  $(\theta)$  forma com  $(\pi)$ , podendo ser positivo (Figuras 11 e 12), ou negativo (Figuras 11 e 13), conforme, respectivamente, o traço vertical  $\theta\pi'$ , no primeiro diedro, se volte para a direita, ou para a esquerda.

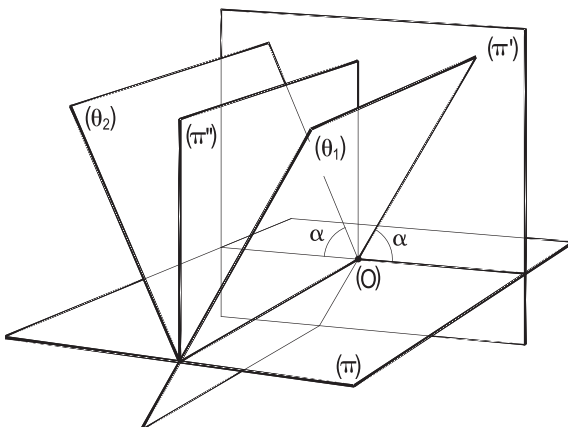


Figura 11

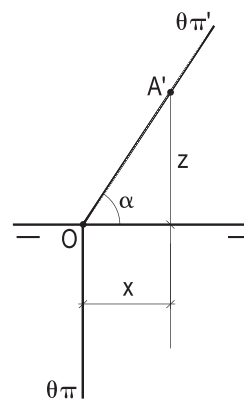


Figura 12

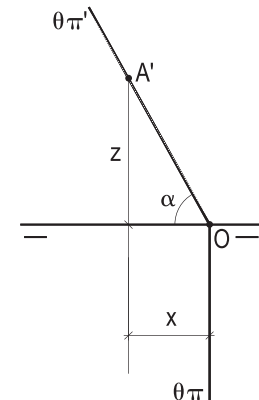


Figura 13

3 – O lugar geométrico dos pontos para os quais é constante a razão  $k$  entre afastamentos e abscissas é um determinado plano vertical ( $\theta$ ), pertencente à origem das abscissas, exceto sua interseção  $\theta\pi'$  com ( $\pi'$ ), plano esse que contém a interseção  $\theta\pi' \equiv \theta\pi''$  dos diedros formados por ( $\pi'$ ) e ( $\pi''$ ).

Tal valor  $k$  se mede pela tangente trigonométrica do ângulo  $\beta$  que esse plano ( $\theta$ ) forma com ( $\pi'$ ), podendo ser positivo (Figuras 14 e 15), ou negativo (Figuras 14 e 16), conforme, respectivamente, o traço horizontal  $\theta\pi$ , no primeiro diedro, se volte para a direita, ou para a esquerda.

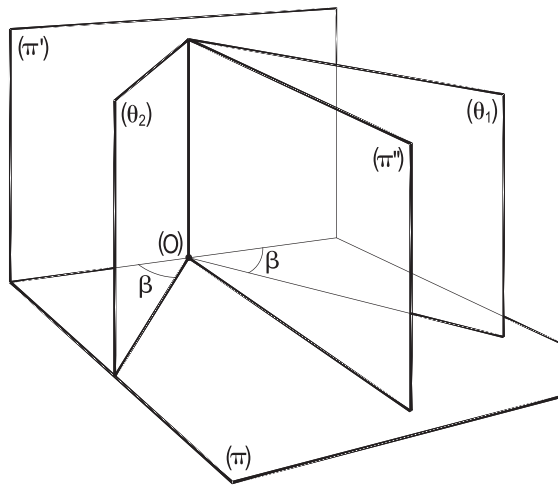


Figura 14

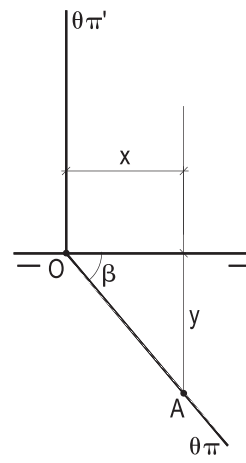


Figura 15

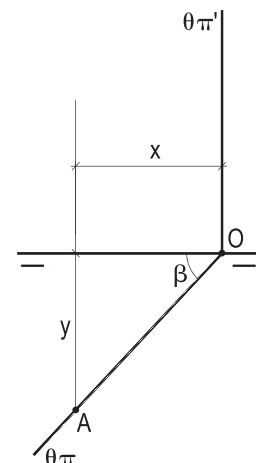


Figura 16

## 6 – Pontos com duas coordenadas iguais ou simétricas

Nos casos particulares em que a razão constante  $k$ , estudada, vale  $+1$ , ou  $-1$ , ou seja, quando os pontos têm, respectivamente, duas coordenadas iguais, ou simétricas, os planos vistos nos itens anteriores passam a ser os bissetores dos diedros formados por ( $\pi$ ) e ( $\pi'$ ) (Figura 17), ou por ( $\pi$ ) e ( $\pi''$ ) (Figura 18), ou, enfim, por ( $\pi'$ ) e ( $\pi''$ ) (Figura 19).

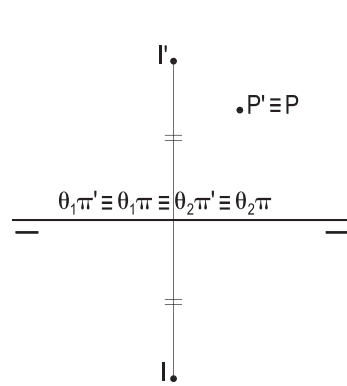


Figura 17

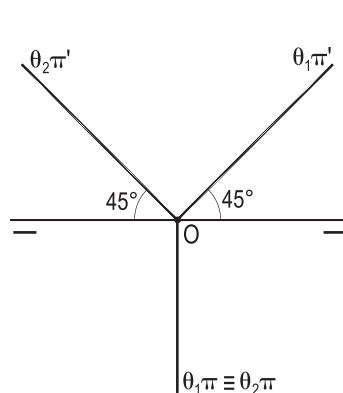


Figura 18

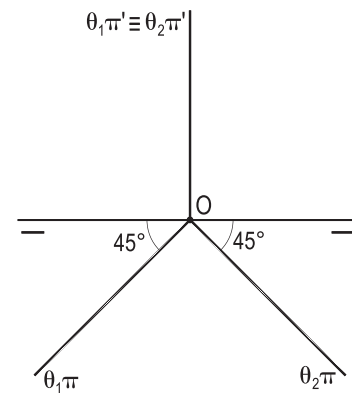


Figura 19

## 7 – Lugar geométrico dos pontos de um plano dado ( $\gamma$ ), que tenham razão $\frac{m}{n}$ constante entre cotas e afastamentos

Por ser a interseção ( $t$ ) entre o plano dado ( $\gamma$ ) e um plano  $(\pi'\pi)$ –(M) (número 5.1), tal reta há de ser concorrente com a linha de terra (qualquer ou de perfil), ou fronto-horizontal, como indicado nos exemplos abaixo, mais simples quando ( $\gamma$ ) é projetante (Figuras 20, 21, 22, 23 e 24), ou com o auxílio de uma vista lateral, quando ( $\gamma$ ) é paralelo a  $(\pi'\pi)$  (Figura 25), ou com a utilização de fronto-horizontais que guardem aquela razão (Figuras 26, 27 e 28).

Naturalmente, se ( $\gamma$ ) for um plano  $(\pi'\pi)$ –(M), o lugar geométrico será um conjunto vazio, pois ( $t$ ) teria que ser a própria linha de terra.

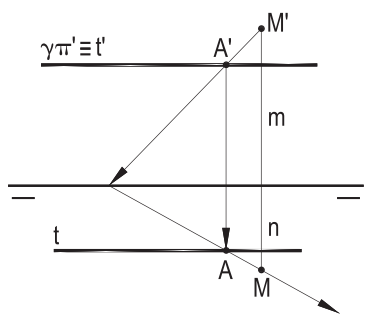


Figura 20

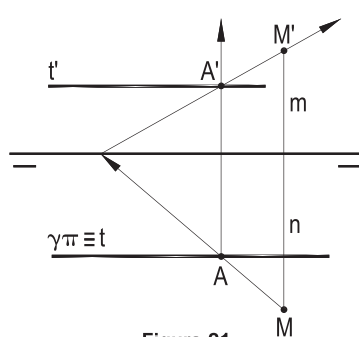


Figura 21

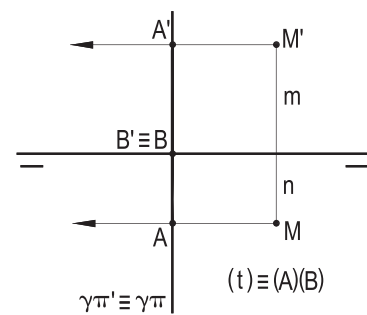


Figura 22

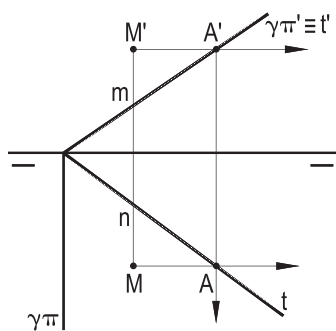


Figura 23

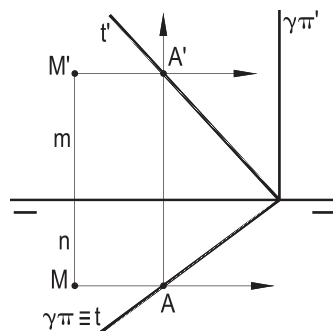


Figura 24

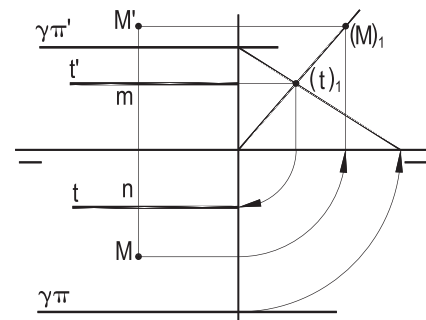


Figura 25

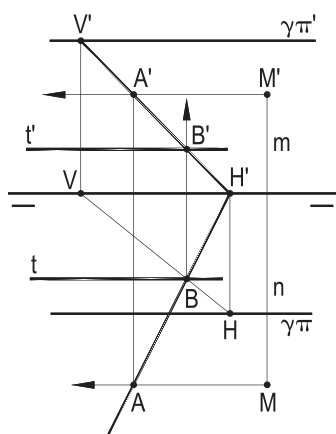


Figura 26

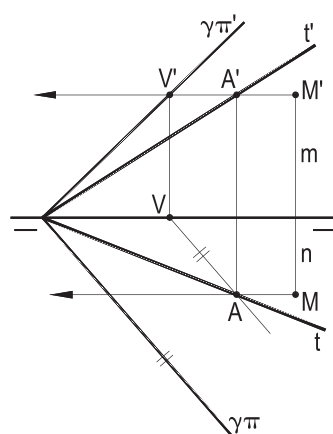


Figura 27

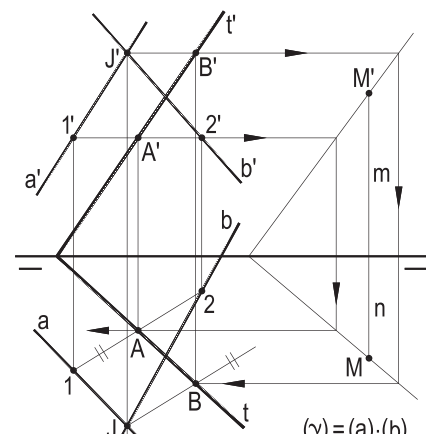


Figura 28



**8 – Lugar geométrico dos pontos de um plano dado ( $\gamma$ ), que tenham razão  $\frac{m}{n}$  constante entre cotas e abscissas**

O lugar geométrico procurado é a reta ( $t$ ), interseção do plano dado ( $\gamma$ ) com o plano de topo ( $\theta$ ) que, pertencendo à origem  $O$  das abscissas, atenda à razão estipulada, tal como mostram as figuras abaixo.

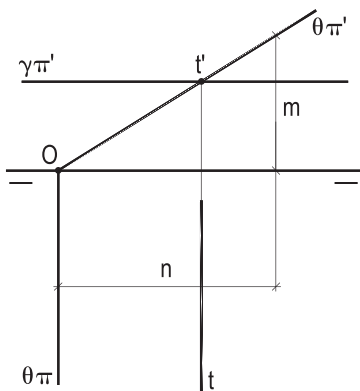


Figura 29

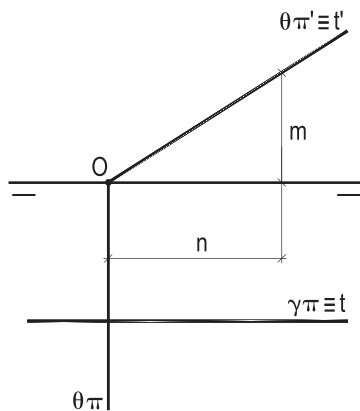


Figura 30

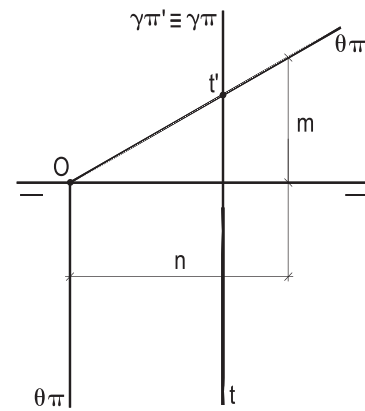


Figura 31

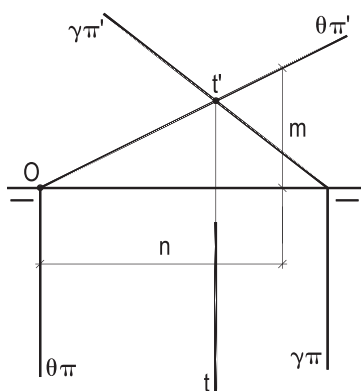


Figura 32

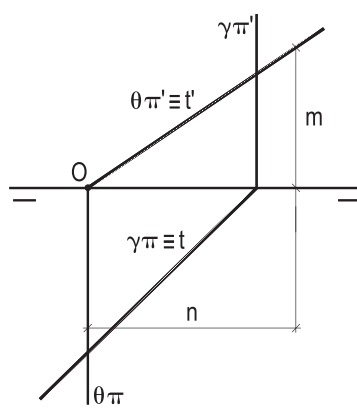


Figura 33

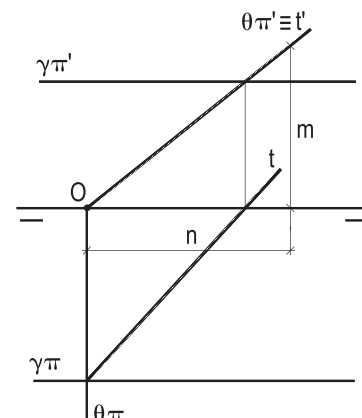


Figura 34

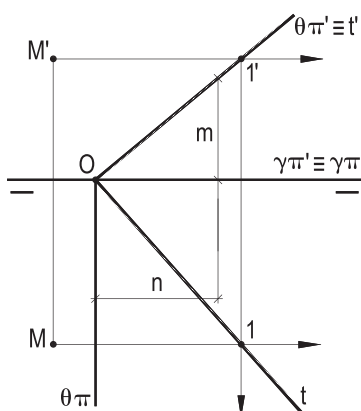


Figura 35

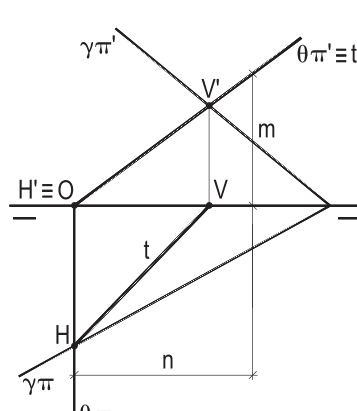


Figura 36

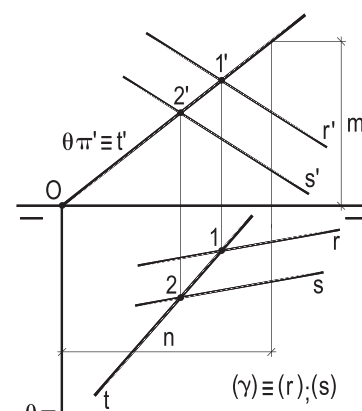


Figura 37

**9 – Lugar geométrico dos pontos de um plano dado ( $\gamma$ ), que tenham razão  $\frac{m}{n}$  constante entre afastamentos e abscissas**

O lugar geométrico há de ser a reta ( $t$ ), interseção do plano dado ( $\gamma$ ) com o plano vertical ( $\theta$ ) que, pertencendo à origem  $O$  das abscissas, atenda à razão  $\frac{m}{n}$  dada.

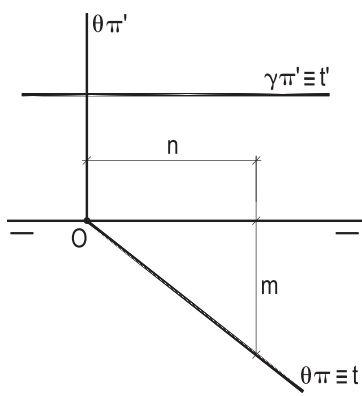


Figura 38

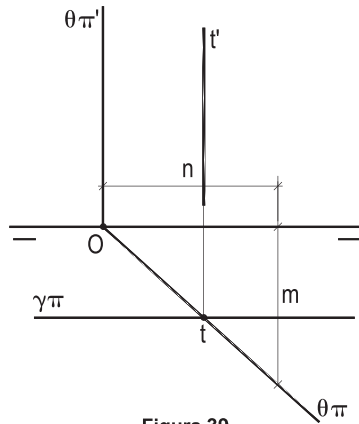


Figura 39

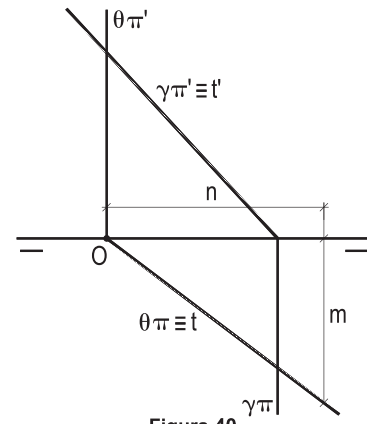


Figura 40

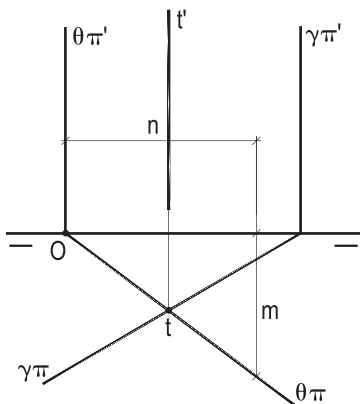


Figura 41

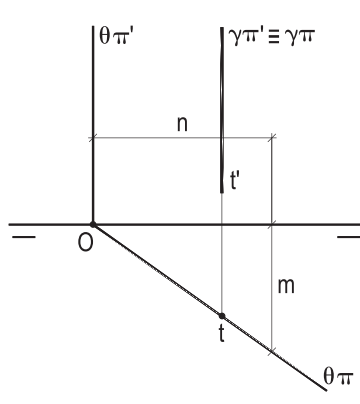


Figura 42

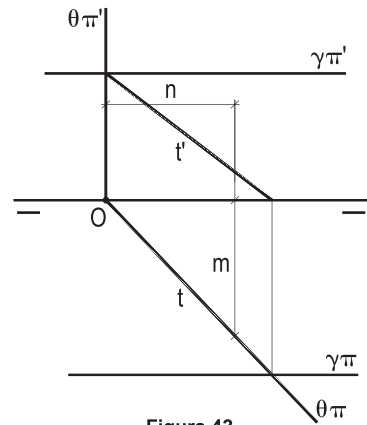


Figura 43

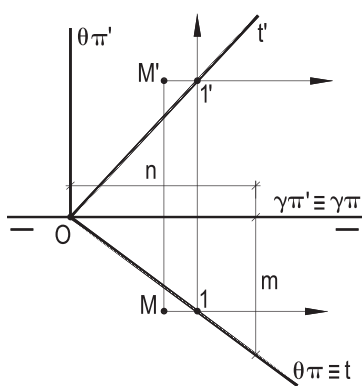


Figura 44

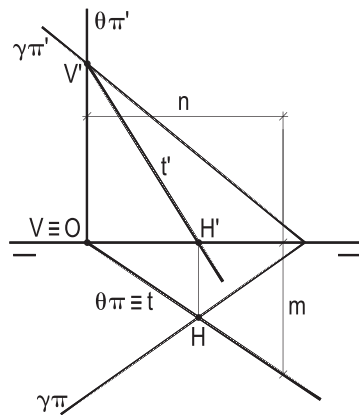


Figura 45

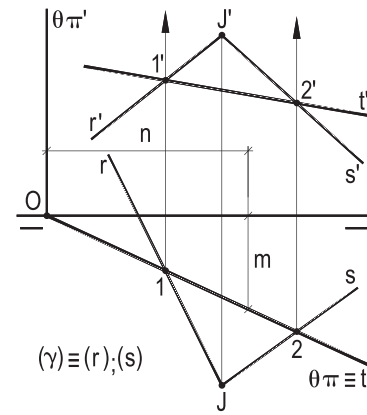


Figura 46

## 10 – Famílias de retas cujos pontos tenham uma coordenada constante e também constante a razão entre as outras duas

São três as hipóteses possíveis, considerada constante uma de suas três coordenadas e mantida igual a determinado valor a razão  $k = \frac{m}{n}$  entre as outras duas. Utilizando-se os lugares geométricos antes instituídos, vem que:

1 – As retas, cujos pontos têm uma mesma abscissa  $x$  e tais que seus pontos tenham constante a razão entre cotas e afastamentos, são retas de perfil, na abscissa  $x$ , resultantes das interseções de seu plano de perfil com o plano  $(\gamma) \equiv (\pi'\pi)-(M)$ , que atenda àquela constante, como as retas (A)(B) das Figuras 47 e 48.

2 – As retas, cujos pontos têm um mesmo afastamento  $y$  e tais que seus pontos atendam à razão constante  $k = \frac{m}{n}$  entre cotas e abscissas, são frontais ( $r$ ), com afastamento  $y$ , resultantes das interseções de seu plano frontal com o plano de topo  $(\gamma)$ , que atenda à razão  $k$  (Figura 49).

3 – As retas que têm seus pontos com cotas constantes  $z$  e razão  $k = \frac{m}{n}$  constante, entre afastamentos e abscissas, são retas horizontais ( $s$ ), com cota  $z$ , resultantes das interseções de seu plano horizontal com o plano vertical  $(\gamma)$ , que obedeça à razão dada  $k$  (Figura 50).

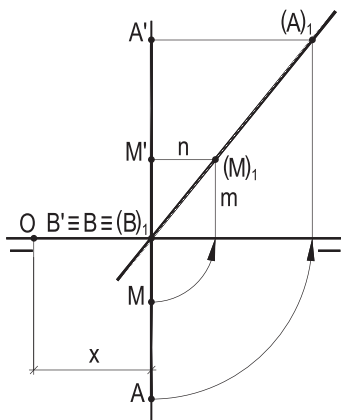


Figura 47

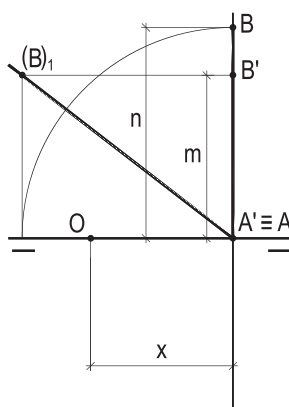


Figura 48

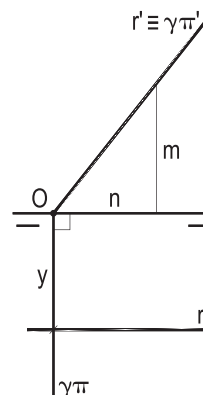


Figura 49

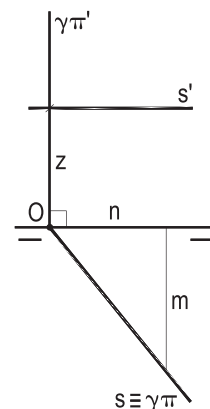


Figura 50

Tanto as coordenadas  $x$ ,  $y$  e  $z$  das retas acima estudadas quanto as razões  $k = \frac{m}{n}$  de duas coordenadas de seus pontos têm valores positivos, mas, é claro, o procedimento é o mesmo para todas as combinações algébricas, mesmo as todas negativas.

Os exemplos das Figuras 47, 49 e 50 correspondem a razões  $k$  positivas, mas, com construções semelhantes, ter-se-ia chegado a retas, com pontos obedientes a razões  $k$  negativas, tal como indicado na Figura 48.

## 11 – Retas cujos pontos têm pares de coordenadas constantes

Há três tipos de retas que têm constantes, para todos os seus pontos, duas de suas coordenadas. São as fronto-horizontais, que têm cota e afastamento constantes (Figura 51), as verticais, que têm constantes a abscissa e o afastamento (Figura 52), e as de topo (Figura 53), para as quais são constantes a abscissa e a cota.

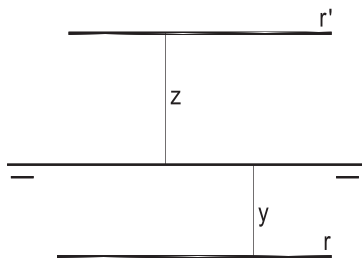


Figura 51

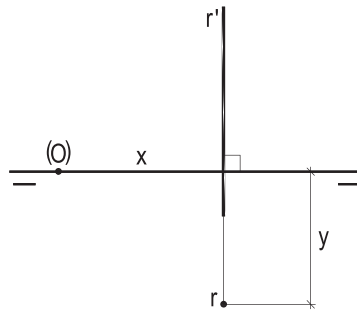


Figura 52

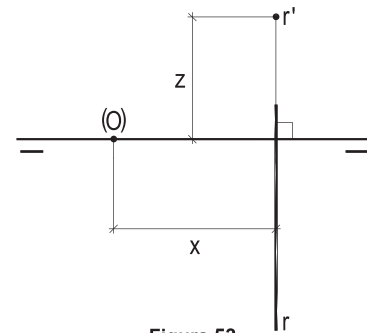


Figura 53

## 12 – Lugar geométrico dos pontos que têm as três coordenadas iguais

Consideremos o plano de topo ( $\theta$ ) e o plano vertical ( $\gamma$ ), ambos contendo a origem das abscissas e inclinados de  $45^\circ$ , respectivamente, em relação a ( $\pi$ ) e a ( $\pi'$ ), tais que os pontos do primeiro tenham abscissas e cotas iguais (número 6) e que os pontos do segundo tenham abscissas e afastamentos iguais (número 6) e sua interseção ( $i$ ), que, então, terá todos os seus pontos com as três coordenadas iguais, pertencente, por isso, ao Bissetor Ímpar, já que resultam iguais as cotas e os afastamentos de seus pontos (Figura 54).

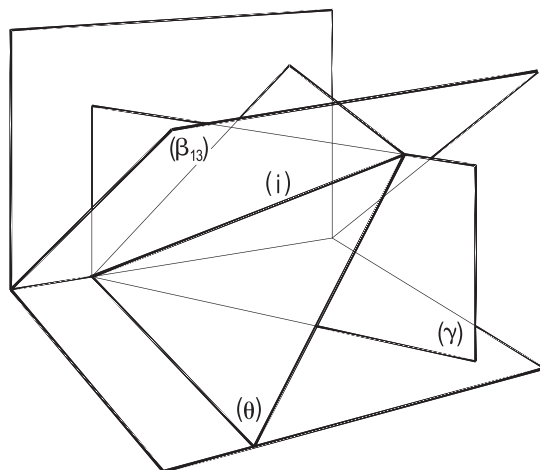


Figura 54

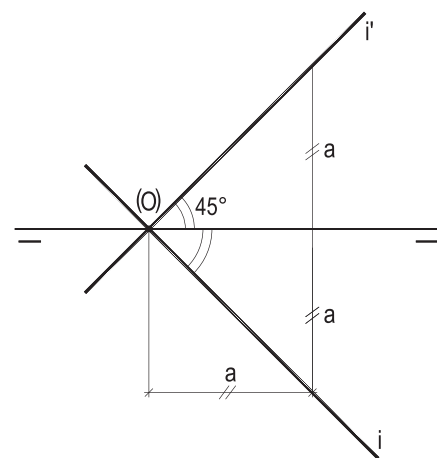


Figura 55

Assim, é essa reta ( $i$ ), comum aos três planos considerados, o lugar geométrico dos pontos que têm as três coordenadas iguais, representada, em épura (Figura 55), com suas duas projeções contendo a origem ( $O$ ) das abscissas e inclinadas, ambas, de  $45^\circ$  em relação a ( $\pi'\pi$ ), voltadas para a direita, no primeiro diedro.

### 13 – Ponto equicoordenado de um plano dado

A determinação do ponto (E) de um plano dado ( $\gamma$ ), que tenha iguais suas três coordenadas, se faz pela simples interseção de ( $\gamma$ ) com a reta (i), lugar geométrico dos pontos equicoordenados (número 12) (Figuras 56, 57, 58, 59, 60, 61 e 62).

O procedimento é o mesmo para planos ( $\gamma$ ) dados pelas projeções de duas retas (a) e (b) (Figuras 63 e 64).

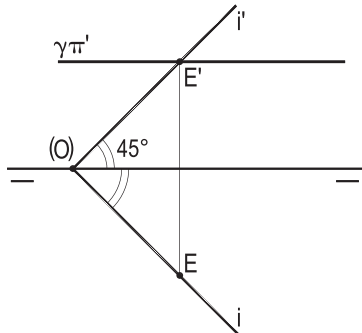


Figura 56

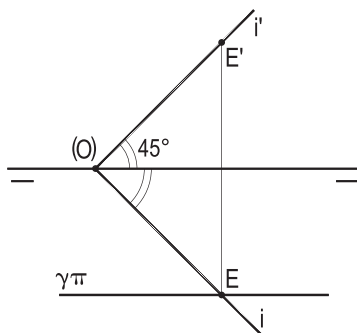


Figura 57

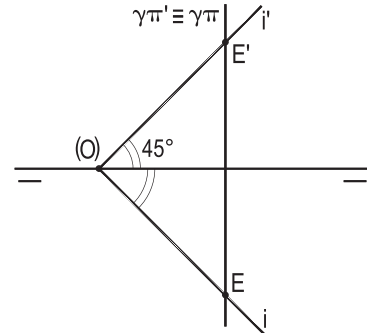


Figura 58

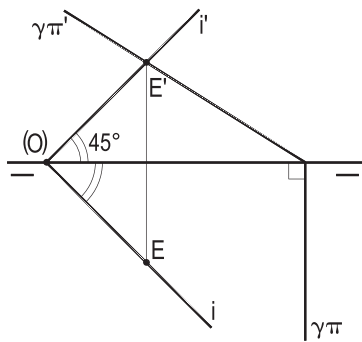


Figura 59

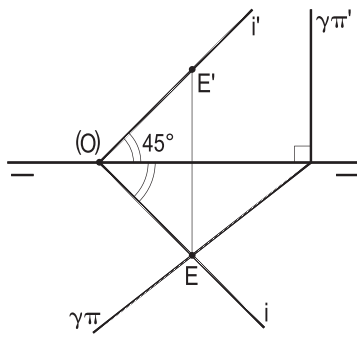


Figura 60

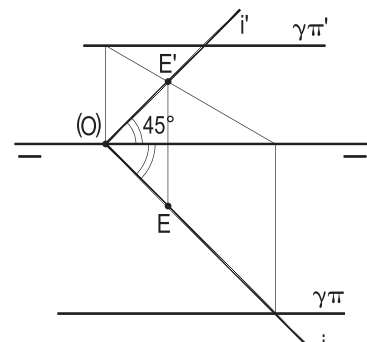


Figura 61

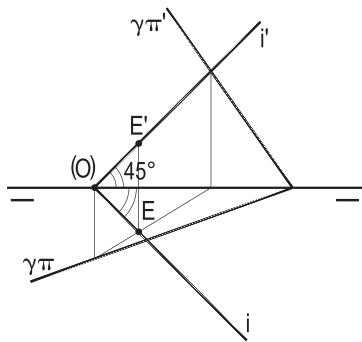


Figura 62

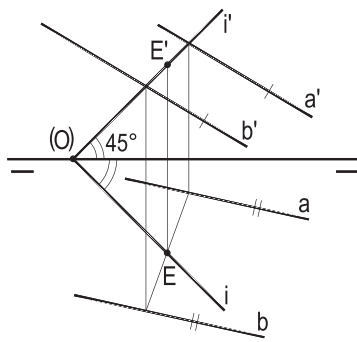


Figura 63

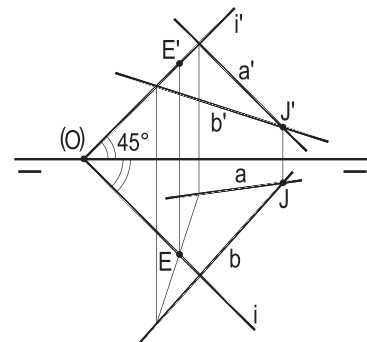


Figura 64

Não foram incluídos nos exemplos acima planos ( $\gamma$ ) pertencentes a ( $\pi^3\pi$ ), porque todas as suas interseções com a reta (i), lugar geométrico dos pontos equicoordenados, coincidem com a própria origem das abscissas, dando valores nulos às três coordenadas.

## 14 – Pontos equicoordenados de uma superfície dada

Os pontos (E) de uma superfície dada que tenham iguais suas três coordenadas são os traços da reta (i), lugar geométrico dos pontos com essa propriedade (número 12) com a superfície considerada. São, sempre, determinados mediante a construção da seção produzida nessa superfície por um plano projetante ( $\gamma$ ) (vertical ou de topo) que contenha a reta (i) e pela obtenção dos pontos em que (i) corte tal seção plana (Figuras 65, 66, 67 e 68, respectivamente, nas superfícies de um cubo, de uma pirâmide quadrangular, de um tronco de prisma triangular e de um cilindro de revolução).

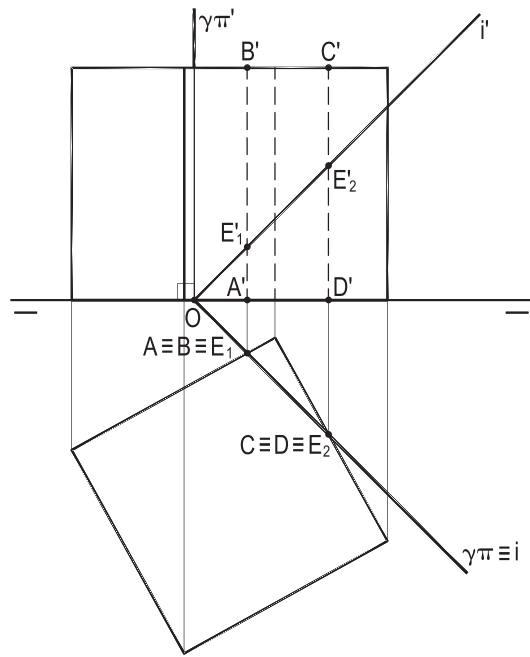


Figura 65

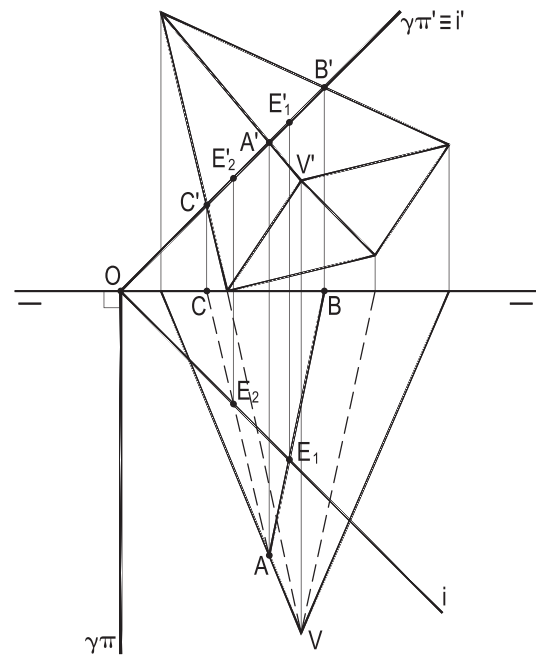


Figura 66

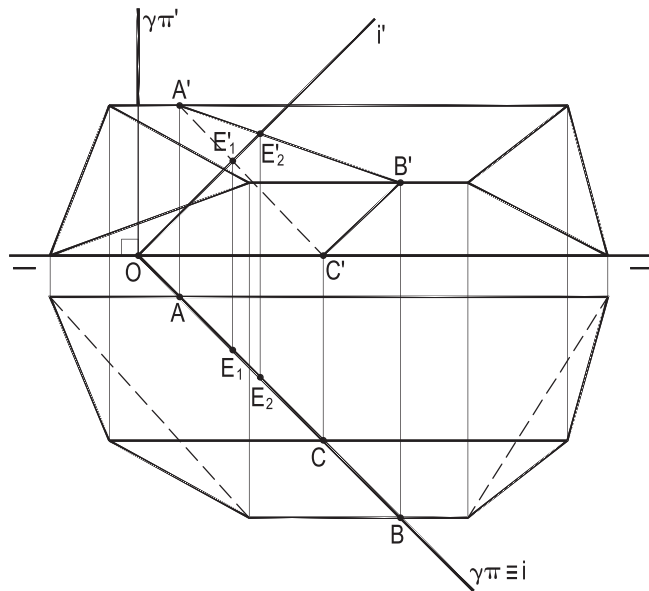


Figura 67

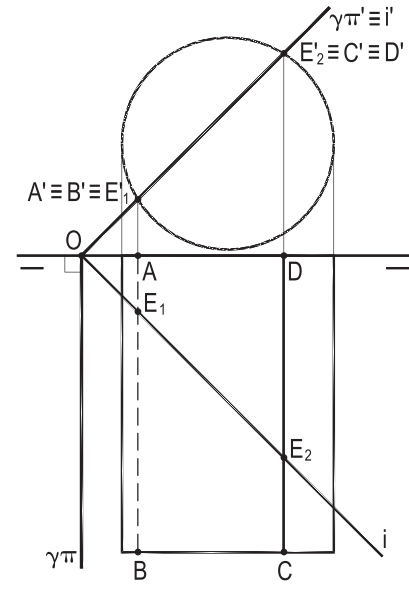


Figura 68

# CAPÍTULO II

## BISSETORES PERTINÊNCIAS, TRAÇOS E PARALELISMOS

### 15 – Teorema

O lugar geométrico dos pontos que, em épura, têm as projeções coincidentes é  $(\beta_{24})$ , o Bissetor Par.

Demonstração: É preciso demonstrar a afirmativa, isto é, que todos os pontos de  $(\beta_{24})$  obedecem à propriedade citada e, adicionalmente, que nenhum ponto exterior a esse plano pode contar com ela.

A afirmativa, já apresentada no item 6, anterior, fica definitivamente comprovada ao se observar que, como todos os pontos de  $(\beta_{24})$  têm cotas e afastamentos com valores simétricos, suas projeções devem ser coincidentes, incluídos os pontos da linha de terra, naturalmente.

Para completar a demonstração, consideremos um ponto (J) não pertencente a  $(\beta_{24})$ , e, por ele, a reta de topo (t), contendo um ponto (P), situado em  $(\beta_{24})$ , o que faz coincidirem as projeções verticais J' e P' desses dois pontos (Figura 69).

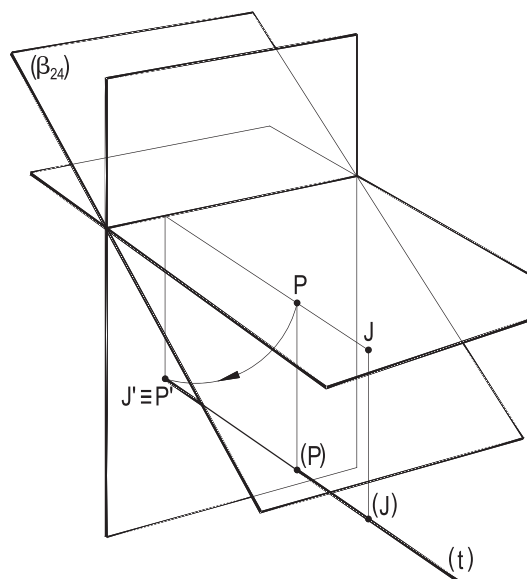


Figura 69

Por terem afastamentos diferentes os pontos (J) e (P) têm que ter projeções horizontais distintas.

Assim, em épura, não podem coincidir as duas projeções de qualquer ponto (J) exterior a  $(\beta_{24})$  (Figura 70).

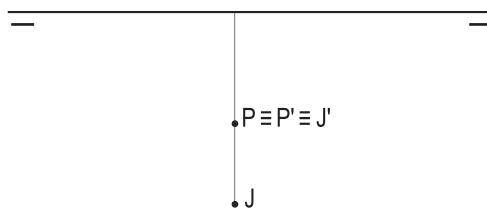


Figura 70

E, com isso, fica demonstrado o teorema.

## 16 – Escólio

É condição necessária e suficiente, para que um ponto pertença a  $(\beta_{24})$ , que ele, em épura, tenha projeções coincidentes.

## 17 – Pertinência de uma figura a $(\beta_{24})$

Como decorrência imediata do acima demonstrado, vem que é condição para que uma figura plana qualquer pertença a  $(\beta_{24})$  que, em épura, sejam coincidentes suas duas projeções.

## 18 – Traço de reta com $(\beta_{24})$

O traço (P) de uma reta (r) com  $(\beta_{24})$  determina-se, em épura, pelo ponto comum às suas duas projeções (Figuras 71, 72, 73, 74 e 75), salvo para retas de perfil.

É claro que retas fronto-horizontais não têm traços com  $(\beta_{24})$ , por não poderem cortar este plano, sendo ou paralelas ou pertencentes a ele.

E, em épura, retas de perfil não oferecem ponto de encontro para suas projeções, que, em verdade, se situam na mesma linha de chamada. O procedimento mais usual para a obtenção do traço (P) de uma reta de perfil (A)(B) com  $(\beta_{24})$  consiste no rebatimento lateral do plano de perfil que a contém (Figuras 76 e 77), podendo, é claro, acontecer que uma reta de perfil, como (E)(F) ou (R)(S) (Figuras 78 e 79), não apresente traço com  $(\beta_{24})$  por, respectivamente, ser paralela ou pertencente a esse bisetor.

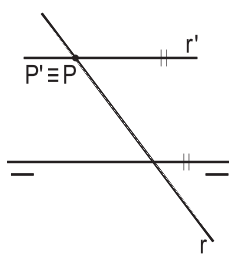


Figura 71

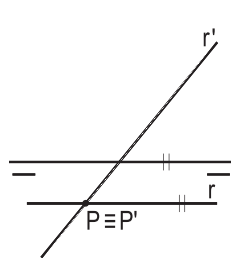


Figura 72

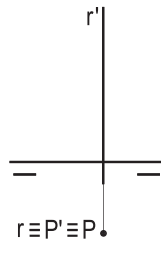


Figura 73

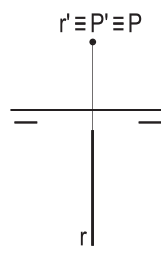


Figura 74

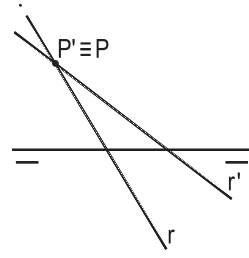


Figura 75

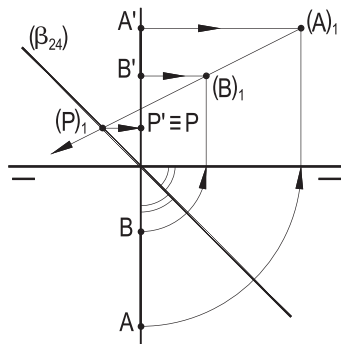


Figura 76

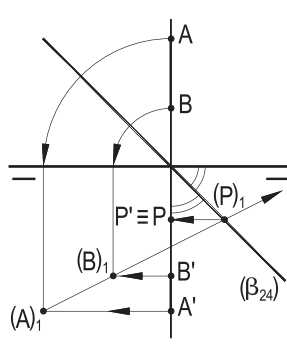


Figura 77

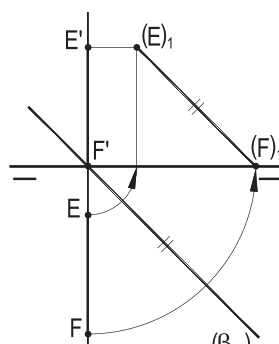


Figura 78

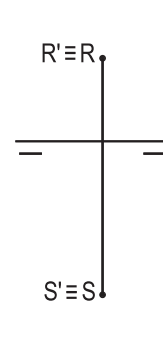
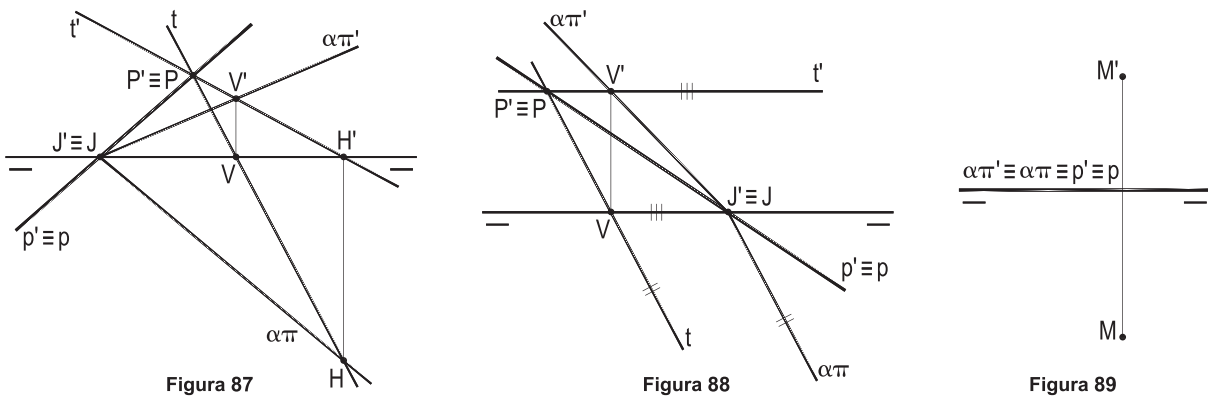
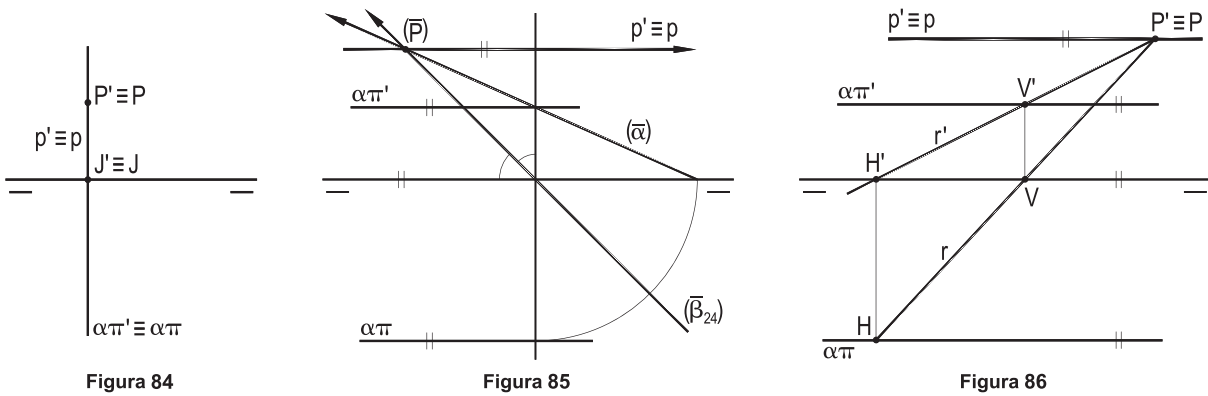
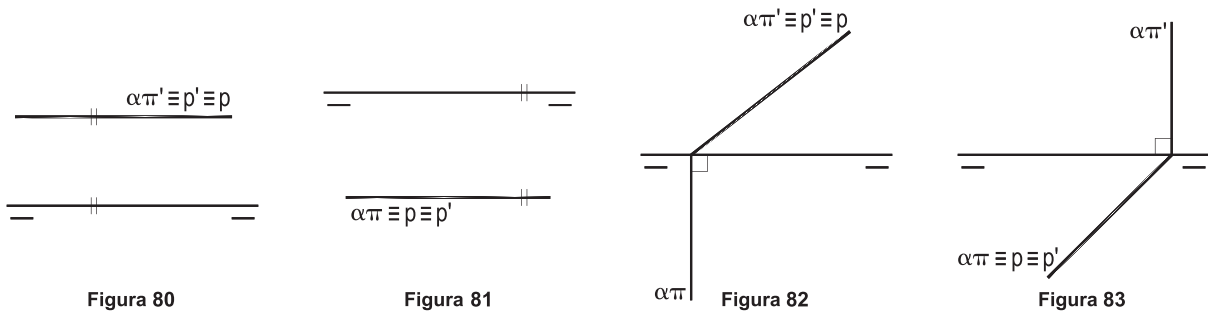


Figura 79



## 19 – Traço de plano com $(\beta_{24})$

Para qualquer plano  $(\alpha)$  projetante é imediata a obtenção das projeções da reta  $(p)$ , sua interseção com  $(\beta_{24})$ , por coincidirem com o traço do plano com o plano de projeção a que é perpendicular (Figuras 80, 81, 82, 83 e 84); para planos  $(\alpha)$  paralelos à linha de terra, a interseção  $(p)$  com  $(\beta_{24})$ , uma fronto-horizontal, naturalmente, pode ser obtida com o auxílio de um rebatimento lateral (Figura 85), ou de uma reta qualquer  $(r)$ , de  $(\alpha)$  e de seu traço  $(P)$  com  $(\beta_{24})$  (Figura 86); para planos  $(\alpha)$  quaisquer, a interseção procurada  $(p)$ , sendo, obviamente, concorrente com a linha de terra, já possui um primeiro ponto conhecido – o traço  $(J)$  de  $(\alpha)$  com  $(\pi'\pi)$  –, bastando obter um segundo ponto  $(P)$ , traço de uma reta arbitrária  $(t)$  de  $(\alpha)$  com  $(\beta_{24})$ , para definir  $(p)$  (Figuras 87 e 88); planos  $(\pi'\pi)$ – $(M)$  têm, todos, por interseção com  $(\beta_{24})$ , a própria linha de terra (Figura 89).



Quando o plano ( $\alpha$ ) não vem dado por seus traços, mas sim por duas retas ( $r$ ) e ( $s$ ), deve-se, inicialmente, identificar a natureza do plano, pois, se for ele projetante, como visto acima, são de imediatas obtensões as projeções de sua interseção ( $p$ ) com ( $\beta_{24}$ ) (Figuras 90 e 91) e, se for paralelo a ( $\pi'\pi$ ), o fato de ( $p$ ) ter que ser fronto-horizontal reduz a construção à obtenção de um único ponto ( $P$ ) de ( $\alpha$ ) situado em ( $\beta_{24}$ ) (Figura 92). Quando, enfim, o plano é qualquer, a determinação dos traços ( $P$ ) e ( $Q$ ) de duas de suas retas com ( $\beta_{24}$ ) soluciona a questão, pois ( $P$ )( $Q$ ) é a reta ( $p$ ) procurada. De modo geral as próprias retas ( $r$ ) e ( $s$ ) que definem ( $\alpha$ ) fornecem tais traços (Figuras 93 e 94), sendo, por vezes, necessário lançar mão de uma terceira reta ( $t$ ) de ( $\alpha$ ) (Figura 95).

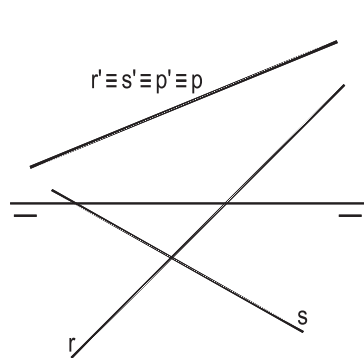


Figura 90

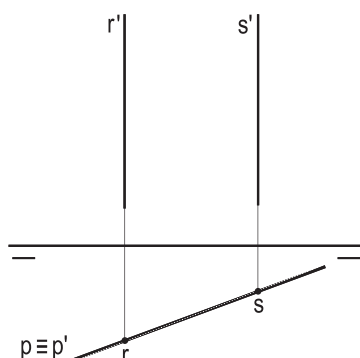


Figura 91

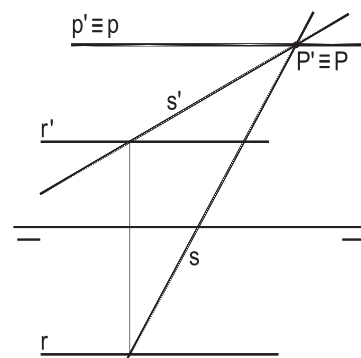


Figura 92

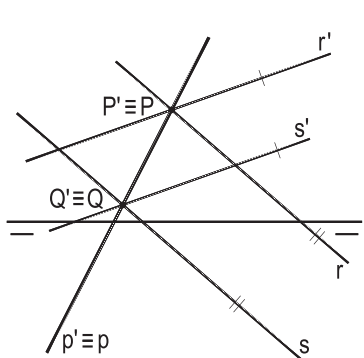


Figura 93

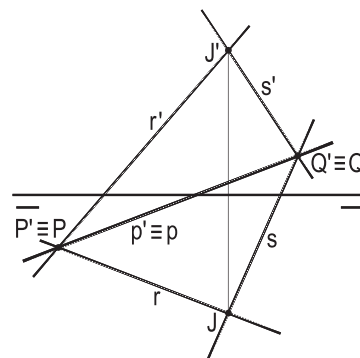


Figura 94

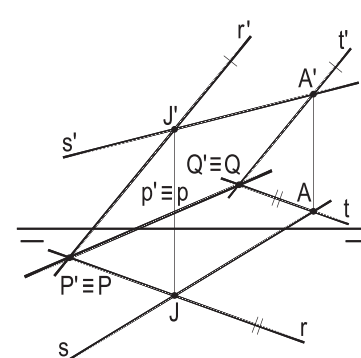


Figura 95

## 20 – Retas paralelas a ( $\beta_{24}$ )

Sendo ( $\beta_{24}$ ) um plano ( $\pi'\pi$ )-(M), ele só pode possuir retas fronto-horizontais, quaisquer ou de perfil. Assim, são essas três as naturezas das retas paralelas a ( $\beta_{24}$ ). Todas as fronto-horizontais, salvo as pertencentes a ( $\beta_{24}$ ), serão, então, paralelas a esse bissetor, sendo, portanto, condição para que uma reta fronto-horizontal seja paralela a ( $\beta_{24}$ ) que não tenha, em é pura, projeções coincidentes, o que a obrigaria a pertencer a esse bissetor.

Passemos, então, a estudar as retas ( $r$ ), quaisquer, e as retas (A)(B), de perfil, que sejam paralelas a ( $\beta_{24}$ ).

As retas quaisquer paralelas a  $(\beta_{24})$  têm, em épura, projeções paralelas, para que não cortem esse bisetor. Disso decorrem as seguintes propriedades:

1 – São iguais, em épura, os segmentos formados pelas duas projeções de todos os seus pontos (Figura 96), o que implica em que sejam iguais para todos os seus pontos as somas de cotas e afastamentos. Por isso, para toda reta paralela a  $(\beta_{24})$ , são iguais a cota do traço vertical e o afastamento do traço horizontal (Figura 97).

2 – O traço (I) com  $(\beta_{13})$  de toda reta qualquer (r) paralela a  $(\beta_{24})$  é o ponto médio do segmento formado por seus traços horizontal (H) e vertical (V) (Figura 98), e, então, a cota e o afastamento de (I) valem a metade da cota de (V) e do afastamento de (H).

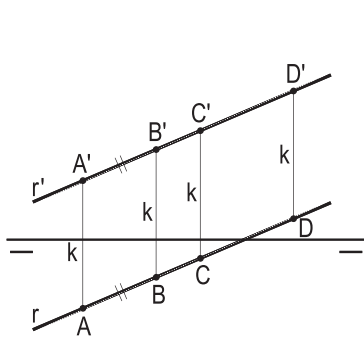


Figura 96

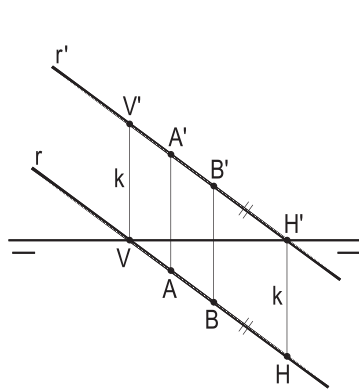


Figura 97

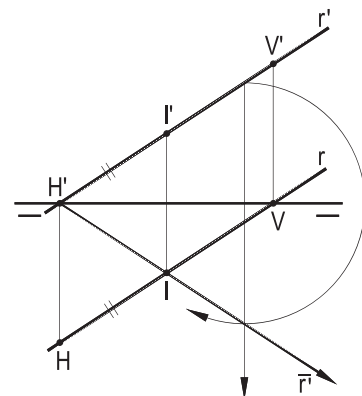


Figura 98

Tais propriedades são, naturalmente, válidas para retas de perfil paralelas a  $(\beta_{24})$  (Figuras 99 e 100), sendo de ressaltar que os segmentos (A)(B) de toda reta de perfil, paralela a  $(\beta_{24})$ , têm, em épura, projeções iguais em comprimentos e em sentidos (Figura 99).

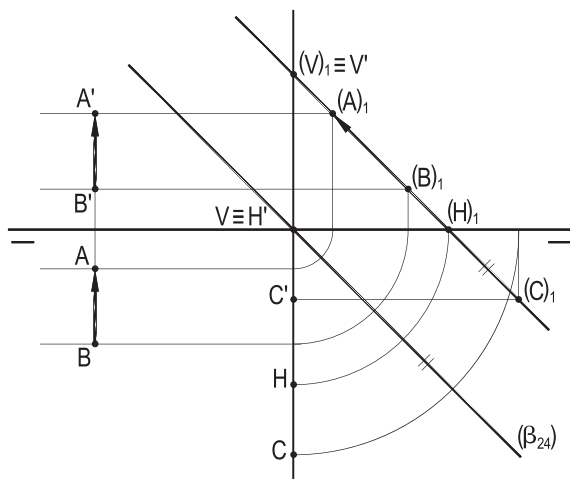


Figura 99

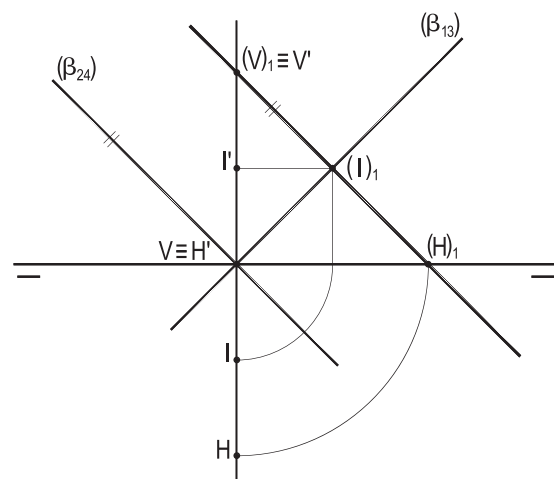


Figura 100

## 21 – Planos paralelos a $(\beta_{24})$

Os planos paralelos a  $(\beta_{24})$  são, evidentemente, paralelos a  $(\pi'\pi)$ . E, porque todos contêm retas de perfil paralelas a  $(\beta_{24})$ , as propriedades dos pontos dessas retas (número 20) aplicam-se aos planos  $(\alpha)$ , paralelos a esse bissetor. Assim:

1 – Seus traços  $\alpha\pi'$  e  $\alpha\pi$  são, em épora, simétricos em relação a  $(\pi'\pi)$  (Figuras 101 e 104), independentemente dos diedros que atravessam.

2 – É constante, para todos os pontos de  $(\alpha)$ , a soma de cota e afastamento, valor esse que se mede pela cota de  $\alpha\pi'$  e pelo afastamento de  $\alpha\pi$  (Figuras 102 e 105).

3 – A interseção  $(i)$  de  $(\alpha)$  com  $(\beta_{13})$  é, naturalmente, fronto-horizontal. E, além disso, equidista dos traços  $\alpha\pi'$  e  $\alpha\pi$  (Figuras 103 e 106). Porque nos triângulos retângulos e isósceles  $(V)_1 J (H)_1$  (Figuras 103 e 106), a bissetriz  $(\beta_{13})$  é também mediana e, assim, seu pé, na hipotenusa  $(V)_1(H)_1$ , tem que ser o ponto médio dessa hipotenusa, o que obriga, então, que a reta  $(i)$ , traço de  $(\alpha)$  com  $(\beta_{13})$ , equidiste dos dois traços de  $(\alpha)$ .

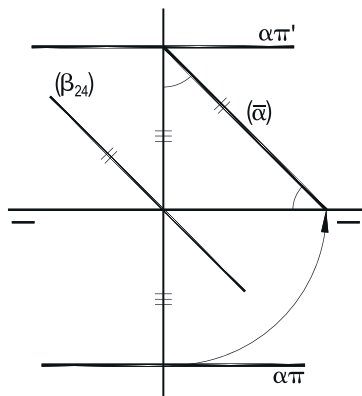


Figura 101

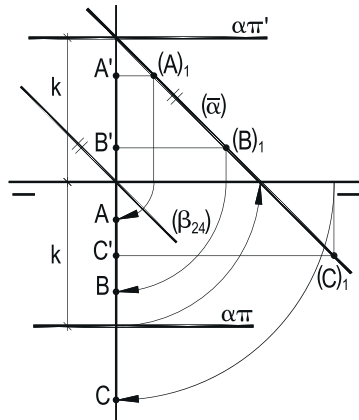


Figura 102

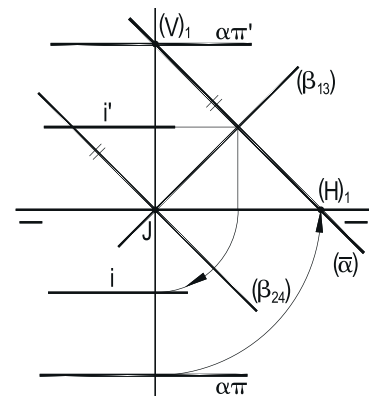


Figura 103

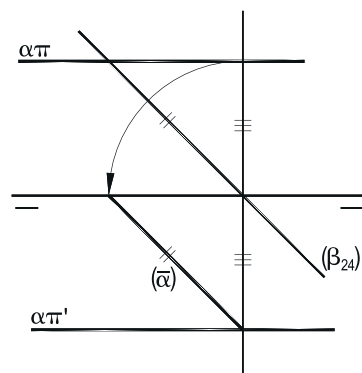


Figura 104

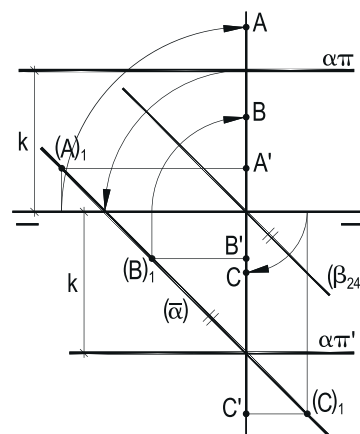


Figura 105

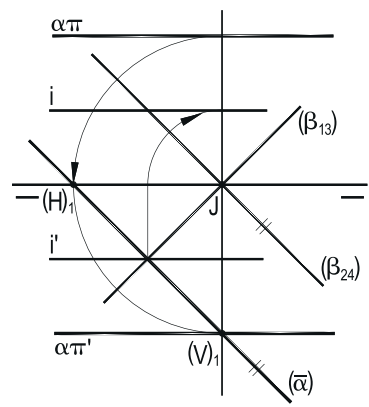


Figura 106

## 22 – Observação

Embora o foco do presente trabalho seja o Bissetor Par, seria incompleto não apresentar, mesmo que sucintamente, propriedades de  $(\beta_{13})$  relacionadas às aqui detalhadas para  $(\beta_{24})$ , o que se passa a fazer.

## 23 – Teorema

O lugar geométrico dos pontos que têm, em épura, as projeções simétricas em relação à linha de terra é  $(\beta_{13})$ , o Bissetor Ímpar.

Demonstração: Consideremos um ponto (I), qualquer, de  $(\beta_{13})$ , que, sabe-se (número 6), tem cota e afastamento iguais (Figura 107), o que faz com que, em épura, suas projeções sejam simétricas em relação à linha de terra (Figura 108). Seja, agora, um ponto (J) exterior a  $(\beta_{13})$  e a reta de topo (t) que o contém e que corta  $(\beta_{13})$  no ponto (I) (Figura 107). Como (J) tem afastamento diferente do de (I), sua projeção horizontal, não podendo coincidir com I, faz com que J e J' não possam, em épura, ser simétricos em relação a  $(\pi'\pi)$  (Figura 108).

Assim, no estudo dos pontos, a simetria das projeções, em épura, em relação a  $(\pi'\pi)$  é exclusiva dos pontos de  $(\beta_{13})$ , o que demonstra o teorema.

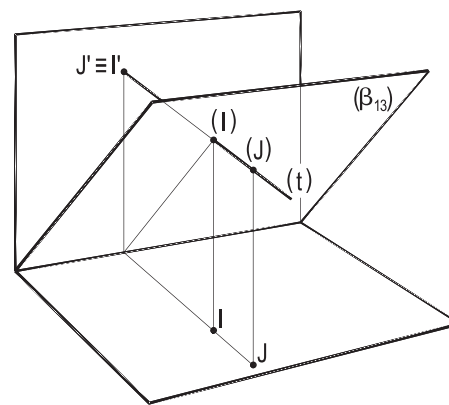


Figura 107

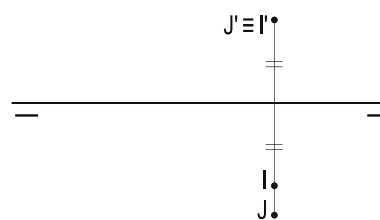


Figura 108

## 24 – Escólio

É condição necessária e suficiente, para que um ponto pertença a  $(\beta_{13})$ , que ele, em épura, tenha projeções simétricas em relação à linha de terra.

## 25 – Pertinência de uma figura a $(\beta_{13})$

Assim, para que uma figura plana qualquer pertença a  $(\beta_{13})$ , é necessário e bastante que, em épura, suas projeções sejam simétricas em relação à linha de terra.

## 26 – Traço de reta com $(\beta_{13})$

O traço (I) de uma reta (r) com  $(\beta_{13})$  é o ponto de (r) que apresenta, em épura, projeções simétricas em relação a  $(\pi'\pi)$ , o que se consegue determinar pela adequada utilização da simétrica de uma das projeções de (r) em relação a  $(\pi'\pi)$ , buscando cortar a outra (Figuras 109, 110, 111, 112, 113 e 114).

Para retas de perfil, é prático operar com uma vista lateral (Figura 115).

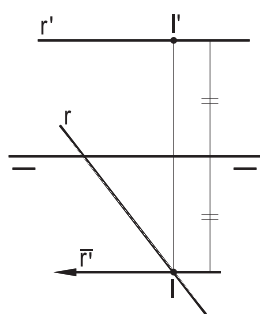


Figura 109

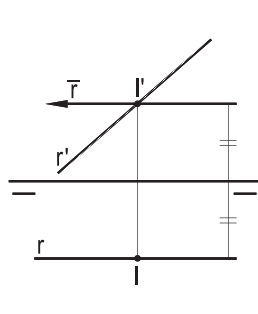


Figura 110

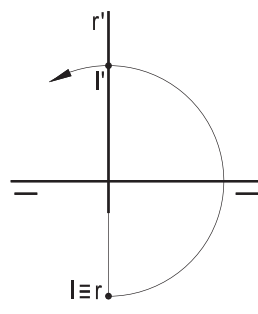


Figura 111

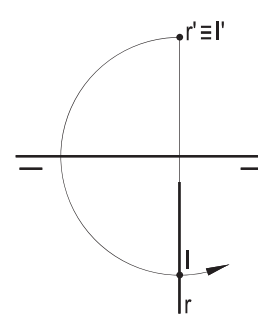


Figura 112

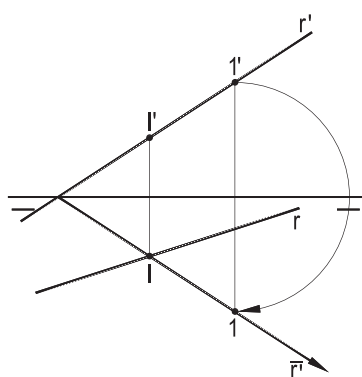


Figura 113

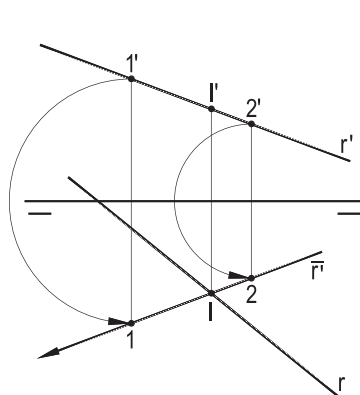


Figura 114

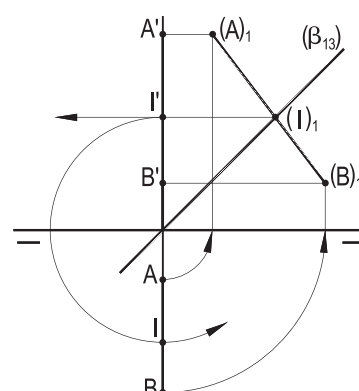


Figura 115

## 27 – Observação

Retas fronto-horizontais não têm, evidentemente, traço com  $(\beta_{13})$ , já que ou são paralelas ou pertencentes a esse bisetor.

## 28 – Retas paralelas a $(\beta_{13})$

Naturalmente, só podem ser paralelas a  $(\beta_{13})$ , além das fronto-horizontais, as retas quaisquer que tenham, em épura, uma projeção paralela à simétrica da outra em relação a  $(\pi'\pi)$  (Figura 116) e as de perfil (A)(B) que tenham, em épura, projeções iguais e com sentidos contrários (Figura 117).

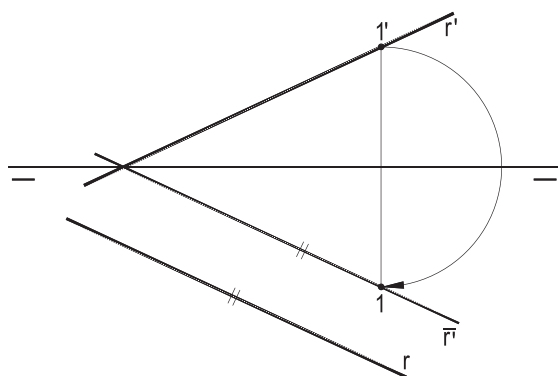


Figura 116

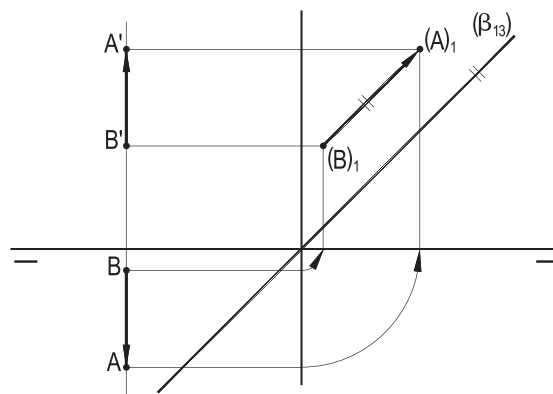


Figura 117

## 29 – Traço de plano com $(\beta_{13})$

A determinação da interseção ( $i$ ) de um plano projetante com  $(\beta_{13})$  é imediata, por se conhecer ao menos uma de suas projeções (Figuras 118, 119, 120, 121 e 122). Planos paralelos a  $(\pi'\pi)$  se resolvem com uma vista lateral (Figura 123), ou com o auxílio de uma qualquer sua ( $t$ ), utilizando seu traço ( $I$ ), com  $(\beta_{13})$  (Figura 124), que, aliás, é o mesmo procedimento para planos quaisquer, dados por seus traços (Figura 125) ou por duas retas ( $a$ ) e ( $b$ ) (Figura 126).

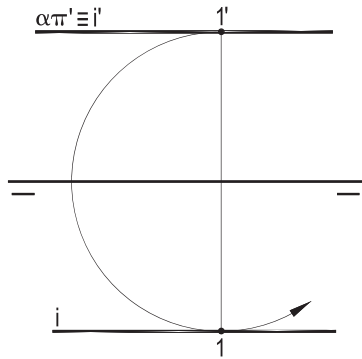


Figura 118

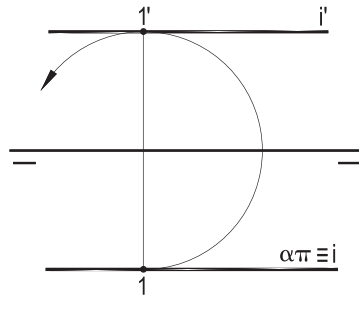


Figura 119

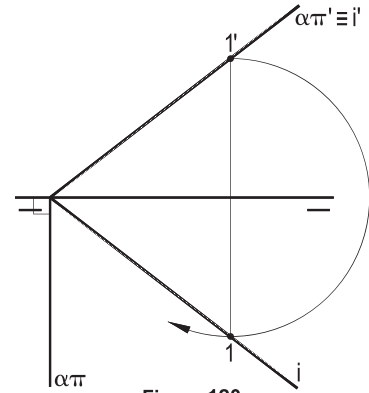


Figura 120

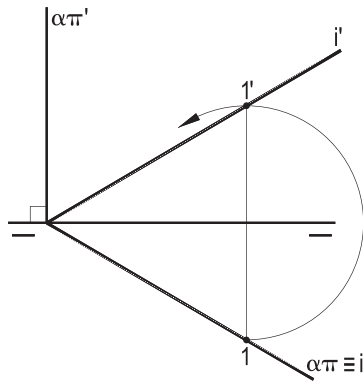


Figura 121

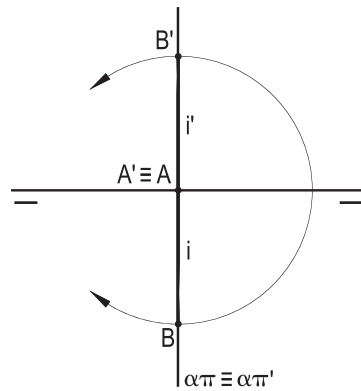


Figura 122

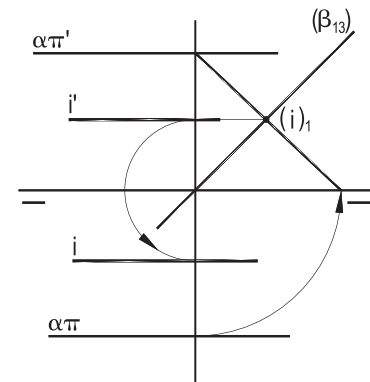


Figura 123

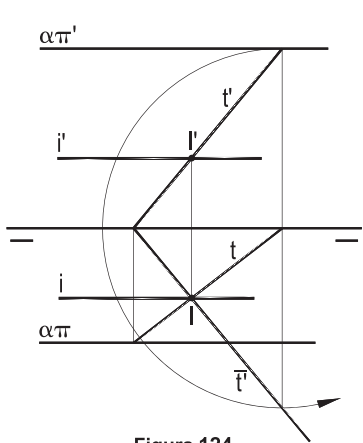


Figura 124

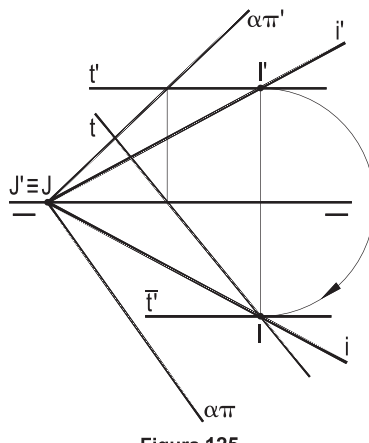


Figura 125

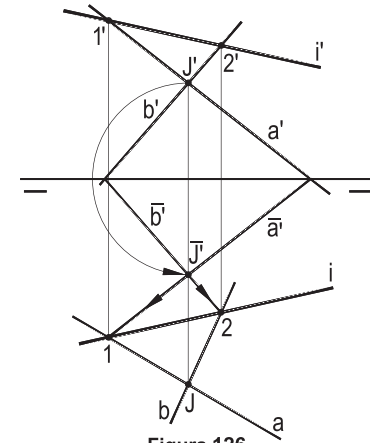


Figura 126

### 30 – Planos paralelos a $(\beta_{13})$

Os planos paralelos a  $(\beta_{13})$  são, naturalmente, paralelos a  $(\pi'\pi)$  e, por se inclinarem igualmente em relação a  $(\pi')$  e a  $(\pi)$ , trazem interessantes propriedades:

1 – Os traços  $\alpha\pi'$  e  $\alpha\pi$  de um plano  $(\alpha)$ , paralelo a  $(\beta_{13})$ , são, em é pura, coincidentes, independentemente dos diedros que atravessam (Figuras 127 e 130).

2 – Para todos os pontos de um plano paralelo a  $(\beta_{13})$ , é constante a diferença entre cotas e afastamentos.

De fato, para um ponto  $(A)$  qualquer de um plano  $(\alpha)$ , paralelo a  $(\beta_{13})$ , uma vista lateral mostra a igualdade dos triângulos retângulos e isósceles hachurados (Figuras 128 e 131), o que implica em que a diferença entre a cota  $VA'$  e o afastamento  $VA$  desse ponto igual, sempre, a cota  $k$  do traço vertical  $\alpha\pi'$  do plano, quer tenha valores positivos (Figura 128), quer negativos (Figura 131).

3 – As projeções coincidentes  $p' \equiv p$  da interseção  $(p)$  de um plano  $(\alpha)$ , paralelo a  $(\beta_{13})$ , com  $(\beta_{24})$ , equidistam, em é pura, dos traços  $\alpha\pi' \equiv \alpha\pi$  coincidentes do plano e da linha de terra (Figuras 129 e 132).

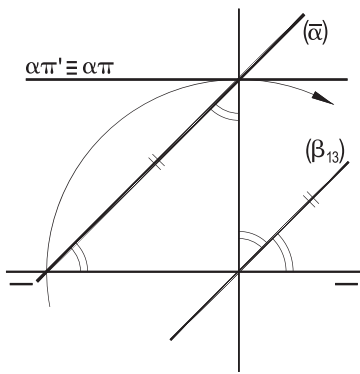


Figura 127

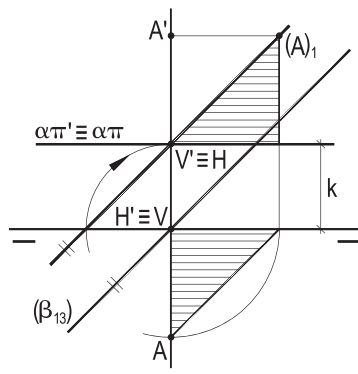


Figura 128

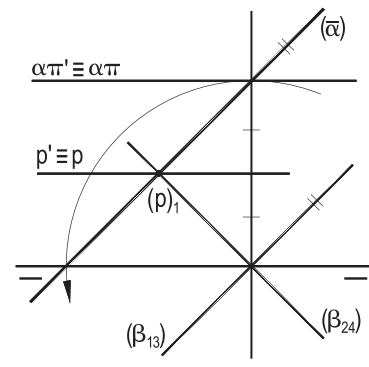


Figura 129

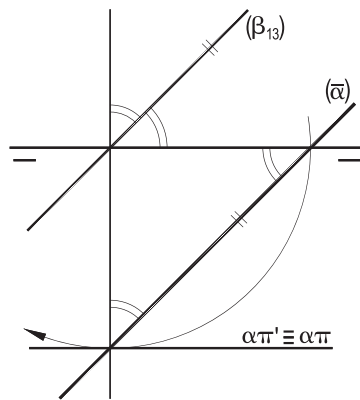


Figura 130

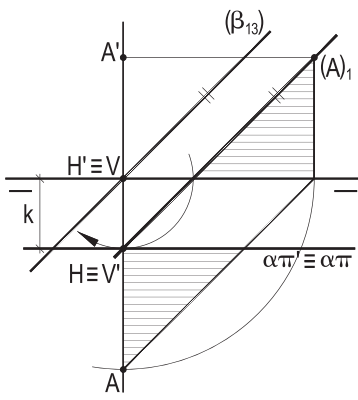


Figura 131

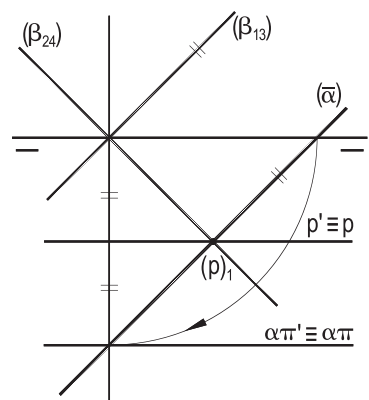


Figura 132



# CAPÍTULO III

## BISSETORES PERPENDICULARIDADE

### 31 – Teorema

Toda reta perpendicular a um plano  $(\pi'\pi)-(M)$  é de perfil e seus segmentos têm projeções com medidas inversamente proporcionais à cota e ao afastamento do ponto  $(M)$ .

Demonstração: Toda reta perpendicular a um plano  $(\pi'\pi)-(M)$  é ortogonal ou, eventualmente, perpendicular à linha de terra (*Geometria Espacial*, número 21), o que implica em que pertença a um plano de perfil. E, tendo que ser oblíqua a  $(\pi)$  e a  $(\pi')$ , há de ser de perfil.

Para analisar as projeções de um segmento qualquer  $(A)(B)$  de uma reta  $(r)$  perpendicular a um plano  $(\alpha)$ , pertencente à linha de terra e a um ponto dado  $(M)$ , consideremos as projeções  $A'B'$ ,  $AB$ ,  $M'$  e  $M$ , e os triângulos retângulos  $(A)(\bar{A})(B)$  e  $(M)M(J)$  (Figura 133) que, por terem seus lados, aos pares, com direções ortogonais, são semelhantes, o que permite anotar (Figuras 133 e 134):

$$\frac{(A)(\bar{A})}{(J)M} = \frac{(\bar{A})(B)}{(M)M'}, \text{ ou}$$

$$\frac{A'B'}{(J)M} = \frac{AB}{(J)M'} \quad \therefore \quad \frac{A'B'}{y} = \frac{AB}{z},$$

relação que demonstra o teorema.

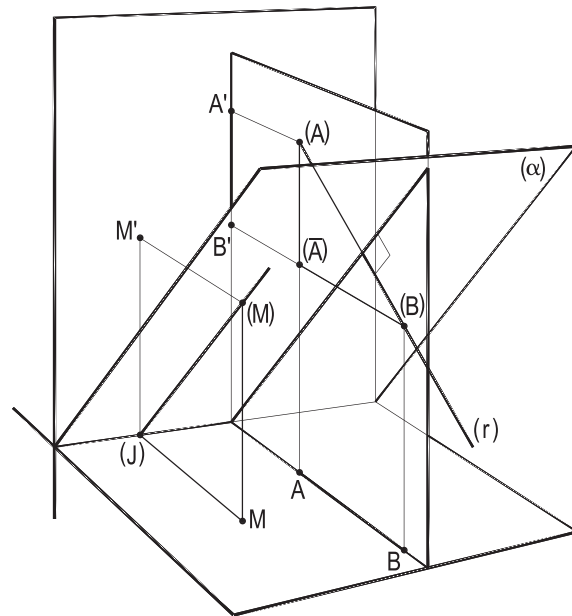


Figura 133

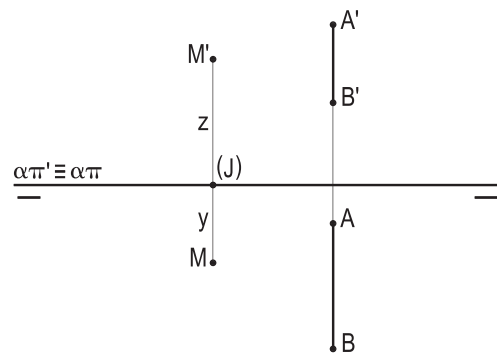


Figura 134

### 32 – Escólio

Os comprimentos das projeções vertical e horizontal de um segmento perpendicular a um plano  $(\pi'\pi)-(M)$  são diretamente proporcionais ao afastamento e à cota do ponto  $(M)$ .

### 33 – Corolário

Os comprimentos das projeções de todo segmento perpendicular a um qualquer dos dois bissetores são iguais. Porque inclinam-se igualmente em relação a  $(\pi)$  e a  $(\pi')$  e porque os pontos  $(M)$  que definem cada bissetor têm cotas e afastamentos iguais ou simétricos.

### 34 – Retas perpendiculares a $(\beta_{24})$

Além do acima demonstrado, a simples observação de uma vista lateral e da écura de uma reta  $(A)(B)$  perpendicular  $(\beta_{24})$ , a profusa repetição dos ângulos de  $45^\circ$  e, como consequência, a existência de inúmeros triângulos retângulos e isósceles, permitem listar diversas propriedades para retas de perfil perpendiculares a  $(\beta_{24})$ , para segmentos  $(A)(B)$  a elas pertencentes e para seus traços, como segue.

A Figura 135 acopla uma vista lateral e a écura correspondente, para uma reta  $(A)(B)$  perpendicular a  $(\beta_{24})$ .

1 – As projeções iguais de todo segmento  $(A)(B)$  perpendicular a  $(\beta_{24})$  têm, em écura, sentidos contrários.

2 – Coincidem, em écura, as projeções  $H$  e  $V'$ , dos traços horizontal e vertical de toda reta  $(A)(B)$ , perpendicular a  $(\beta_{24})$ .

3 – Em écura, as projeções coincidentes  $P' \equiv P$  do traço  $(P)$  de toda reta  $(A)(B)$ , perpendicular a  $(\beta_{24})$ , com  $(\beta_{24})$  é o ponto médio comum a todos os segmentos formados com as duas projeções de todos os seus pontos, como  $A'A$ ,  $B'B$ ,  $V'V$ ,  $H'H$ , etc.

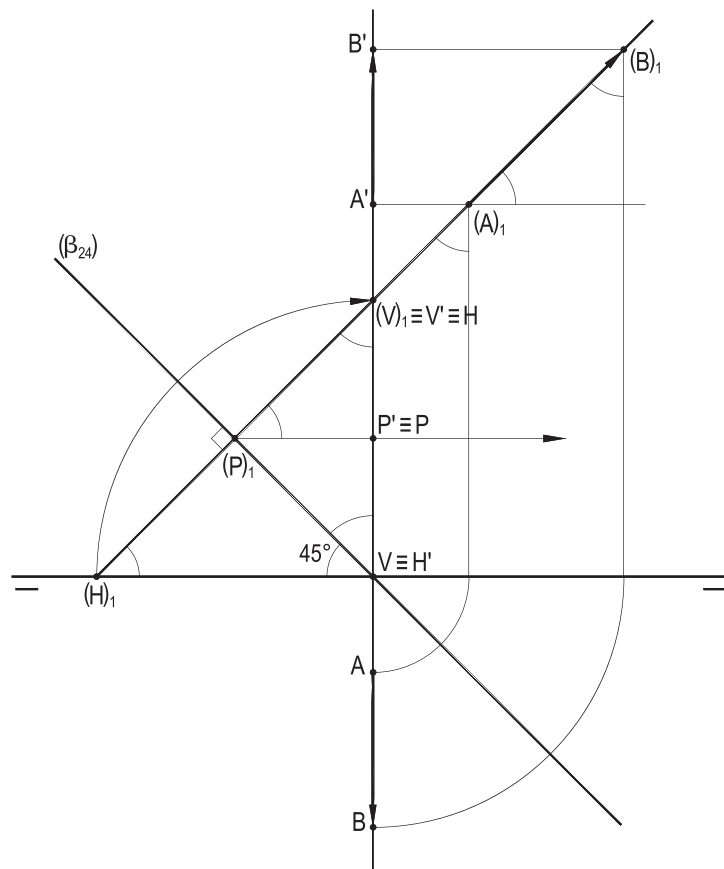


Figura 135

### 35 – Aplicações

É justamente utilizando estas propriedades que se consegue completar épuras de retas (A)(B) perpendiculares a  $(\beta_{24})$  sem recorrer a vistas laterais, como se passa a exemplificar:

1 – Completar a projeção horizontal AB do segmento (A)(B) perpendicular a  $(\beta_{24})$ , dadas as projeções  $A'$ ,  $B'$  e A.

Basta fazer  $AB = A'B'$ , dado, com sentido oposto ao de  $A'B'$  (Figura 136).

2 – Determinar os traços horizontal (H) e vertical (V) da reta que, contendo o ponto (A), dado por suas projeções, seja perpendicular a  $(\beta_{24})$ .

Basta fazer  $AH = A'H'$ , com sentidos opostos (Figura 137), ou  $A'V' = AV$  (Figura 138), com sentidos opostos, e marcar a coincidência de  $V'$  e H (Figuras 137 e 138).

3 – Obter as projeções do traço (P), com  $(\beta_{24})$ , da reta que, contendo o ponto (A), dado por suas projeções, seja perpendicular a  $(\beta_{24})$ .

Como as projeções coincidentes de (P) devem se localizar no ponto médio de  $A'A$  (número 34.3), a mediatriz  $m$  do segmento  $A'A$  resolve a questão (Figura 139).

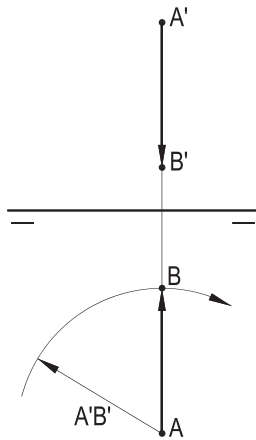


Figura 136

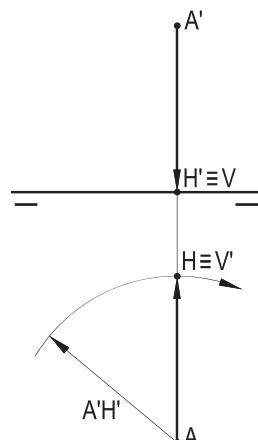


Figura 137

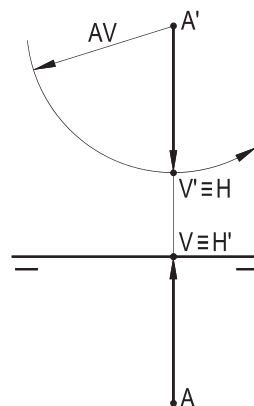


Figura 138

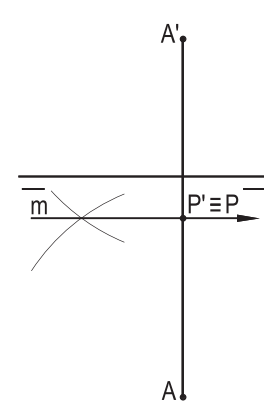


Figura 139

Mesmo para questões menos simples, a utilização das propriedades instituídas traz eficazes resoluções, como mostram os exemplos seguintes.

4 – Determinar as projeções do ponto (B), que forma com o ponto (A), dado por suas projeções, uma reta perpendicular a  $(\beta_{24})$ , sabendo que (B) equidista das retas concorrentes (r) e (s), situadas no plano horizontal ( $\gamma$ ), dado por seu traço  $\gamma\pi'$ , a partir das projeções horizontais r e s dessas duas retas.

Para equidistar de (r) e de (s), (B) há de pertencer a um dos planos bissetores dos ângulos formados por essas duas retas, que são os planos verticais ( $\beta_1$ ) e ( $\beta_2$ ), cujos traços horizontais são as bissetrizes dos ângulos formados por r e por s, em V.G. na projeção horizontal (Figura 140). Assim, obtida a projeção B (duas soluções), a determinação de B' é imediata, fazendo  $A'B' = AB$ , com sentido oposto ao de AB.

A segunda solução, não completada na Figura 140, corresponde à posição da projeção B no cruzamento da segunda bissetriz com a linha de chamada de (A), indicada pelo número 2.

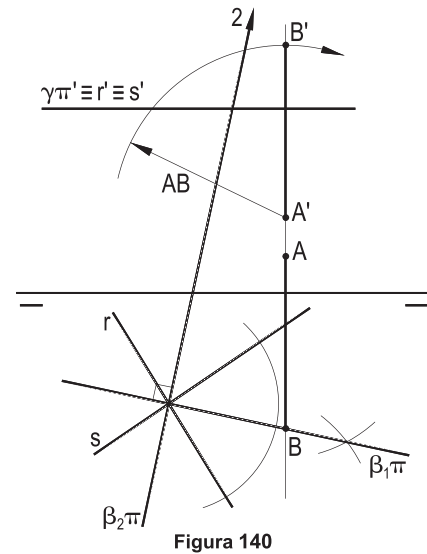


Figura 140

5 – Construir as projeções do segmento (A)(B), perpendicular a ( $\beta_{24}$ ), sabendo que (B), de ( $\beta_{13}$ ), pertence ao plano ( $\gamma$ ), dado por seus traços, conhecida a projeção vertical A' do ponto (A).

Para pertencer a ( $\gamma$ ) e a ( $\beta_{13}$ ), o ponto (B) há de estar sobre a interseção (i) desses dois planos, de pronta construção, com o auxílio da horizontal (h), de ( $\gamma$ ) (Figura 141). Por ter que ser de perfil, com a abscissa de (A), vêm B' e B e, com a igualdade das projeções de (A)(B), obtém-se A (Figura 141), tendo AB sentido oposto ao de A'B'.

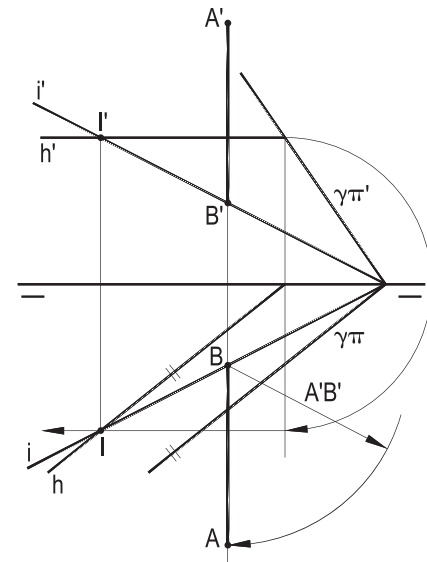


Figura 141

6 – Dadas, por suas projeções, as retas frontais reversas (a) e (b), pede-se apoiar nelas o segmento (A)(B), (A) em (a) e (B) em (b), que seja perpendicular a ( $\beta_{24}$ ).

Por terem que ser iguais as projeções de (A)(B), como já se conhece o valor do comprimento da projeção horizontal AB, pela diferença dos afastamentos das frontais, a paralela  $\bar{a}'$  a  $a'$ , guardado o valor y dessa diferença e os sentidos opostos que devem ter as duas projeções de (A)(B), produz-se, por interseção com  $b'$ , a projeção B' e, então, na sua abscissa, a reta procurada (Figura 142).

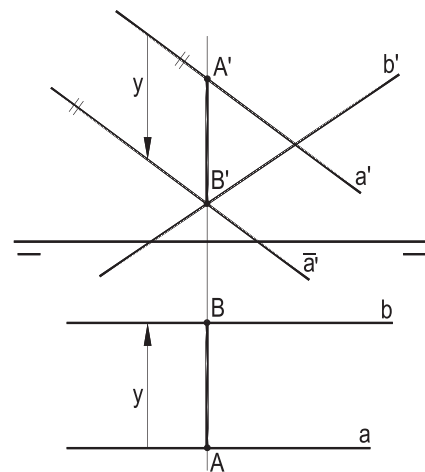


Figura 142

### 36 – Planos perpendiculares a $(\beta_{24})$

Sabe-se (*Geometria Espacial*, número 40) que, para que um plano  $(\alpha)$  seja perpendicular a outro  $(\beta)$ , é necessário e suficiente que  $(\alpha)$  contenha uma reta  $(A)(B)$  perpendicular a  $(\beta)$ .

Ora, como, em *épura*, coincidem as projeções H e V' dos traços horizontal e vertical de toda reta  $(A)(B)$  perpendicular a  $(\beta_{24})$  (número 34.2), têm que coincidir, em *épura*, os traços  $\alpha\pi'$  e  $\alpha\pi$  de todos esses planos (Figura 143), correspondendo aos diversos pontos (J), tomados sobre  $(\pi'\pi)$ .

Aliás, como posições particulares, quando (J) é rejeitado ao infinito, tornando-se o ponto impróprio de  $(\pi'\pi)$ , o plano  $(\alpha)$ , ainda perpendicular a  $(\beta_{24})$ , transforma-se num plano paralelo a  $(\pi'\pi)$  (Figura 144) e, quando assume a abscissa de  $(A)(B)$ , passa a ser um plano de perfil (Figura 145), o que contém a reta  $(A)(B)$ .

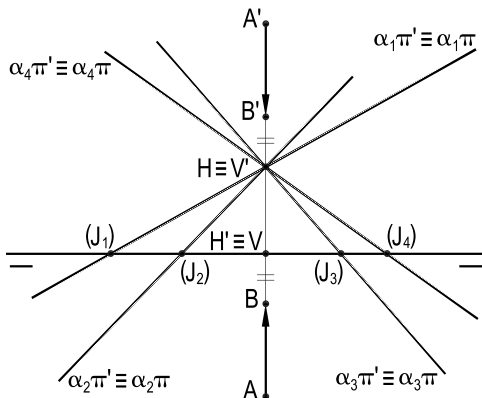


Figura 143

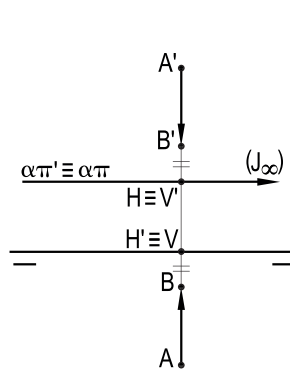


Figura 144

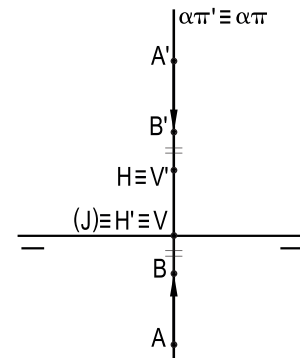


Figura 145

Como natural consequência, vem que a interseção  $(V)(H)$  de dois planos  $(\alpha)$  e  $(\gamma)$ , ambos perpendiculares a  $(\beta_{24})$ , tem que ser de perfil (Figuras 146 e 147), podendo, então, ser representada por um segmento de perfil  $(V)(A)$ , com projeções de comprimentos iguais e sentidos opostos, arbitrado o ponto (A) (Figuras 148 e 149).

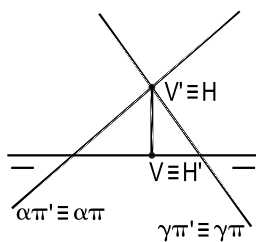


Figura 146

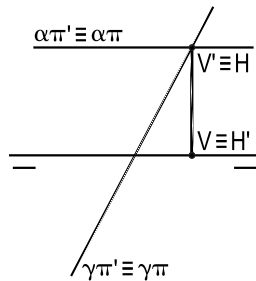


Figura 147

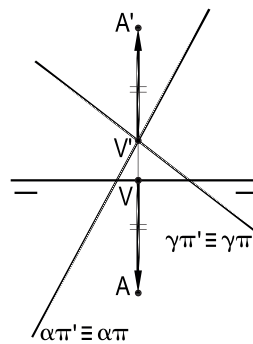


Figura 148

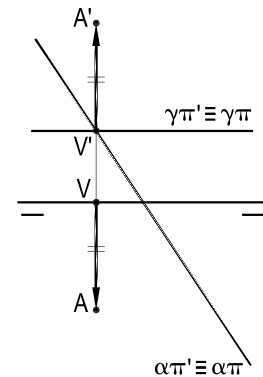


Figura 149

### 37 – Observação

Incluem-se neste caso as interseções de planos perpendiculares a  $(\beta_{24})$  com o Bissetor Ímpar, já que este é também um plano perpendicular a  $(\beta_{24})$ .

Assim, as interseções de todos os planos quaisquer  $(\alpha)$ , perpendiculares a  $(\beta_{24})$ , que se cortem num mesmo ponto  $(J)$  de  $(\pi'\pi)$ , com o plano de perfil pertencente a  $(J)$ , é a reta  $(J)(I)$ , perpendicular a  $(\beta_{24})$  e, no caso, pertencente a  $(\beta_{13})$  (Figura 150).

É claro que quando  $(\alpha)$ , ainda perpendicular a  $(\beta_{24})$ , resta paralelo à linha de terra, por ser tal plano paralelo a  $(\beta_{13})$ , inexistente essa interseção (Figura 151).

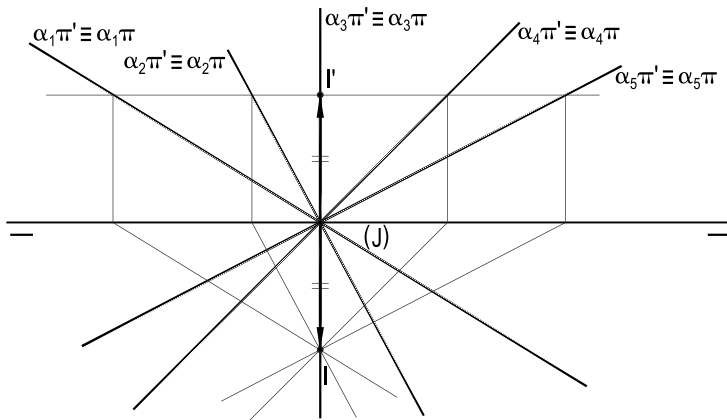


Figura 150

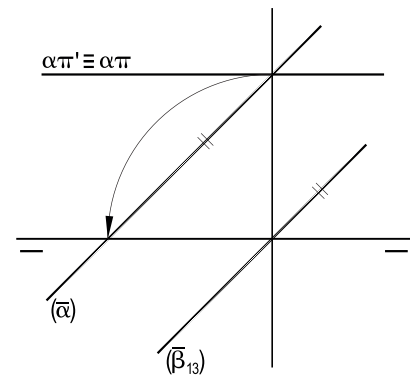


Figura 151

### 38 – Interseção de plano perpendicular a $(\beta_{24})$ com este bissetor

A interseção  $(p)$  de um plano qualquer  $(\alpha)$ , perpendicular a  $(\beta_{24})$ , com esse bissetor, por ter, em épura, projeções coincidentes é, também em épura, o lugar geométrico dos pontos médios das linhas de chamada, limitadas entre  $(\pi'\pi)$  e os traços coincidentes de  $(\alpha)$  (Figura 152), pontos médios esses que são os traços de todas as retas  $(V)(H)$ , de perfil, do plano  $(\alpha)$  com  $(\beta_{24})$ , propriedade que permanece válida mesmo quando o plano  $(\alpha)$ , ainda perpendicular a  $(\beta_{24})$ , é paralelo a  $(\pi'\pi)$  (Figura 153).

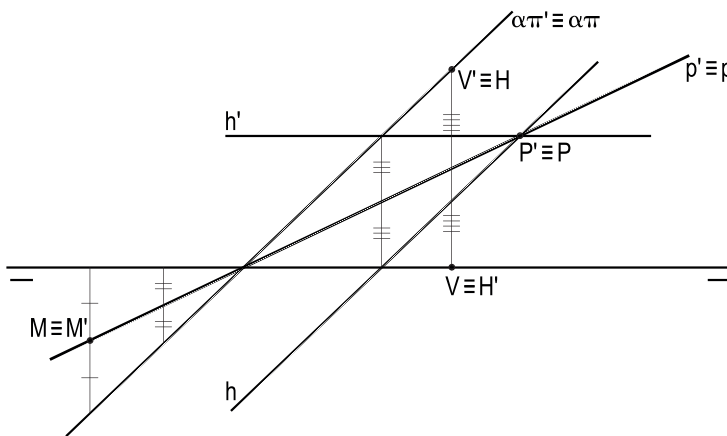


Figura 152

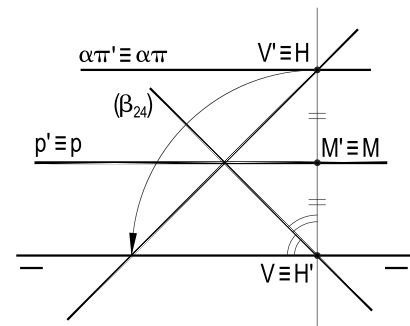


Figura 153

### 39 – Construção de plano perpendicular a $(\beta_{24})$

Vejamos exemplos de construção dos traços de um plano  $(\alpha)$ , perpendicular a  $(\beta_{24})$  e pertencente a uma reta  $(r)$ , dada por suas projeções, ou por determinadas condições.

É claro que tal reta  $(r)$  não pode ser vertical, nem de topo, impossíveis de pertencer a planos  $(\pi'\pi)-(M)$ . E que se  $(r)$  for de perfil e oblíqua a  $(\beta_{24})$ ,  $(\alpha)$  terá que ser, também, de perfil.

Nos exemplos abaixo, escolhemos  $(r)$  horizontal (Figura 154), cujo traço vertical  $(V)$  resolve a questão, ou fronto-horizontal, solucionada pela diferença de suas coordenadas (Figura 155). Para os exemplos em que a reta  $(r)$  seja qualquer, a utilização de seus dois traços (Figura 156), ou, se inacessíveis, de duas retas de perfil, apoiadas em  $(r)$  e perpendiculares a  $(\beta_{24})$  (Figura 157), resolvem a questão.

Para os dois exemplos finais, são dadas as projeções de um ponto  $(A)$  pertencente a  $(r)$ , informado que esta reta deve, respectivamente, ser paralela a dois planos dados  $(\gamma)$  e  $(\theta)$ , ou perpendicular a um plano dado  $(\varphi)$ , resolvidos com simplicidade por  $(r)$  ter que ser, respectivamente, paralela à interseção  $(t)$  de  $(\gamma)$  e  $(\theta)$  (Figura 158), ou perpendicular ou plano dado  $(\varphi)$  (Figura 159).

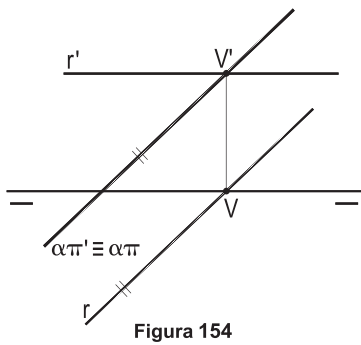


Figura 154

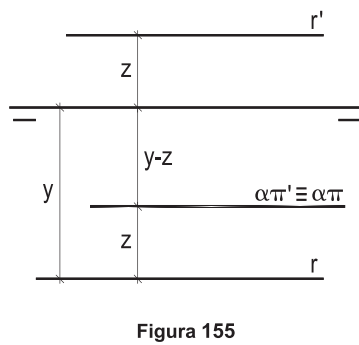


Figura 155

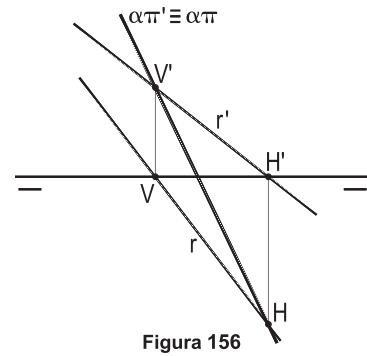


Figura 156

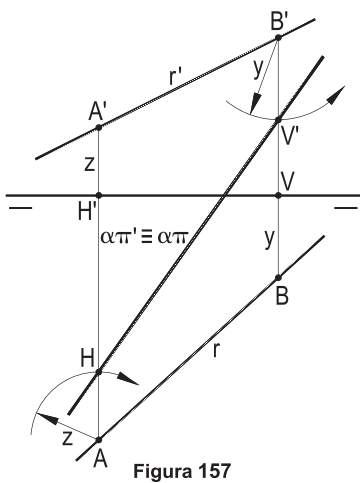


Figura 157

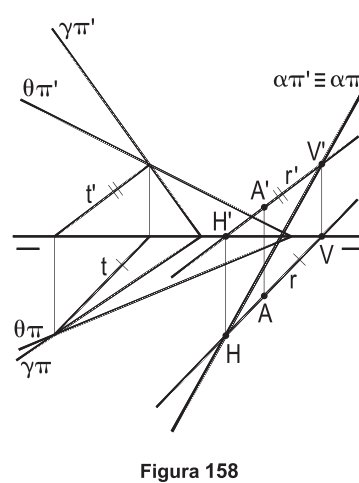


Figura 158

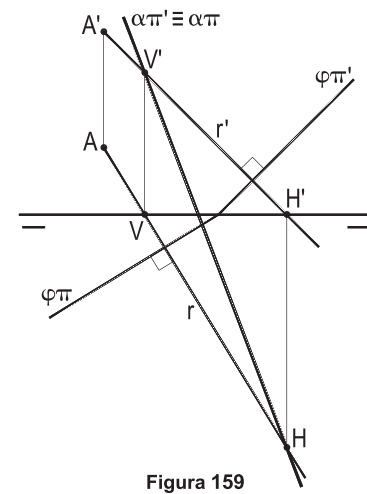


Figura 159

## 40 – Retas perpendiculares a $(\beta_{13})$

Sabe-se (número 33) que as retas perpendiculares a  $(\beta_{13})$  são de perfil e que seus segmentos têm projeções com comprimentos iguais.

As observações de uma vista lateral de um segmento  $(A)(B)$  perpendicular a  $(\beta_{13})$  e de sua épura (Figura 160) trazem, tal a quantidade de triângulos retângulos isósceles criados, devido às inclinações de  $45^\circ$  de  $(A)(B)$  com  $(\pi)$  e com  $(\pi')$ , as seguintes propriedades:

1 – As projeções iguais de todo segmento  $(A)(B)$  perpendicular a  $(\beta_{13})$  têm, em épura, sentidos iguais.

2 – Em épura, são simétricas em relação à linha de terra as projeções  $V'$  do traço vertical e  $H$  do traço horizontal de toda reta  $(A)(B)$  perpendicular a  $(\beta_{13})$ .

3 – O traço  $(I)$  de toda reta  $(A)(B)$ , perpendicular a  $(\beta_{13})$ , com  $(\beta_{13})$  é o ponto médio do segmento  $(V)(H)$  formado por seus traços vertical e horizontal, o que implica em que a cota e o afastamento desse ponto  $(I)$  sejam iguais às metades da cota de seu traço vertical  $(V)$  e do afastamento de seu traço horizontal  $(H)$ .

4 – Todos os pontos de uma reta  $(A)(B)$  perpendicular a  $(\beta_{13})$  têm a mesma soma de cota e afastamento, por ser esta reta paralela a  $(\beta_{24})$  (número 20.1).

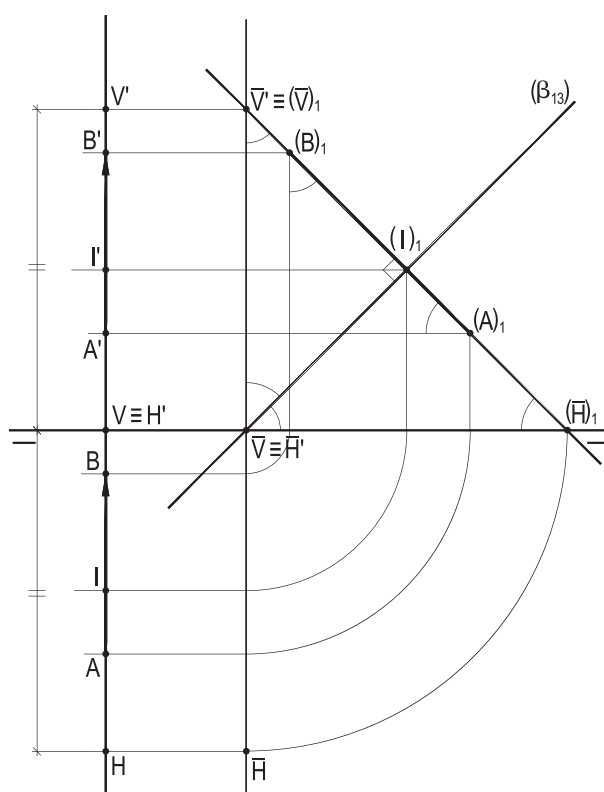


Figura 160

## 41 – Aplicações

A utilização dessas propriedades permite, mesmo sem o auxílio de vistas laterais, completar as projeções de retas  $(A)(B)$ , perpendiculares a  $(\beta_{13})$ , como se passa a exemplificar.

1 – Completar as projeções do segmento  $(A)(B)$ , perpendicular a  $(\beta_{13})$ , dadas as projeções  $A'$ ,  $A$  e  $B'$ .

A simples marcação de  $AB = A'B'$  com sentidos iguais completa a épura pedida (Figuras 161 e 162).



2 – Determinar os traços vertical e horizontal da reta que passa pelo ponto (A), dado por suas projeções, e é perpendicular a  $(\beta_{13})$ .

Como, para todos os pontos da reta é igual a soma de cota e afastamento e como os traços pedidos são, em épura, simétricos em relação à linha de terra, basta aplicar, na própria linha de chamada de A, o valor do segmento  $A'A$  para obter  $V'$  e H (Figura 163).

3 – Precisar as projeções do traço (I), com  $(\beta_{13})$ , da reta que, passando pelo ponto (A), dado por suas projeções, seja perpendicular a esse bisetor.

Já que tem que ser constante a soma da cota e do afastamento dos pontos da reta em questão, basta determinar o valor  $m$  da metade do segmento  $A'A$ , formado pelas projeções dadas de (A), para aplicá-lo como cota e afastamento do traço (I), de (A)(B) com  $(\beta_{13})$  (Figura 164).

Observe-se que teria sido equivalente obter as projeções  $V'$  e H dos traços vertical e horizontal da reta (V)(H) pertencente ao ponto (A) (Figura 163) e determinar as projeções do ponto médio do segmento (V)(H) (número 40.3).

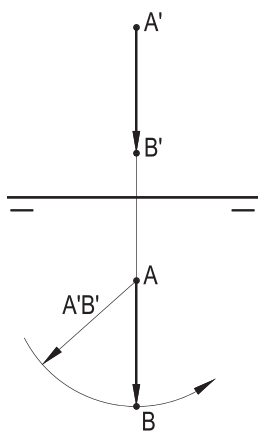


Figura 161

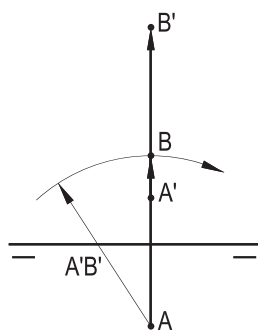


Figura 162

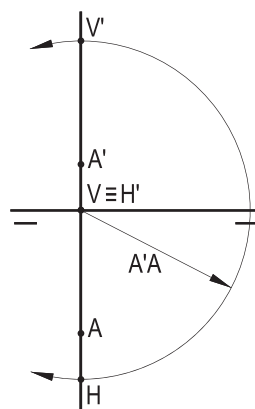


Figura 163

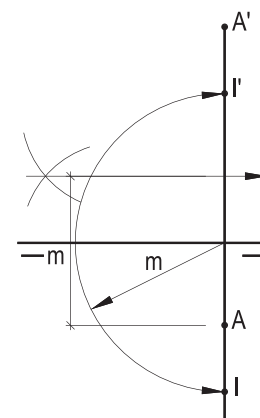


Figura 164

Mesmo para questões menos simples, as propriedades acima listadas aplicam-se, proporcionando suas resoluções, especialmente pelas igualdades, em comprimento e em sentido, das projeções de seus segmentos (A)(B).

Seguem alguns exemplos:

4 – Desenhar as projeções da reta (A)(B), perpendicular a  $(\beta_{13})$ , sabendo que a distância entre o ponto (B) e o plano  $(\gamma)$  é igual à abscissa de (A). São dados as projeções de (A) e os traços de  $(\gamma)$ .

Por ser projetante o plano dado ( $\gamma$ ), é imediato construir os planos ( $\gamma_1$ ) e ( $\gamma_2$ ), distantes de ( $\gamma$ ) o mesmo valor  $x$  da abscissa de (A), já que o ponto (B) há de pertencer a um deles. Assim, (B) é o ponto de ( $\gamma_1$ ), ou de ( $\gamma_2$ ), tal que, marcado  $B'$  com a mesma abscissa de (A), proporciona  $AB = A'B'$  (Figura 165). A segunda solução, para a projeção vertical  $B'$ , do ponto (B), pertencente ao plano ( $\gamma_2$ ), vai indicada por  $\bar{B}'$  não tendo sido completada nessa época.

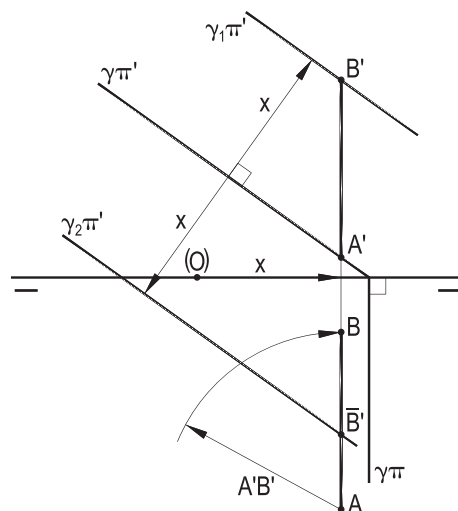


Figura 165

5 – Construir as projeções da reta (A)(B), perpendicular a ( $\beta_{13}$ ), a partir da projeção vertical  $A'$  de (A), sabendo que (B) pertence ao plano ( $\gamma$ ), dado por seus traços, e a ( $\beta_{24}$ ).

Resolução: Como o ponto (B) deve pertencer a ( $\beta_{24}$ ), a reta (A)(B), sendo perpendicular a ( $\beta_{13}$ ), tem, ela própria, que pertencer a ( $\beta_{24}$ ).

Assim, determinada a interseção (p), de ( $\gamma$ ) com ( $\beta_{24}$ ), (B) será o ponto de (p) com mesma abscissa que (A) (Figura 166).

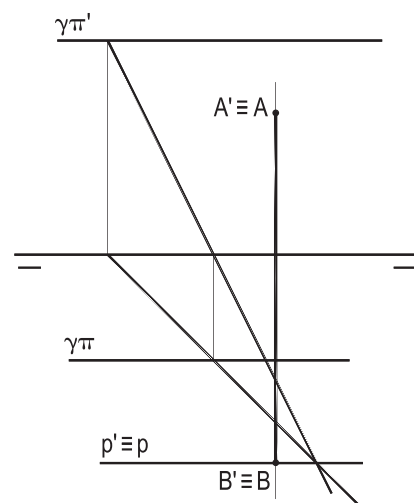


Figura 166

6 – Desenhar as projeções da reta (A)(B), perpendicular a ( $\beta_{13}$ ), dada a projeção horizontal A do ponto (A), sabendo que (B) pertence ao plano ( $\theta$ ), dado por seus traços, equidistante desses dois traços.

Resolução: (B) há de pertencer a uma das bissetrizes dos ângulos formados pelos traços de ( $\theta$ ), sendo, pois, imediata a obtenção das projeções de (B) na mesma abscissa de (A) e na bissetriz ( $b_1$ ). E, a partir de  $B'$ , em  $b'_1$  (Figura 167), vem  $B'A = BA$ .

A segunda solução, correspondente à segunda bissetriz do ângulo formado pelos traços de ( $\gamma$ ), não foi incluída nessa época.

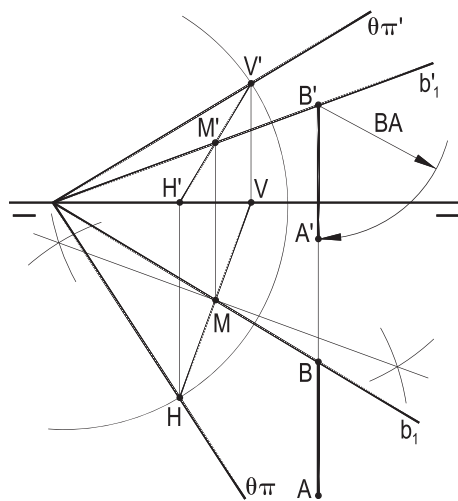


Figura 167

## 42 – Planos perpendiculares a $(\beta_{13})$

Os planos perpendiculares a  $(\beta_{13})$  têm, em épura, traços simétricos em relação a  $(\pi'\pi)$ , por terem que conter retas perpendiculares a esse bisetor, retas essas, como  $(V)(H)$ , na Figura 168, que têm que ter, em épura, seus traços  $(H)$  e  $(V)$  simétricos em relação a  $(\pi'\pi)$  (número 40.2).

Em situação particular, um plano  $(\gamma)$ , paralelo a  $(\pi'\pi)$ , pode ser perpendicular a  $(\beta_{13})$  (Figura 169), mantendo, em épura, a simetria de seus dois traços  $\gamma\pi'$  e  $\gamma\pi$ , em relação a  $(\pi'\pi)$ . E, naturalmente, os planos de perfil, como  $(\theta)$ , na Figura 170, são sempre perpendiculares a  $(\beta_{13})$ , e a todos os planos  $(\pi'\pi)-(M)$ .

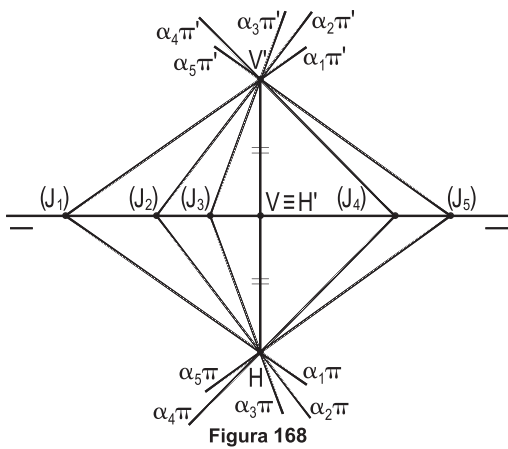


Figura 168

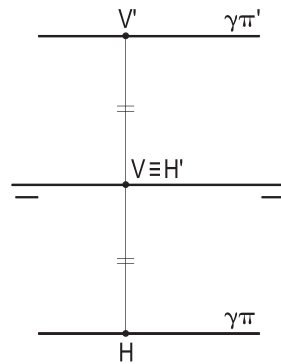


Figura 169

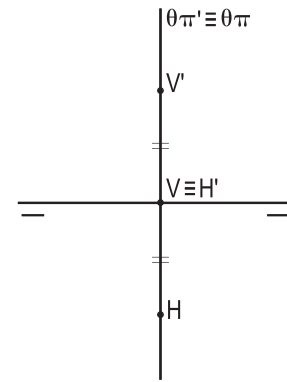


Figura 170

## 43 – Interseção de plano perpendicular a $(\beta_{13})$ com esse bisetor

A interseção  $(i)$  de um plano qualquer  $(\alpha)$ , perpendicular a  $(\beta_{13})$ , com esse bisetor é, em épura, a reta que contém os pontos médios das projeções dos segmentos  $(V)(H)$ , do plano, perpendiculares a  $(\beta_{13})$  (número 40.3) (Figura 171), visto que tais pontos são os traços dessa retas com  $(\beta_{13})$ . A propriedade se conserva válida para os planos  $(\gamma)$ , paralelos a  $(\pi'\pi)$  e ainda perpendiculares a  $(\beta_{13})$  (Figura 172).

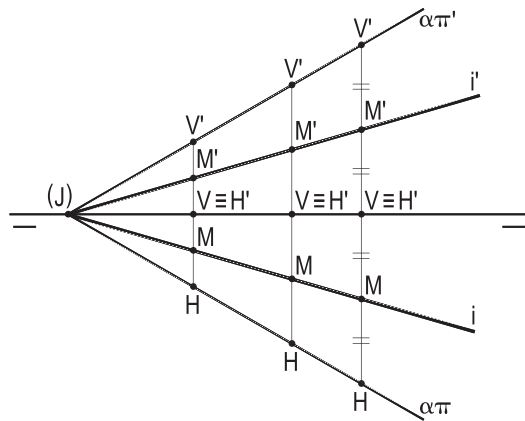


Figura 171

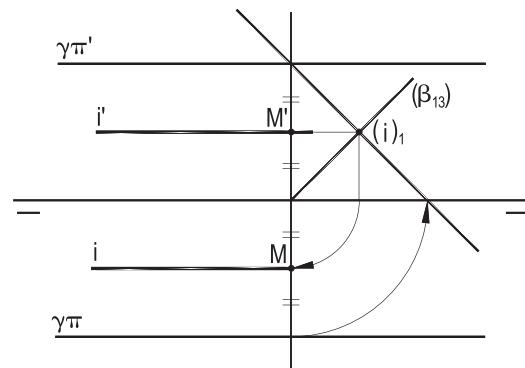


Figura 172

## 44 – Construção de plano perpendicular a $(\beta_{13})$

Tal como visto com os planos perpendiculares a  $(\beta_{24})$  (número 39), os planos perpendiculares a  $(\beta_{13})$  não podem conter retas verticais, nem de topo, perpendiculares que são estas a um dos planos de projeção.

Para construir os traços de um plano  $(\alpha)$ , perpendicular a  $(\beta_{13})$  e pertencente a um ponto  $(A)$ , ou a uma reta  $(r)$ , dados, ou por suas projeções, ou por condições estabelecidas, deve-se, sempre, construir uma reta  $(A)(B)$  perpendicular a  $(\beta_{13})$ , que há de pertencer a  $(\alpha)$ , como nos exemplos que seguem.

1 – Determinar os traços do plano  $(\alpha)$ , perpendicular a  $(\beta_{13})$  e pertencente à reta  $(r)$ , dada por suas projeções.

Resolução: Por não serem acessíveis, no espaço disponível, os traços de  $(r)$ , devem ser utilizadas duas retas  $(A)(H)$  e  $(B)(V)$ , de  $(\alpha)$ , perpendiculares a  $(\beta_{13})$ , seus traços e os simétricos deles, em relação a  $(\pi'\pi)$ , para obter os traços de  $(\alpha)$  (Figura 173).

2 – Construir os traços do plano  $(\alpha)$ , pertencente ao ponto  $(A)$ , dado por suas projeções, sabendo que  $(\alpha)$  é perpendicular a  $(\beta_{13})$ , formando  $60^\circ$  com  $(\pi)$ .

Resolução: Para formar  $60^\circ$  com  $(\pi)$ ,  $(\alpha)$  deve ser tangente ao cone de revolução de vértice  $(A)$ , base em  $(\pi)$  e geratrizes inclinadas de  $60^\circ$  em relação a  $(\pi)$ . Com o traçado, por  $(A)$ , da reta  $(V)(H)$  perpendicular a  $(\beta_{13})$ , as tangentes por  $(H)$  à base do cone trazem as duas soluções (Figura 174).

3 – Determinar os traços do plano  $(\alpha)$  perpendicular a  $(\beta_{13})$ , dada a projeção vertical  $i'$  da interseção de  $(\alpha)$  com  $(\beta_{13})$ .

Resolução: Imediato obter a projeção horizontal de  $(i)$  e, com o auxílio de uma reta  $(M)(H)$  perpendicular a  $(\beta_{13})$ , apoiada em  $(i)$ , vêm os traços pedidos (número 43) (Figura 175).

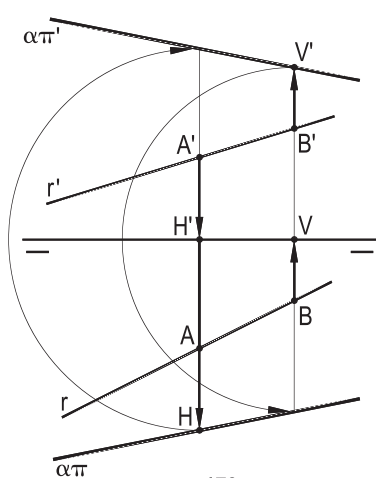


Figura 173

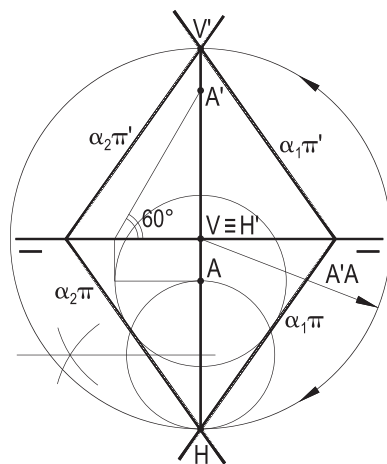


Figura 174

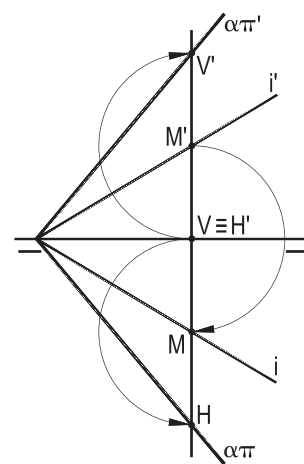


Figura 175

# CAPÍTULO IV

## SIMETRIA CENTRAL

### 45 – Figuras simétricas e assimétricas

É conceito bastante generalizado e de pronta aceitação o de figuras planas simétricas, que corresponde à igualdade de duas partes suas, criadas com a inclusão de uma reta que a divida naquelas duas partes. E das espaciais, assim divididas por um plano.

O entendimento, bem simples, associa-se ao da beleza, com importante conotação artística.

Do ponto de vista da Geometria, uma figura plana é entendida simétrica quando existe ao menos uma reta que a atravessando divida-a em duas partes iguais, passíveis de exata superposição, por simples dobradura, tal como exemplificado na Figura 176. Esta reta *e* é, então, denominada eixo de simetria daquela figura.

As figuras que não possuem tal propriedade são ditas assimétricas.

Observe-se que figuras geométricas planas podem possuir um, dois, três, ou mais eixos de simetria. Assim são o triângulo isósceles (um eixo), o retângulo (dois eixos), o triângulo equilátero (três eixos), o quadrado (quatro eixos), o hexágono convexo regular (seis eixos) e o círculo, que conta com uma infinidade de eixos de simetria, representados na Figura 177.

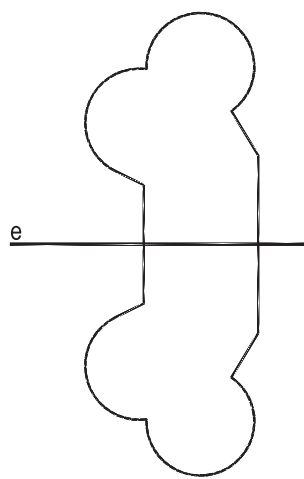


Figura 176

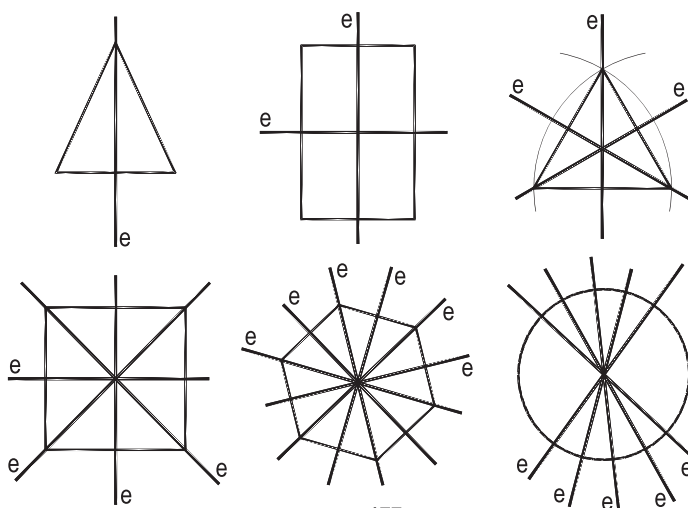


Figura 177

Todos esses exemplos, os mais comuns no cotidiano, trazem simetrias em relação a retas, mas há, como passamos a detalhar, também, simetrias em relação a pontos e a planos.

#### 46 – Simetria em relação a um ponto

Dois pontos  $A$  e  $\bar{A}$  são simétricos em relação a um ponto  $O$ , quando  $O$  é o ponto médio do segmento  $A\bar{A}$ . O ponto  $O$  é, então, denominado centro, ou polo, dessa simetria, que é dita central, ou puntual. Os pontos simétricos  $A$  e  $\bar{A}$  são, então, nomeados homólogos.

Duas figuras são simétricas em relação a determinado ponto  $O$  quando a cada ponto de uma delas corresponde, na outra, um ponto simétrico daquele, em relação ao centro  $O$  da simetria.

A determinação do simétrico  $\bar{A}$  de um ponto dado  $A$ , em relação a um centro  $O$ , também dado, se faz, então, pelo traçado da reta  $AO$  e pela marcação, em seu prolongamento, além do ponto  $O$ , de um segmento  $O\bar{A}$  igual a  $AO$  (Figura 178).

Da mesma forma, constrói-se o polígono  $\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}\bar{E}$ , simétrico de um dado  $ABCDE$ , em relação ao centro  $O$ , também dado (Figura 179), pela obtenção dos simétricos de seus vértices em relação ao ponto  $O$  e de sua ordenada união.

E, por repetição da operação, chega-se à obtenção da figura  $\bar{p}$ , simétrica de uma dada  $p$ , curva, ou mista, em relação ao centro  $O$ , dado também (Figura 180).

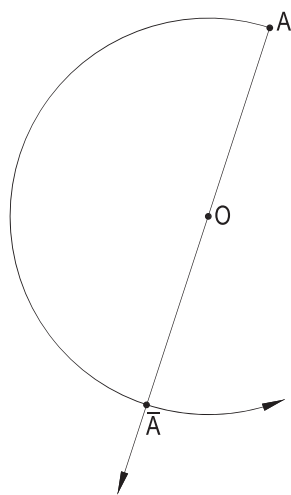


Figura 178

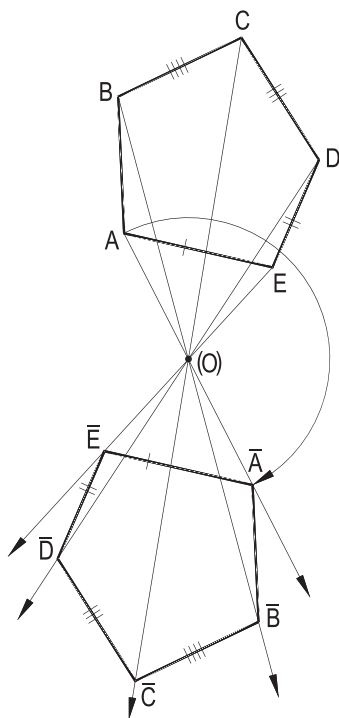


Figura 179

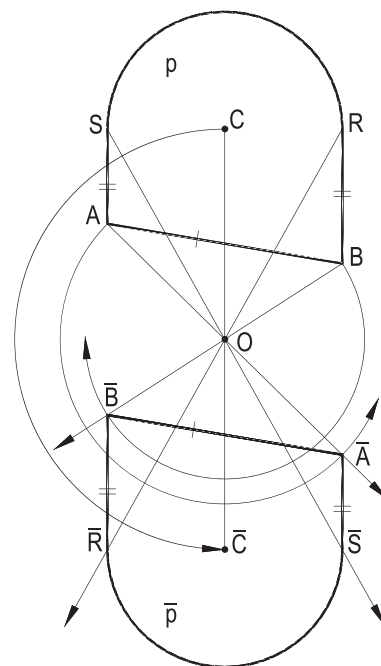


Figura 180

#### 47 – Teorema

Dois segmentos de reta simétricos em relação a um ponto exterior são iguais e paralelos.

Demonstração: Consideremos um segmento qualquer  $AB$  e seu simétrico  $\overline{A\overline{B}}$ , em relação a um ponto  $O$ , genérico, mas exterior a  $AB$  (Figura 181).

Os triângulos  $OAB$  e  $O\overline{A\overline{B}}$ , assim formados, são iguais, por terem dois lados  $OA$  e  $O\overline{A}$  e  $OB$  e  $O\overline{B}$  respectivamente iguais, pela própria construção da simetria, e os ângulos por eles compreendidos iguais, como opostos pelo vértice. Assim, são iguais seus terceiros lados  $\overline{A\overline{B}}$  e  $AB$ . E são paralelos, já que restam iguais seus ângulos  $A$  e  $\overline{A}$ , assim como  $B$  e  $\overline{B}$ , alternos internos para as transversais  $A\overline{A}$  e  $B\overline{B}$ , com o que fica demonstrado o teorema.

#### 48 – Corolário

Duas retas simétricas em relação a um ponto exterior são paralelas.

#### 49 – Observação

Quando o centro  $O$  da simetria pertence à reta  $r$ , suporte do segmento  $AB$ , os simétricos  $\overline{r}$  e  $\overline{A\overline{B}}$  são colineares com os dados (Figura 182).

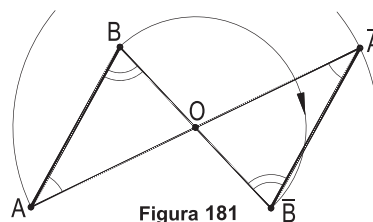


Figura 181

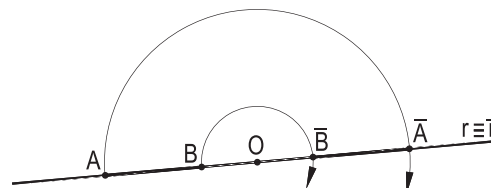


Figura 182

#### 50 – Teorema

Dois polígonos simétricos em relação a um ponto qualquer são iguais e têm seus lados homólogos respectivamente paralelos.

Demonstração: Consideremos um polígono genérico  $ABCDE$  e seu simétrico  $\overline{A\overline{B}C\overline{D}E}$ , em relação a um ponto  $O$ , também qualquer, e tracemos as diagonais relativas aos vértices simétricos  $A$  e  $\overline{A}$  (Figura 183), decompondo os dois polígonos em iguais quantidades de triângulos, que hão de ser, aos pares, iguais, por terem, cada par, lados respectivamente iguais e paralelos (número 47).

E, assim, os dois polígonos, formados por conjuntos iguais de triângulos, aos pares iguais e igualmente dispostos, resultam iguais, demonstrando o teorema.

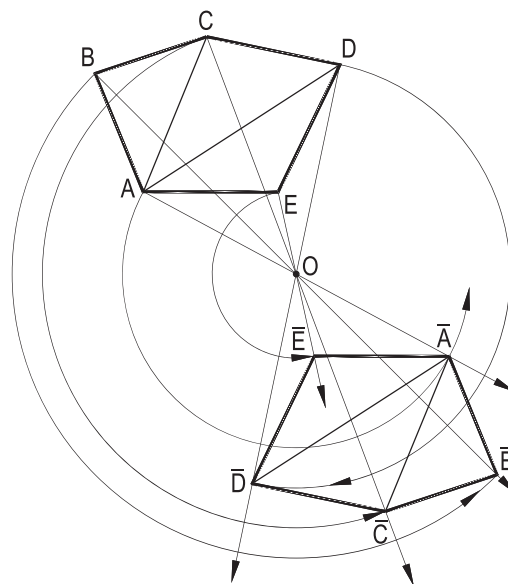


Figura 183

## 51 – Corolário

Duas figuras planas curvas, ou mistas, simétricas em relação a um ponto qualquer são iguais.

Porque todas as partes curvas podem ser compreendidas como posições limites de poligonais inscritas, quando seus gêneros crescem, tendendo, segundo leis iguais, ao infinito. E, com isso, retorna-se à situação anterior, de dois polígonos simétricos em relação àquele ponto.

## 52 – Observação

Duas figuras planas simétricas em relação a um ponto fixo têm disposições opostas. Porque, ao final, são homotéticas, na razão  $-1$ , para tal ponto fixo.

## 53 – Projeções de pontos centralmente simétricos

A determinação das projeções de um ponto ( $\bar{A}$ ), simétrico de um ponto ( $A$ ), em relação a um ponto ( $O$ ), estes dados por suas projeções, é imediata porque as divisões proporcionais se mantêm nas projeções ortogonais (Figuras 184, 185 e 186).

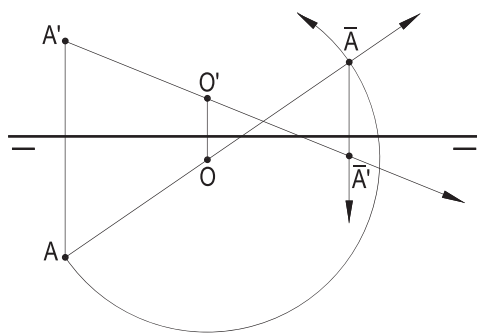


Figura 184

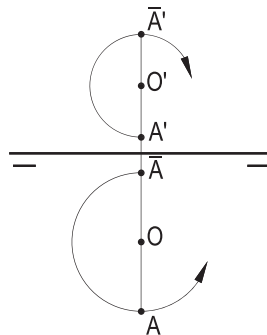


Figura 185

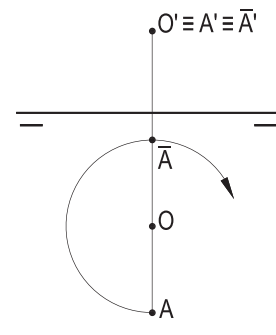


Figura 186

## 54 – Projeções de retas centralmente simétricas

Também para a simetria de uma reta dada ( $r$ ), em relação a um ponto ( $O$ ), dado, as construções são simples, aproveitando, quando possível, os paralelismos de ( $r$ ) e de sua simétrica ( $\bar{r}$ ) (Figuras 187, 188, 189, 190, 191 e 192).

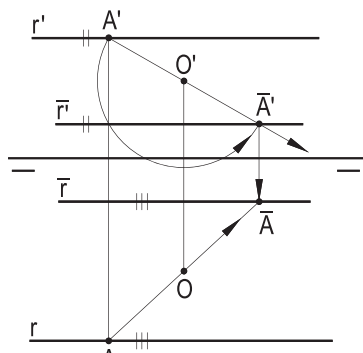


Figura 187

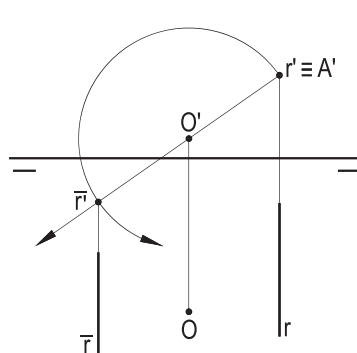


Figura 188

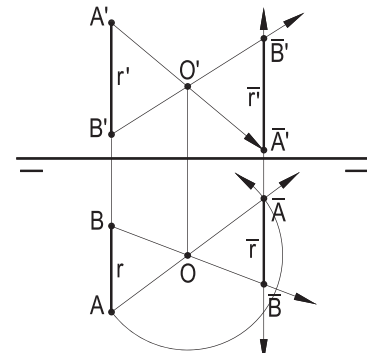


Figura 189



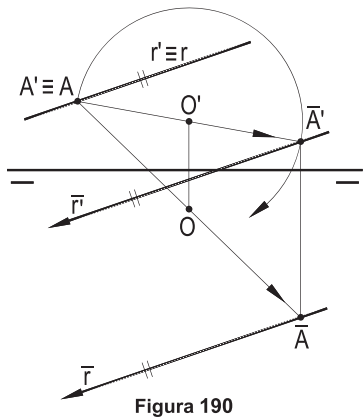


Figura 190

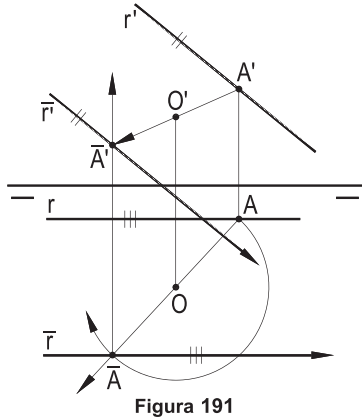


Figura 191

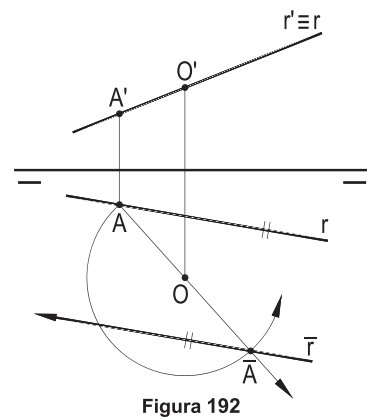


Figura 192

### 55 – Projeções de polígonos centralmente simétricos

Ainda para um polígono é simples a obtenção das projeções de seu simétrico em relação a um ponto (O), também dado por suas projeções, operada para seus vértices ou lados.

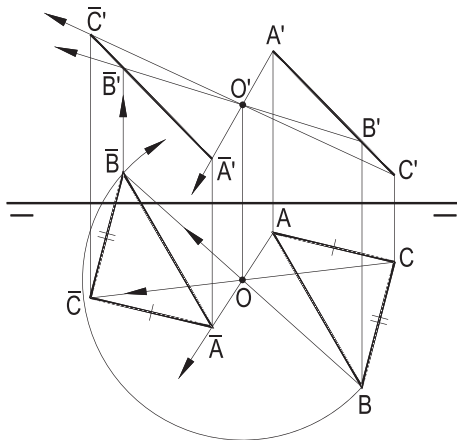


Figura 193

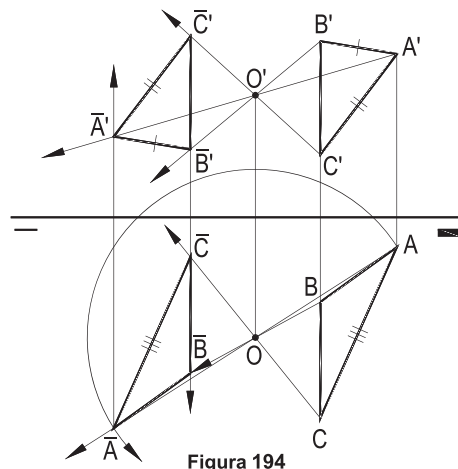


Figura 194

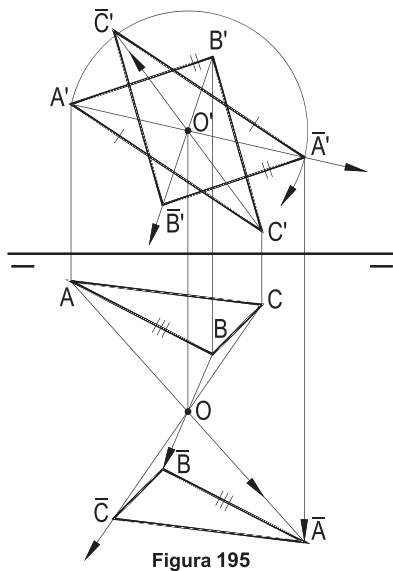


Figura 195

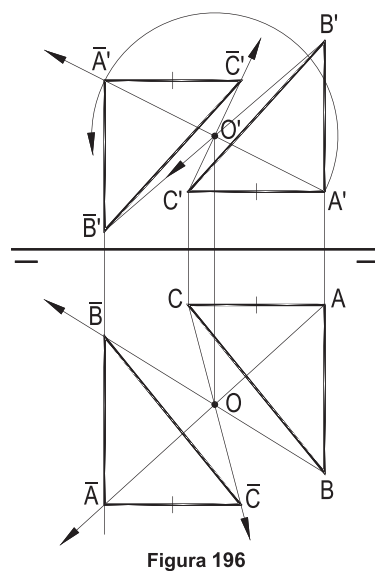


Figura 196

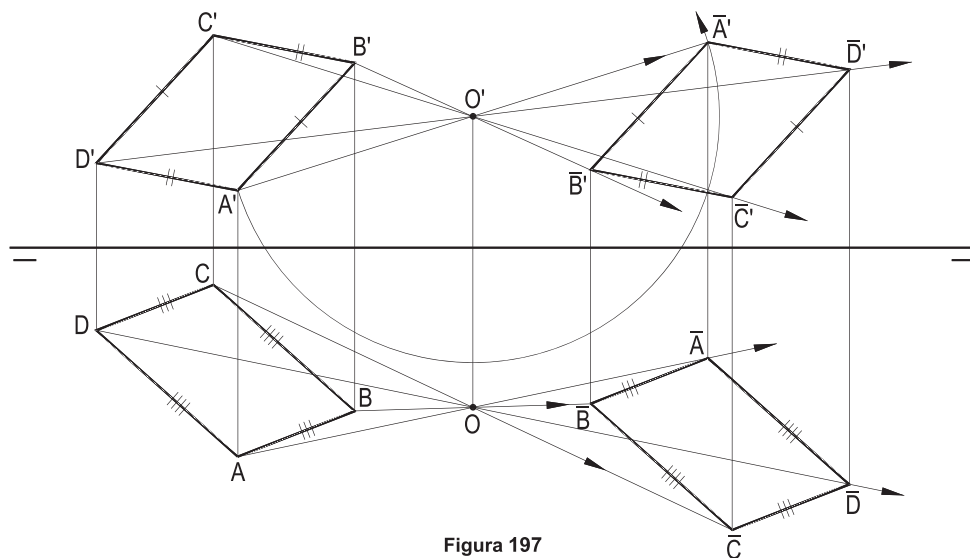


Figura 197

### 56 – Projeções de figuras centralmente simétricas

O procedimento é o mesmo para a construção da simétrica de uma figura curvilínea, ou mista, em relação a um ponto (O), dando-se especial atenção às partes curvas, quanto a suas naturezas e determinações (Figuras 198, 199 e 200).

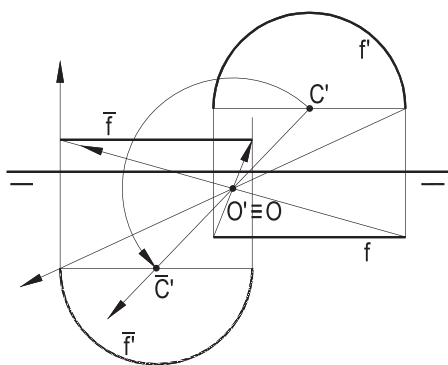


Figura 198

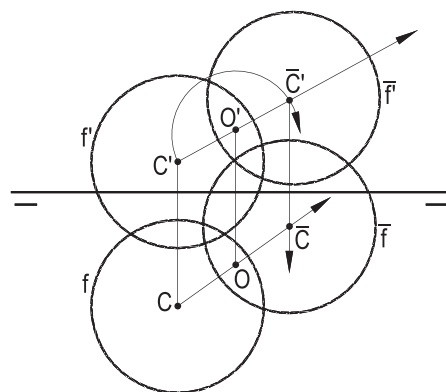


Figura 199

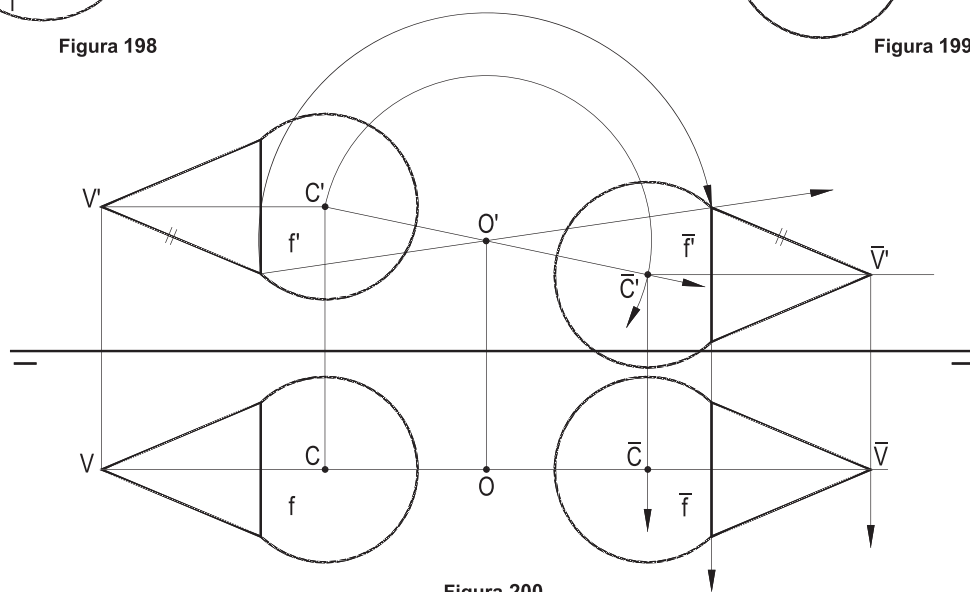


Figura 200

## 57 – Planos centralmente simétricos

O simétrico de um plano dado ( $\alpha$ ) em relação a um ponto ( $O$ ) a ele exterior é um plano ( $\bar{\alpha}$ ), paralelo ao dado e situado à mesma distância ao centro ( $O$ ), da que separa ( $\alpha$ ) de ( $O$ ).

De fato, basta ver que toda reta ( $r$ ) de ( $\alpha$ ) tem por simétrica em relação a ( $O$ ) outra reta ( $\bar{r}$ ), paralela a ( $r$ ) (número 48) e, assim, o lugar geométrico de todas as simétricas ( $\bar{r}$ ) das retas ( $r$ ) de ( $\alpha$ ), em relação a ( $O$ ), há de ser o plano ( $\bar{\alpha}$ ), paralelo a ( $\alpha$ ) e situado, no sentido oposto, à mesma distância de ( $O$ ) que a que separa ( $\alpha$ ) de ( $O$ ) (Figura 201).

Até porque, enfim, ( $\bar{\alpha}$ ) é o homotético de ( $\alpha$ ), em relação a ( $O$ ), na razão  $-1$ .

É bem simples, então, a construção do plano ( $\bar{\alpha}$ ), simétrico de um plano ( $\alpha$ ), dado por duas retas ( $a$ ) e ( $b$ ), em relação a um ponto dado ( $O$ ), pela obtenção do simétrico ( $\bar{J}$ ) de um ponto ( $J$ ) de ( $\alpha$ ), em relação a ( $O$ ) e pela condução, por ( $\bar{J}$ ), de paralelas a duas retas concorrentes de ( $\alpha$ ) (Figuras 202 e 203).

Quando as retas dadas ( $a$ ) e ( $b$ ) são concorrentes, o ideal é que ( $J$ ) seja o ponto comum a elas (Figura 202); quando são paralelas (Figura 203), além de um ponto ( $J$ ) arbitrado de uma, convém utilizar um segundo ( $L$ ) da outra reta e conduzir, pelos simétricos ( $\bar{J}$ ) e ( $\bar{L}$ ), em relação a ( $O$ ), as paralelas ( $\bar{a}$ ) e ( $\bar{b}$ ) às retas dadas.

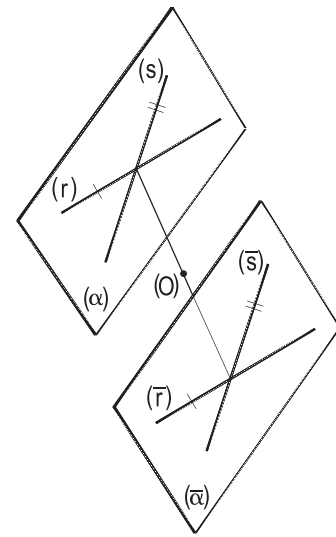


Figura 201

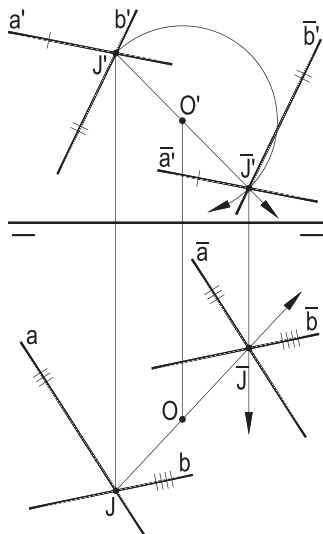


Figura 202

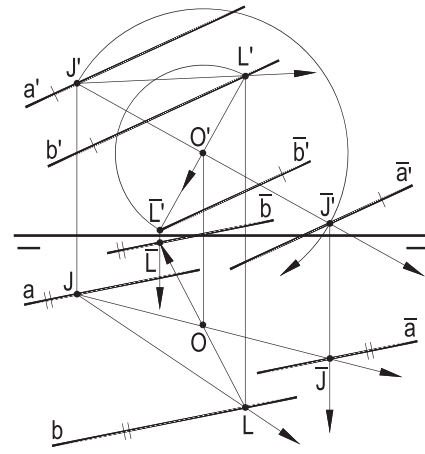


Figura 203

Em situação particular, quando o centro ( $O$ ) de simetria pertence ao plano ( $\alpha$ ), seu simétrico ( $\bar{\alpha}$ ), em relação a ( $O$ ), coincide com o próprio ( $\alpha$ ).

## 58 – Traços de planos centralmente simétricos

Muito fácil a construção dos traços do plano ( $\bar{\alpha}$ ), simétrico de um plano projetante ( $\alpha$ ), dado, em relação a um ponto ( $O$ ), também dado, pela utilização das pertinências de dois pontos, um, ( $J$ ) de ( $\alpha$ ), e outro, o seu simétrico ( $\bar{J}$ ), em relação a ( $O$ ), proporcionando ( $\bar{\alpha}$ ) (Figuras 204, 205, 206, 207 e 208). Ainda simples a obtenção dos traços do plano ( $\bar{\alpha}$ ), simétrico do dado ( $\alpha$ ), paralelo à linha de terra (Figura 209), ou a ela pertencente (Figura 210) em relação a um ponto ( $O$ ), dado por suas projeções, pela utilização de um ponto ( $J$ ) de ( $\alpha$ ), aliás o mesmo procedimento para planos quaisquer (Figuras 211 e 212).

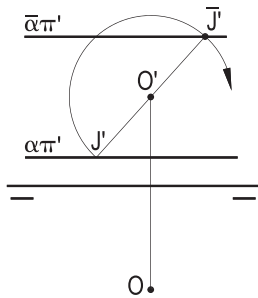


Figura 204

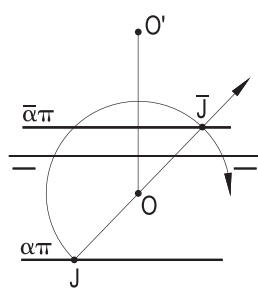


Figura 205

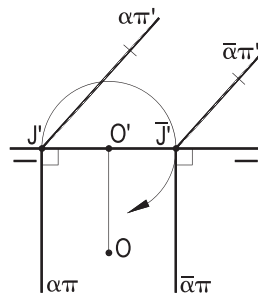


Figura 206

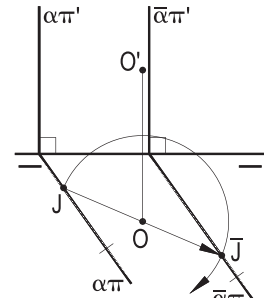


Figura 207

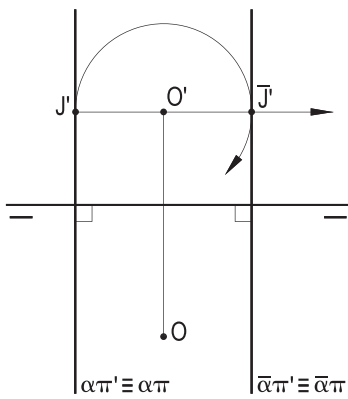


Figura 208

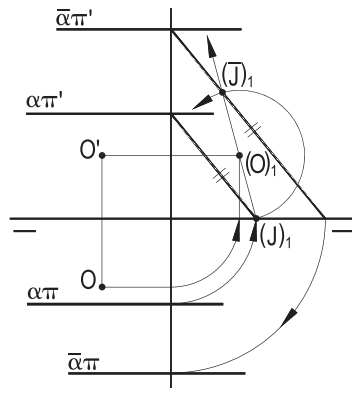


Figura 209

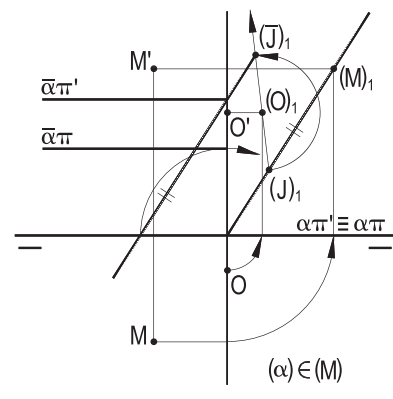


Figura 210

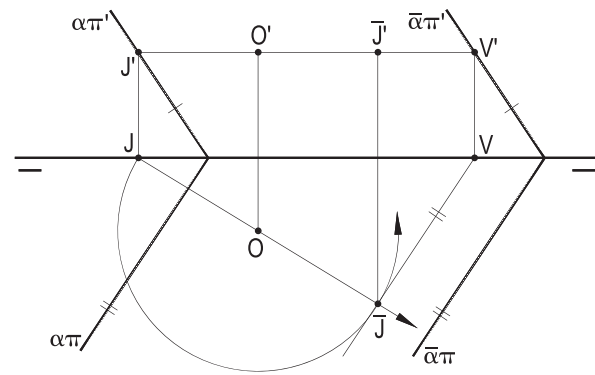


Figura 211

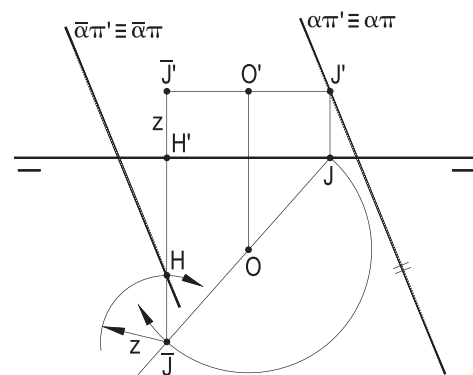


Figura 212

## 59 – Projeções de poliedros centralmente simétricos

Também para poliedros aplicam-se as mesmas propriedades, quais sejam a do paralelismo de arestas simétricas e o da igualdade do simétrico em relação ao poliedro dado.

Assim são os exemplos seguintes (Figuras 213, 214 e 215) de simetrias centrais de poliedros, em relação a um ponto (O), dados, todos, por suas projeções.

Observe-se as inversões das visibilidades.

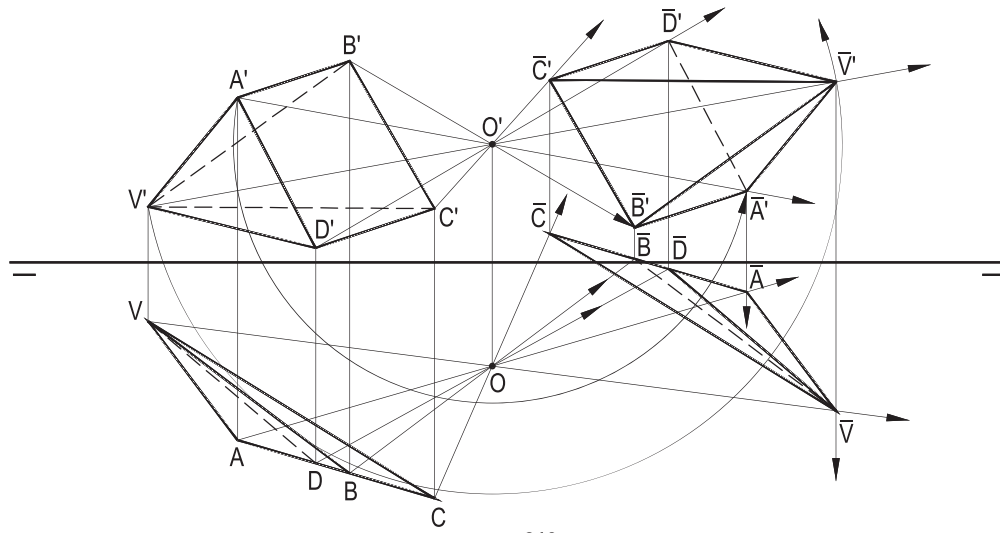


Figura 213

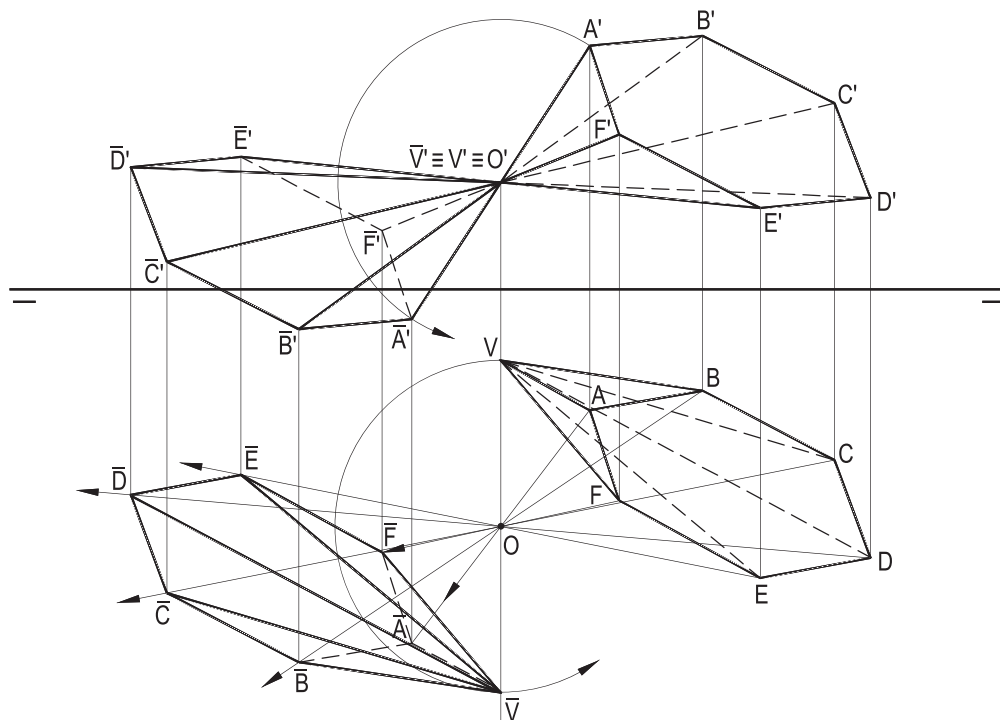


Figura 214

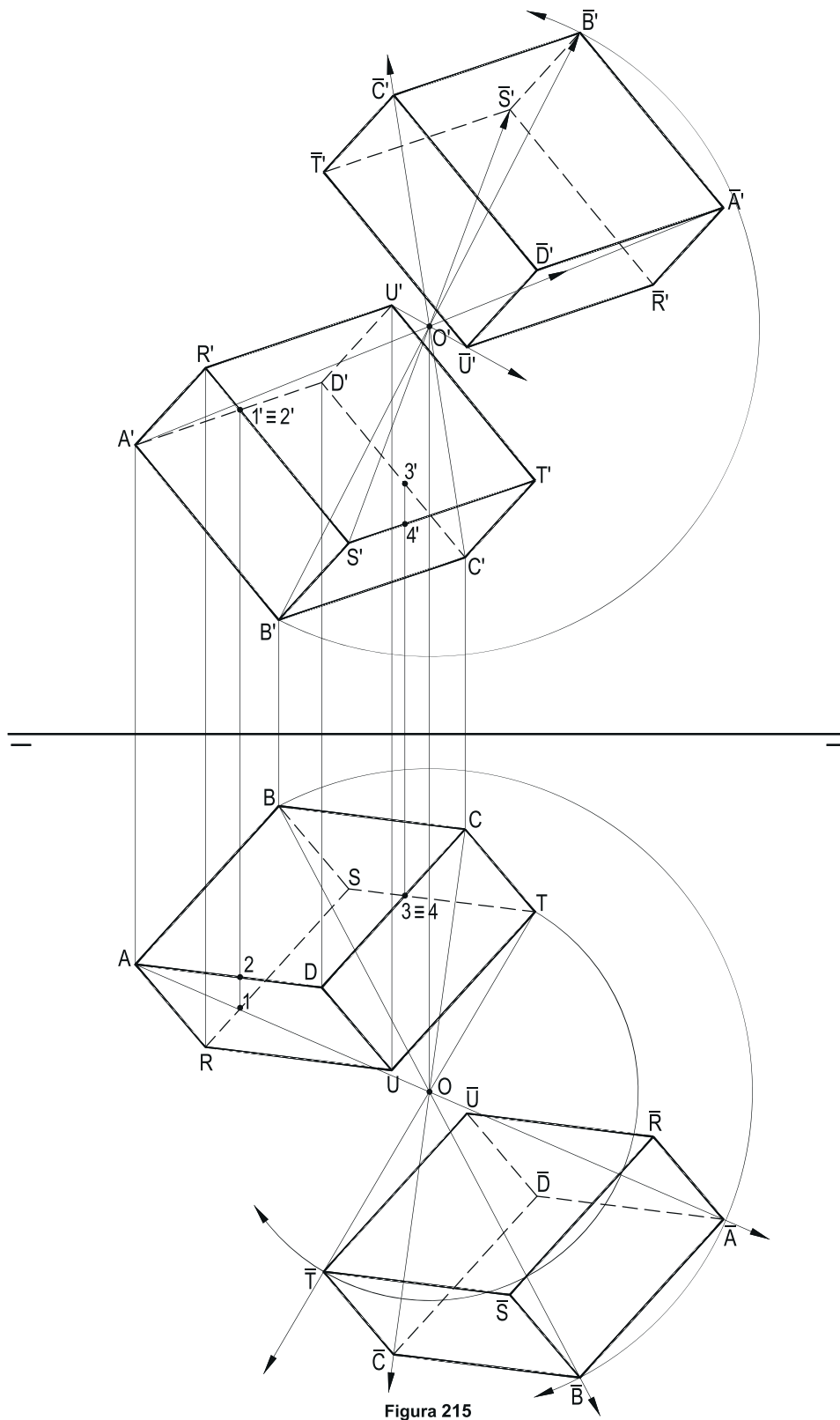


Figura 215

Neste último exemplo, as retas (1)(2), de topo, e (3)(4), vertical, auxiliam na determinação da visibilidade do sólido dado (*Geometria Descritiva*, número 167.7).

# CAPÍTULO V

## SIMETRIA AXIAL

### 60 – Simetria em relação a uma reta

Dois pontos  $A$  e  $\bar{A}$  são simétricos em relação a uma reta  $e$  quando essa reta é a mediatriz do segmento  $A\bar{A}$ . A reta  $e$  é, então, denominada eixo dessa simetria, que é dita axial e os pontos simétricos  $A$  e  $\bar{A}$  são, também, referidos como homólogos.

Duas figuras são ditas simétricas em relação a uma reta fixa  $e$  quando a cada ponto de uma delas corresponde um ponto da outra, sendo os dois simétricos em relação àquela reta  $e$ , e o eixo dessa simetria axial.

Assim, a construção da figura  $\bar{f}$ , simétrica de uma figura dada  $f$ , em relação a um eixo fixo  $e$ , se faz pelo traçado a partir de cada ponto  $A$ , de  $f$ , da perpendicular  $AM$  à reta  $e$ ,  $M$  em  $e$ , prolongando-a, para além de  $e$  de um valor  $M\bar{A}$  igual a  $AM$  (Figura 216), repetindo-se tal construção para cada novo ponto de  $f$ . Para trechos curvos, deve-se identificar suas naturezas e peculiaridades.

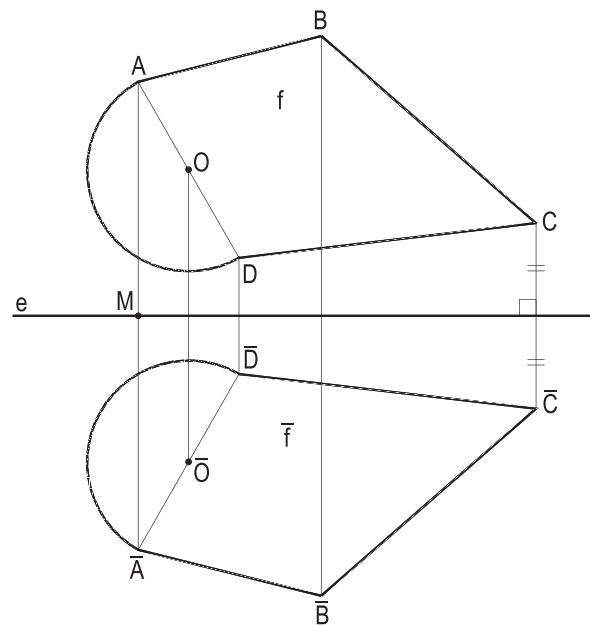


Figura 216

Duas figuras planas axialmente simétricas são, como em seguida (números 64, 65 e 67) será demonstrado, iguais, mas com disposições opostas em relação ao eixo de simetria, podendo coincidir por superposição, mediante simples “dobradura”, em torno daquele eixo. É, por isso, que a simetria axial é também denominada simetria de reflexão, reflexiva, ou de espelhamento, associando a situação à da reflexão de alguma figura num espelho plano, então representado linearmente pelo eixo da simetria.

## 61 – Teorema

Dois segmentos de reta simétricos em relação a uma reta de seu plano que não lhes sirva por suporte são iguais e as retas a que pertencem ou são paralelas, ou se cortam sobre o eixo de simetria num mesmo ponto.

Demonstração: Consideremos, em simetria axial de eixo  $e$ , os segmentos  $AB$  e  $CD$ , respectivamente, paralelo e oblíquo ao eixo e seus simétricos  $\overline{A\overline{B}}$  e  $\overline{C\overline{D}}$  (Figura 217).

Os triângulos retângulos  $APQ$  e  $\overline{A\overline{P}Q}$ , tendo os catetos  $AP$  e  $\overline{A\overline{P}}$  iguais e o segundo  $PQ$  comum, são iguais, o que obriga a igualdade dos ângulos  $\alpha'$  e  $\beta'$ , além, é claro, da de suas hipotenusas  $AQ$  e  $\overline{A\overline{Q}}$ . Por isso, restam iguais os triângulos  $ABQ$  e  $\overline{A\overline{B}Q}$ , por terem iguais seus lados  $BQ$  e  $\overline{B\overline{Q}}$ , por construção, e  $AQ$  e  $\overline{A\overline{Q}}$ , além dos ângulos  $\gamma$  e  $\varphi$ , por eles compreendidos, como complementos de  $\alpha'$  e  $\beta'$ . Assim, seus terceiros lados  $AB$  e  $\overline{A\overline{B}}$  são iguais. E mais, são paralelos por serem iguais os alternos internos  $\varphi$  e  $\beta$ , como complementos de  $\beta'$  (Figura 217), o que obriga que  $\overline{A\overline{B}}$  seja paralelo ao eixo  $e$ , por consequência, a  $AB$ , demonstrando a primeira parte do teorema.

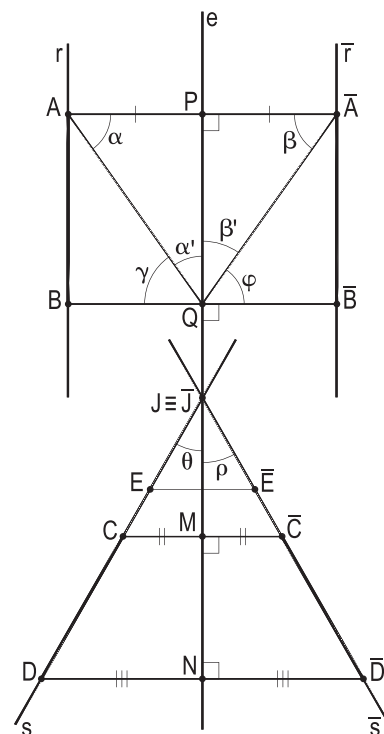


Figura 217

Analisemos, agora, os segmentos simétricos  $CD$  e  $\overline{C\overline{D}}$ , oblíquos ao eixo  $e$ . Os trapézios retângulos  $CDNM$  e  $\overline{C\overline{D}NM}$  são iguais, por terem em comum o lado  $MN$  e iguais, aos pares, suas bases  $CM$  e  $\overline{C\overline{M}}$  e, também,  $DN$  e  $\overline{D\overline{N}}$ , o que garante a igualdade dos lados oblíquos  $CD$  e  $\overline{C\overline{D}}$ .

Além disso, é obrigatório que suas retas suportes  $s$  e  $\overline{s}$  se cortem sobre o eixo, num ponto  $J \equiv \overline{J}$  porque, sendo  $J$  o ponto comum à reta  $s$  e ao eixo  $e$ , seu simétrico  $\overline{J}$ , por também distar zero do eixo, há de coincidir com  $J$ , o que demonstra a segunda parte do teorema.

## 62 – Corolários

1 – Uma reta  $s$ , oblíqua ao eixo coplanar  $e$ , e sua simétrica  $\overline{s}$ , em relação a  $e$ , formam ângulos iguais com o eixo de simetria (Figura 218).

2 – O eixo de simetria de duas retas coplanares e simétricas a ele oblíquas é suporte da bissetriz de um dos ângulos formados pelas retas (Figura 218).

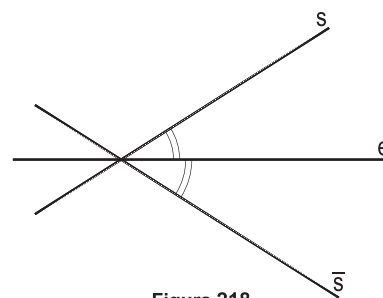


Figura 218



### 63 – Escólio

A simétrica de uma reta perpendicular ao eixo é ela própria, visto que os simétricos de todos os seus pontos hão de pertencer a ela.

### 64 – Teorema

Dois triângulos simétricos em relação a uma reta de seu plano são iguais.

Demonstração: Consideremos, inicialmente, o triângulo  $ABC$ , com um lado  $BC$  sobre o eixo, e seu simétrico  $\overline{A\overline{B}\overline{C}}$  (Figura 219), que hão de ser iguais, por terem dois lados iguais,  $AB$  e  $\overline{A\overline{B}}$  e  $AC$  e  $\overline{A\overline{C}}$ , visto que o eixo  $e$  acaba sendo a mediatriz do segmento  $A\overline{A}$ , e um lado comum  $BC \equiv \overline{B\overline{C}}$ .

Tomando-se um ponto  $D$  qualquer de  $AB$  e seu simétrico  $\overline{D}$ , em  $\overline{A\overline{B}}$ , restam iguais os triângulos  $ACD$  e  $\overline{A\overline{C}\overline{D}}$ , por serem eles as subtrações de pares de triângulos iguais, o  $ABC$  e o  $DBC$  com seus simétricos  $\overline{A\overline{B}\overline{C}}$  e  $\overline{D\overline{B}\overline{C}}$ .

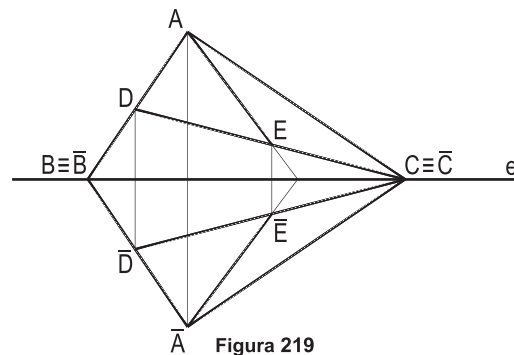


Figura 219

Finalmente, tomando-se, em seu plano, um ponto  $E$ , qualquer, e seu simétrico  $\overline{E}$ , ficam formados os triângulos simétricos  $ADE$  e  $\overline{A\overline{D}\overline{E}}$ , ambos afastados do eixo. Tais triângulos são iguais, como diferenças, entre os triângulos  $ACD$  e  $\overline{A\overline{C}\overline{D}}$  com  $AEC$  e  $\overline{A\overline{E}\overline{C}}$ .

Assim, mesmo em situação genérica, sem pontos em comum com o eixo, fica demonstrada a igualdade de dois triângulos coplanares e axialmente simétricos.

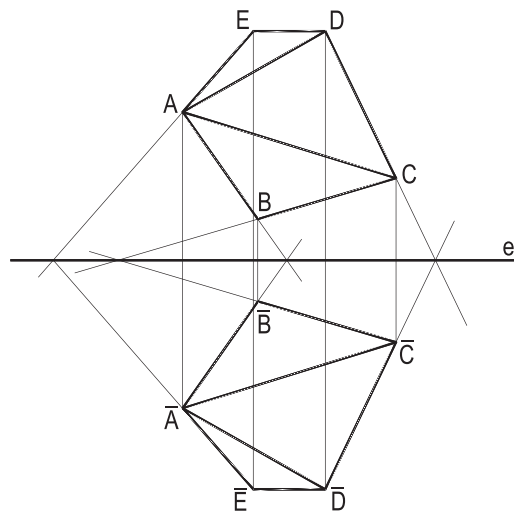


Figura 220

### 65 – Teorema

Dois polígonos simétricos em relação a uma reta de seu plano são iguais.

Demonstração: Considerando-se (Figura 220) todas as diagonais pertencentes a um qualquer dos vértices do polígono inicial e, igualmente, as de seu simétrico, ficam os polígonos decompostos em triângulos aos pares simétricos e, por isso (número 64), iguais, em seqüências iguais, o que demonstra a igualdade dos polígonos, sejam quais forem seus gêneros.

## 66 – Observações

1 – Tendo o polígono algum lado paralelo ao eixo, seu simétrico também será paralelo a esse eixo (número 61), como os lados  $AB$  e  $\overline{AB}$  das figuras simétricas da Figura 221.

2 – As retas suportes de lados homólogos dos dois polígonos coplanares e axialmente simétricos cortam-se sobre o eixo (número 61), tal como ressaltado na Figura 220.

## 67 – Teorema

Duas figuras planas, curvas ou mistas, simétricas, em relação a uma reta de seu plano são iguais.

Demonstração: Consideradas duas figuras mistas  $ABCDEF$  e  $\overline{ABCDEF}$  simétricas em relação a uma reta  $e$ , com elas coplanar (Figura 221), basta observar que seus trechos curvilíneos são posições limites de poligonais neles inscritas, simétricas, também, em relação à reta  $e$ , quando crescem indefinidamente, e na mesma proporção, seus gêneros, sendo, por isso, iguais (número 65), para concluir pela igualdade das duas figuras  $f$  e  $\overline{f}$ , simétricas em relação a  $e$ , o que demonstra o teorema.

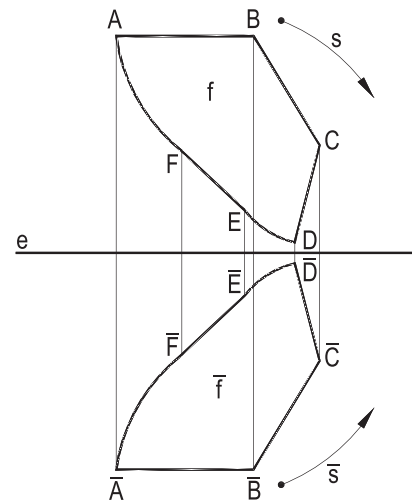


Figura 221

## 68 – Observação

Duas figuras planas quaisquer simétricas em relação a uma reta com elas coplanar têm disposições opostas, quanto à sequência de seus vértices e demais pontos homólogos (Figura 221), tal como indicam seus sentidos  $s$  e  $\overline{s}$ .

## 69 – Corolários

1 – São iguais os ângulos formados por duas retas  $A1$  e  $A2$  e por suas simétricas  $\overline{A1}$  e  $\overline{A2}$  em relação a uma reta  $e$ , de seu plano, por serem iguais os triângulos  $A12$  e  $\overline{A12}$  que elas formam com o eixo  $e$  (Figura 222).

2 – A simétrica  $\overline{b}$  da bissetriz  $b$  do ângulo formado por duas retas  $B3$  e  $B4$  em relação a um eixo coplanar  $e$  é a bissetriz do ângulo formado pelas simétricas  $\overline{B3}$  e  $\overline{B4}$  daquelas duas retas, em relação a  $e$  (Figura 222), pelo mesmo motivo.

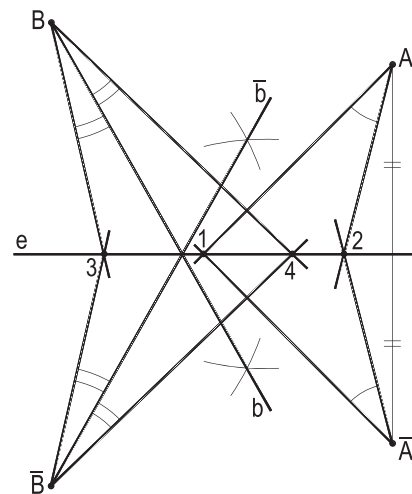


Figura 222

## 70 – Projeções de pontos axialmente simétricos

Dados, por suas projeções, um ponto (A) e um eixo (e), para obter o simétrico ( $\bar{A}$ ) de (A), em relação a (e), deve-se traçar a perpendicular (A)(M), por (A) a (e), (M) em (e) e, prolongando-a para além de (e), marcar o segmento (M)( $\bar{A}$ ) igual a (A)(M).

Naturalmente, as épuras correspondentes serão mais ou menos simples conforme a natureza do eixo. Assim, sendo ele perpendicular a um dos três planos referenciais, a perpendicular (A)(M) a ele há de ser paralela a tal plano. Então, sendo (e) vertical, tal perpendicular, pertencendo obrigatoriamente a um plano horizontal, poderá ser horizontal, fronto-horizontal ou de topo (Figuras 223, 224, 225 e 226); para eixos (e) de topo, as perpendiculares a ele, pertencendo a um plano frontal, terão que ser frontal, fronto-horizontal ou vertical (Figuras 227, 228, 229 e 230); sendo (e) fronto-horizontal, as perpendiculares a ele, devendo pertencer a um plano de perfil, terão que ser ou vertical, de topo ou de perfil (Figuras 231, 232, 233 e 234).

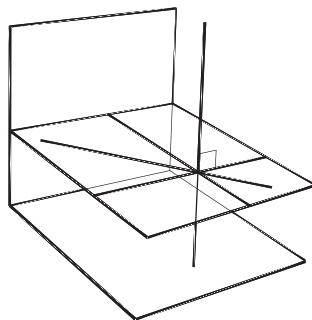


Figura 223

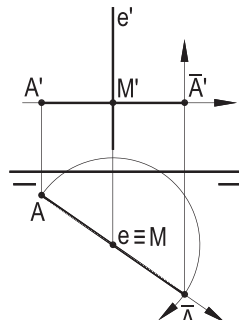


Figura 224

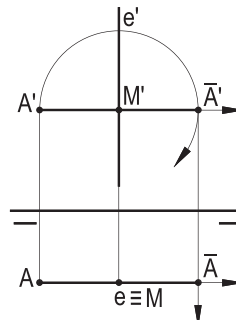


Figura 225

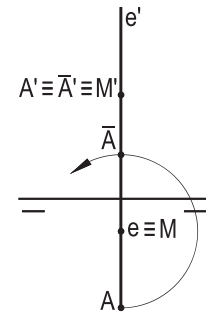


Figura 226

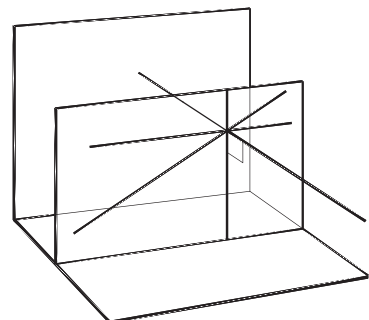


Figura 227

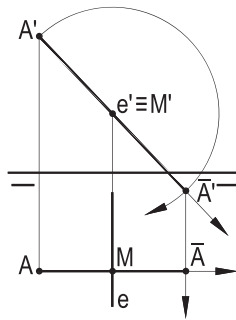


Figura 228

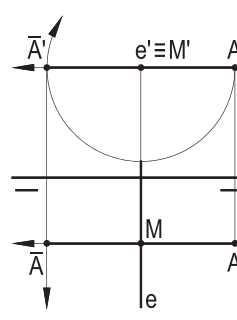


Figura 229

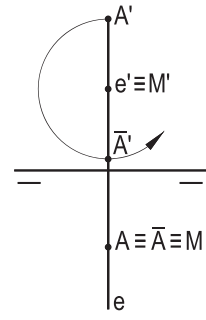


Figura 230

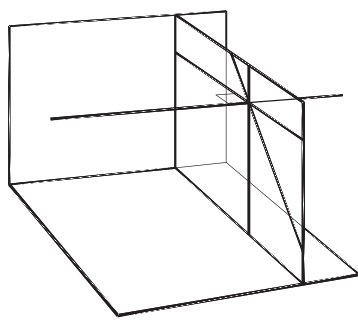


Figura 231

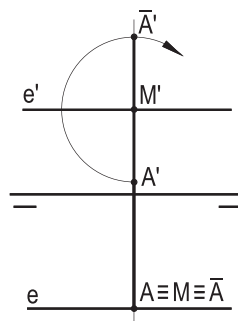


Figura 232

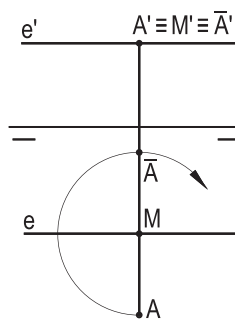


Figura 233

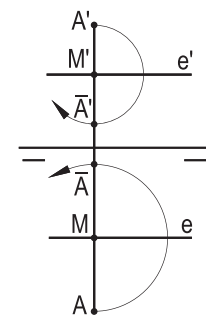


Figura 234

Sendo o eixo (e) horizontal, ou frontal, as perpendiculares a eles terão que pertencer, respectivamente, a um plano vertical ou a um plano de topo podendo, por isso, admitir as naturezas horizontal, vertical ou qualquer (Figuras 235, 236, 237 e 238), ou frontal, de topo ou qualquer (Figuras 239, 240, 241 e 242), respectivamente.

E quando o eixo (e)  $\equiv$  (R)(S) for de perfil, as perpendiculares a ele, devendo pertencer a um plano a ele perpendicular, ou seja, a um plano paralelo ou, eventualmente, pertencente a  $(\pi'\pi)$ , terão que ser ou outra reta de perfil (Figura 244), ou uma fronto-horizontal (Figura 245), ou uma qualquer, esta merecendo construção algo mais complexa, como detalhado nas Figuras 246 e 247.

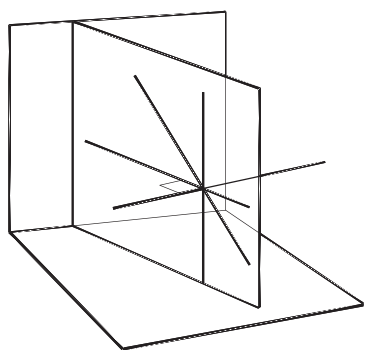


Figura 235

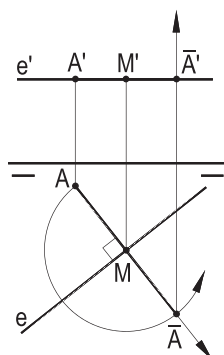


Figura 236

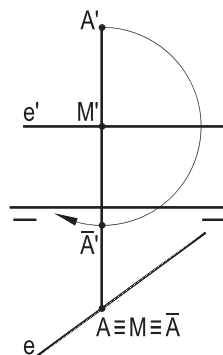


Figura 237

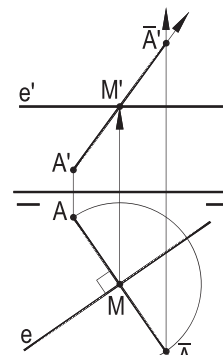


Figura 238

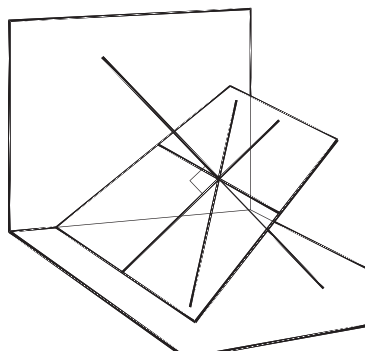


Figura 239

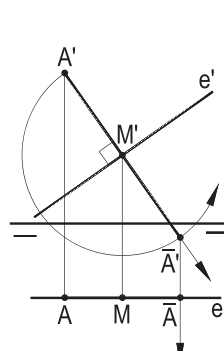


Figura 240

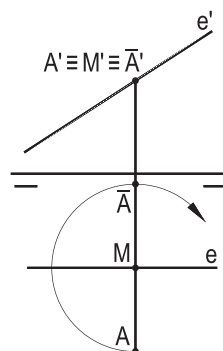


Figura 241

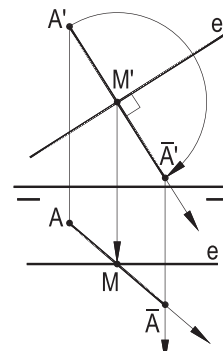


Figura 242

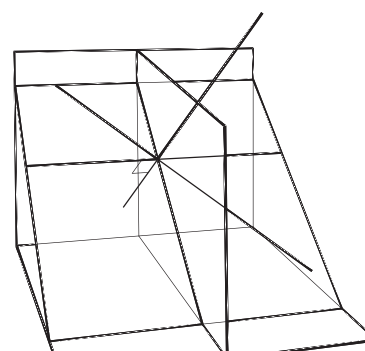


Figura 243

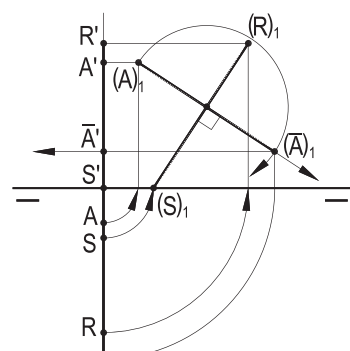


Figura 244

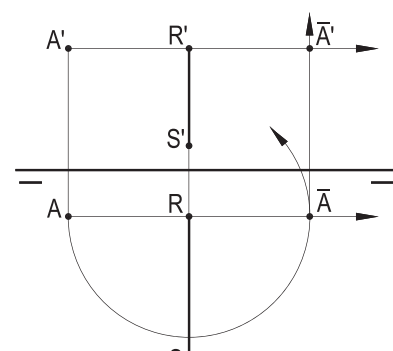


Figura 245

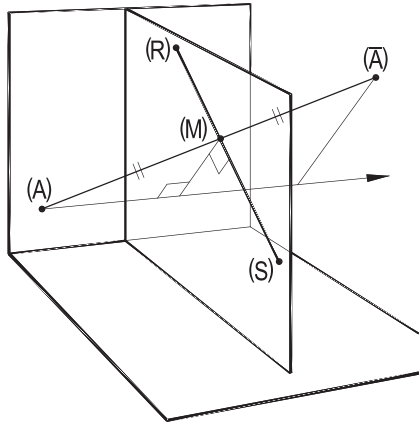


Figura 246

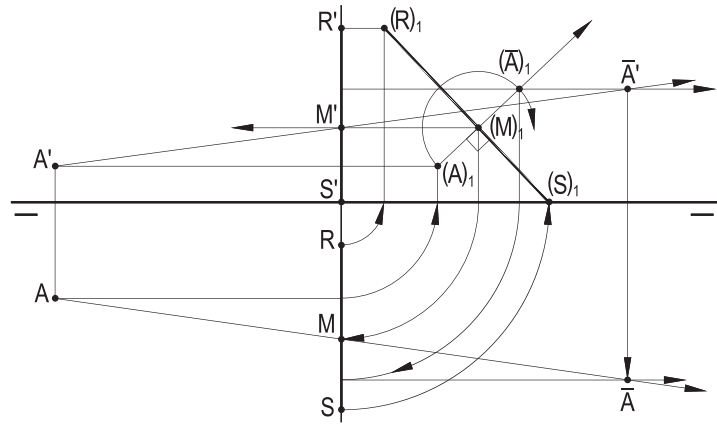


Figura 247

Quando, enfim, o eixo (e) for uma reta qualquer, dois procedimentos podem ser utilizados, o primeiro pela condução, pelo ponto dado (A), do plano ( $\gamma$ ), perpendicular a (e) e pela determinação do traço (M) de (e) em ( $\gamma$ ), pois o simétrico ( $\bar{A}$ ), procurado, será o simétrico de (A) em relação a (M) (Figuras 248 e 249); o segundo pelo rebatimento do plano ( $\alpha$ ) que (A) e (e) definem, para, então, operar em V.G. a perpendicularidade a (e) (Figuras 250 e 251).

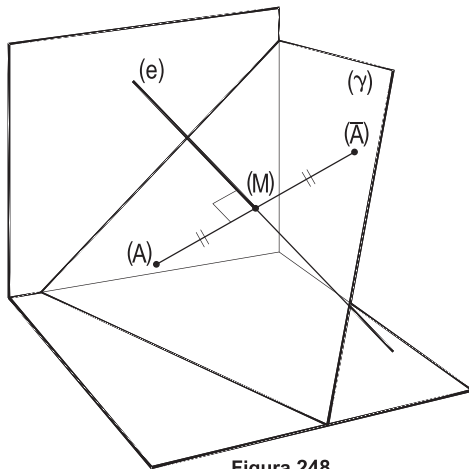


Figura 248

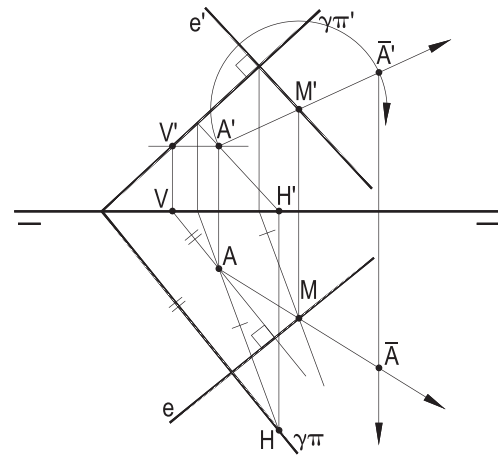


Figura 249

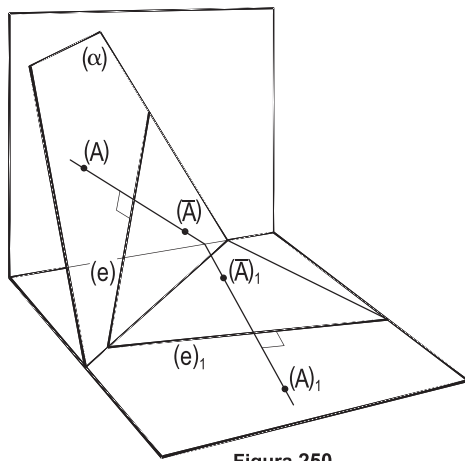


Figura 250

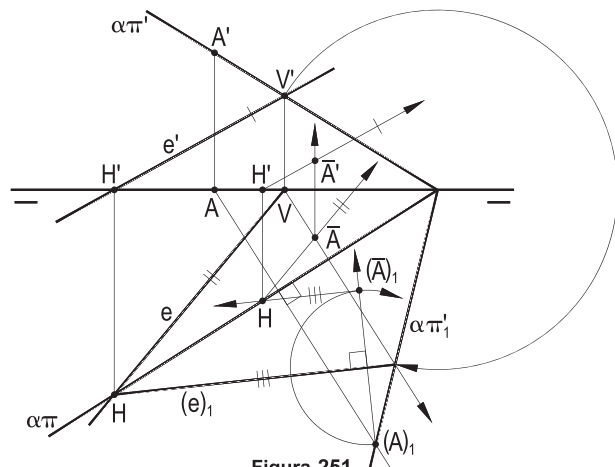


Figura 251

## 71 – Projeções de retas axialmente simétricas coplanares com o eixo de simetria

Sabe-se (número 61) que, se uma reta é paralela ao eixo  $e$ , sua simétrica é, também, paralela a ele e à própria reta original e que se a reta dada concorre com o eixo em determinado ponto, sua simétrica em relação a esse eixo concorre com a reta e o eixo dados naquele mesmo ponto.

Assim, sendo o eixo vertical, todas as retas com ele coplanares formam, com ele, planos projetantes em relação a  $(\pi)$ , o que simplifica bastante a construção, em épura, da reta  $(\bar{r})$ , simétrica da dada  $(r)$  (Figuras 252, 253, 254 e 255).

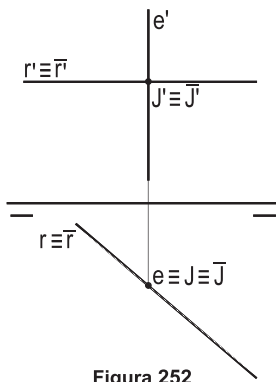


Figura 252

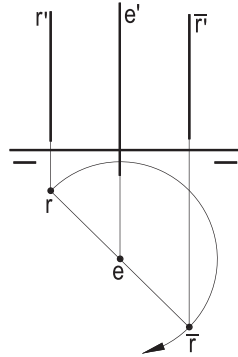


Figura 253

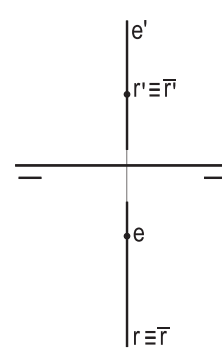


Figura 254

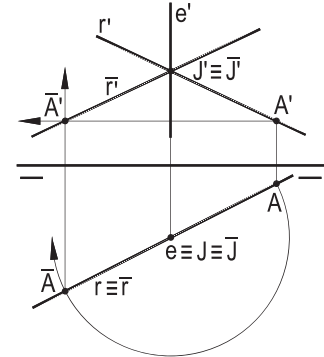


Figura 255

As mesmas simplicidades se dão para eixos de topo e retas com eles coplanares, já que os planos que elas formam hão de ser projetantes em relação a  $(\pi')$ .

Quando o eixo de simetria  $(e)$  é horizontal, frontal ou fronto-horizontal seu paralelismo a pelo menos um dos planos de projeção traz, em V.G., um ângulo reto, em épura, para a obtenção do simétrico  $(\bar{A})$  de um ponto  $(A)$  da reta dada  $(r)$ , que, com o ponto fixo  $(J) \equiv (\bar{J})$ , define a simétrica  $(\bar{r})$ , ainda sem dificuldade (Figuras 256, 257 e 258).

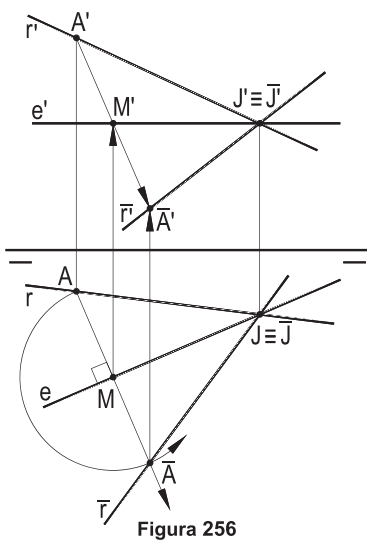


Figura 256

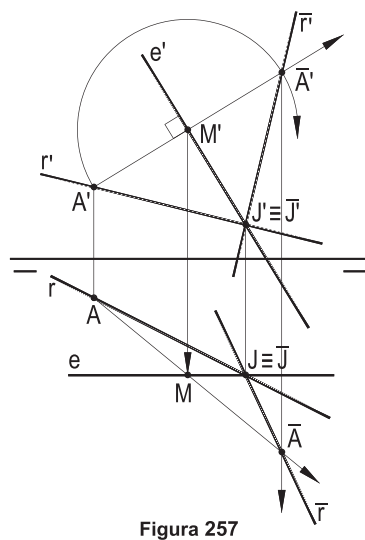


Figura 257

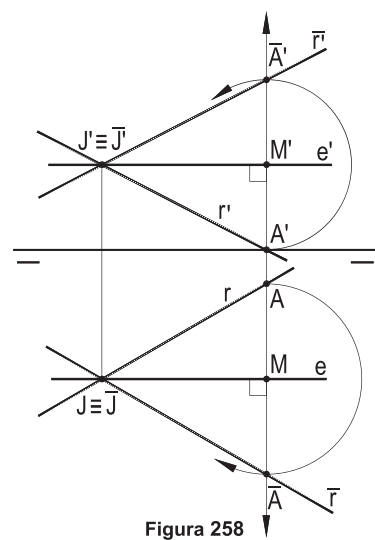
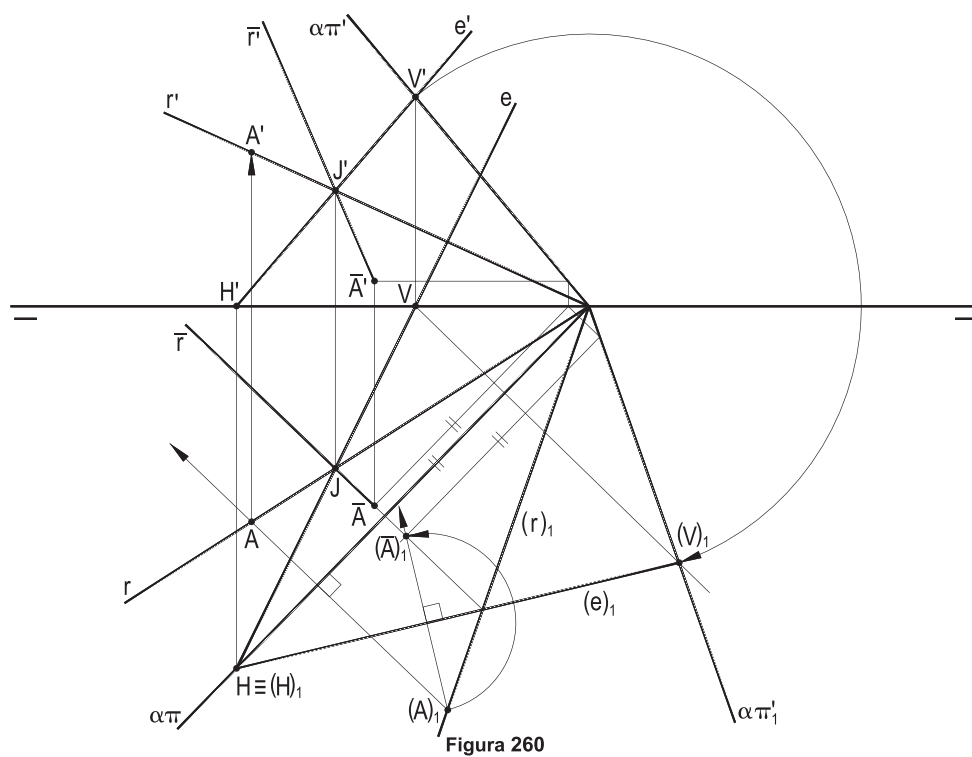
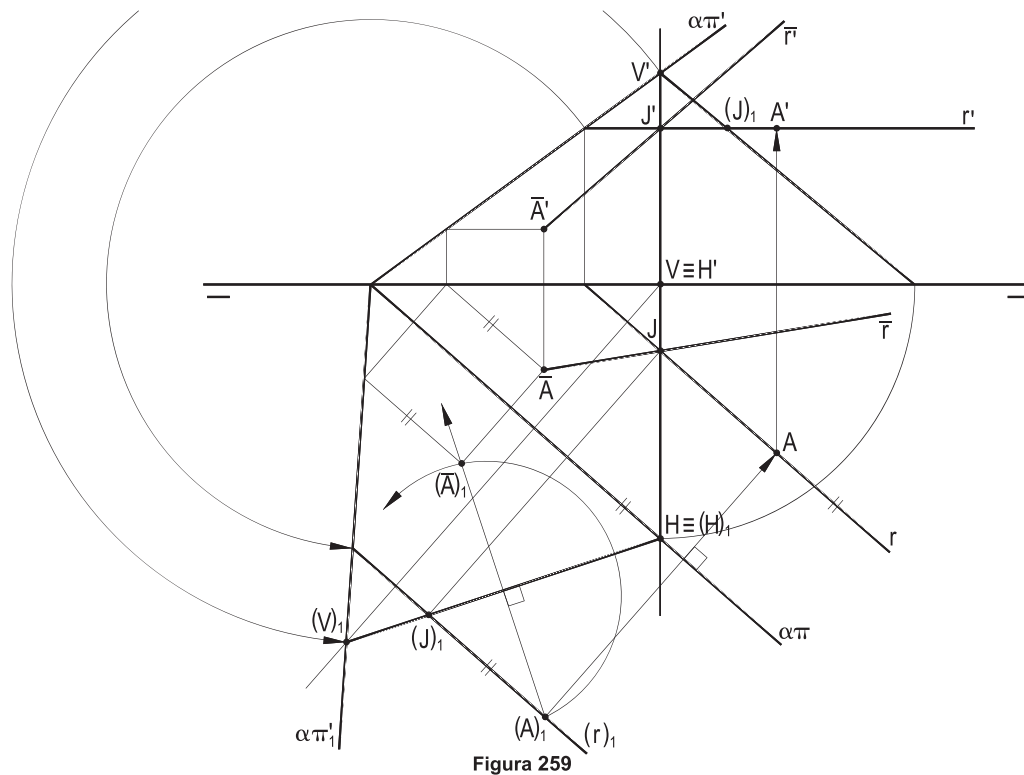


Figura 258

E quando o eixo  $(e) \equiv (V)(H)$  é de perfil (Figura 259), ou qualquer (Figura 260), ainda coplanar com a reta dada  $(r)$ , o processo habitual consiste em rebater o plano  $(\alpha)$ , formado por  $(r)$  e  $(e)$ , marcando o ponto  $(J)$  comum a essas retas, para construir, em V.G., a operação de simetria.



## 72 – Projeções de polígonos axialmente simétricos em relação a um eixo coplanar

A simetria de um polígono dado em relação a uma reta de seu plano se faz pelas simetrias de seus vértices e de seus lados, em relação àquela reta, aproveitadas eventuais particularidades existentes e as propriedades antes estudadas (números 66.1 e 66.2).

Em todos os exemplos seguintes são dadas condições para a construção de um polígono coplanar com o eixo ( $e$ ) de simetria, pedindo-se as projeções de seu simétrico em relação a ( $e$ ).

Em cada um dos casos seguintes, tais condições são especificadas.

1 – Quadrado  $(A)(B)(C)(D)$  do primeiro diedro, pertencente ao plano horizontal ( $\alpha$ ). Dados  $\alpha\pi'$ ,  $AB$  e a projeção  $e$  do eixo.

Construída, em V.G., a projeção horizontal  $ABCD$ , com apenas uma solução, para que o quadrado pertença ao primeiro diedro, a simetria se opera, também em V.G., na projeção horizontal resolvendo a questão (Figura 261).

2 – Triângulo equilátero  $(A)(B)(C)$ , no primeiro diedro, do plano de topo ( $\alpha$ ), pertencente ao eixo ( $e$ ), dadas as projeções do lado  $(A)(B)$  e a projeção horizontal  $e$  do eixo ( $e$ ).

Com o rebatimento de ( $\alpha$ ) sobre ( $\pi$ ), leva-se o eixo a tal rebatimento, com ajuda de seu ponto ( $J$ ), que traz  $(J)_1$ , e constrói-se, em V.G., o triângulo  $(A)(B)(C)$  e seu simétrico,  $(\bar{A})(\bar{B})(\bar{C})$ , cujo alçado resolve o problema (Figura 262).

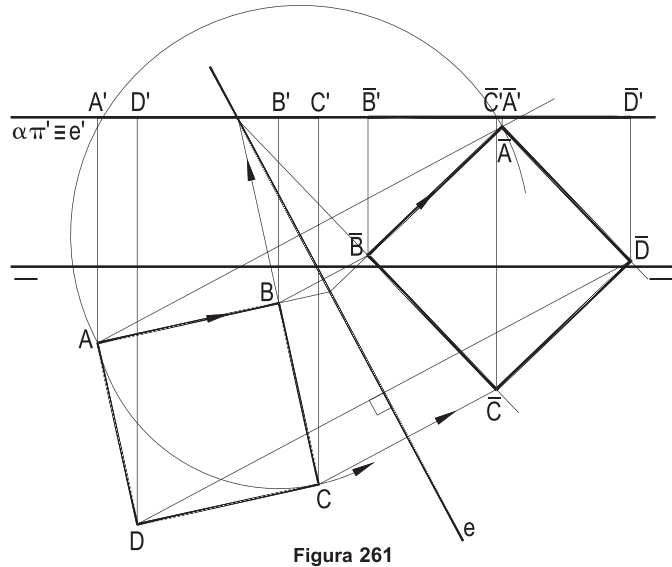


Figura 261

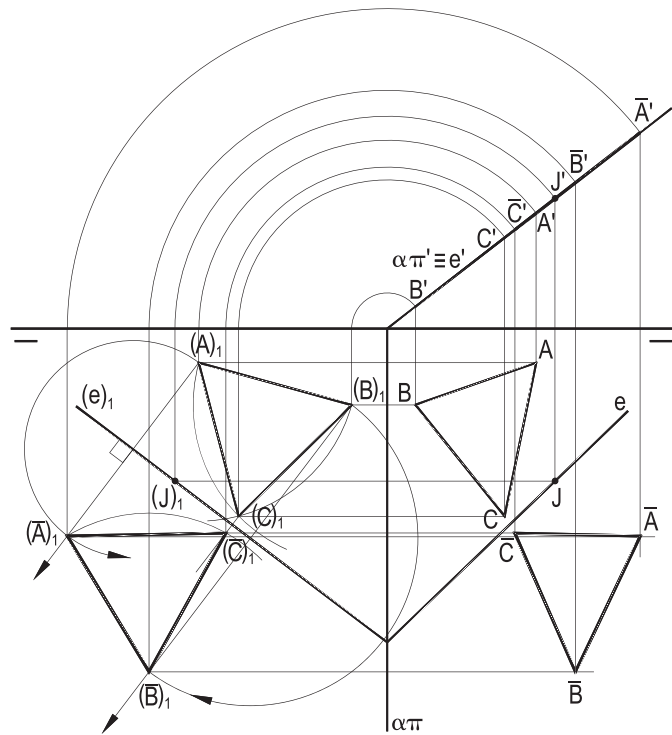


Figura 262



3 – Triângulo retângulo e isósceles (A)(B)(C) de hipotenusa (B)(C), pertencente ao plano ( $\alpha$ ), paralelo a ( $\pi'$ ), que contém o eixo (e).

Dados os traços de ( $\alpha$ ), a projeção A'B', do cateto (A)(B), informado que o vértice (C) tem abscissa menor que a de (A) e que o eixo (e), de simetria, deve ser tal que o simétrico do cateto (A)(B) venha a pertencer a ( $\pi$ ).

O rebatimento de ( $\alpha$ ) sobre ( $\pi$ ) e a mediatriz ( $(e)_1$ ) de  $(A)_1(\bar{A})_1$ , inclinada de  $45^\circ$  em relação aos traços de ( $\alpha$ ), para garantir que o simétrico do cateto (A)(B) possa pertencer a ( $\pi$ ), resolvem a simetria pedida (Figura 263).

4 – (A)(B)(C)(D), um paralelogramo do plano ( $\alpha$ ).

Dadas as projeções verticais A', B', C' e as duas projeções do eixo (e), de maior declive de ( $\alpha$ ).

Completadas as projeções do paralelogramo e obtidos os traços de ( $\alpha$ ), o rebatimento desse plano sobre ( $\pi$ ) permite a construção do simétrico  $(\bar{A})_1(\bar{B})_1(\bar{C})_1(\bar{D})_1$  e, com seu alinhamento, completar a simetria pedida (Figura 264).

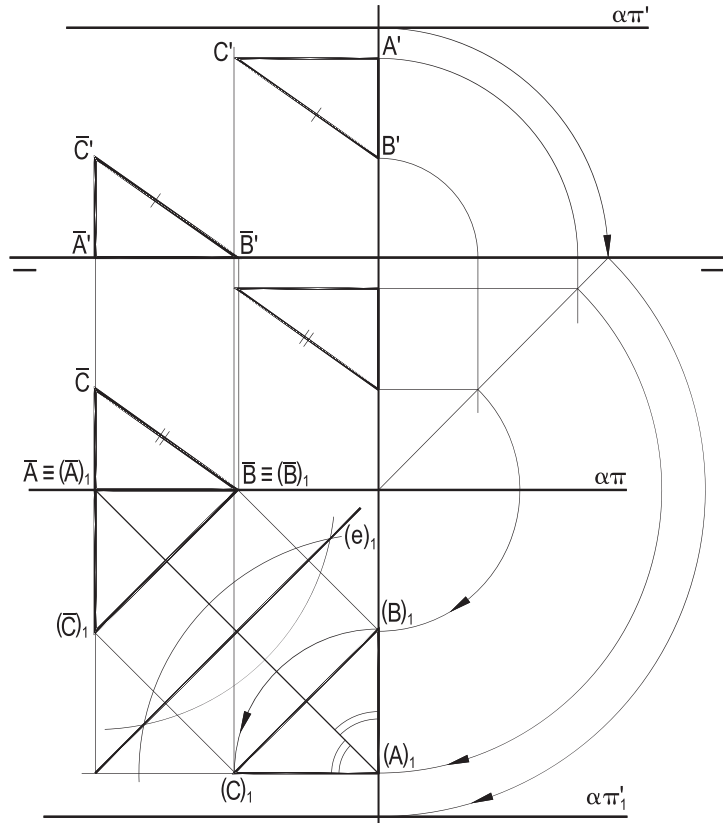


Figura 263

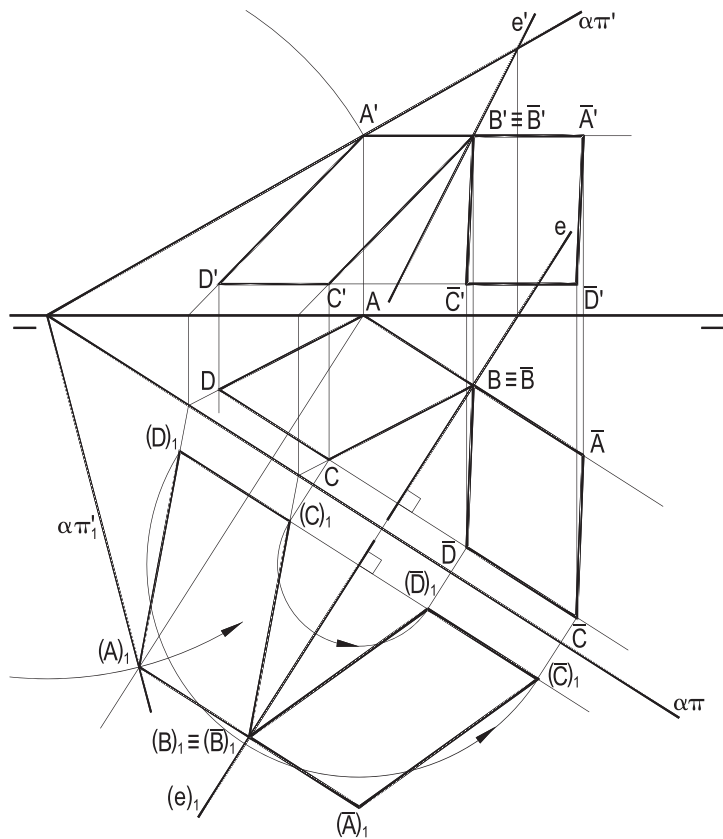


Figura 264

5 – Hexágono regular (A)(B)(C)(D)(E)(F), do primeiro diedro, com o lado (A)(B) em  $(\pi)$  e o vértice (E) em  $(\pi')$ . Dadas as projeções A e B, pede-se construir as projeções do simétrico do hexágono, em relação à reta de perfil (e), do plano  $(\alpha)$ , pertencente ao vértice (C), sem desenhar as projeções do hexágono (A)(B)(C)(D)(E)(F).

Construída a V.G.  $(A)_1(B)_1(C)_1(D)_1(E)_1$  do hexágono dado, obtém-se o traço vertical  $\alpha\pi'$  de seu plano, com o alçamento do vértice  $(E)_1$ , por pertencer a  $(\pi')$ , logo a  $\alpha\pi'$ .

E, rebatida a reta (E)(H) de perfil, de  $(\alpha)$ , a paralela  $(e)_1$  a seu rebatimento por  $(C)_1$  é o próprio rebatimento do eixo da simetria pedida. O alçamento do hexágono simétrico assim obtido resolve a questão (Figura 265), aproveitado o paralelismo das diagonais  $(\bar{B})(\bar{D})$  e  $(\bar{A})(\bar{E})$ .

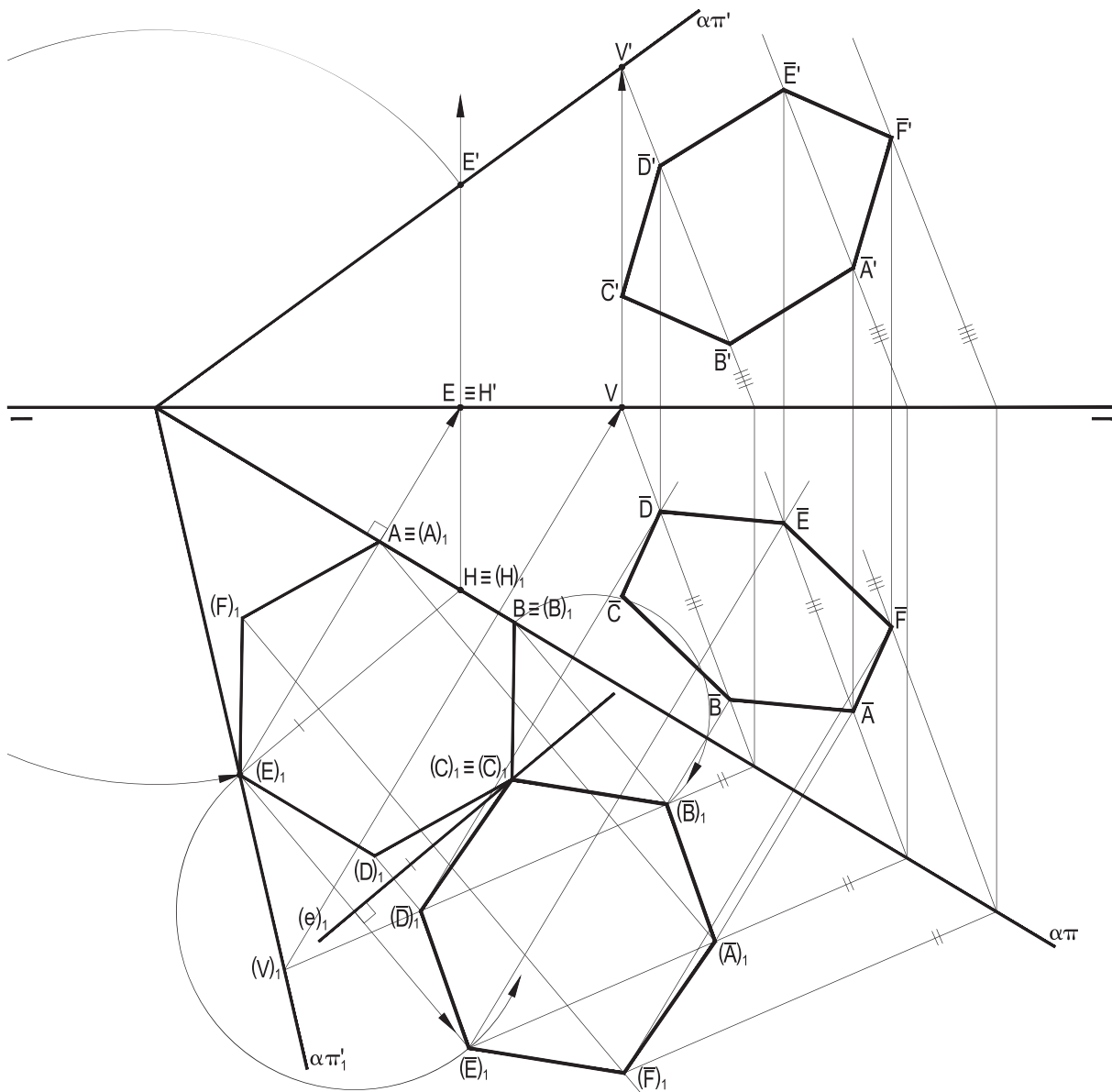


Figura 265

### 73 – Projeções de retas simétricas em relação a um eixo reverso a elas

A construção das projeções da reta ( $\bar{r}$ ), simétrica de uma reta ( $r$ ), dada por suas projeções, em relação a um eixo dado ( $e$ ) reverso a ( $r$ ) e também dado por suas projeções, se faz pela determinação dos simétricos ( $\bar{A}$ ) e ( $\bar{B}$ ) de dois pontos de ( $r$ ), em relação a ( $e$ ) (Figura 266).

Tais simétricos são obtidos pelas conduções, por ( $A$ ) e por ( $B$ ), dos planos ( $\alpha$ ) e ( $\beta$ ) perpendiculares a ( $e$ ), pelas determinações de seus traços ( $M$ ) e ( $N$ ) com ( $e$ ) e com a marcação dos simétricos ( $\bar{A}$ ) e ( $\bar{B}$ ), respectivamente, em relação a ( $M$ ) e a ( $N$ ) (Figura 266). A reta ( $\bar{r}$ ) pedida é a própria ( $\bar{A}$ )( $\bar{B}$ ).

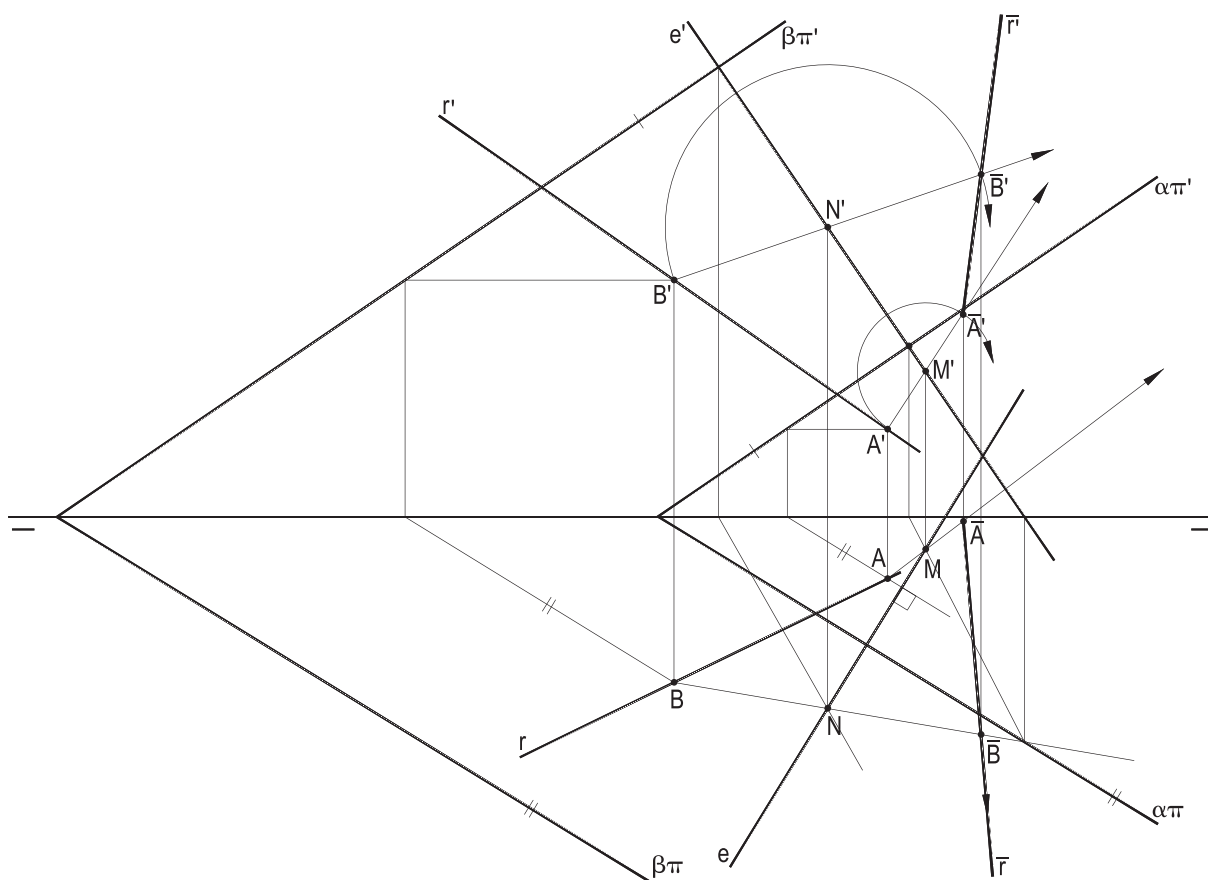


Figura 266

O exemplo acima trata de posições mais genéricas da reta dada ( $r$ ) e do eixo de simetria ( $e$ ), também dado, ambos quaisquer.

Em situações mais particulares do eixo ( $e$ ), as épuras simplificam-se bastante como nos exemplos seguintes, devidamente comentados (Figuras 267 e 268), em que o eixo ( $e$ ) é, respectivamente, vertical e frontal.

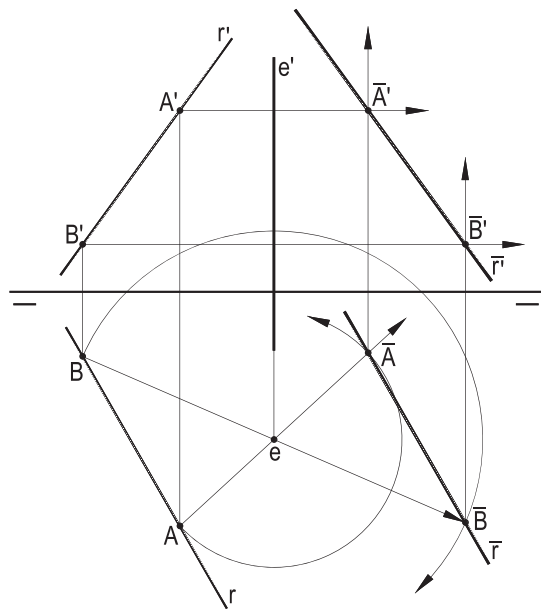


Figura 267

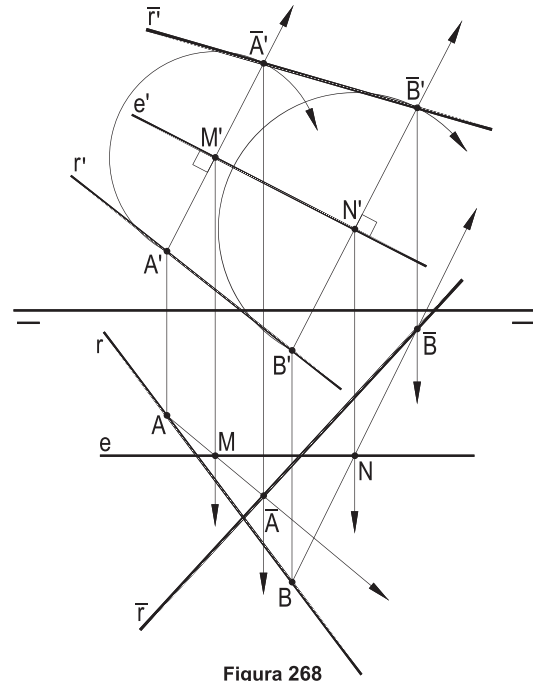


Figura 268

No primeiro desses dois casos particulares (Figura 267), o eixo ( $e$ ), vertical, proporciona, com as horizontais pelos pontos escolhidos ( $A$ ) e ( $B$ ), de ( $r$ ), as imediatas simetrias, trazendo ( $\bar{A}$ ) e ( $\bar{B}$ ) e, com isso, a reta ( $\bar{r}$ ) procurada e, no segundo (Figura 268), o eixo frontal ( $e$ ) propicia os ângulos retos na projeção vertical, entregando os simétricos ( $\bar{A}$ ) e ( $\bar{B}$ ) dos pontos escolhidos ( $A$ ) e ( $B$ ), de ( $r$ ).

#### 74 – Simetria de polígono em relação a um eixo não coplanar

As construções se fazem pelas obtenções dos simétricos de cada vértice do polígono em relação ao eixo, tal como detalhado no item 70 anterior e por sua ordenada união (Figura 269).

#### 75 – Simetria de poliedro em relação a um eixo genérico

Resolução idêntica à do item anterior, pela determinação dos simétricos de cada vértice do poliedro em relação ao eixo dado e pela adequada ligação desses simétricos.

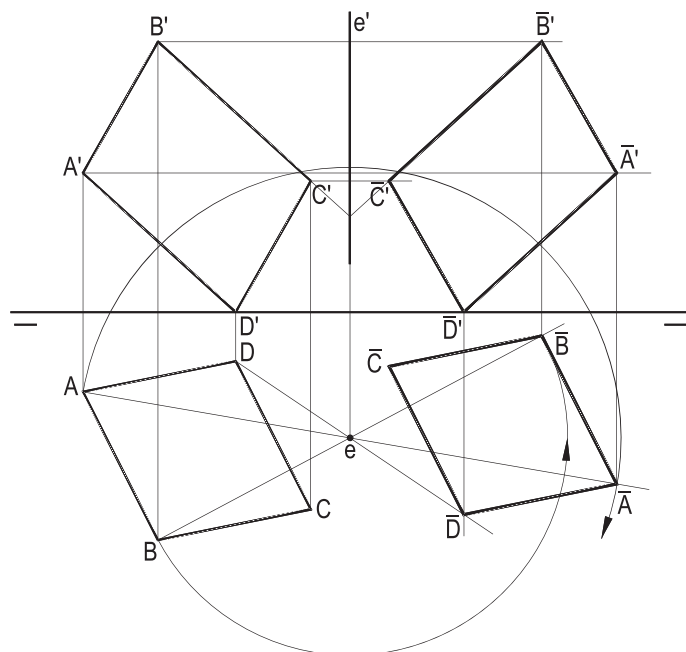


Figura 269

# CAPÍTULO VI

## SIMETRIA EM RELAÇÃO A UM PLANO

### 76 – Simetria em relação a um plano

Dois pontos  $(A)$  e  $(\bar{A})$  são simétricos em relação a um plano  $(\theta)$  quando esse plano é o mediador do segmento  $(A)(\bar{A})$  formado pelos dois pontos.

Duas figuras ou dois sólidos são ditos simétricos em relação a um plano  $(\theta)$  quando a cada ponto de um deles corresponda um ponto do outro e, reciprocamente tais, que os dois sejam simétricos em relação a  $(\theta)$ .

Assim, a construção da simétrica  $(\bar{f})$  de uma figura  $(f)$ , bi ou tridimensional, em relação a um plano  $(\theta)$ , se faz, para cada ponto  $(A)$  de  $(f)$ , pelo envio da perpendicular a  $(\theta)$ , pela determinação de seu traço  $(M)$  com  $(\theta)$  e pelo prolongamento, para além de  $(\theta)$ , de um valor  $(M)(\bar{A})$  igual a  $(A)(M)$  (Figuras 270, 271 e 272).

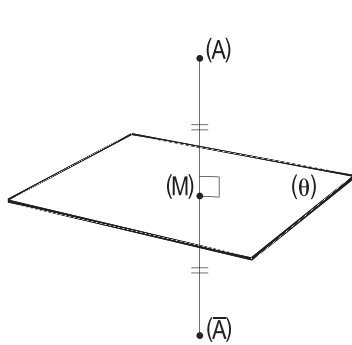


Figura 270

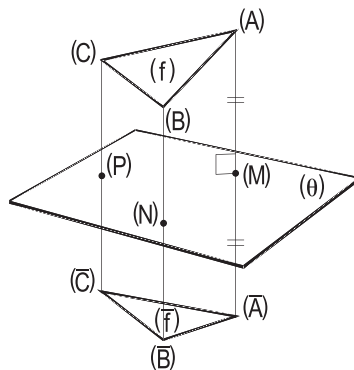


Figura 271

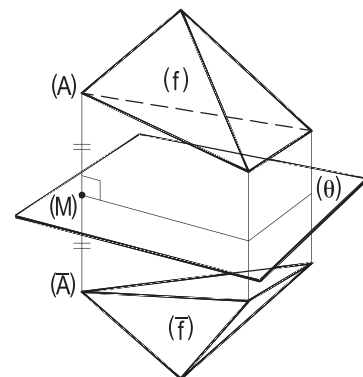


Figura 272

Os pares de pontos simétricos, como  $(A)$  e  $(\bar{A})$ , nas Figuras 270, 271 e 272, são denominados homólogos, mesma denominação utilizada para qualquer par de entes correspondentes nessas simetrias. O plano  $(\theta)$  é dito, então, plano de simetria ou plano referencial.

## 77 – Teorema

Dois segmentos de reta simétricos em relação a um plano que não os contenha são iguais e as retas que lhes servem de suporte ou são paralelas ou se cortam num ponto pertencente àquele plano.

Demonstração: Consideremos um plano  $(\theta)$  e dois segmentos  $(A)(B)$  e  $(C)(D)$ , respectivamente, paralelo e oblíquo a  $(\theta)$ , bem como seus planos  $(\gamma)$  e  $(\varphi)$  projetantes em relação a  $(\theta)$ , assim como seus simétricos  $(\bar{A})(\bar{B})$  e  $(\bar{C})(\bar{D})$ , em relação a  $(\theta)$  (Figura 273), naturalmente pertencentes a cada um desses planos projetantes.

Como, por hipótese,  $(A)(B)$  é paralelo a  $(\theta)$ , também o é à interseção  $(\gamma\theta)$  de seu plano projetante em relação a  $(\theta)$ . E, por isso (número 61), são iguais e paralelos  $(A)(B)$  e seu simétrico  $(\bar{A})(\bar{B})$ .

Da mesma forma, agora no plano projetante  $(\varphi)$  (Figura 273), são iguais os segmentos simétricos  $(C)(D)$  e  $(\bar{C})(\bar{D})$  (número 61), além de que as retas que lhes servem de suportes cortam-se num ponto  $(J)$  pertencente à reta  $(\varphi\theta)$  e, por isso, ao plano  $\theta$ , ficando, assim, demonstrado o teorema.

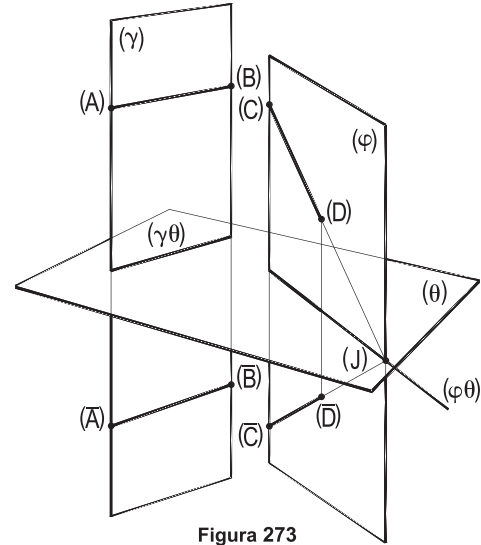


Figura 273

## 78 – Corolários

1 – Uma reta qualquer  $(r)$  e sua simétrica  $(\bar{r})$  em relação a um plano qualquer  $(\theta)$  formam ângulos iguais com esse plano (Figura 274).

2 – Duas retas oblíquas a um plano e simétricas em relação a ele têm esse plano como o bissetor de um dos ângulos que elas formam (Figura 274).

3 – São iguais os ângulos formados por duas retas e por suas simétricas em relação a um plano qualquer. Porque são iguais os triângulos que elas formam com a reta que liga seus traços com aquele plano (Figura 275).

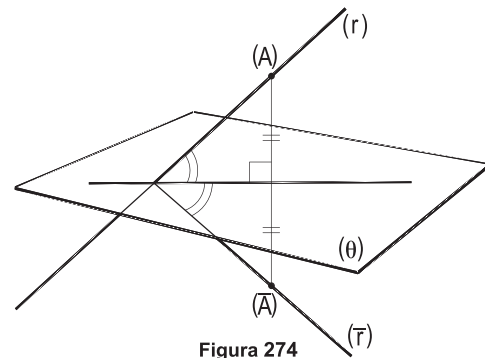


Figura 274

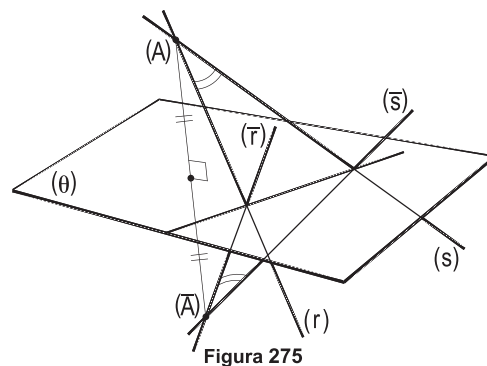


Figura 275

## 79 – Escólio

Toda reta perpendicular a um plano coincide com sua simétrica em relação a esse plano.

## 80 – Teorema

São iguais dois triângulos genéricos simétricos em relação a um plano qualquer.

Demonstração: Porque seus lados e seus ângulos são respectivamente iguais (números 77 e 78.3), os dois triângulos são iguais, o que, prontamente, demonstra o teorema.

## 81 – Teorema

São iguais dois polígonos quaisquer simétricos em relação a um plano genérico.

Demonstração: Considerando-se um polígono qualquer e seu simétrico em relação a um plano  $(\theta)$  genérico, basta decompô-los em iguais quantidades de triângulos, todos formados com diagonais relativas a um par de vértices simétricos (Figura 276), que serão, então, aos pares, simétricos em relação a  $(\theta)$  e, por isso (número 80), respectivamente iguais, o que implica na igualdade dos dois polígonos, como se queria provar.

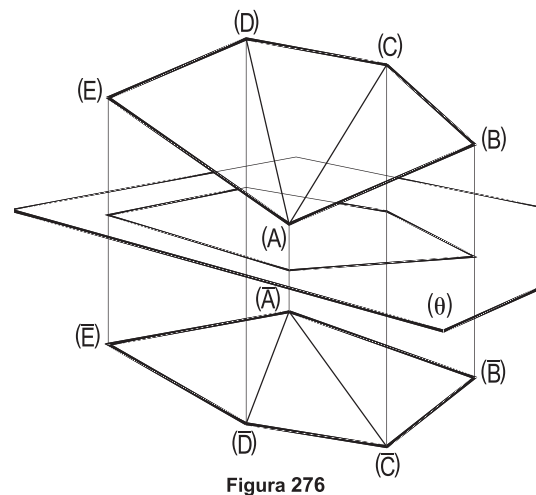


Figura 276

## 82 – Teorema

São iguais dois tetraedros quaisquer simétricos em relação a um plano qualquer.

Demonstração: Consideremos o tetraedro genérico  $(J)-(A)(B)(C)$  e seu simétrico  $(\bar{J})-(\bar{A})(\bar{B})(\bar{C})$  em relação a um plano qualquer  $(\theta)$  (Figura 277).

As faces dos sólidos são triângulos aos pares simétricos em relação a  $(\theta)$  e, por isso, aos pares, iguais (número 80) e igualmente dispostos, o que acarreta a igualdade dos dois tetraedros.

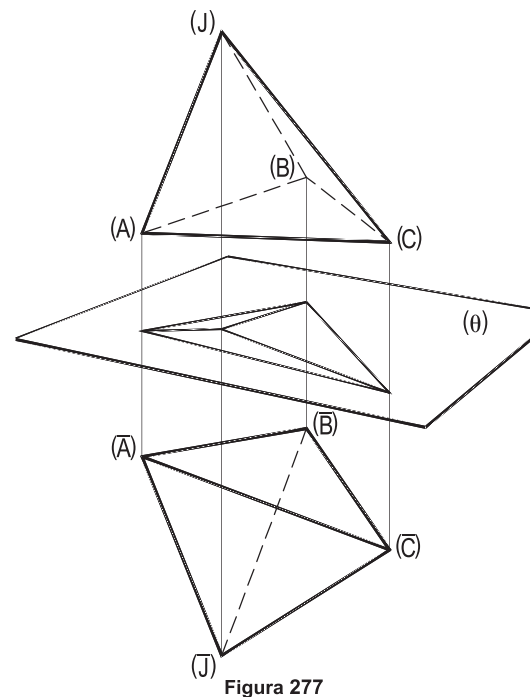


Figura 277

### 83 – Teorema

São iguais dois poliedros convexos quaisquer simétricos em relação a um plano genérico.

Como um poliedro convexo qualquer pode ser decomposto em tetraedros (*Geometria Espacial*, número 155, os dois poliedros convexos considerados podem ser decompostos em quantidades iguais de tetraedros, aos pares iguais, por serem simétricos.

E como as disposições relativas dessas seqüências de tetraedros são iguais, fica demonstrada a igualdade dos dois poliedros convexos, simétricos em relação a um plano genérico.

### 84 – Corolários dos teoremas 81 e 83

1 – São iguais duas figuras planas quaisquer, simétricas em relação a um plano genérico.

Porque podem ser as duas figuras consideradas, mesmo que curvilíneas, ou mistas, como posições limites de duas poligonais iguais, nelas inscritas, quando, segundo leis iguais, crescem indefinidamente seus gêneros.

2 – São iguais dois sólidos convexos quaisquer, simétricos em relação a um plano genérico.

Porque podem ser considerados, mesmo que com superfícies não planas, como posições limites de dois poliedros convexos iguais, neles inscritos, quando, segundo leis iguais, crescem indefinidamente seus gêneros.

### 85 – Planos simétricos em relação a um plano

Dois planos  $(\alpha)$  e  $(\bar{\alpha})$  são simétricos em relação a um plano  $(\theta)$  quando cada ponto de  $(\bar{\alpha})$  é simétrico, em relação a  $(\theta)$ , de cada ponto de  $(\alpha)$ .

Assim, quando dois planossecantes  $(\alpha)$  e  $(\bar{\alpha})$  são simétricos em relação a um plano  $(\theta)$ , eles formam ângulos iguais com  $(\theta)$ , que é, então, um dos planos bissetores dos ângulos formados por  $(\alpha)$  e  $(\bar{\alpha})$  (Figura 278).

E, sendo  $(\alpha)$  paralelo a  $(\theta)$ , seu simétrico  $(\bar{\alpha})$ , em relação a  $(\theta)$ , é também paralelo a  $(\theta)$  e situado a uma mesma distância de  $(\theta)$  que  $(\alpha)$  (Figura 279).

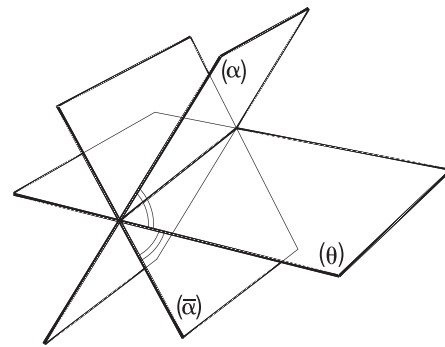


Figura 278

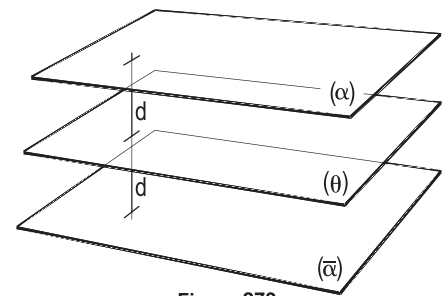


Figura 279



## 86 – Projeções do simétrico de um ponto dado em relação a um plano

Sendo dado, por suas projeções, um ponto (A) e, por seus traços, um plano ( $\theta$ ), para obter as projeções do ponto ( $\bar{A}$ ), simétrico de (A), em relação a ( $\theta$ ), deve-se traçar a perpendicular, por (A), a ( $\theta$ ), determinar sua interseção (M) com ( $\theta$ ) e prolongá-la de um valor (M)( $\bar{A}$ ) igual a (A)(M).

Quando ( $\theta$ ) é projetante (Figuras 280, 281, 282, 283 e 284), a construção é imediata pela V.G. do ângulo reto da perpendicular por (A) a ( $\theta$ ), no traço do plano com o plano de projeção ao qual ele é perpendicular.

Quando ( $\theta$ ) é pertencente, ou paralelo, a ( $\pi'\pi$ ), a construção se faz com o auxílio de uma vista lateral (Figuras 285 e 286), onde os ângulos retos vêm em V.G., cabendo ressaltar que, tendo que ser de perfil a perpendicular a ( $\theta$ ), os pontos (A) e ( $\bar{A}$ ) têm que ter abscissas iguais.

A vista lateral pode ter qualquer abscissa.

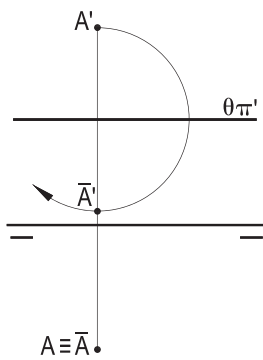


Figura 280

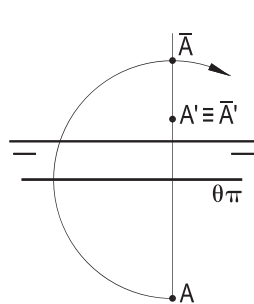


Figura 281

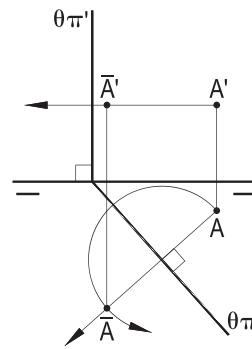


Figura 282

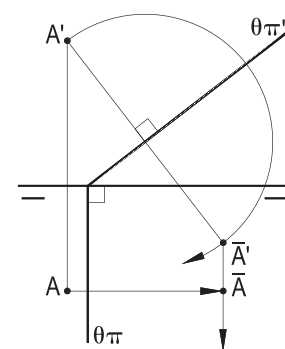


Figura 283

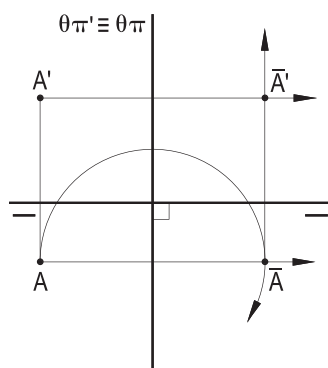


Figura 284

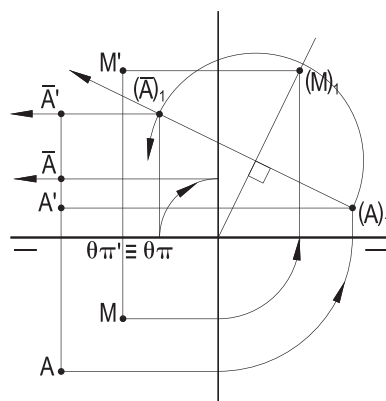


Figura 285

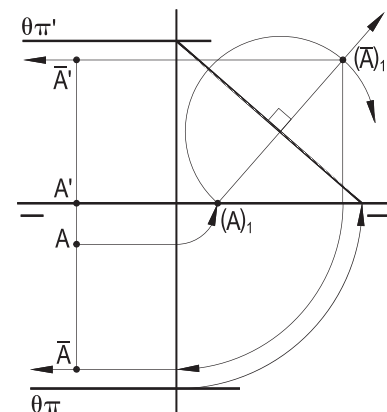


Figura 286

Quando o plano ( $\theta$ ) é qualquer, basta utilizar o procedimento natural da simetria (Figura 287), ou, com uma mudança que torne ( $\theta$ ) projetante (Figura 288), retornar a condições anteriores.

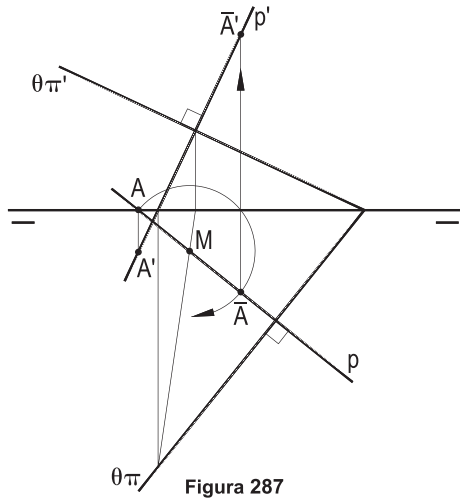


Figura 287

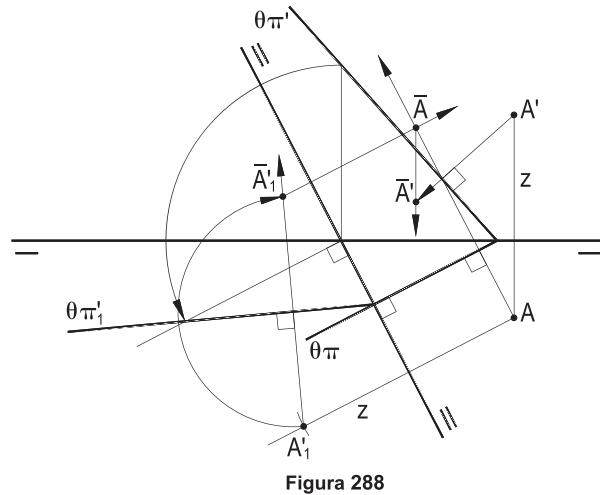


Figura 288

Mesmo quando o plano ( $\theta$ ), referencial para a simetria, é dado pelas projeções de duas de suas retas (a) e (b), os procedimentos permanecem válidos (Figuras 289 e 290).

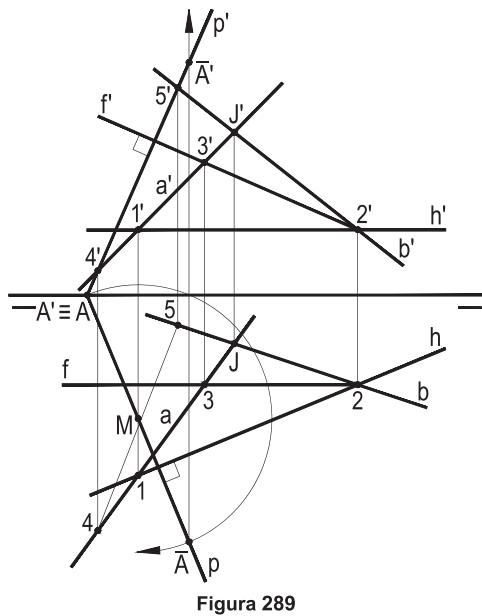


Figura 289

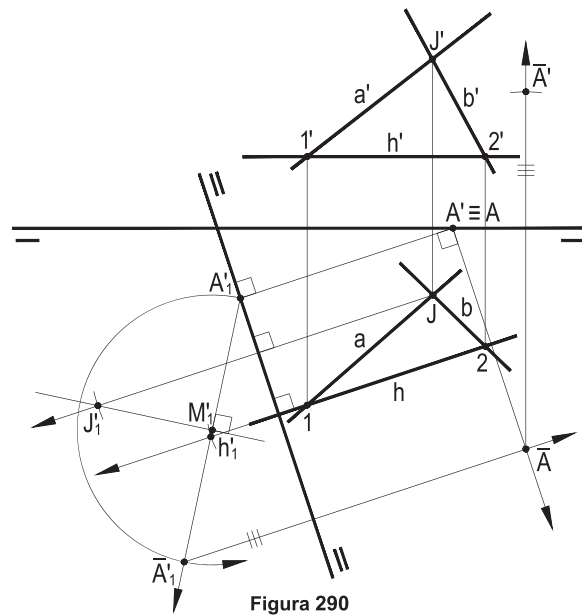


Figura 290

## 87 – Projeções da reta simétrica de uma reta dada em relação a um plano também dado

A construção das projeções da reta ( $\bar{r}$ ), simétrica de uma reta dada ( $r$ ), em relação a um plano ( $\theta$ ), também dado, se faz pela escolha de dois pontos de ( $r$ ), pela obtenção de seus simétricos em relação a ( $\theta$ ) e por sua união.

## 88 – Projeções da reta simétrica de uma reta dada em relação a planos horizontais ou frontais

Porque, sendo o plano ( $\theta$ ) horizontal, as perpendiculares de construção dos pontos simétricos têm que ser verticais, coincidem as projeções horizontais da reta dada ( $r$ ) e de sua simétrica ( $\bar{r}$ ) (Figura 291).

Além disso, são simétricas em relação ao traço vertical  $\theta\pi'$  as projeções verticais  $r'$  e  $\bar{r}'$ , já que as cotas de pares de pontos homólogos têm que ser simétricas em relação à cota do plano ( $\theta$ ) (Figuras 291, 292, 293, 294, 295, 296, 297 e 298).

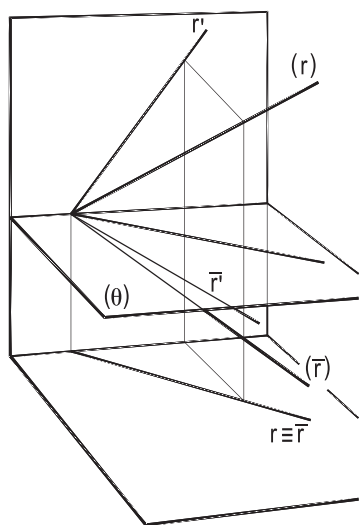


Figura 291

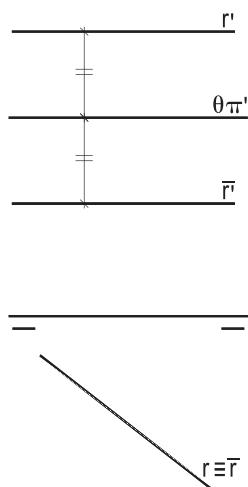


Figura 292

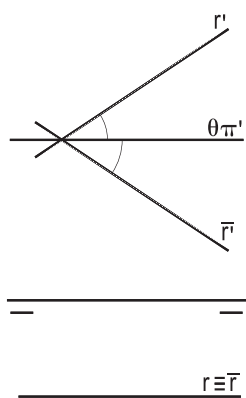


Figura 293

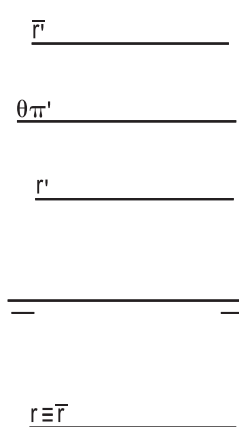


Figura 294

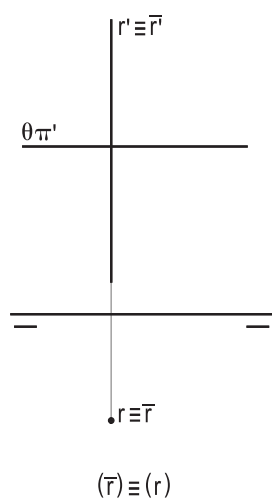


Figura 295

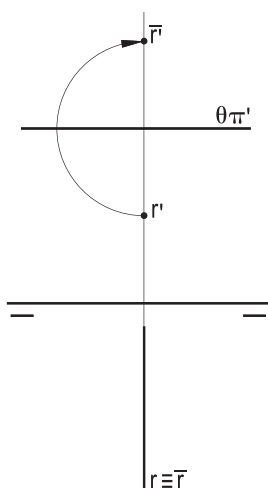


Figura 296

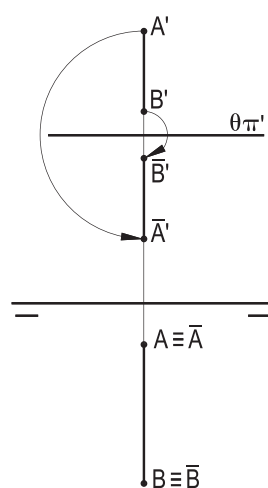


Figura 297

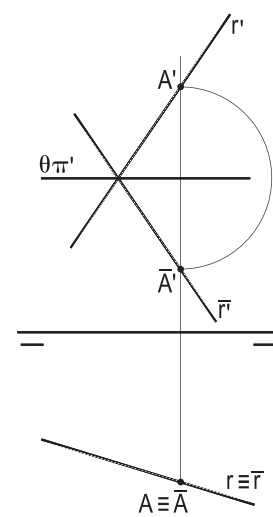


Figura 298

Da mesma forma, quando o plano  $(\theta)$ , de simetria, é frontal, são as projeções verticais  $r'$  e  $\bar{r}'$  das retas simétricas que têm que coincidir, sendo simétricas, em relação ao traço horizontal  $\theta\pi$  as projeções horizontais  $r$  e  $\bar{r}$  dessas retas (Figuras 299, 300, 301, 302, 303, 304, 305 e 306).

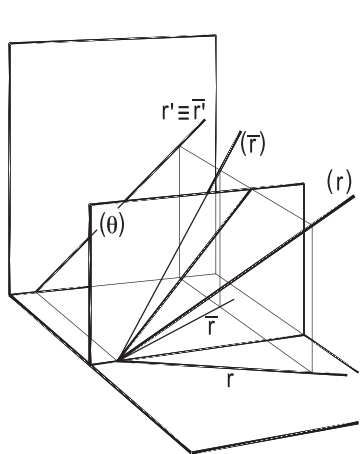


Figura 299

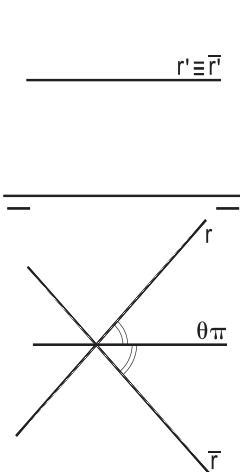


Figura 300

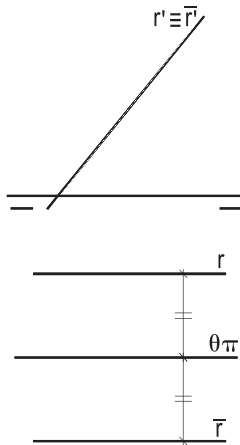


Figura 301

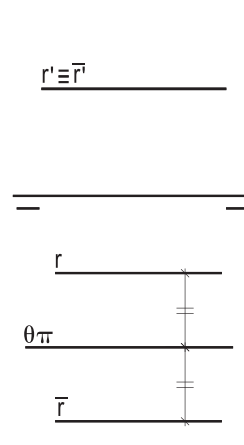


Figura 302

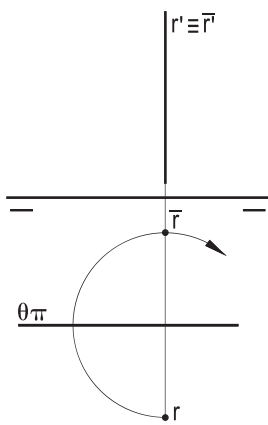


Figura 303

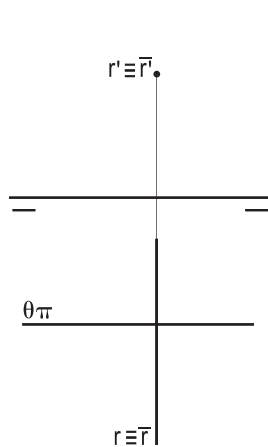


Figura 304

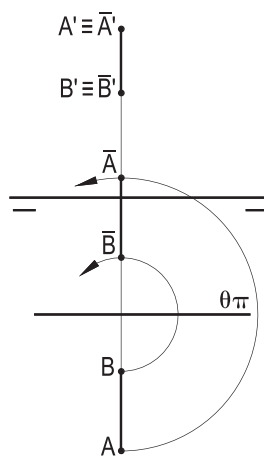


Figura 305

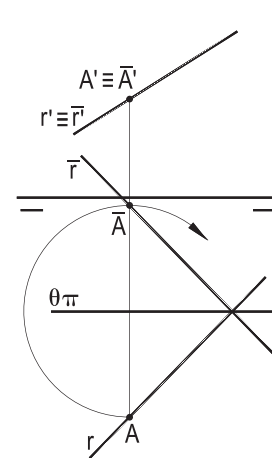


Figura 306

## 89 – Projeções da reta simétrica de uma reta dada em relação a planos verticais ou de topo

Por serem projetantes em relação a  $(\pi)$ , a construção dos pontos de  $(\bar{r})$ , simétrica de uma reta dada  $(r)$  em relação a planos  $(\theta)$ , verticais, se faz pelo envio de perpendiculares a  $(\theta)$ , todas, naturalmente, horizontais, o que acarreta que, em épura, sejam simétricas em relação ao traço horizontal  $\theta\pi$  as projeções horizontais  $r$  e  $\bar{r}$  das retas original e de sua simétrica. Para as projeções verticais, deve-se aproveitar as constâncias das cotas dos pontos de  $(r)$  e, sempre que possível, utilizar o traço  $(J)$  de  $(r)$  com  $(\theta)$ , fixo na operação (Figuras 307, 308, 309, 310, 311, 312, 313, 314 e 315).

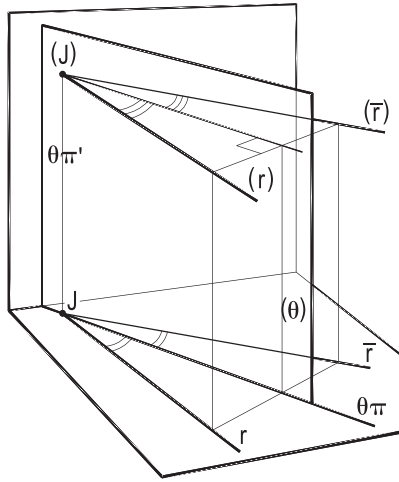


Figura 307

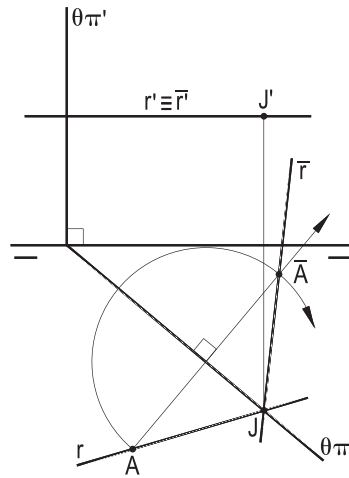


Figura 308

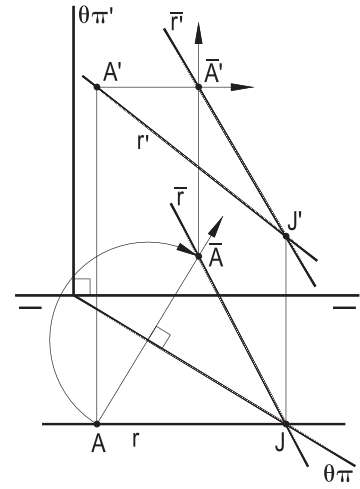


Figura 309

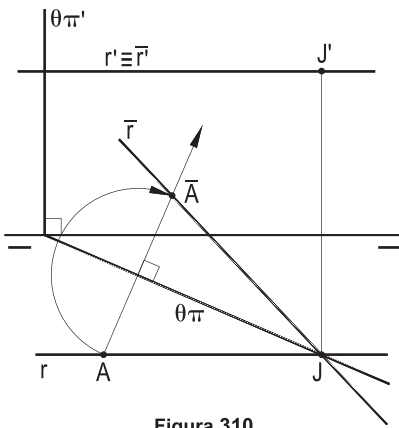


Figura 310

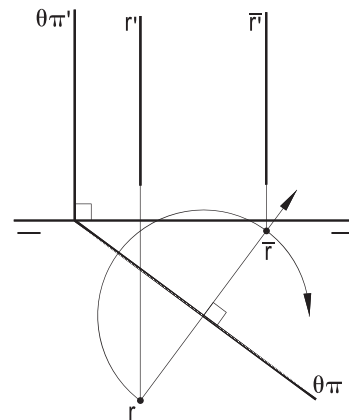


Figura 311

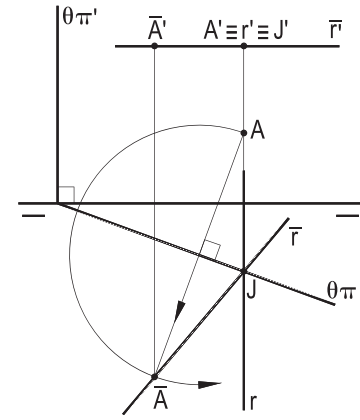


Figura 312

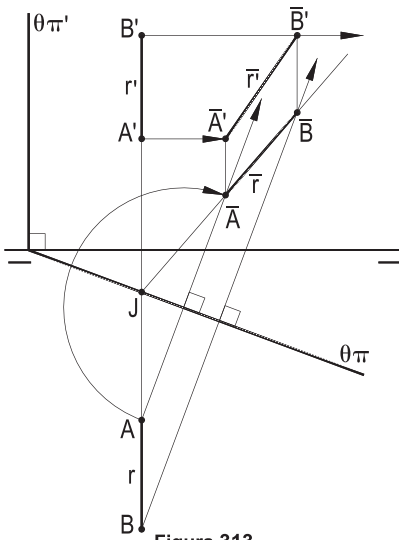


Figura 313

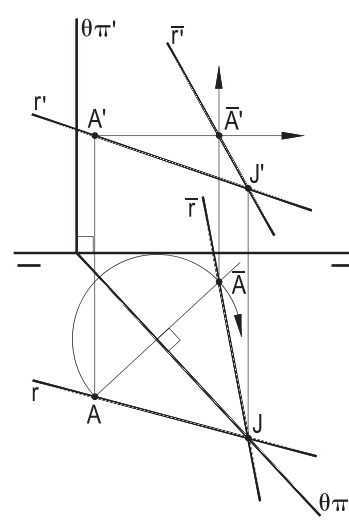


Figura 314

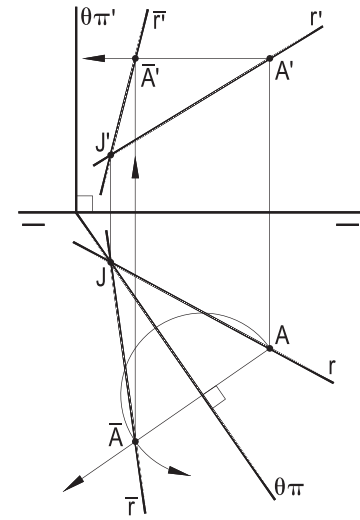


Figura 315

Da mesma forma, para simetrias de retas em relação a planos de topo, as projeções verticais  $r'$  e  $\bar{r}'$  das retas simétricas restam, em épura, simétricas em relação ao traço vertical  $\theta\pi'$  do plano ( $\theta$ ), de simetria, enquanto que os pontos homólogos mantêm constantes, seus afastamentos, já que as retas que unem os pares de pontos simétricos são frontais, perpendiculares a ( $\theta$ ) (Figuras 316, 317, 318, 319, 320, 321, 322, 323 e 324).

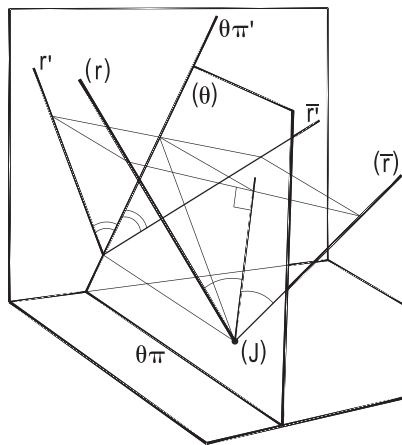


Figura 316

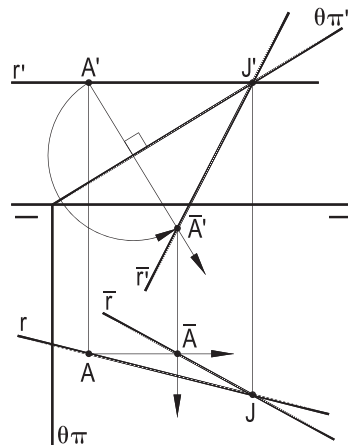


Figura 317

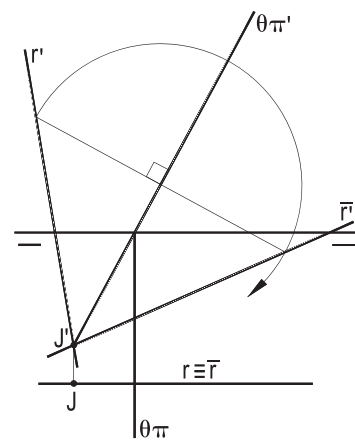


Figura 318

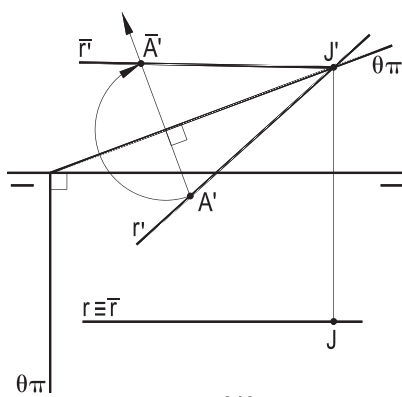


Figura 319

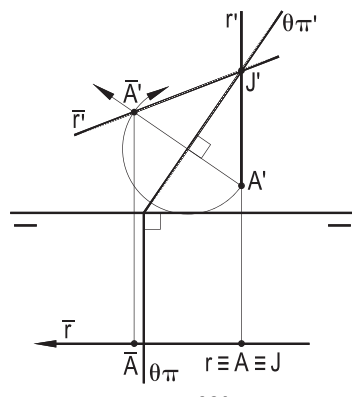


Figura 320

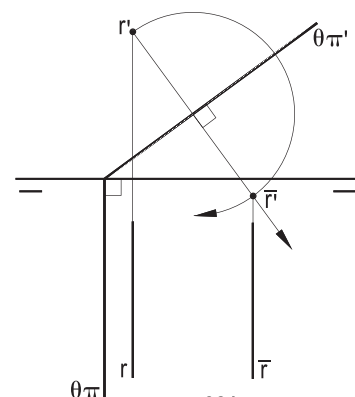


Figura 321

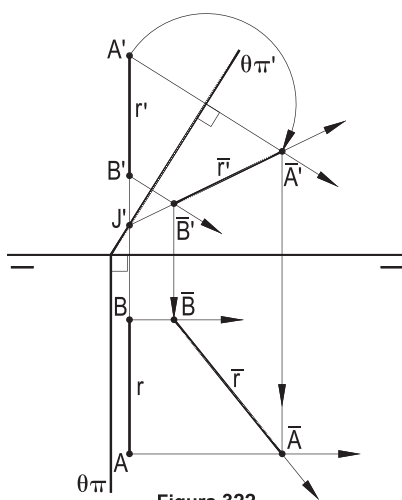


Figura 322

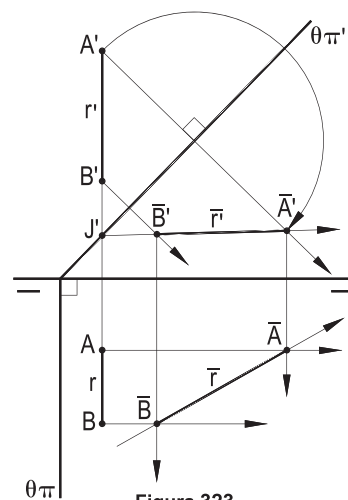


Figura 323

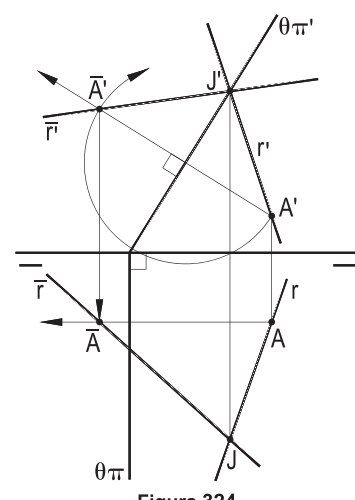


Figura 324

## 90 – Projeções da reta simétrica de uma reta dada em relação a um plano de perfil dado

Porque as perpendiculares ao plano dado ( $\theta$ ), que produzem os pontos simétricos dos dados, têm que ser fronto-horizontais, todos os pares de pontos homólogos mantêm inalterados suas cotas e seus afastamentos, o que simplifica em muito as épuras (Figuras 325, 326, 327, 328, 329, 330, 331 e 332).

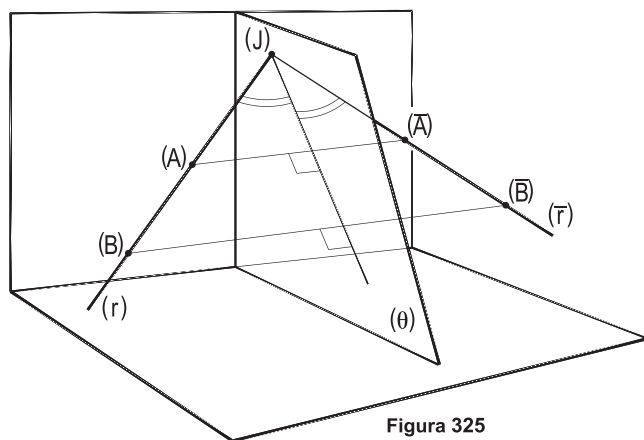


Figura 325

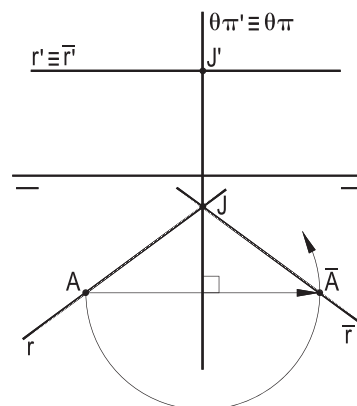


Figura 326

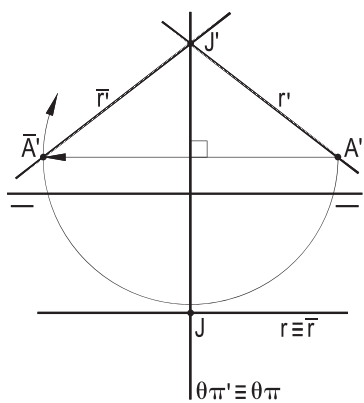


Figura 327

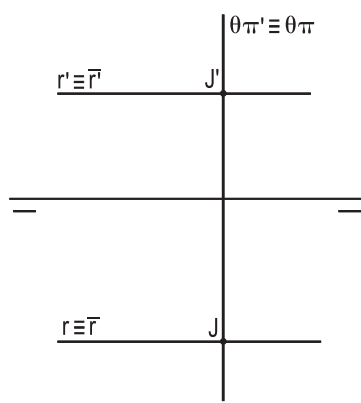


Figura 328

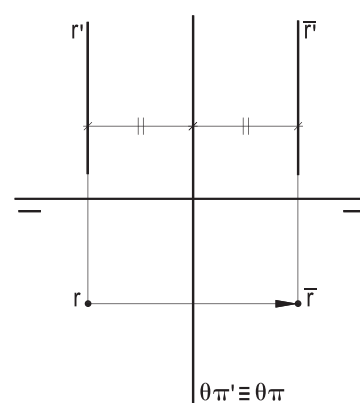


Figura 329

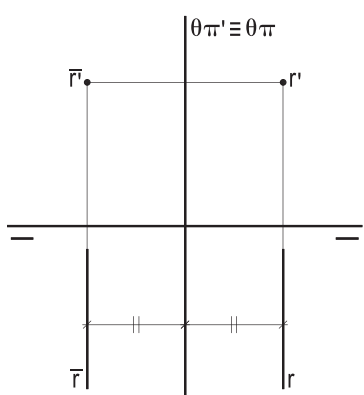


Figura 330

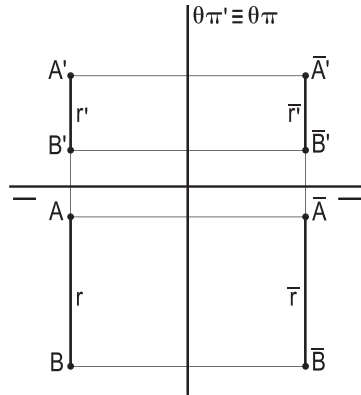


Figura 331

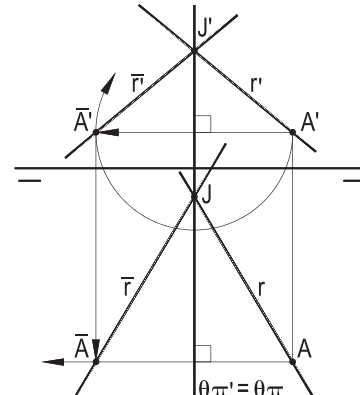


Figura 332

## 91 – Projeções da reta simétrica de uma reta dada em relação a um plano paralelo a $(\pi'\pi)$

Como os planos  $(\theta)$ , paralelos a  $(\pi'\pi)$ , são projetantes em relação aos planos de perfil, as perpendiculares a eles, que proporcionam os simétricos de todos os pontos da reta dada  $(r)$ , hão de ser de perfil, de modo que todos os pares de pontos homólogos mantêm constantes suas abscissas, sendo conveniente, sempre que possível, utilizar o ponto  $(J)$ , traço de  $(r)$  com  $(\theta)$ , fixo na simetria (Figuras 333, 334, 335, 336, 337, 338, 339 e 340).

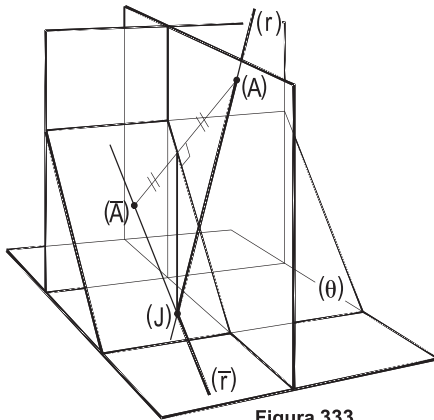


Figura 333

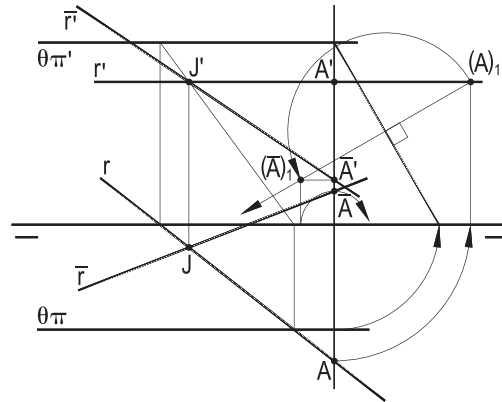


Figura 334

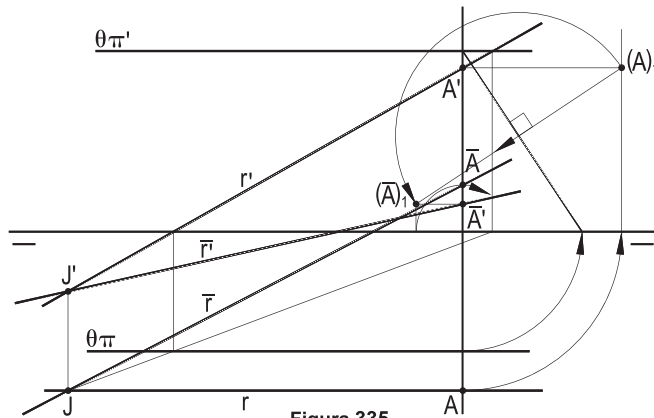


Figura 335

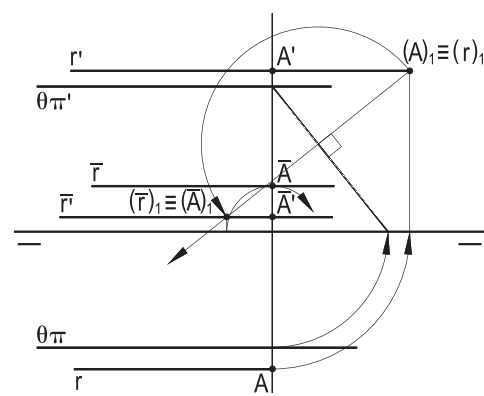


Figura 336

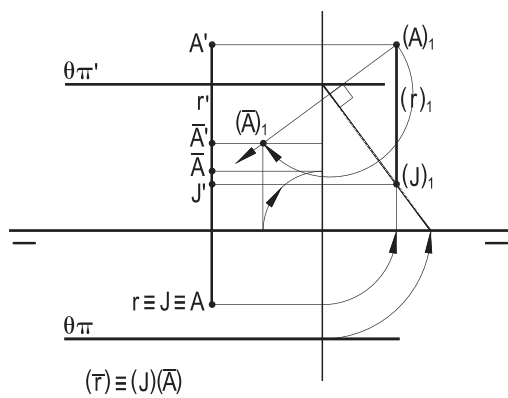


Figura 337

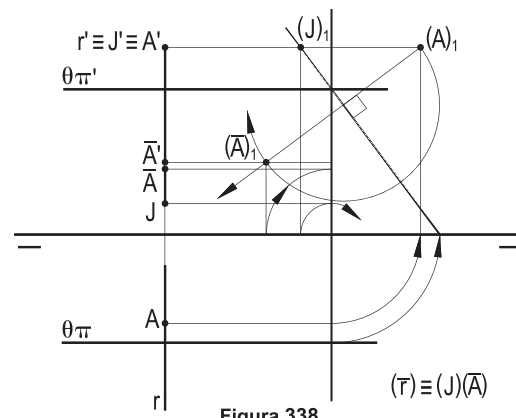


Figura 338



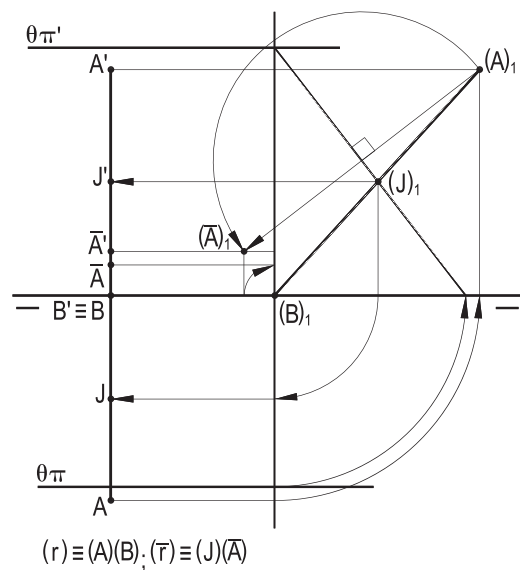


Figura 339

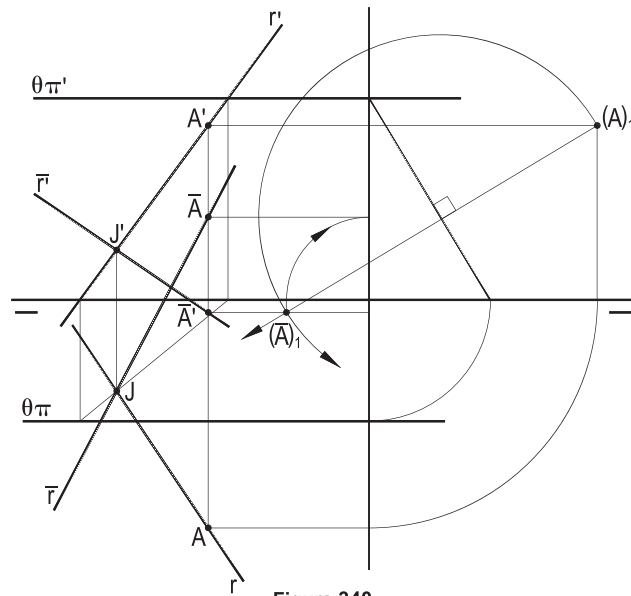


Figura 340

Cabe destacar que, naturalmente, devido à constância das abscissas entre pares de pontos homólogos, nas simetrias em relação a planos paralelos a  $(\pi'\pi)$ , as simétricas de retas verticais, de topo e de perfil são outras retas de perfil, tal como mostram as Figuras 337, 338 e 339. Eventualmente, em posições particulares, essas simétricas podem vir a ser verticais ou de topo.

## 92 – Projeções da reta simétrica de uma reta dada em relação a um plano pertencente à linha de terra

Tudo se passa como no item anterior, já que as perpendiculares a planos  $(\pi'\pi)$ –(M) têm, também, que ser de perfil (Figuras 341, 342, 343, 344, 345, 346, 347 e 348).

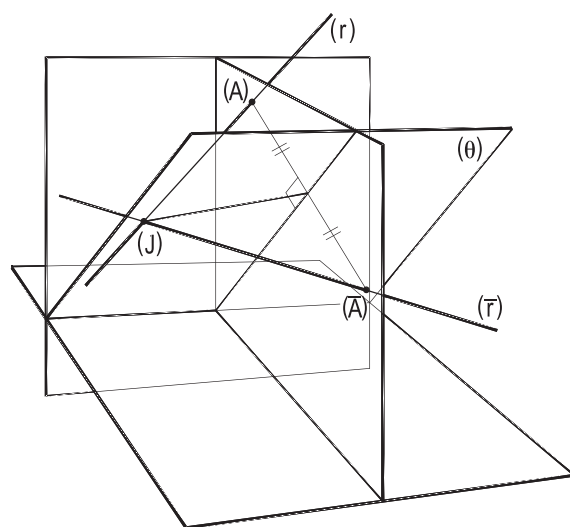


Figura 341

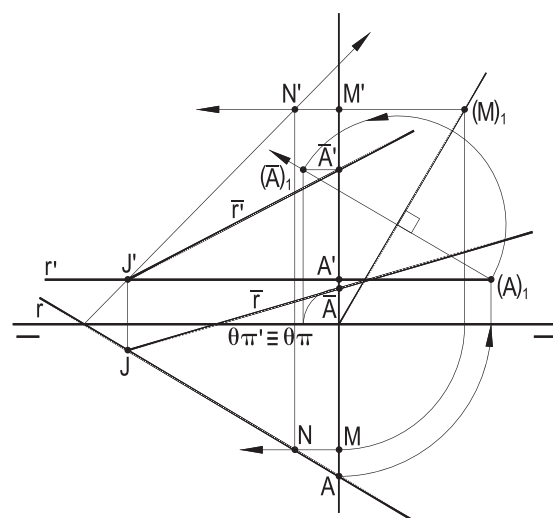


Figura 342

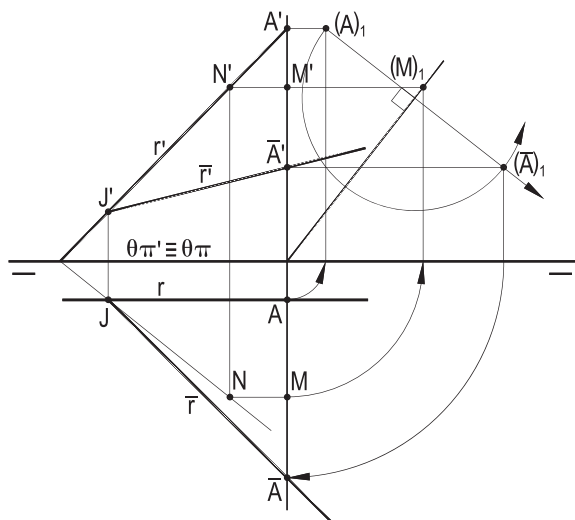


Figura 343

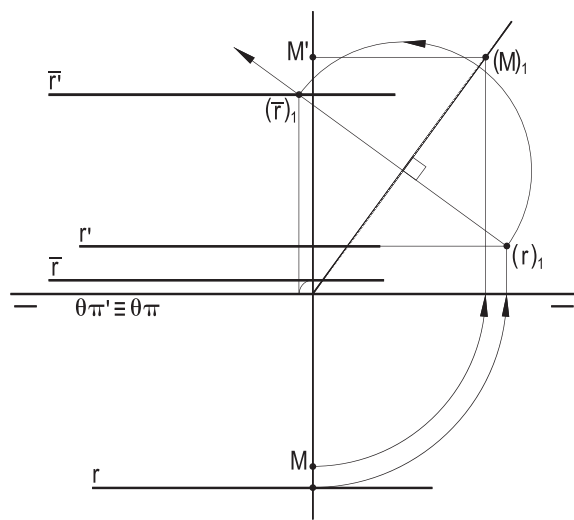


Figura 344

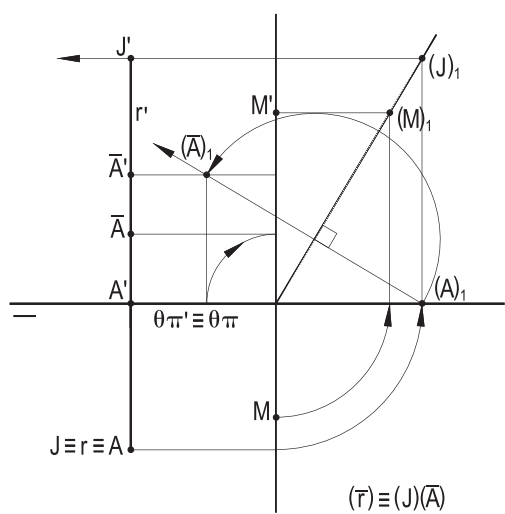


Figura 345

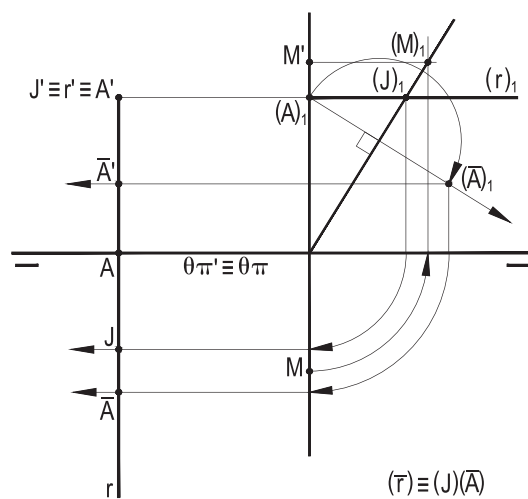


Figura 346

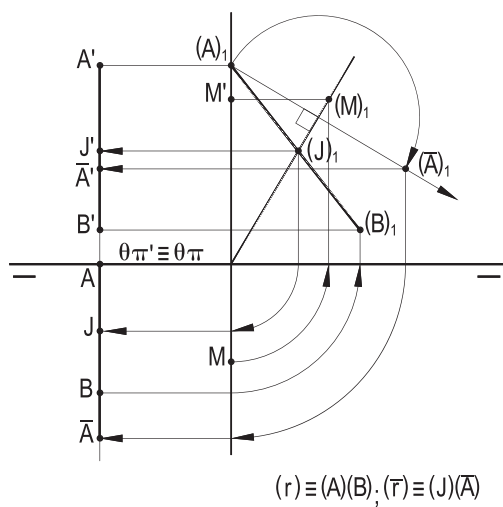


Figura 347

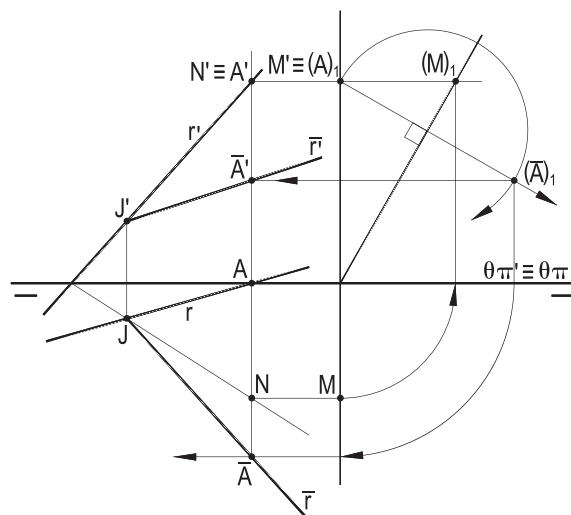


Figura 348

### 93 – Projeções da reta simétrica de uma reta, dada por suas projeções, em relação a um plano qualquer, dado por seus traços

As perpendiculares a um plano qualquer, que proporcionam as simetrias, são também retas quaisquer, o que, de um modo geral, onera as épuras. Mais um motivo para se determinar, sempre que possível, a princípio, o traço (J) da reta dada (r) no plano dado ( $\theta$ ), ponto fixo durante a operação de simetria.

1 – Para uma horizontal (r), seu traço (J) em ( $\theta$ ) é o ponto inicial.

Arbitrado um ponto (A), de (r), a perpendicular (p), por (A), corta ( $\theta$ ) em (M), proporcionando o segundo ponto ( $\bar{A}$ ) da simétrica ( $\bar{r}$ ) pedida (Figura 349), obtida pela união de (J) a ( $\bar{A}$ ), simétrico de (A) em relação a (M).

2 – Para uma frontal (r), o mesmo procedimento é utilizado, com a determinação da interseção (J) da reta (r) com o plano ( $\theta$ ) e, com a escolha de um ponto (A), qualquer, de (r), envia-se a perpendicular (p), por (A) a ( $\theta$ ), obtendo-se seu traço (M) em ( $\theta$ ), e, então, o simétrico ( $\bar{A}$ ) de (A), em relação a (M), que, com (J), define a simétrica ( $\bar{r}$ ) procurada (Figura 350).

Observe-se a utilização de uma reta (s), auxiliar de ( $\theta$ ), pertencente a um plano de topo paralelo à reta (p), para determinar o ponto (M).

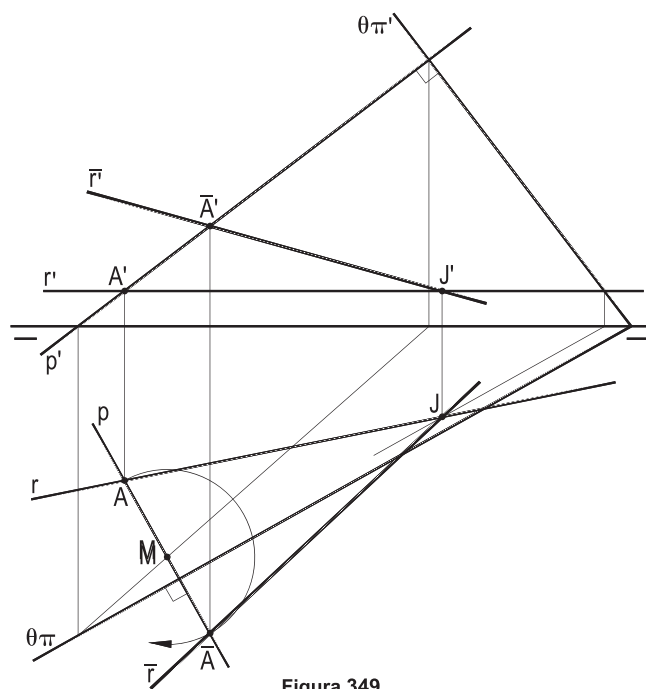


Figura 349

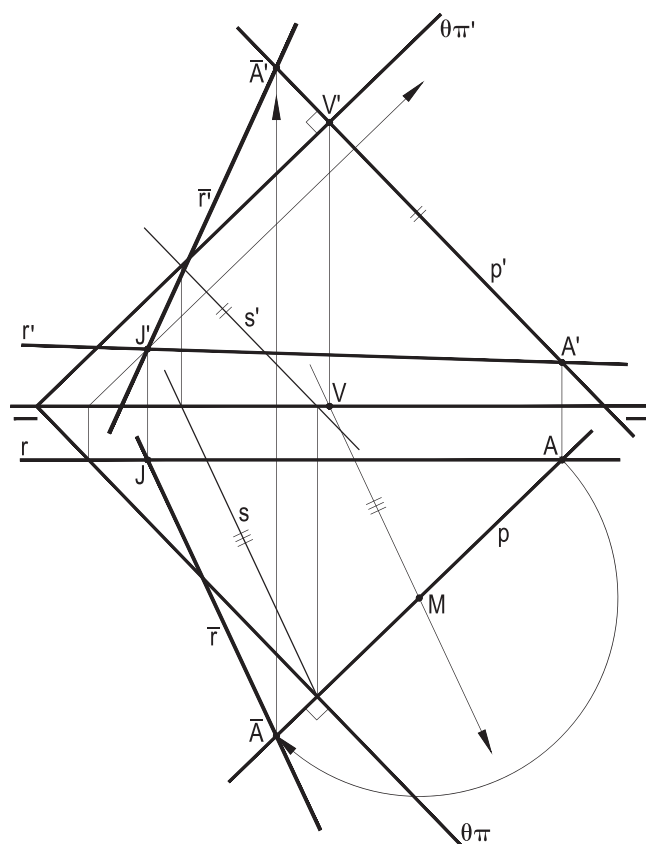
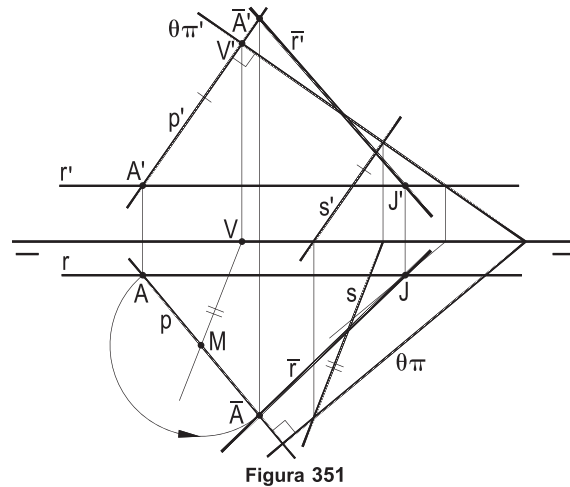


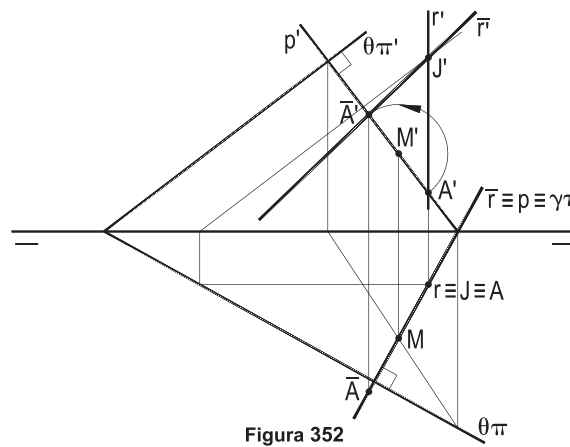
Figura 350

3 – Repetido o procedimento para uma reta ( $r$ ), fronto-horizontal, com a determinação do seu traço ( $J$ ), em ( $\theta$ ), e, com a escolha de um ponto ( $A$ ), genérico de ( $r$ ), determina-se seu simétrico ( $\bar{A}$ ), em relação a ( $\theta$ ) (Figura 351).



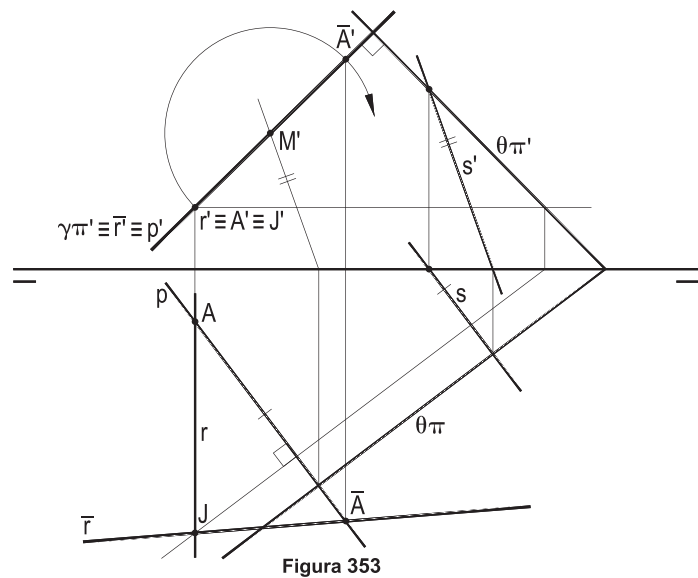
Os pontos ( $J$ ) e ( $\bar{A}$ ) definem a reta ( $\bar{r}$ ) pedida.

4 – Sendo ( $r$ ) vertical, fica imediato concluir que ela e sua simétrica ( $\bar{r}$ ) em relação a ( $\theta$ ) hão de definir um plano vertical ( $\gamma$ ), cujo traço horizontal  $\gamma\pi$ , pertencendo a  $r$ , é perpendicular a  $\theta\pi$  (Figura 352), o que simplifica a construção, que, então, se resume em encontrar  $\bar{A}'$ , simétrico de  $A'$  em relação a  $M'$ .



5 – Como no item anterior, porque, agora, ( $r$ ) é de topo, ela e sua simétrica ( $\bar{r}$ ) em relação a ( $\theta$ ) formam um plano de topo ( $\gamma$ ), cujo traço vertical  $\gamma\pi'$ , pertencendo a  $r'$ , é perpendicular a  $\theta\pi'$  (Figura 353).

Assim, basta obter o traço ( $J$ ) de ( $r$ ) em ( $\theta$ ) e a projeção horizontal  $\bar{A}$  do simétrico de um ponto ( $A$ ), qualquer de ( $r$ ), para completar a épura.



Observe-se que, tal como no item 3, acima, para a determinação do traço ( $M$ ) da perpendicular ( $p$ ), por ( $A$ ), a ( $\theta$ ), lançou-se mão de uma reta ( $s$ ), de ( $\theta$ ), com projeção horizontal  $s$  paralela a  $p$ .

6 – Para retas de perfil, como (A)(B), na Figura 354, ao invés de buscar seu traço com  $(\theta)$ , é mais simples construir os simétricos  $(\bar{A})$  e  $(\bar{B})$ , com o mesmo procedimento anteriormente utilizado, para, por sua união, obter a reta  $(\bar{r}) \equiv (\bar{A})(\bar{B})$ , que, então, soluciona a questão.

Note-se que, no exemplo, por não serem acessíveis os traços horizontais das perpendiculares  $(p_1)$  e  $(p_2)$  a  $(\theta)$ , traçadas por (A) e por (B), foi utilizada uma reta auxiliar (s), de  $(\theta)$ , paralela aos planos de topo daquelas duas perpendiculares, para determinar seus traços (M) e (N) com  $(\theta)$  (Figura 354).

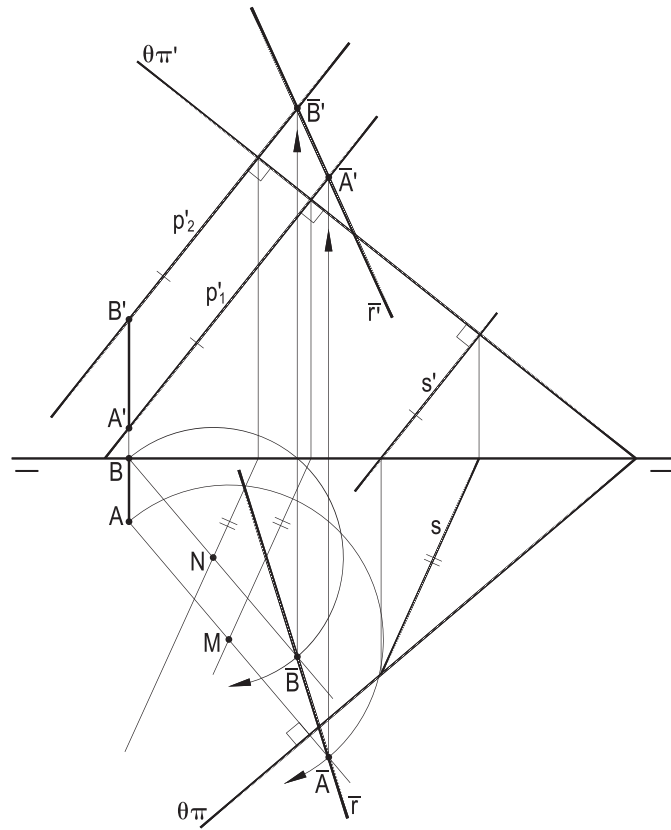


Figura 354

7 – Para retas quaisquer, como (r) na Figura 355, o procedimento é o tradicional, com a determinação da interseção (J) de (r) com  $(\theta)$ , com a escolha de um ponto (A), qualquer de (r), e com o traçado, por ele, da perpendicular (p) a  $(\theta)$ , determinando-se seu traço (M) com  $(\theta)$  e com a obtenção de seu simétrico  $(\bar{A})$ , em relação a (M), que, unido a (J), traz a reta  $(\bar{r})$ , simétrica de (r) em relação a  $(\theta)$  (Figura 355).

Observe-se que, naturalmente, basta construir a simétrica  $\bar{A}$  de uma das projeções A do ponto (A), em relação a (M), para, então, obter A' e a segunda projeção  $r'$ , de (r) (Figura 355).

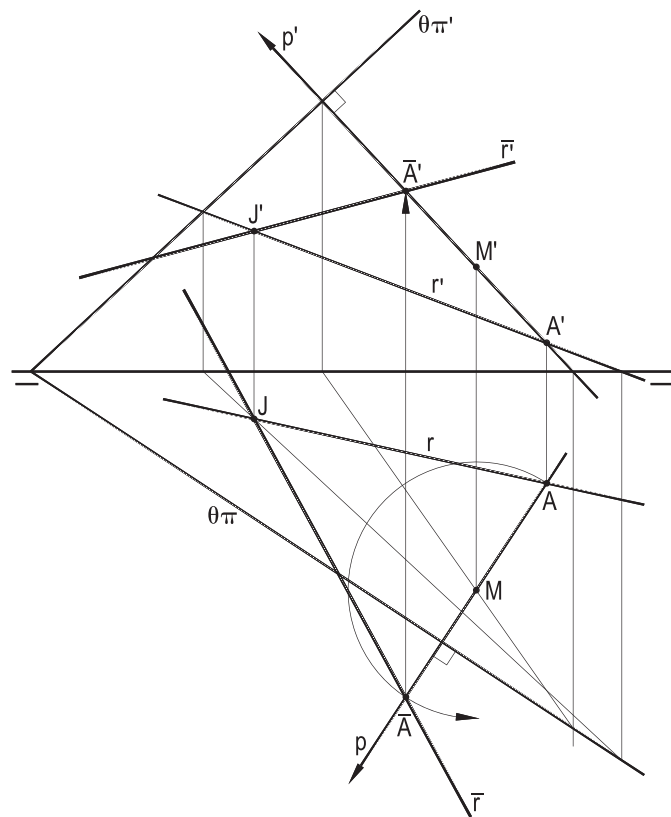


Figura 355

## 94 – Projeções do simétrico de um polígono, dado por suas projeções, em relação a um plano, dado por seus traços

A construção do simétrico de um polígono dado por suas projeções, ou por condições que o definam, em relação a um plano ( $\theta$ ), dado por seus traços, se faz pelas obtenções dos simétricos de seus vértices e/ou de seus lados em relação a ( $\theta$ ), atentando, sempre, a eventuais particularidades existentes e observada a igualdade entre o polígono dado e seu simétrico em relação ao plano (número 81).

Seguem alguns exemplos:

1 – Pentágono (A)(B)(C)(D)(E), de perfil, dado por suas projeções. Plano ( $\theta$ ) vertical, dado por seus traços.

As perpendiculares ao plano vertical ( $\theta$ ) são horizontais. Construído  $\bar{C}$ , a simétrica do traço horizontal do plano de perfil do pentágono, em relação a  $\theta\pi$ , traz a projeção horizontal  $\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}\bar{E}$  do pentágono pedido (Figura 356).

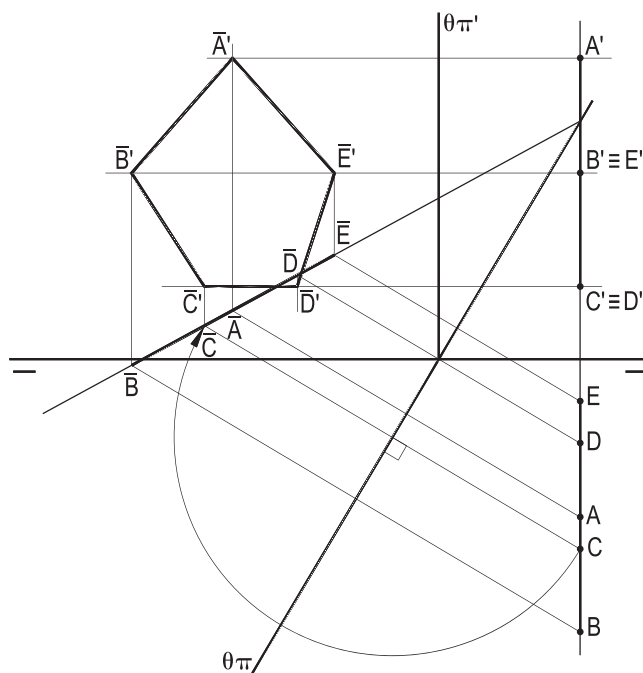


Figura 356

2 – Hexágono convexo vertical (A)(B)(C)(D)(E)(F), com dois lados (B)(C) e (E)(F) paralelos ao plano de simetria ( $\theta$ ), de topo, dado por seus traços.

As perpendiculares a ( $\theta$ ) são frontais e a projeção vertical do simétrico do hexágono dado se obtém com paralelas e com a afinidade em relação a  $\theta\pi'$  dos dois hexágonos (Figura 357).

Note-se que, após a simetria efetuada, o hexágono solução, como é claro, deixa de pertencer a um plano vertical.

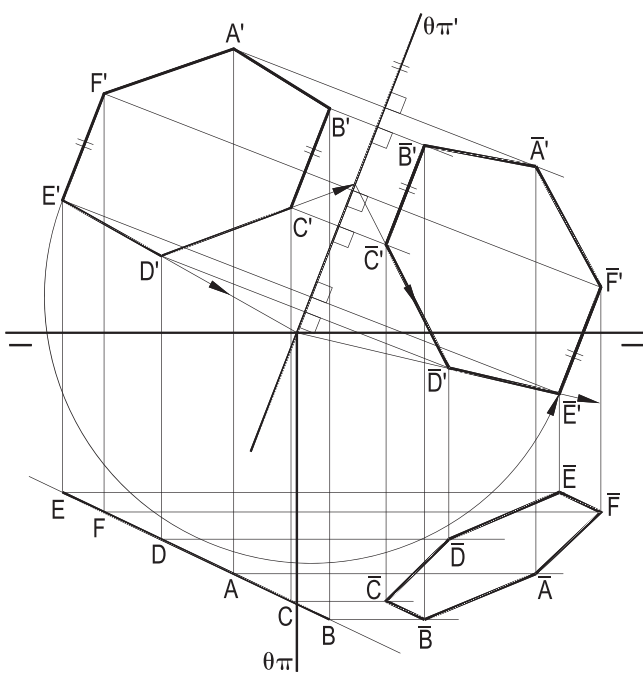


Figura 357

3 – Triângulo (A)(B)(C),  
 dado por suas projeções. ( $\theta$ ),  
 paralelo a  $(\pi'\pi)$ , dado por seus  
 traços.

A simetria em relação  
 ao plano ( $\theta$ ) é construída com  
 o auxílio de uma vista lateral,  
 com as abscissas dos três vérti-  
 ces mantidas constantes (Figu-  
 ra 358).

4 – Triângulo (A)(B)(C),  
 dado por suas projeções. ( $\theta$ )  
 qualquer, dado por seus traços.

A simetria do triângu-  
 lo dado, em relação ao plano  
 qualquer ( $\theta$ ), se faz traçando  
 as perpendiculares ( $p_1$ ), ( $p_2$ )  
 e ( $p_3$ ), por (A), (B) e (C), res-  
 pectivamente, a ( $\theta$ ) e pela de-  
 terminação de seus traços (M),  
 (J) e (N) com ( $\theta$ ) e, então, pela  
 obtenção de seus simétricos  
 $(\bar{A})$ ,  $(\bar{B})$  e  $(\bar{C})$ , completando a  
 construção (Figura 359).

Observe-se que (M), (J) e  
 (N) são os pontos médios, res-  
 pectivamente, dos segmentos  
 $(A)(\bar{A})$ ,  $(B)(\bar{B})$  e  $(C)(\bar{C})$  per-  
 pendiculares a ( $\theta$ ) (Figura 359)  
 e que, para a determinação dos  
 traços (J) e (N), foram utilizadas  
 paralelas à reta (t), de ( $\theta$ ), reta  
 esta que proporcionou o traço  
 (M), bastando obter suas proje-  
 ções horizontais J e N.

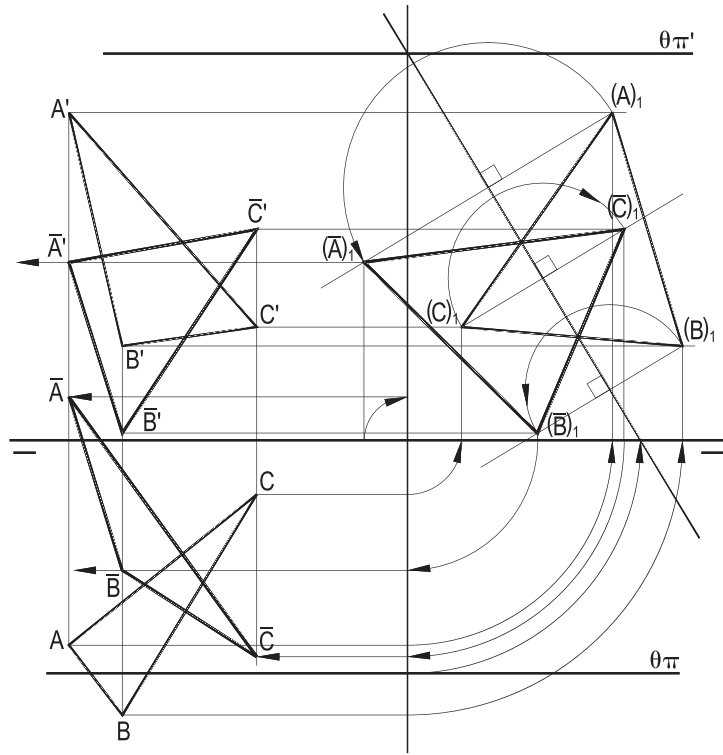


Figura 358

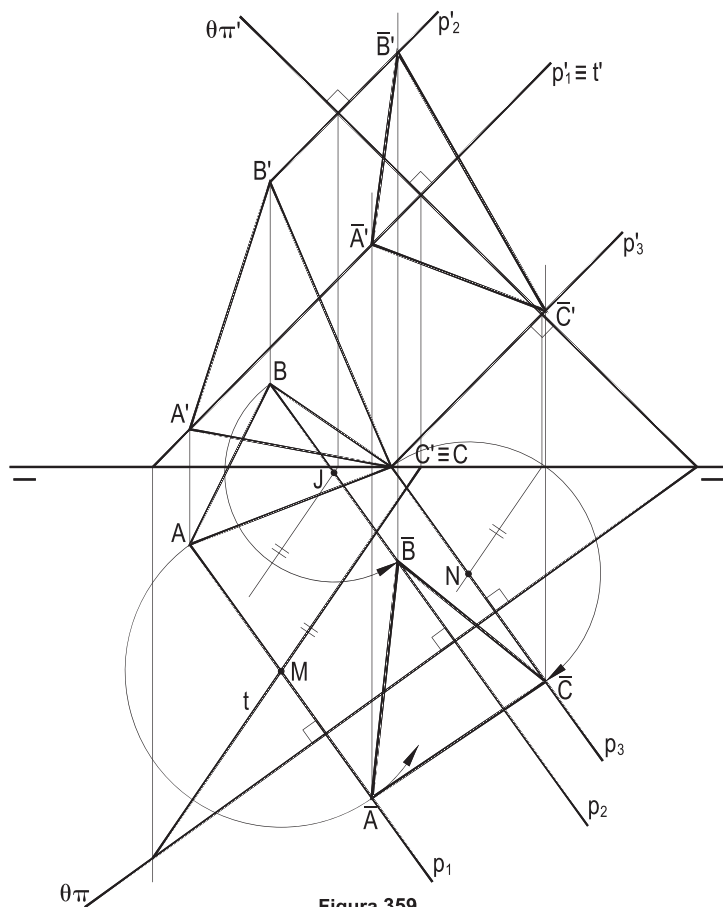


Figura 359

## 95 – Traços do plano simétrico de um plano dado, em relação a um outro plano

Sabe-se (número 85) que dois planos  $(\alpha)$  e  $(\bar{\alpha})$ , simétricos em relação a um plano  $(\theta)$ , se secantes, cortam-se segundo uma reta  $(r)$ , pertencente a  $(\theta)$ , e formam ângulos iguais com  $(\theta)$  (Figura 360) e, se paralelos, são também paralelos a  $(\theta)$ , distando igualmente de  $(\theta)$  (Figura 361). Mais: que no caso particular em que  $(\alpha)$  é perpendicular a  $(\theta)$ , seu simétrico  $(\bar{\alpha})$  coincide com ele (Figura 362).

Assim, para determinar o plano  $(\bar{\alpha})$ , simétrico de  $(\alpha)$  em relação a  $(\theta)$ , dados estes dois, deve-se obter a reta  $(r)$ , interseção de  $(\alpha)$  e  $(\theta)$ , e o ponto  $(\bar{A})$ , simétrico de um ponto  $(A)$ , genérico de  $(\alpha)$ , mas não pertencente a  $(r)$  (Figura 363), ou, se  $(r)$  restar inacessível, deve-se determinar os simétricos  $(\bar{A})$ ,  $(\bar{B})$  e  $(\bar{C})$  de três pontos  $(A)$ ,  $(B)$  e  $(C)$ , não colineares, de  $(\alpha)$ , genéricos (Figura 364). No caso particular em que  $(\alpha)$  seja paralelo a  $(\theta)$ , basta conseguir o simétrico  $(\bar{A})$  de um ponto  $(A)$  qualquer de  $(\alpha)$ , visto que  $(\bar{\alpha})$  deverá ser paralelo a  $(\theta)$ , conduzido por esse ponto  $(\bar{A})$  (Figura 365).

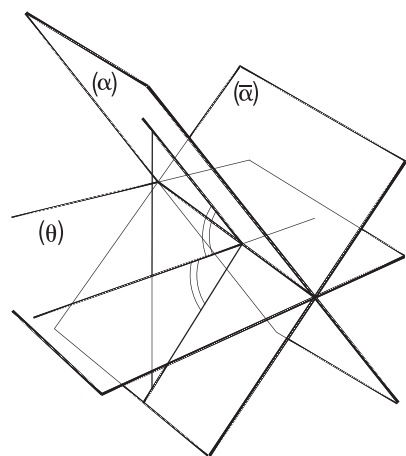


Figura 360

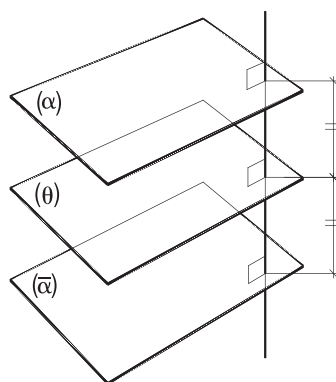


Figura 361

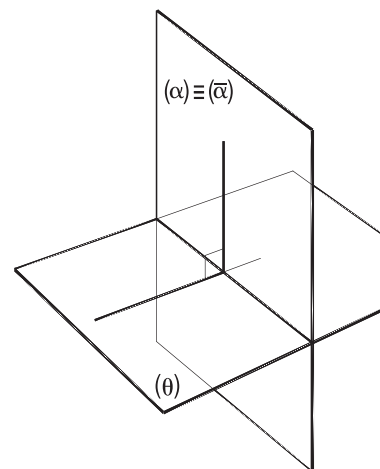


Figura 362

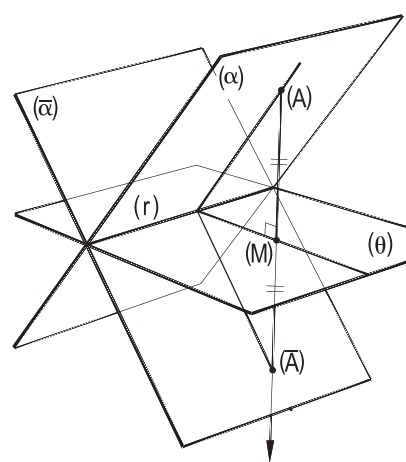


Figura 363

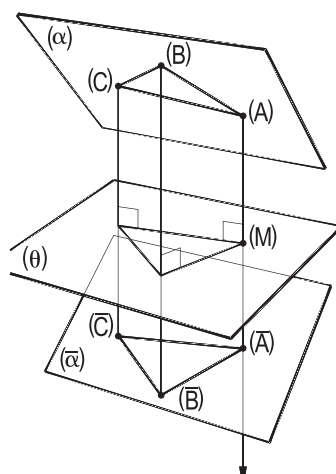


Figura 364

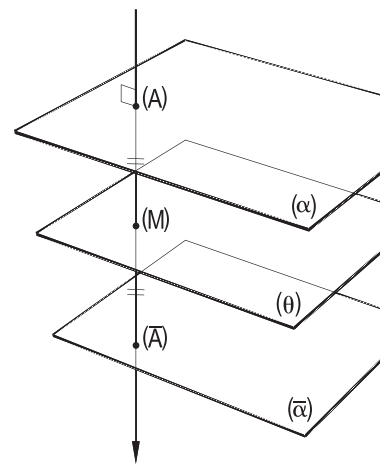


Figura 365



## 96 – Traços do plano simétrico de um plano dado por seus traços, em relação a um plano horizontal, dado por seu traço vertical

Para estudar a construção dos traços do plano ( $\bar{\alpha}$ ), simétrico de um plano dado ( $\alpha$ ), em relação a outro plano dado ( $\theta$ ), horizontal, convém lembrar que, se ( $\alpha$ ) for horizontal, ( $\bar{\alpha}$ ) também o será, os traços verticais  $\alpha\pi'$ , dado, e  $\bar{\alpha}\pi'$ , pedido, sendo simétricos em relação a  $\theta\pi'$  (Figura 366) e, se o plano ( $\alpha$ ) for frontal (Figura 367), vertical (Figura 368), ou de perfil (Figura 369), por serem todos perpendiculares aos planos horizontais, hão de coincidir com seus respectivos simétricos ( $\bar{\alpha}$ ), em relação ao dado ( $\theta$ ).

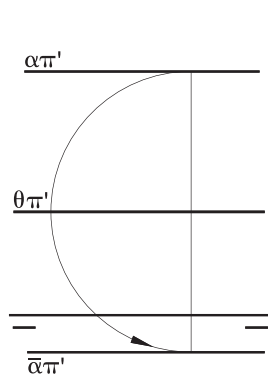


Figura 366

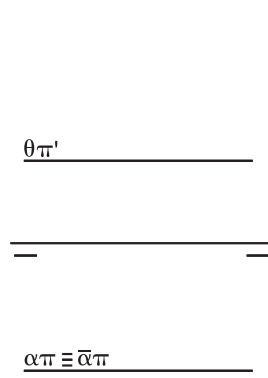


Figura 367

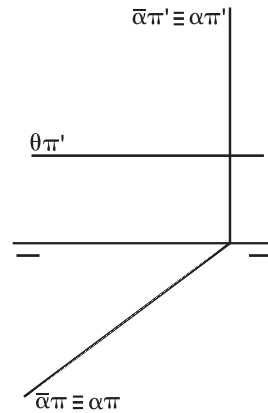


Figura 368

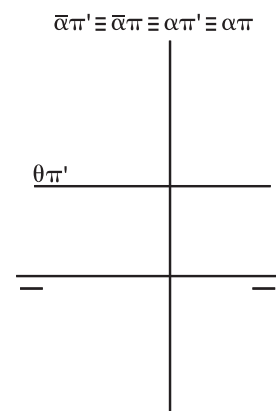


Figura 369

Sendo o plano dado ( $\alpha$ ) paralelo, ou pertencente a ( $\pi'\pi$ ), por serem, tanto quanto o plano horizontal dado ( $\theta$ ), todos perpendiculares aos planos de perfil, é com uma vista lateral que se constrói a simetria, em V.G., bastando determinar o simétrico de um ponto de ( $\alpha$ ) e utilizar a interseção ( $r$ ) de ( $\alpha$ ) e ( $\theta$ ) (Figuras 370 e 371).

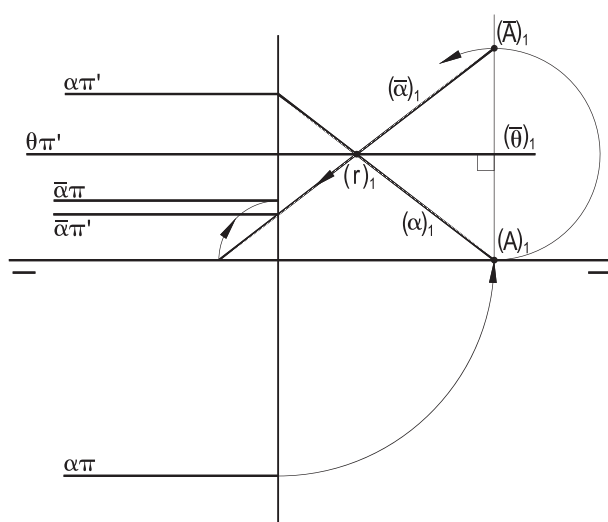


Figura 370

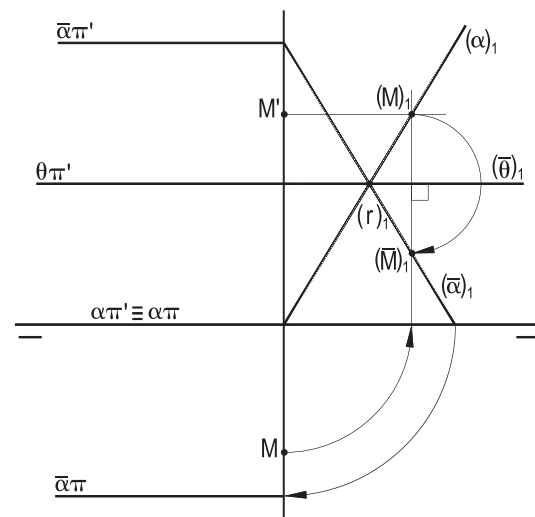
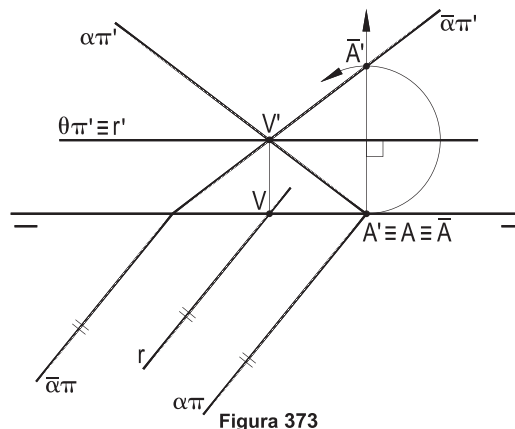
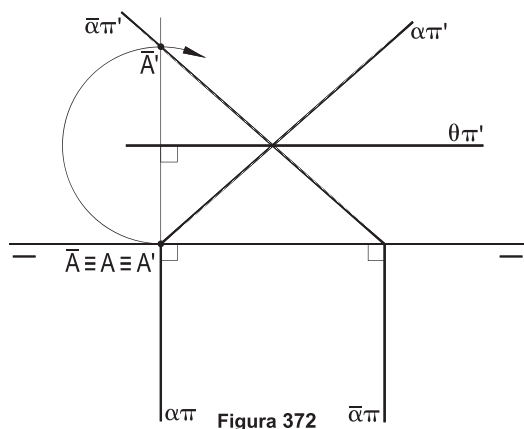


Figura 371

Sendo o plano dado ( $\alpha$ ) de topo, por ser, como o também dado ( $\theta$ ), perpendicular a ( $\pi'$ ), é entre os traços verticais de ( $\alpha$ ) e de seu simétrico ( $\bar{\alpha}$ ), em relação a ( $\theta$ ), que se opera em V.G. a simetria pedida (Figura 372), restando ( $\bar{\alpha}$ ) também de topo.

E, sendo ( $\alpha$ ) um plano qualquer, a utilização da interseção ( $r$ ) de ( $\alpha$ ) e ( $\theta$ ) define, com o simétrico ( $\bar{A}$ ) de um ponto ( $A$ ) de ( $\alpha$ ), convenientemente escolhido (Figura 373), o simétrico ( $\bar{\alpha}$ ), cujo traço horizontal  $\bar{\alpha}\pi$  há de ser paralelo a  $\alpha\pi$ .



### 97 – Traços do plano simétrico de um plano dado por seus traços, em relação a um plano frontal, dado por seu traço horizontal

Tudo se passa como no grupo anterior, naturalmente permutando ( $\pi$ ) por ( $\pi'$ ). Assim, os simétricos, em relação ao plano frontal ( $\theta$ ), são, respectivamente, frontal, horizontal, de topo, ou de perfil (Figuras 374, 375, 376 e 377), conforme o plano dado ( $\alpha$ ) seja frontal, horizontal, de topo, ou de perfil, estes últimos três coincidindo com cada um dos dados.

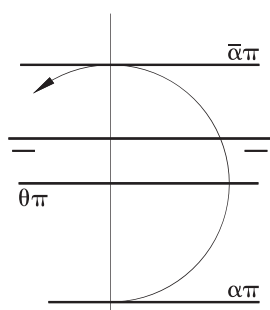


Figura 374

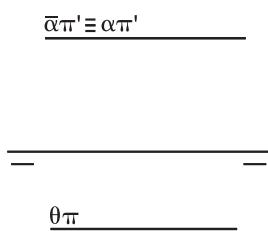


Figura 375

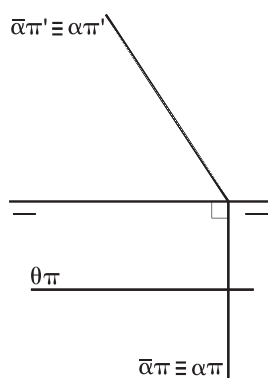


Figura 376

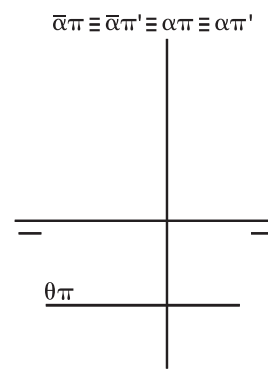


Figura 377

Sendo paralelo ou pertencente a ( $\pi'\pi$ ) o plano dado ( $\alpha$ ), seu simétrico ( $\bar{\alpha}$ ), em relação a um plano frontal ( $\theta$ ), como eles perpendicular aos planos de perfil, há de ser paralelo (ou, eventualmente, pertencente) à linha de terra, construído com facilidade pela utilização de uma vista lateral (Figuras 378 e 379).

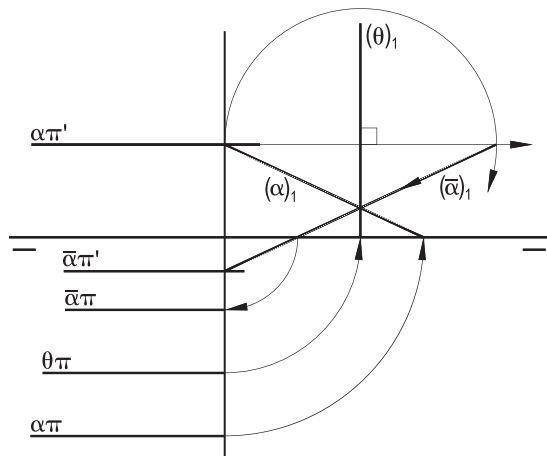


Figura 378

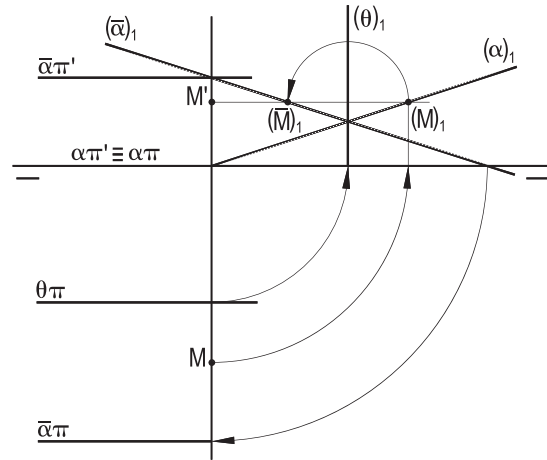


Figura 379

Sendo o plano dado ( $\alpha$ ) vertical, perpendicular a ( $\pi$ ), tanto quanto o plano frontal dado ( $\theta$ ), é entre os traços horizontais de ( $\alpha$ ) e de seu simétrico ( $\bar{\alpha}$ ) que se opera, em V.G., a simetria pedida (Figura 380).

Por fim, sendo ( $\alpha$ ) qualquer, a frontal ( $r$ ), interseção de ( $\alpha$ ) e ( $\theta$ ), além do simétrico ( $\bar{A}$ ) de um ponto ( $A$ ) de ( $\alpha$ ), bem escolhido, definem o plano ( $\bar{\alpha}$ ), o simétrico procurado. Observe-se o paralelismo dos traços verticais  $\bar{\alpha}\pi'$  e  $\alpha\pi'$  à interseção fixa ( $r$ ) (Figura 381).

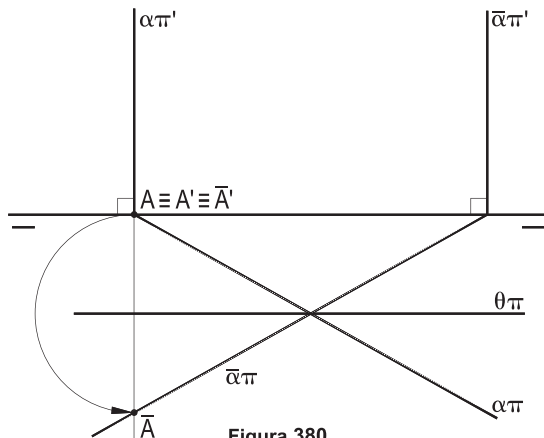


Figura 380

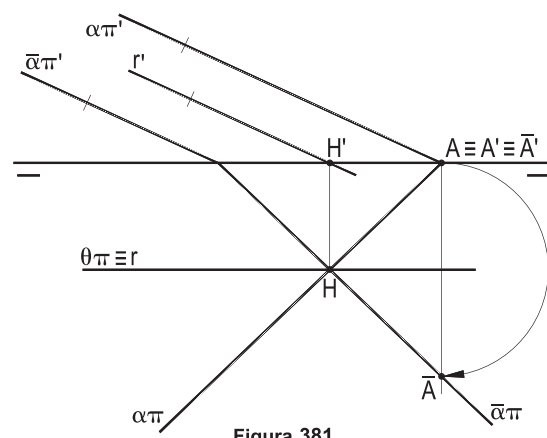


Figura 381

## 98 – Traços do plano simétrico de um plano dado por seus traços, em relação a um plano de topo, dado por seus traços

Quando o plano dado ( $\alpha$ ) é horizontal, de topo, ou de perfil, seu simétrico ( $\bar{\alpha}$ ) em relação a um plano de topo ( $\theta$ ), dado, sendo todos perpendiculares a ( $\pi'$ ), a simetria pedida se opera, em V.G., em ( $\pi'$ ), os traços verticais dos planos envolvidos resolvendo as questões, proporcionando, em geral (Figuras 382, 383 e 384), simétricos ( $\bar{\alpha}$ ) de topo, embora, para posições particulares de ( $\alpha$ ) e de ( $\theta$ ), como nos casos das Figuras 385 e 386, o plano ( $\bar{\alpha}$ ) buscado possa vir a ser de perfil.

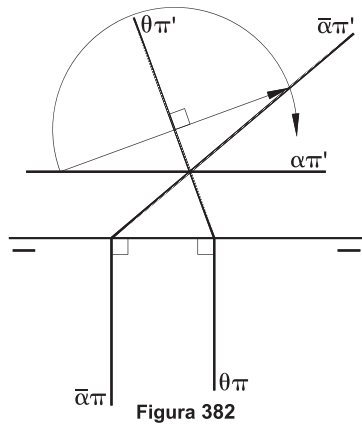


Figura 382

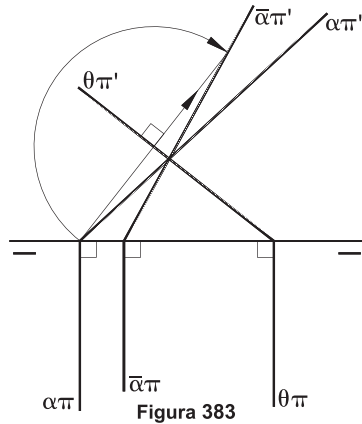


Figura 383

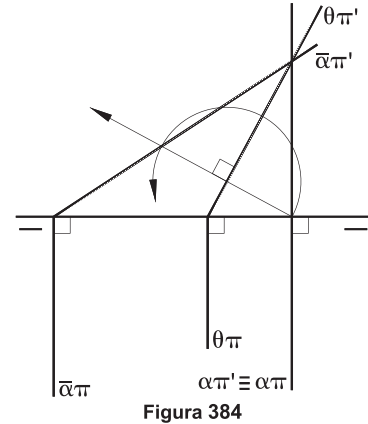


Figura 384

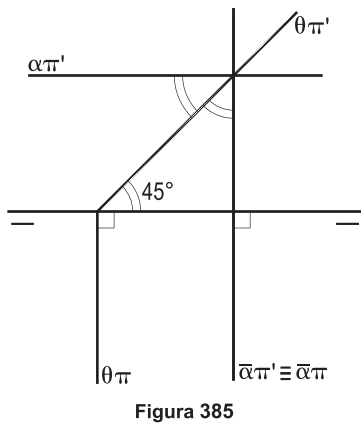


Figura 385

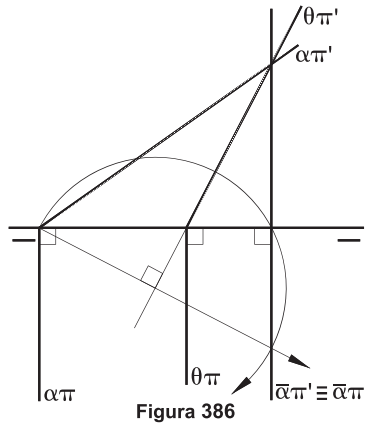


Figura 386

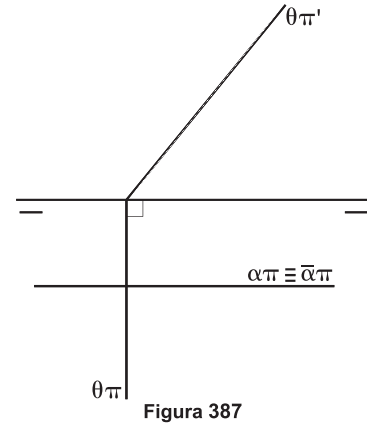


Figura 387

O simétrico de um plano frontal ( $\alpha$ ), em relação a qualquer plano de topo ( $\theta$ ), é o próprio ( $\alpha$ ), por ser ele perpendicular a todos os planos de topo (Figura 387).

Para todas as demais naturezas de planos ( $\alpha$ ), o procedimento para a construção do seu simétrico ( $\bar{\alpha}$ ), em relação a um plano de topo ( $\theta$ ), é o tradicional, utilizando-se a interseção ( $r$ ) de ( $\alpha$ ) e ( $\theta$ ), fixa durante a operação, e o simétrico ( $\bar{A}$ ) de um ponto ( $A$ ) de ( $\alpha$ ), convenientemente escolhido (Figuras 388, 389, 390 e 391), respectivamente, para planos verticais, paralelos a  $(\pi'\pi)$ ,  $(\pi'\pi)-(M)$  e quaisquer.

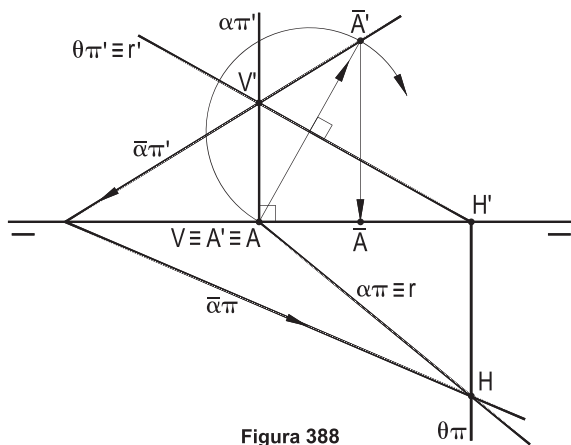


Figura 388

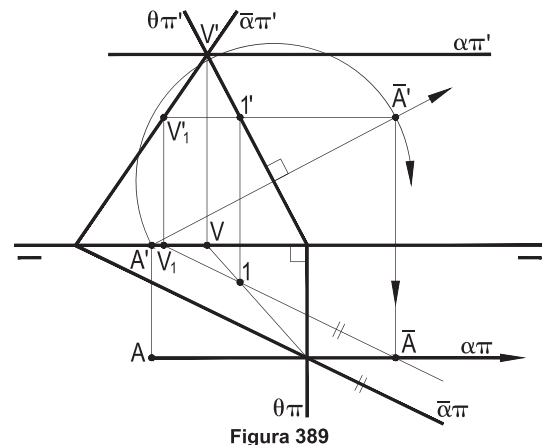


Figura 389

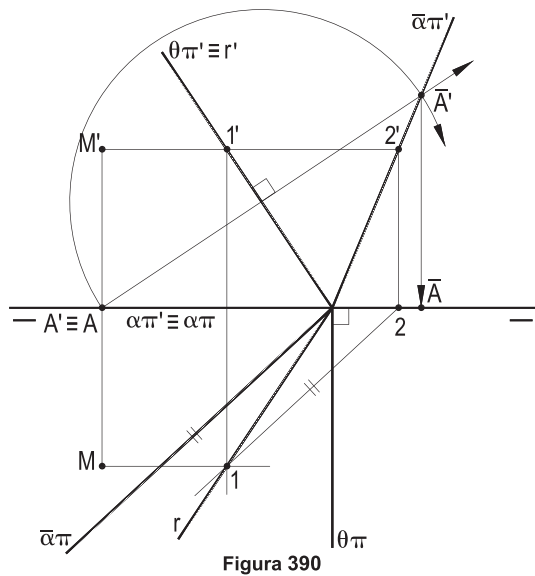


Figura 390

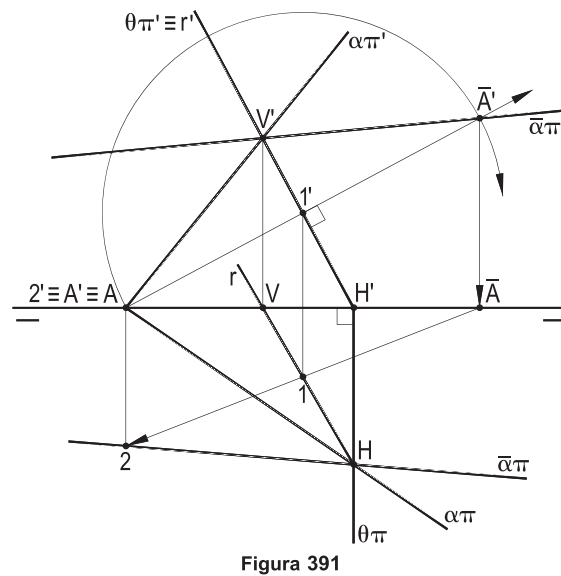


Figura 391

Observe-se a importância da conveniente escolha do ponto (A), de  $(\alpha)$ , como atestam as Figuras 390 e 391, onde (A), sendo um ponto de  $(\pi'\pi)$ , traz, como simétrico, para o plano  $(\theta)$ , de topo, um ponto  $(\bar{A})$  de  $(\pi')$  e, por isso, de  $\bar{\alpha}\pi'$ .

**99 – Traços do plano simétrico de um plano dado por seus traços, em relação a um plano vertical, também dado por seus traços**

Tudo se passa como no grupo anterior, com a permuta de  $(\pi)$  por  $(\pi')$ . Assim, os simétricos  $(\bar{\alpha})$ , do plano dado  $(\alpha)$ , em relação ao plano vertical  $(\theta)$ , dado por seus traços, são também verticais, para planos  $(\alpha)$  de naturezas frontal (Figura 392), vertical (Figura 393), ou de perfil (Figura 394), respectivamente, podendo, para situações particulares, passar a ser de perfil (Figura 395).

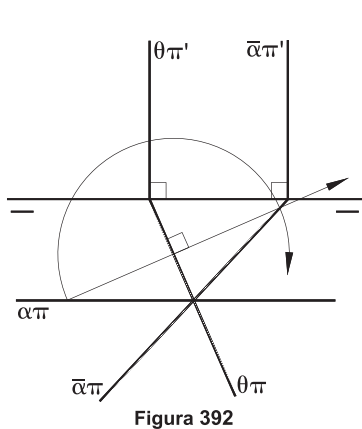


Figura 392

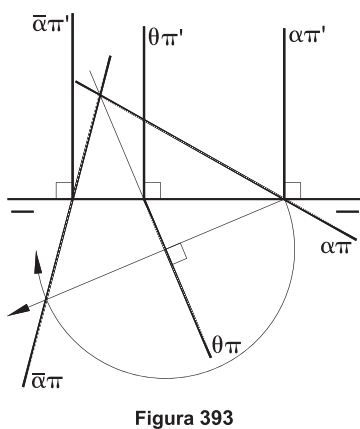


Figura 393

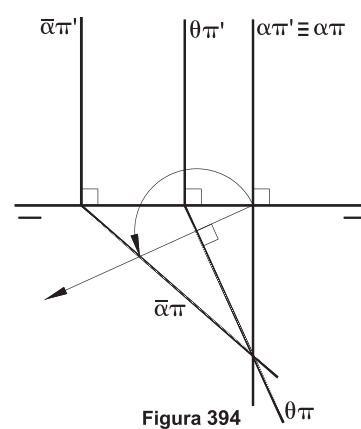
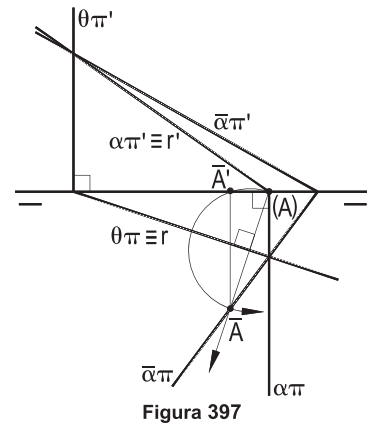
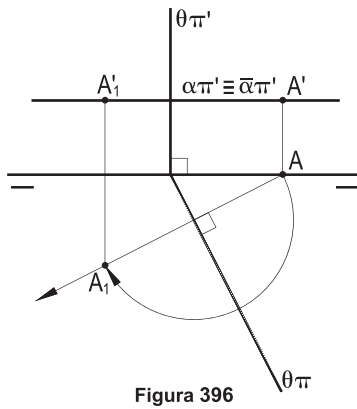
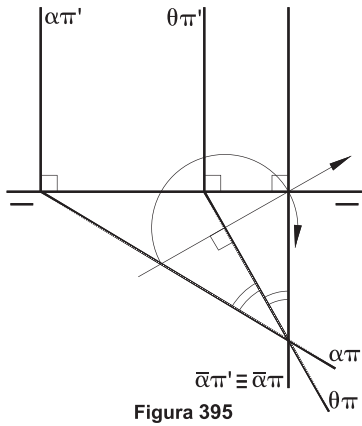
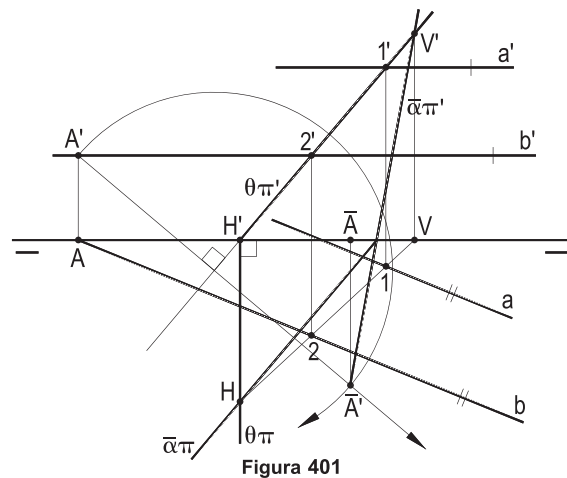
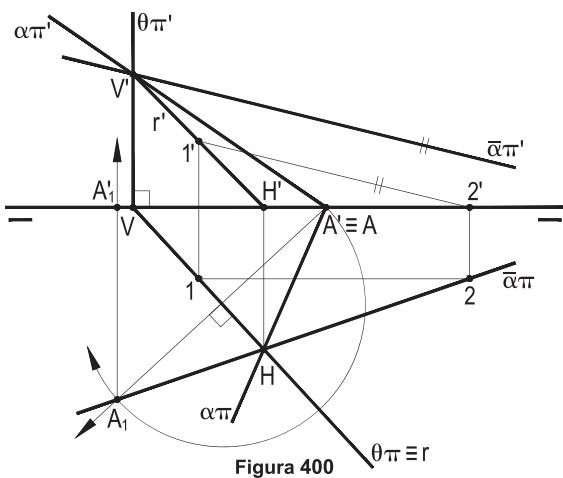
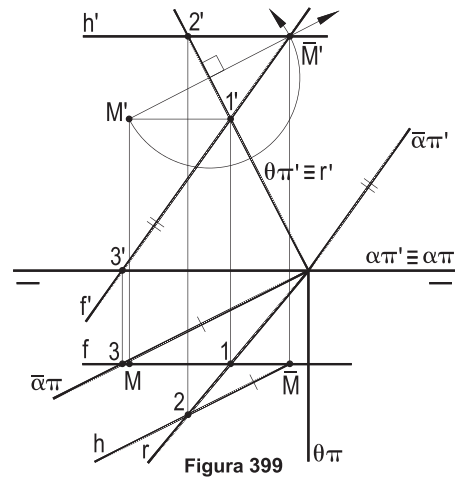
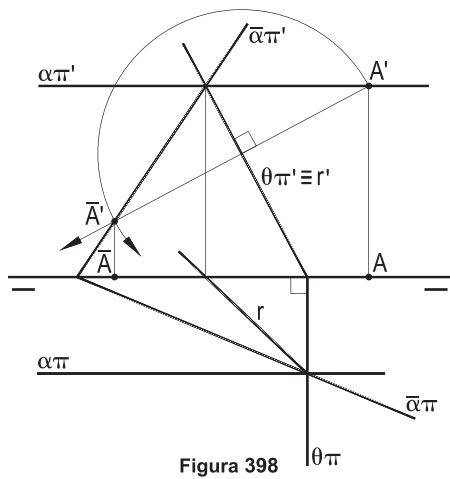


Figura 394

Quando o plano dado  $(\alpha)$  é horizontal, ele coincide com seu simétrico  $(\bar{\alpha})$  (Figura 396) e, quando  $(\alpha)$  é de topo, a utilização da interseção de  $(\alpha)$  com o plano vertical  $(\theta)$ , de simetria, e do simétrico  $(\bar{A})$  de um ponto de (A), convenientemente escolhido, proporcionam o plano  $(\bar{\alpha})$ , procurado (Figura 397).



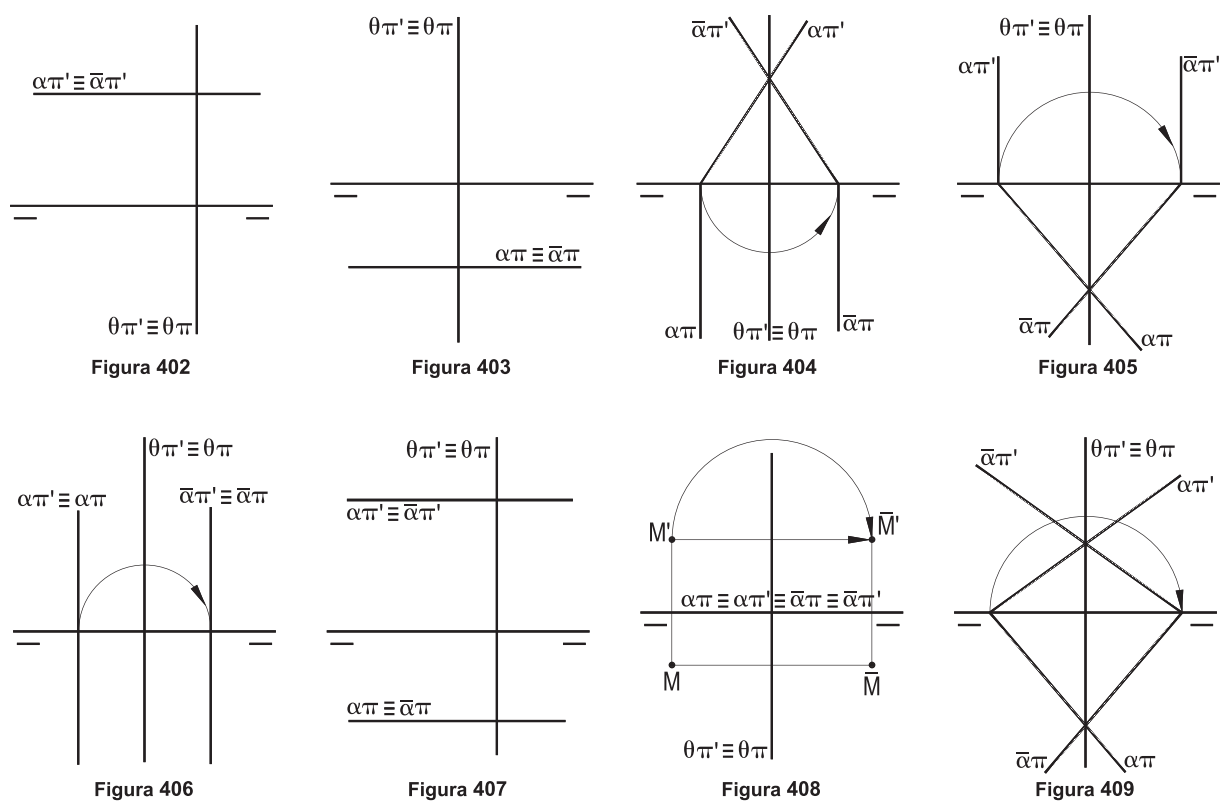
É esse o mesmo procedimento para a determinação dos traços do plano ( $\bar{\alpha}$ ), simétrico do dado ( $\alpha$ ), respectivamente, paralelo a ( $\pi'\pi$ ), pertencente a ( $\pi'\pi$ ), ou qualquer, em relação ao plano vertical ( $\theta$ ) (Figuras 398, 399 e 400), mesmo quando ( $\theta$ ) não vem dado por seus traços, mas sim por duas retas (a) e (b), onde o ponto (A) escolhido foi o traço vertical da reta (b) (Figura 401).



## 100 – Traços do plano simétrico de um plano dado, em relação a um plano de perfil, também dado por seus traços

Como a simetria de todo ponto, em relação a um plano de perfil, se produz pelo envio da fronto-horizontal que o contém, os traços do plano ( $\bar{\alpha}$ ), simétrico do dado ( $\alpha$ ), em relação ao plano de perfil ( $\theta$ ), também dado, são simétricos dos de mesmo nome do dado, em relação a  $\theta\pi \equiv \theta\pi'$  (Figuras 402, 403, 404, 405, 406, 407, 408 e 409).

É claro que, por serem perpendiculares aos planos de perfil, os planos horizontais, frontais, paralelos e pertencentes a ( $\pi'\pi$ ) coincidem com seus respectivos simétricos em relação a todo plano de perfil.



## 101 – Traços do plano simétrico de um plano dado, em relação a um plano paralelo a ( $\pi'\pi$ ), também dado por seus traços

A vista de perfil é muito utilizada, por serem as perpendiculares aos planos paralelos a ( $\pi'\pi$ ) retas de perfil. E, sempre que necessário, a determinação da interseção do plano dado com o da simetria, além da obtenção do simétrico de um ponto do dado em relação a este plano proporcionam o plano simétrico pedido.

Observe-se, ainda, que os simétricos de planos de perfil em relação a todo plano paralelo a ( $\pi'\pi$ ) coincidem com os dados, por serem perpendiculares a tais planos de simetria.

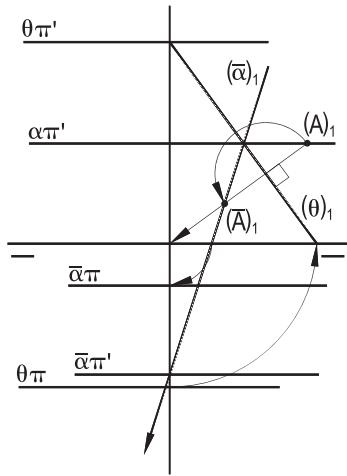


Figura 410

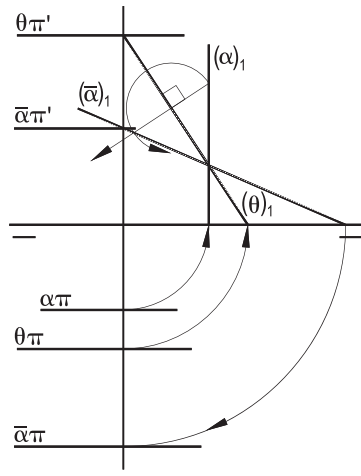


Figura 411

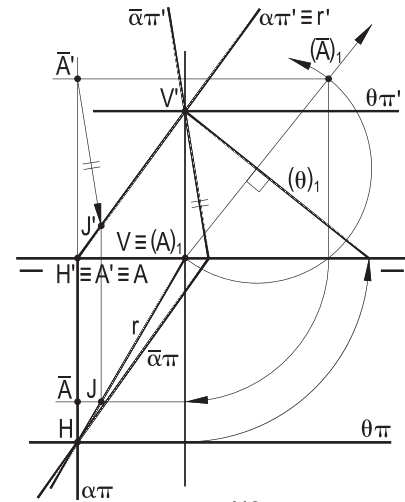


Figura 412

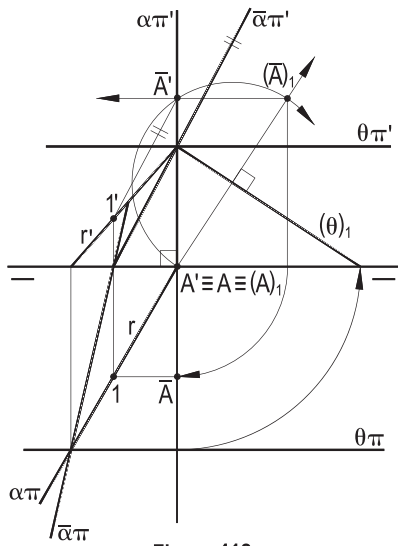


Figura 413

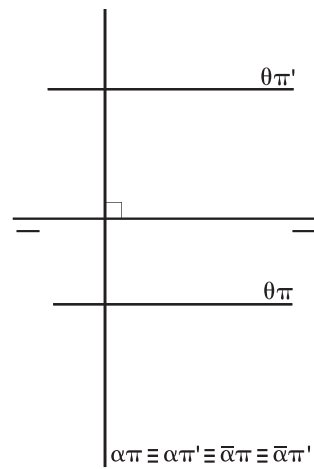


Figura 414

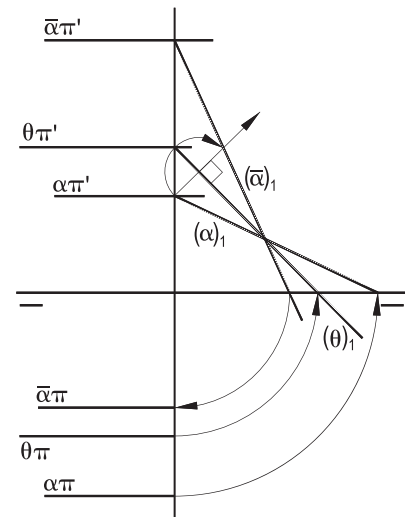


Figura 415

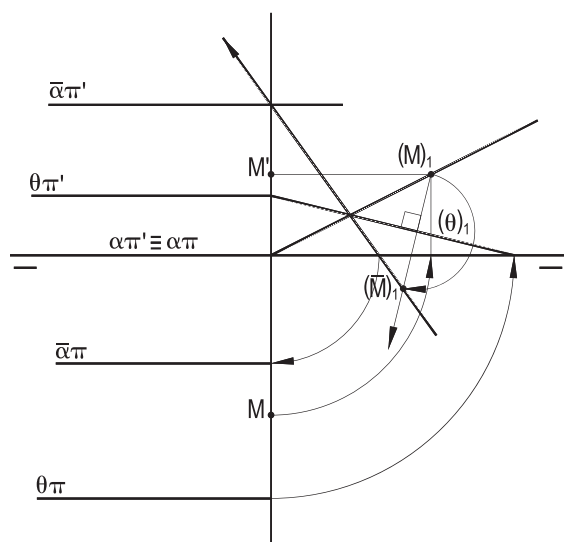


Figura 416

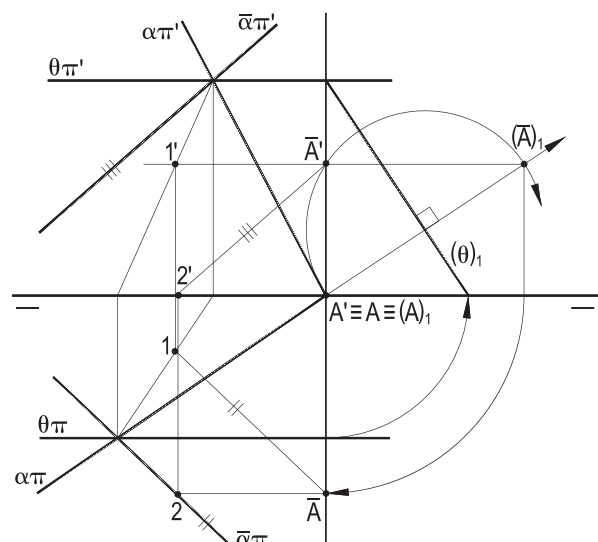


Figura 417



## 102 – Traços do plano simétrico de um plano dado, em relação a um plano pertencente à linha de terra, também dado

Tudo se passa como no conjunto anterior, tal a semelhança de naturezas dos planos  $(\pi'\pi)-(M)$  e dos paralelos a  $(\pi'\pi)$ . Assim, os planos de perfil são seus próprios simétricos, em relação aos planos pertencentes à linha de terra e, para os demais, convém a utilização de vistas laterais. Os exemplos seguintes (Figuras 418, 419, 420 e 421) apresentam simetrias de planos  $(\alpha)$ , respectivamente, horizontal,  $(\pi'\pi)-(M)$ , de topo e vertical em relação a planos  $(\theta)$  pertencentes à linha de terra.

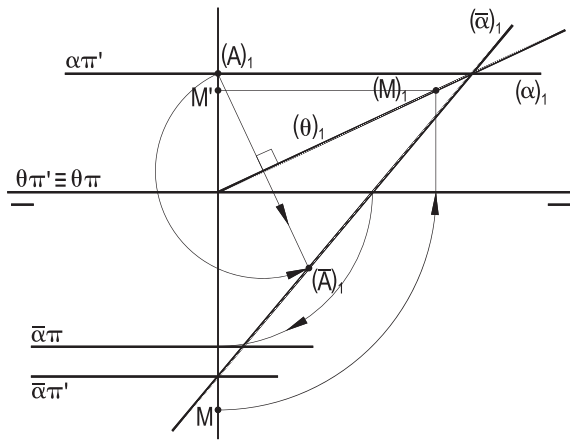


Figura 418

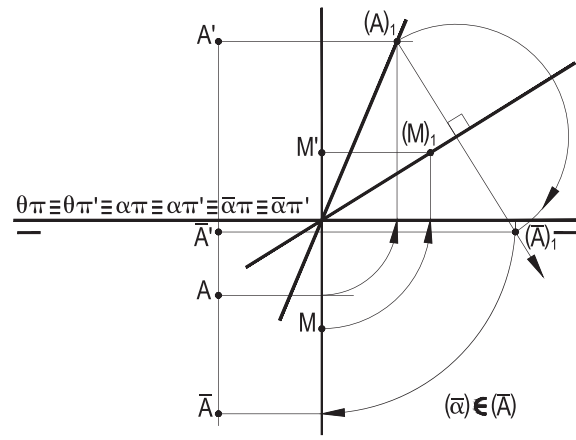


Figura 419

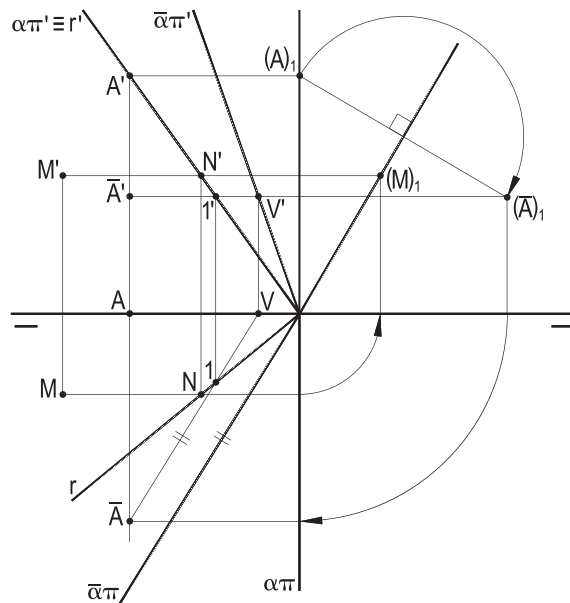


Figura 420

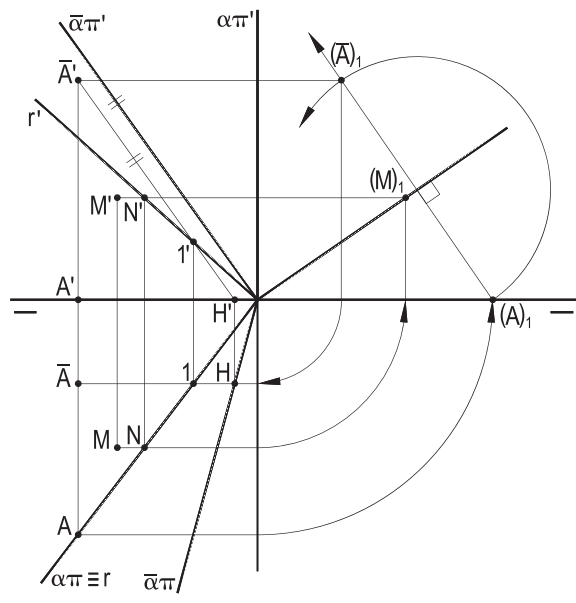


Figura 421

Nos dois exemplos seguintes (Figuras 422 e 423) são construídos os planos  $(\bar{\alpha})$ , simétricos, em relação ao plano dado  $(\theta)$ , pertencente à linha de terra, respectivamente, dos planos  $(\alpha)$ , paralelo à linha de terra e qualquer, dados por seus traços.

Observe-se a utilização de horizontais e frontais do plano ( $\alpha$ ), conduzidas por  $(\bar{A})$  e apoiadas na interseção ( $r$ ) de ( $\alpha$ ) e ( $\theta$ ) (Figura 423).

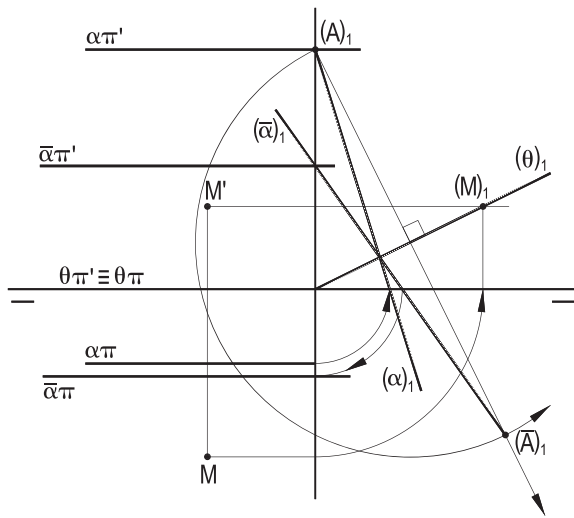


Figura 422

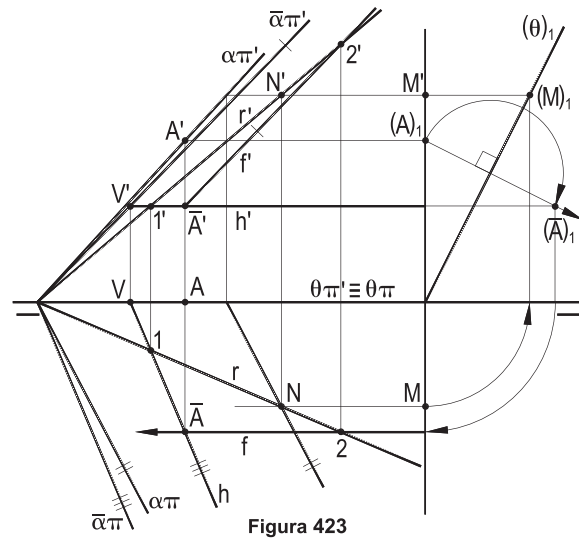


Figura 423

### 103 – Traços do plano simétrico de um plano dado, em relação a um plano qualquer, também dado por seus traços

O procedimento é o clássico: determinação da interseção ( $r$ ) do plano dado ( $\alpha$ ) com o plano ( $\theta$ ), da simetria, e obtenção do simétrico ( $\bar{A}$ ) de um ponto ( $A$ ) de ( $\alpha$ ), convenientemente escolhido. O plano ( $\bar{\alpha}$ ) procurado é o formado por ( $r$ ) e por ( $\bar{A}$ ).

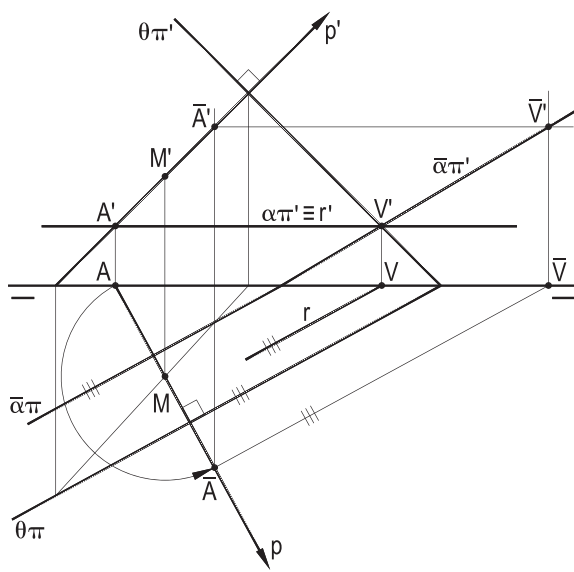


Figura 424

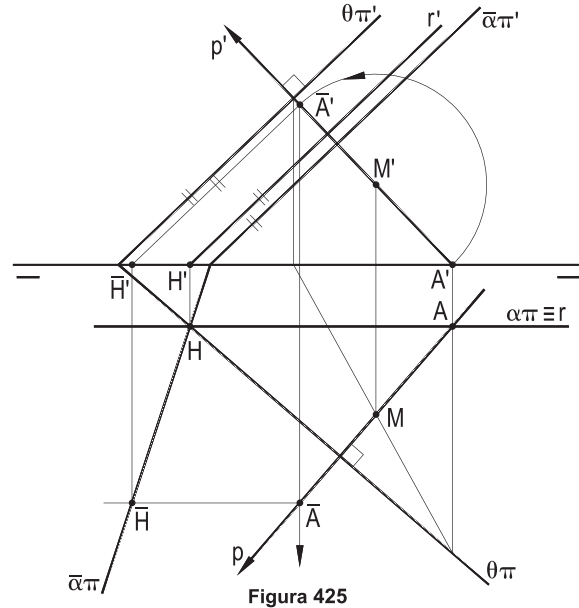


Figura 425

Nas épuras 424 e 425, foram utilizadas a interseção ( $r$ ) de ( $\alpha$ ) e ( $\theta$ ) e a paralela a ela conduzida pelo simétrico ( $\bar{A}$ ) do ponto ( $A$ ), arbitrado, de ( $\alpha$ ), seus traços e suas direções.

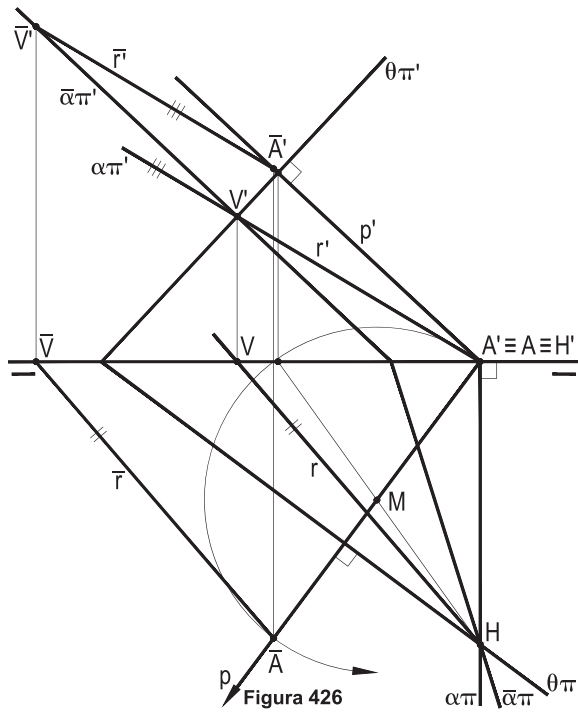


Figura 426

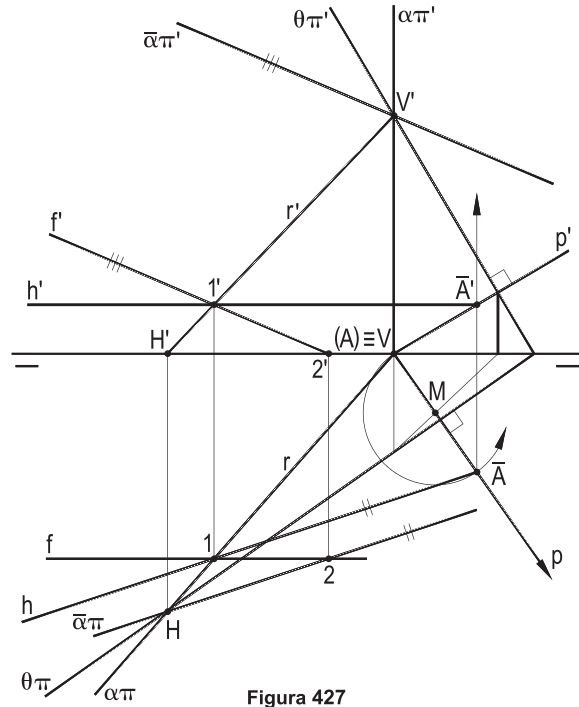


Figura 427

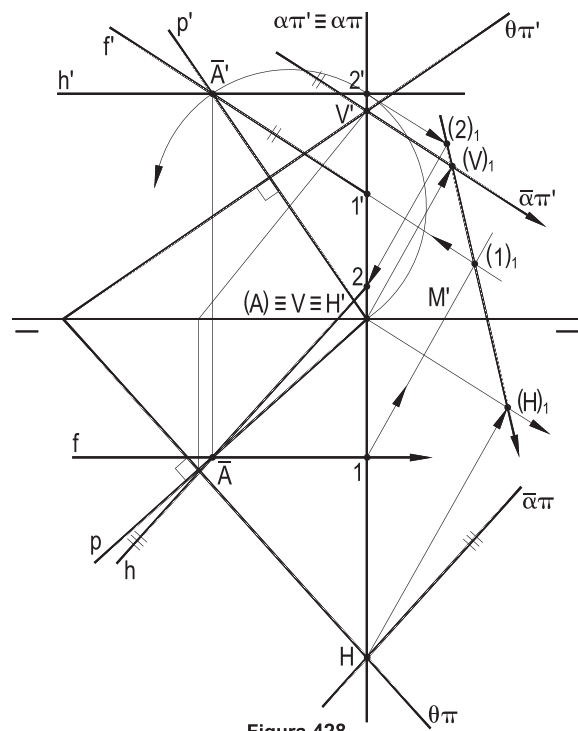


Figura 428

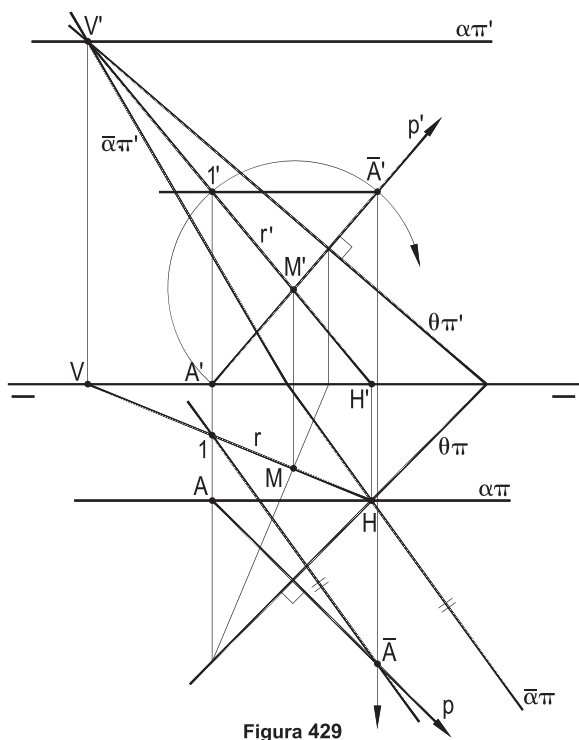


Figura 429

Na écura da Figura 426, foi utilizada uma reta ( $\bar{r}$ ), paralela à interseção de  $(\alpha)$ , de topo, e  $(\theta)$ , conduzida pelo ponto  $(\bar{A})$ , simétrico do escolhido  $(A)$ , de  $(\alpha)$ , em relação a  $(\theta)$ ; na da Figura 427, para o vertical  $(\alpha)$ , duas principais  $(\bar{A})(1)$  e  $(1)(2)$  de  $(\bar{\alpha})$ ; na da Figura 428, para  $(\alpha)$  de perfil, as principais  $(h)$  e  $(f)$  de  $(\bar{\alpha})$  e, na da Figura 429, para a simetria do plano  $(\alpha)$ , paralelo a  $(\pi'\pi)$ , também uma horizontal  $(\bar{A})(1)$ , de  $(\bar{\alpha})$ .

Nos dois exemplos seguintes vão as construções dos simétricos ( $\bar{\alpha}$ ) dos planos dados ( $\alpha$ ), respectivamente, um  $(\pi'\pi)-(M)$  e um qualquer, em relação ao dado ( $\theta$ ), qualquer, seguindo o mesmo procedimento. No primeiro (Figura 430), foram utilizadas as principais  $(\bar{A})(1)$  e  $(2)(3)$  para definir os traços de ( $\alpha$ ) e, no segundo (Figura 431), a horizontal  $(\bar{A})(1)$  e o traço vertical (V), da intersecção (r) de ( $\alpha$ ) e ( $\theta$ ).

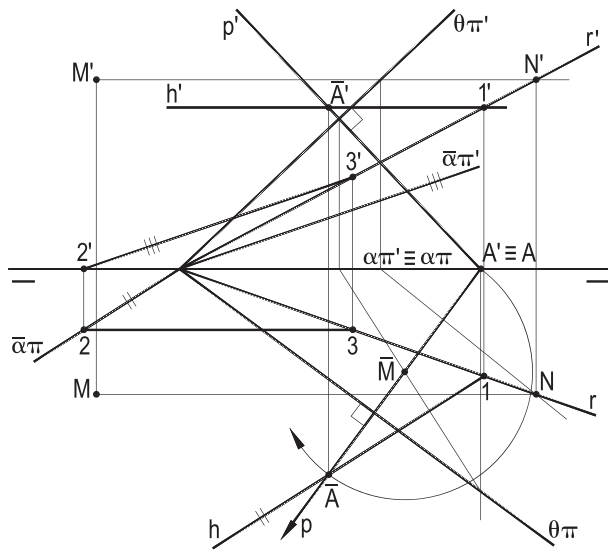


Figura 430

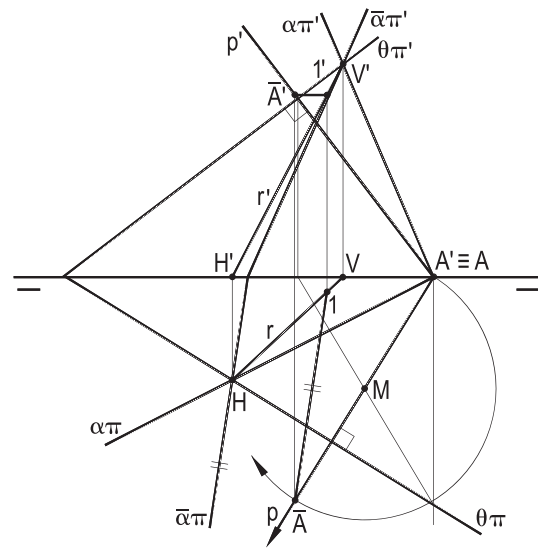


Figura 431

#### 104 – Projeções do poliedro simétrico de um poliedro dado por suas projeções, ou por condições estipuladas, em relação a um plano dado por seus traços

A construção do simétrico de um poliedro dado, em relação a um plano, também dado, se faz pela determinação dos simétricos de seus vértices em relação a tal plano e pela união ordenada desses simétricos (Figura 432).

Sabe-se (número 83) que dois poliedros simétricos em relação a um plano são iguais, podendo ser os dois poliedros exteriores ao plano da simetria (Figura 432), ou não (Figura 433).

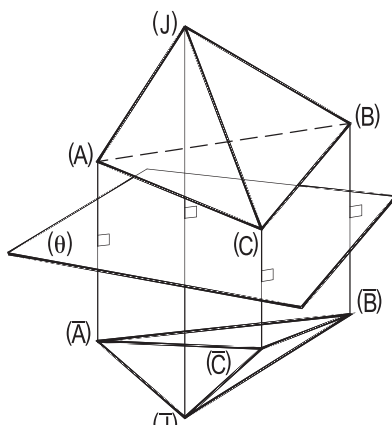


Figura 432

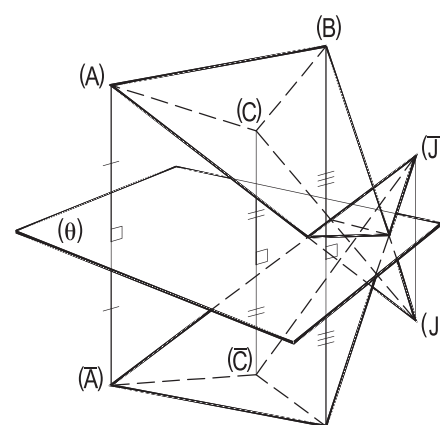
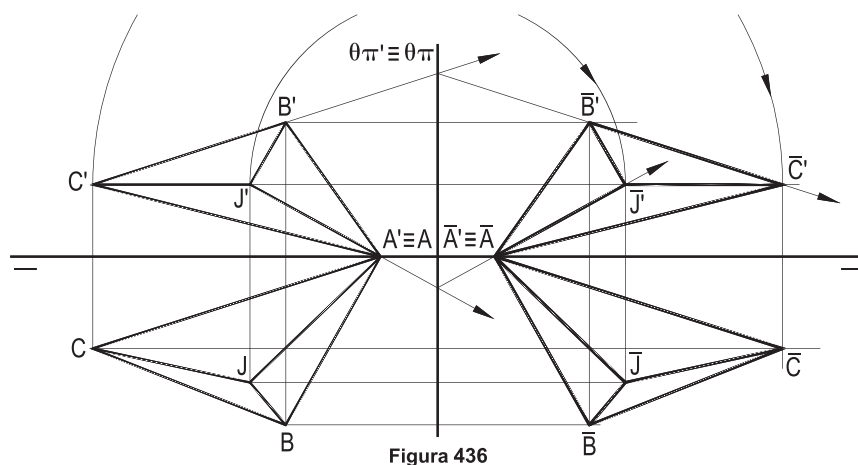
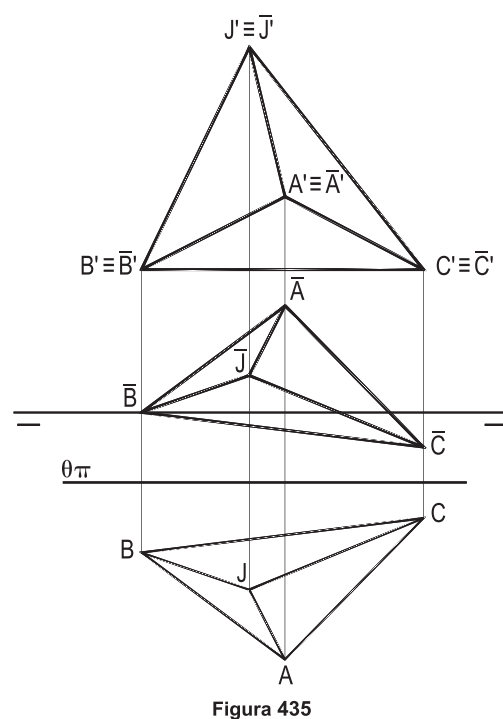
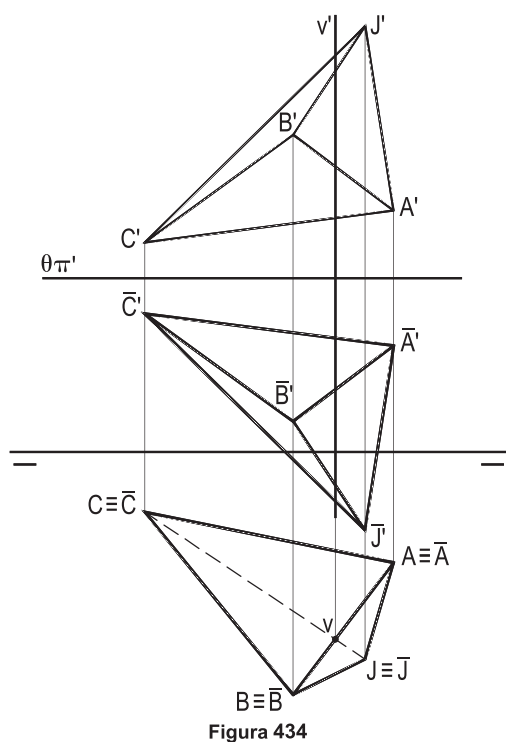


Figura 433

A igualdade existente entre dois poliedros simétricos em relação a um plano dado ( $\theta$ ) não se repete em écura, a não ser que tal plano ( $\theta$ ) seja paralelo a um dos três planos referenciais ( $\pi$ ), ( $\pi'$ ), ou ( $\pi''$ ), tal como aprofundado no próximo capítulo.

Assim, a simetria em relação a um plano horizontal ( $\theta$ ) apresenta, em écura, a igualdade, por simetria, em relação ao traço vertical  $\theta\pi'$  das projeções verticais dos poliedros e a superposição de suas projeções horizontais (Figura 434); ao contrário, para um plano frontal ( $\theta$ ) (Figura 435) são as projeções horizontais que vêm iguais, simétricas em relação a  $\theta\pi$ , com a superposição das projeções verticais; para a simetria em relação a um plano de perfil ( $\theta$ ) (Figura 436), as simetrias se dão em ambas as projeções, em relação aos traços coincidentes  $\theta\pi' \equiv \theta\pi$ .



Observe-se que, na Figura 434, a visibilidade, em projeção horizontal, é a do simétrico ( $\bar{J}$ )-( $\bar{A}$ )( $\bar{B}$ )( $\bar{C}$ ).

A construção do poliedro simétrico de um poliedro dado, em relação a um plano  $(\theta)$ , dado por seus traços, se faz pelo envio das perpendiculares a  $(\theta)$  pelos vértices do poliedro dado, proporcionando, com isso, os simétricos desses vértices.

Naturalmente, tal construção se simplifica quando o plano de simetria  $(\theta)$  é projetante, devendo ser utilizada uma vista lateral para simetrias em relação a planos paralelos ou pertencentes a  $(\pi'\pi)$ , por serem as retas perpendiculares a  $(\theta)$ , nesses casos, de perfil. Sendo  $(\theta)$  um plano qualquer, a épura fica algo mais onerada, podendo, para aliviá-la, quando conveniente, ser utilizada uma mudança de um dos planos de projeção, para tornar  $(\theta)$  projetante.

Os exemplos seguintes detalham tais hipóteses, considerados, sempre, transparentes os planos  $(\theta)$  das simetrias.

1 - Tetraedro  $(J)-(A)(B)(C)$ , dado por suas projeções (Figura 437).  $(\theta)$  vertical.

São retas horizontais que proporcionam a simetria e parte do traço vertical  $\theta\pi'$  oculto pelo poliedro simétrico  $(\bar{J})-(\bar{A})(\bar{B})(\bar{C})$  vai representado com linha contínua fina.

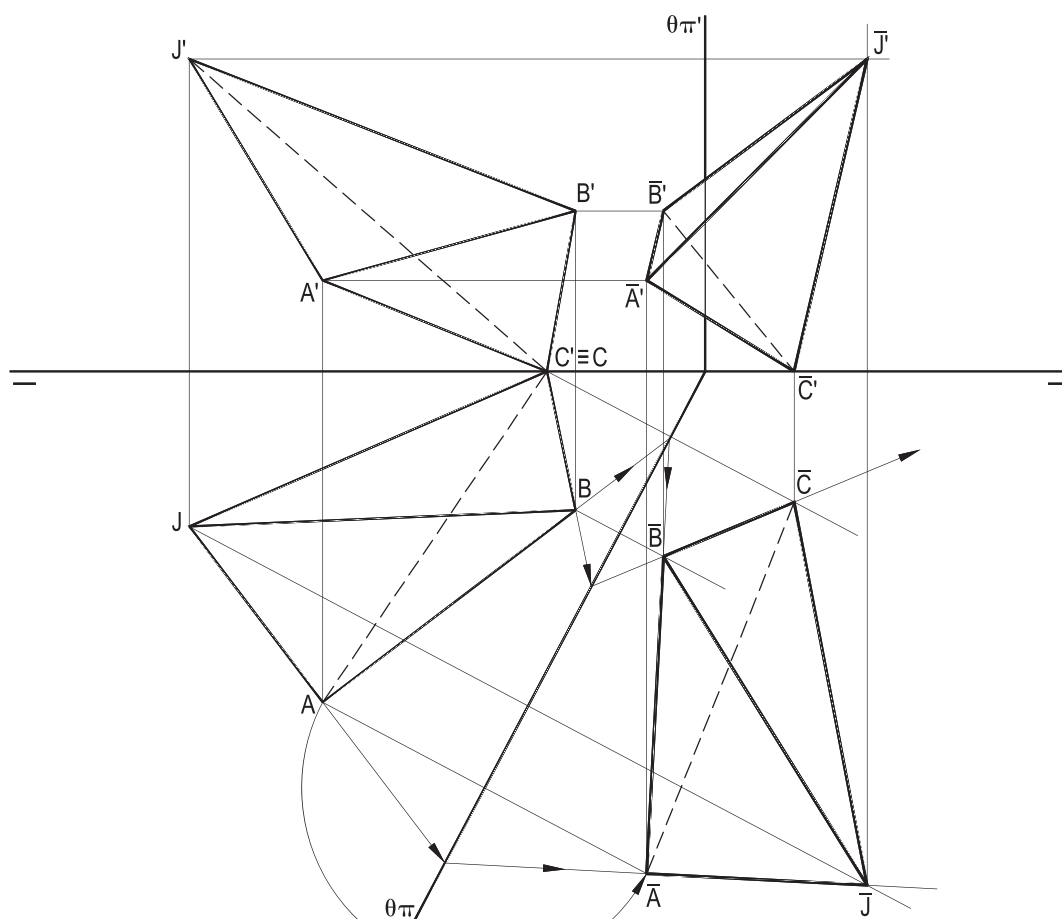
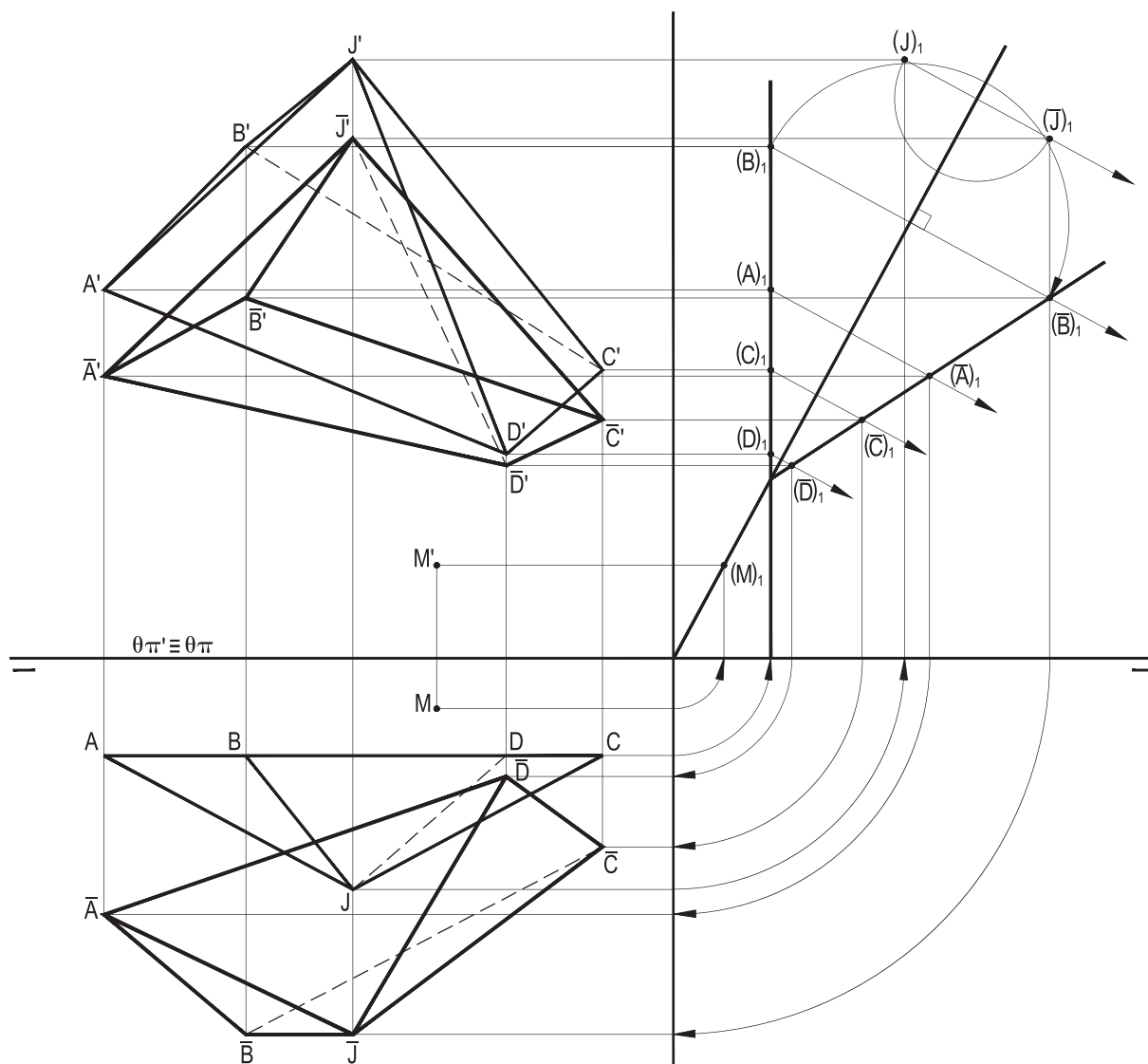


Figura 437

2 – Pirâmide quadrangular irregular (J)–(A)(B)(C)(D), apoiada pela base (A)(B)(C)(D) num plano frontal. A pirâmide é dada por suas projeções.

Plano ( $\theta$ ) de simetria, transparente, pertencente à linha de terra e ao ponto (M), também dado por suas projeções.



A resolução utiliza uma vista lateral, onde se constrói, em V.G., a simetria, simplificada por ter a pirâmide dada sua base num plano frontal, que, nesse rebatimento, se representa por uma reta vertical.

As visibilidades dos dois sólidos são tratadas independentemente, desconsideradas, assim, as opacidades das faces de um poliedro para o outro (Figura 438).

3 – Tetraedro irregular (J)–(A)(B)(C), dado por suas projeções. Plano de simetria ( $\theta$ ), transparente, dado por seus traços.

Resolução tradicional, pelas obtenções dos simétricos ( $\bar{J}$ ), ( $\bar{A}$ ), ( $\bar{B}$ ) e ( $\bar{C}$ ) dos vértices do tetraedro dado. Foi utilizada a reta auxiliar ( $t$ ), de ( $\theta$ ), paralela aos planos de topo das perpendiculares a ( $\theta$ ) (Figura 439).

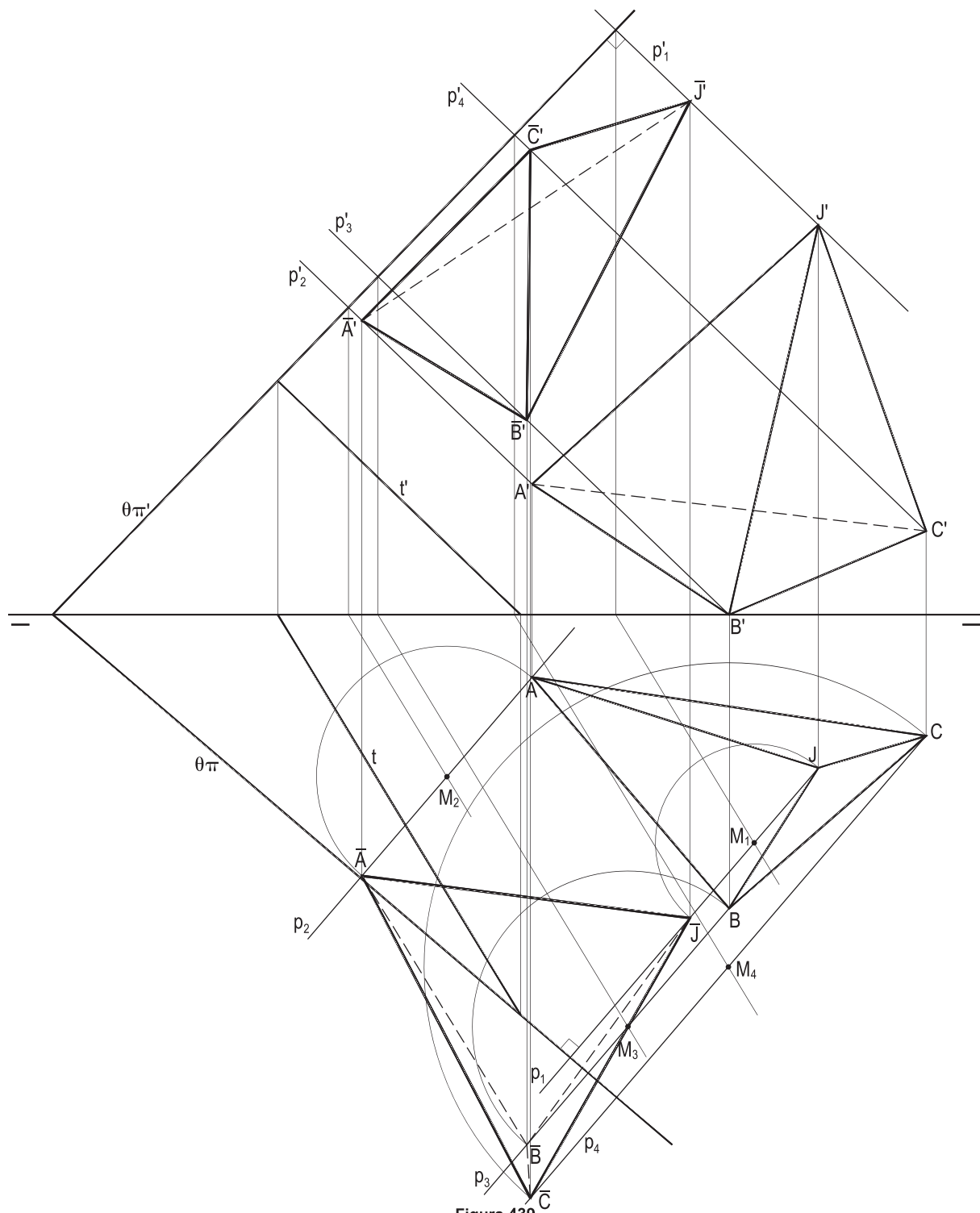


Figura 439



4 – Tetraedro irregular (J)–(A)(B)(C), dado por suas projeções. Plano de simetria ( $\theta$ ) dado por seus traços ( $\theta$ ).

Resolução: Uma mudança de ( $\pi'$ ), que leva ( $\theta$ ) a ser de topo, resolve a simetria, com as frontais, no novo sistema, traçadas pelos vértices do tetraedro.

Observe-se que as visibilidades foram tratadas separadamente para o tetraedro dado e seu simétrico ( $\bar{J}$ )–( $\bar{A}$ )( $\bar{B}$ )( $\bar{C}$ ) (Figura 440).

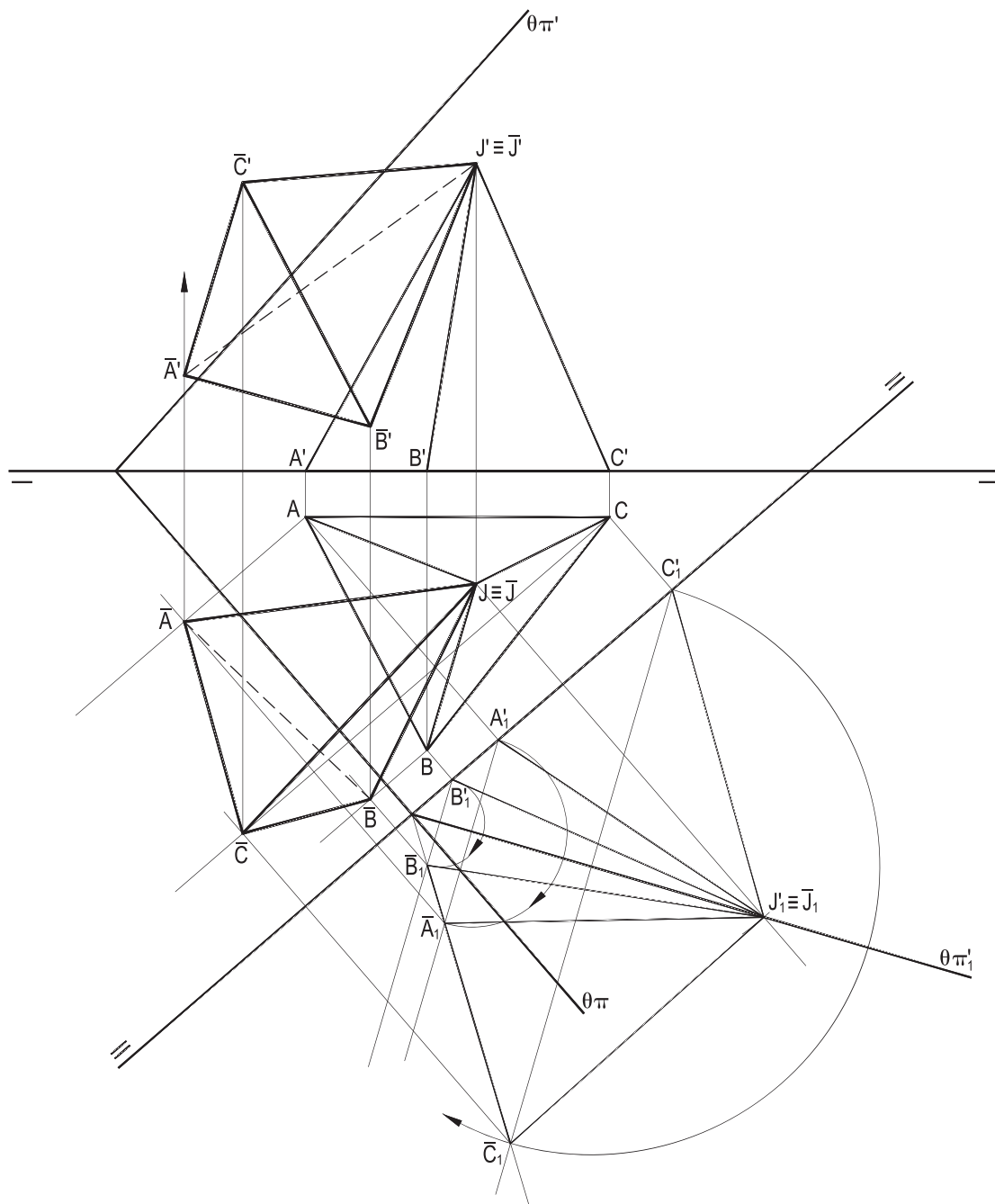


Figura 440

5 – Pirâmide (V) – (A)(B)(C)(D), dada por suas projeções. Plano ( $\theta$ ) definido pelas frontais (a) e (b), dadas por suas projeções. Notar que as arestas (A)(B) e (C)(D) são paralelas a (a) e (b).

Resolução: As quatro frontais dadas (a), (b), (A)(B) e (C)(D) sugerem uma mudança de ( $\pi$ ), que as torne, todas, verticais, operando-se a simetria muito simplesmente nesse segundo sistema projetivo (Figura 441).

Os afastamentos dessas quatro retas e das simétricas  $(\bar{A})(\bar{B})$  e  $(\bar{C})(\bar{D})$  completam a épora, com visibilidades independentes para os dois sólidos.

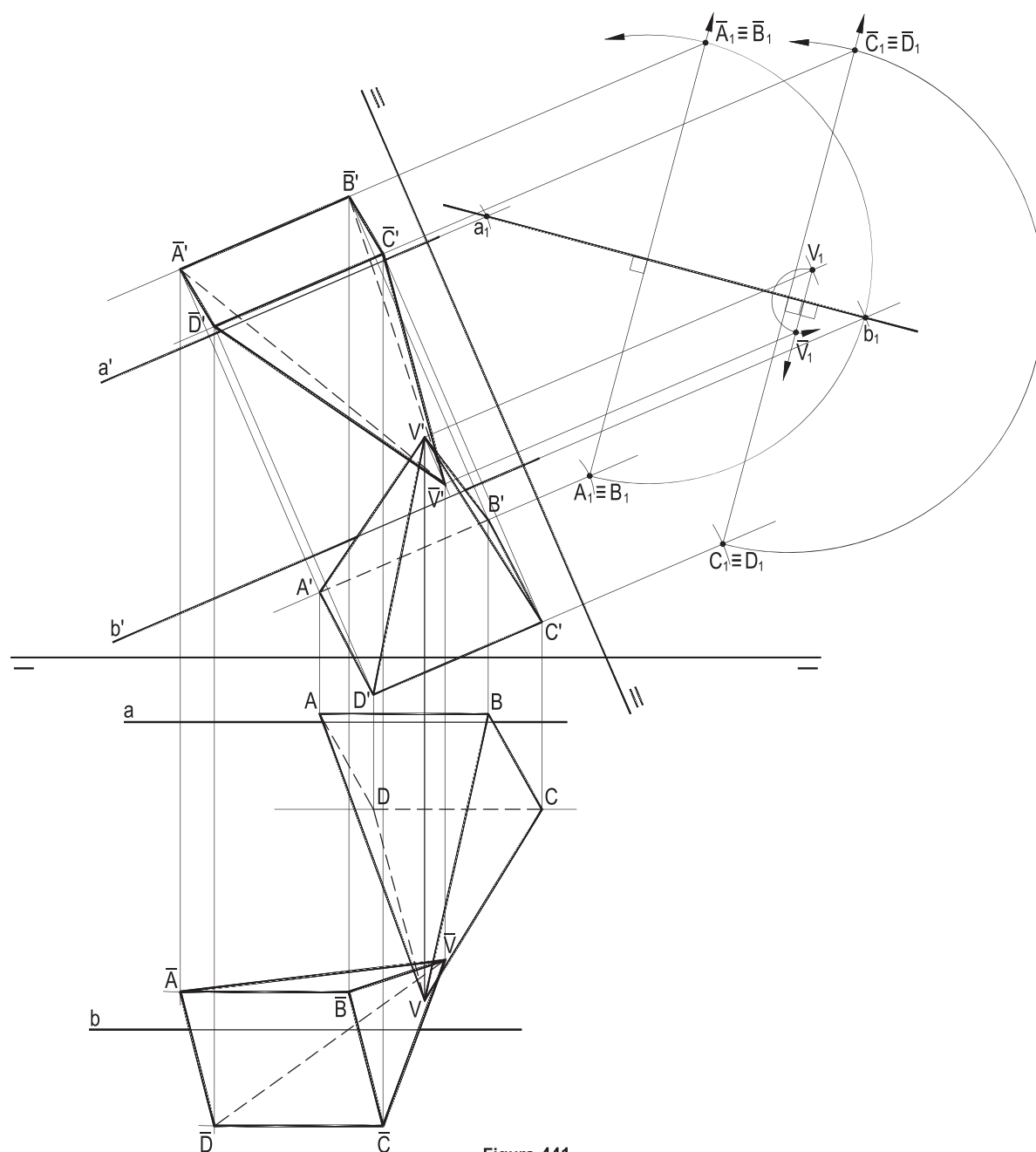


Figura 441

# CAPÍTULO VII

## SIMETRIAS PARTICULARES

### 105 – Simetrias de um ponto em relação aos planos referenciais

São tão simples quanto importantes as simetrias em relação a  $(\pi)$ , a  $(\pi')$  e a  $(\pi'')$ , por suas frequentes utilizações nas resoluções de problemas métricos e de posições.

Porque na obtenção dos simétricos  $(\bar{A}_1)$ ,  $(\bar{A}_2)$  e  $(\bar{A}_3)$  de um ponto dado  $(A)$ , em relação a  $(\pi)$ , a  $(\pi')$  e a  $(\pi'')$ , as retas  $(A)(\bar{A}_1)$ ,  $(A)(\bar{A}_2)$  e  $(A)(\bar{A}_3)$  devem ser, respectivamente, vertical, de topo ou fronto-horizontal, em todos os três casos duas coordenadas permanecem inalteradas na busca pelos simétricos do ponto  $(A)$ , enquanto que a terceira coordenada, ao final do movimento, assume valor simétrico do original (Figuras 442, 443, 444, 445, 446 e 447).

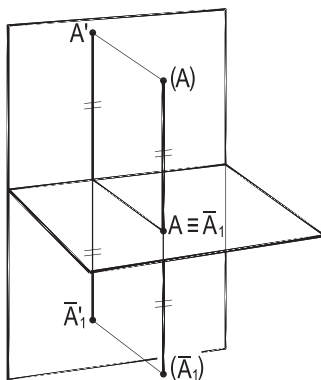


Figura 442

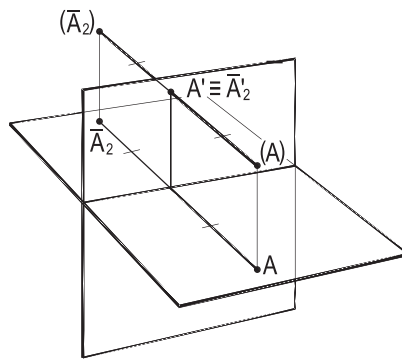


Figura 443

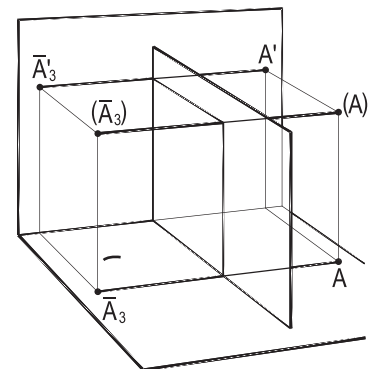


Figura 444

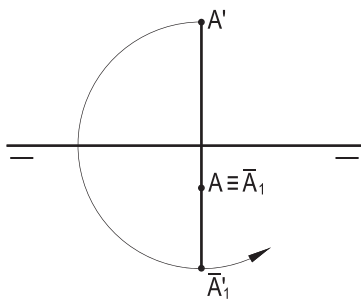


Figura 445

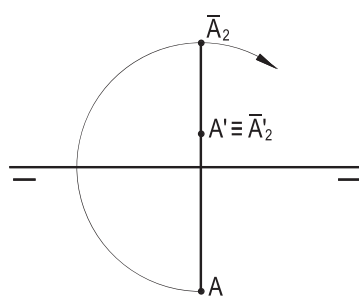


Figura 446

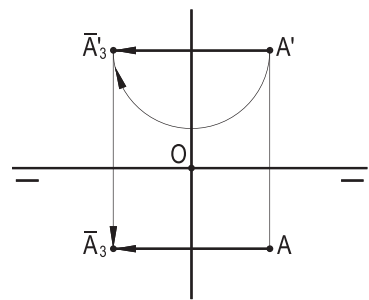


Figura 447

Como natural consequência, vem que:

1 – Duas figuras ( $f$ ) e ( $\bar{f}$ ) simétricas em relação a ( $\pi$ ) têm, em é pura, projeções horizontais  $f$  e  $\bar{f}$  coincidentes e projeções verticais  $f'$  e  $\bar{f}'$  simétricas em relação à linha de terra (Figura 448).

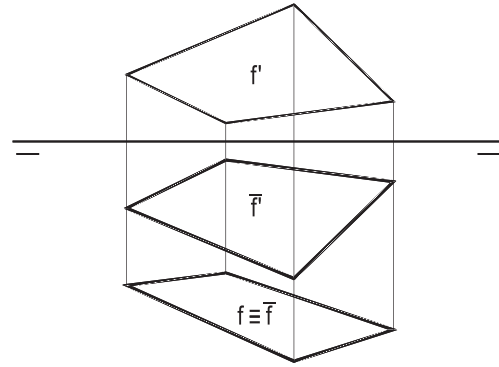


Figura 448

A propriedade é válida para figuras planas, poligonais, curvas, ou mistas e para tridimensionais.

2 – Duas figuras ( $f$ ) e ( $\bar{f}$ ) simétricas em relação a ( $\pi'$ ) têm, em é pura, projeções verticais  $f'$  e  $\bar{f}'$  coincidentes e projeções horizontais  $f$  e  $\bar{f}$  simétricas em relação à linha de terra (Figura 449).

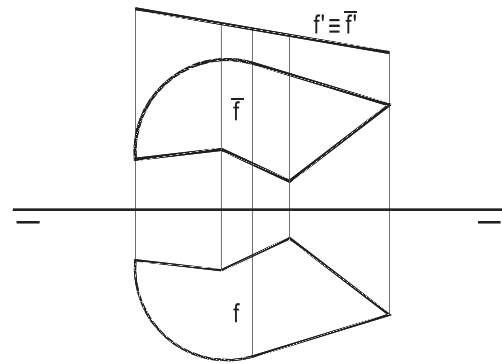


Figura 449

A propriedade é válida para figuras planas, poligonais, curvas, ou mistas, e mesmo para sólidos quaisquer.

3 – Duas figuras ( $f$ ) e ( $\bar{f}$ ) simétricas em relação a ( $\pi''$ ) têm, em é pura, tanto as projeções verticais  $f'$  e  $\bar{f}'$ , quanto as horizontais  $f$  e  $\bar{f}$ , simétricas em relação à linha de chamada pertencente à origem ( $O$ ) das abscissas (Figura 450), sejam quais forem suas naturezas, cada ponto e seu simétrico tendo, então, abscissas com valores simétricos.

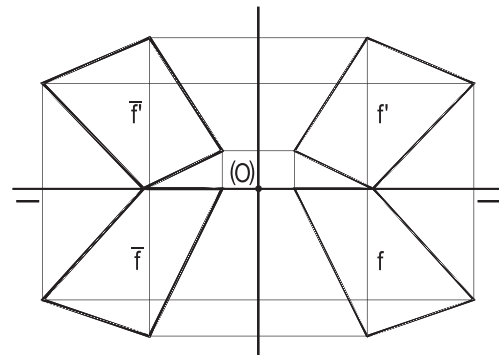


Figura 450

## 106 – Simetria de um ponto em relação à linha de terra

A determinação do simétrico de um ponto qualquer em relação à linha de terra se faz, naturalmente, pelo envio, desse ponto, de uma perpendicular à linha de terra, que terá, por isso, que pertencer ao plano de perfil que contém tal ponto.

Assim, para estudar esta simetria, convém trabalhar com uma vista de perfil (Figura 451) que reúna o ponto dado ( $A$ ) e seu simétrico ( $\bar{A}$ ) em relação a ( $\pi'\pi$ ) e observar que os triângulos retângulos ( $A$ ) $A$ ( $J$ ), ( $A$ ) $A'$ ( $J$ ), ( $\bar{A}$ ) $\bar{A}$ ( $J$ ) e ( $\bar{A}$ ) $\bar{A}'$ ( $J$ ) são iguais por terem seus catetos respectivamente paralelos a suas hipotenusas iguais.

Disso decorre que dois pontos  $(A)$  e  $(\bar{A})$  simétricos em relação a  $(\pi'\pi)$  têm, em épura, projeções de mesmo nome simétricas em relação a  $(\pi'\pi')$  (Figura 452). Porque têm que ter abscissas iguais, afastamentos simétricos e cotas simétricas.

### 107 – Teorema

Os simétricos de um ponto genérico em relação a dois planos quaisquer são simétricos em relação a um plano que contém a interseção daqueles dois planos quaisquer.

Demonstração: Consideremos dois planos quaisquer  $(\gamma)$  e  $(\varphi)$ , que se cortam segundo a reta  $(\gamma\varphi)$ , bem como um ponto genérico  $(A)$ , entre eles, e seus simétricos  $(\bar{A}_1)$  e  $(\bar{A}_2)$ , respectivamente, em relação a  $(\gamma)$  e a  $(\varphi)$  (Figura 453).

Da própria construção desses simétricos resulta que  $(\gamma)$  e  $(\varphi)$  são, respectivamente, os planos mediadores dos segmentos  $(A)(\bar{A}_1)$  e  $(A)(\bar{A}_2)$  e que, por isso, todos os pontos da reta  $(\gamma\varphi)$  hão de equidistar de  $(\bar{A}_1)$  e de  $(A)$  e, também, de  $(A)$  e de  $(\bar{A}_2)$ , e, então, equidistar de  $(\bar{A}_1)$  e de  $(\bar{A}_2)$ , devendo, assim, pertencer ao plano  $(\theta)$ , mediador do segmento  $(\bar{A}_1)(\bar{A}_2)$ , o que implica em que a reta  $(\gamma\varphi)$  pertença aos três planos  $(\gamma)$ ,  $(\varphi)$  e  $(\theta)$ , em jogo, demonstrando o teorema.

Outro raciocínio cabe para o triângulo  $(A)(\bar{A}_1)(\bar{A}_2)$  (Figura 454), pertencente ao plano, por  $(A)$ , perpendicular a  $(\gamma\varphi)$ , observando-se que as retas  $(r)$  e  $(s)$ , interseções do plano desse triângulo com os dois dados, são as mediatrizes dos lados  $(A)(\bar{A}_1)$  e  $(A)(\bar{A}_2)$ , e que, então, o ponto  $(J)$ , de  $(\gamma\varphi)$ , há de ser o circuncentro do triângulo  $(A)(\bar{A}_1)(\bar{A}_2)$  e, por isso, pertencente à mediatriz  $(t)$  de seu terceiro lado  $(\bar{A}_1)(\bar{A}_2)$ . E como  $(t)$  é a interseção do plano do triângulo com  $(\theta)$  (Figuras 453 e 454), fica provado o teorema.

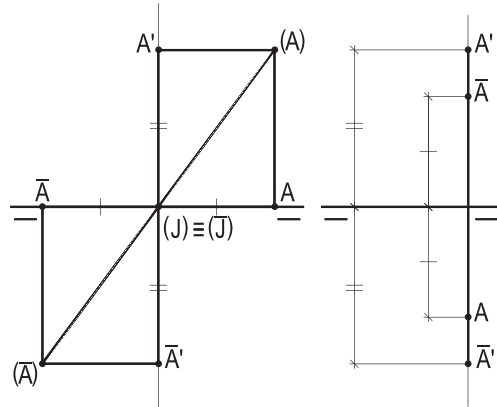


Figura 451

Figura 452

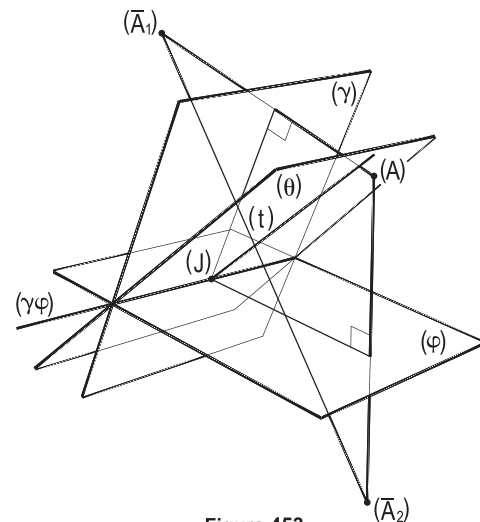


Figura 453

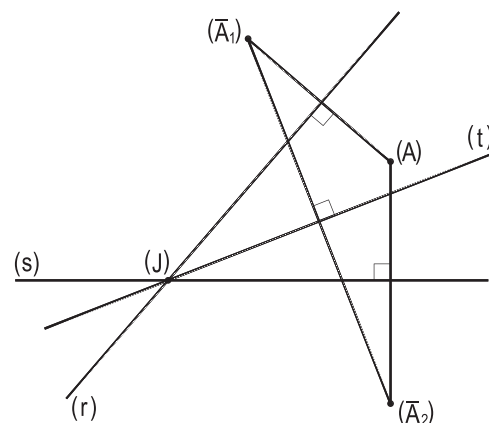


Figura 454

## 108 – Corolários

1 – Quando os dois planos dados  $(\gamma)$  e  $(\varphi)$  são paralelos (Figura 455), a reta que proporciona os simétricos  $(\bar{A}_1)$  e  $(\bar{A}_2)$  é uma perpendicular a eles e, por isso, os simétricos  $(\bar{A}_1)$  e  $(\bar{A}_2)$  de  $(A)$  hão de ser simétricos em relação a um plano  $(\theta)$  paralelo aos dados.

Entende-se, então, que tal plano  $(\theta)$  pertence à reta imprópria  $(\gamma\varphi)$ .

2 – Quando os dois planos dados  $(\gamma)$  e  $(\varphi)$  são perpendiculares, além do plano mediador do segmento  $(\bar{A}_1)(\bar{A}_2)$  conter a reta  $(\gamma\varphi)$ , tal segmento concorre com  $(\gamma\varphi)$  no ponto  $(J)$ , seu ponto médio (Figuras 456 e 457), visto que  $(J)$  nada mais é que o circuncentro do triângulo retângulo  $(A)(\bar{A}_1)(\bar{A}_2)$ , e por isso (*Geometria Plana*, número 76), o ponto médio da hipotenusa  $(\bar{A}_1)(\bar{A}_2)$  (Figura 457).

## 109 – Escólio

Os pontos  $(\bar{A}_1)$  e  $(\bar{A}_2)$ , simétricos de um ponto genérico  $(A)$  em relação a  $(\pi')$  e a  $(\pi)$ , respectivamente, são simétricos em relação a  $(\pi'\pi)$ .

## 110 – Teorema

O produto de duas simetrias sucessivas de um ponto qualquer, em relação a dois planos secantes, é o simétrico do ponto considerado, em relação a um plano pertencente à interseção dos dois planos secantes dados.

Demonstração: Basta (Figura 453) considerar  $(\bar{A}_1)$  como o ponto dado,  $(A)$  seu simétrico em relação ao plano  $(\gamma)$ , dado, e  $(\bar{A}_2)$  o simétrico de  $(A)$  em relação ao segundo plano dado  $(\varphi)$ , que o teorema demonstrado no item 107, anterior, assegura a tese deste, ou seja, que  $(\bar{A}_2)$  é o simétrico de  $(A_1)$  em relação a um plano  $(\theta)$ , pertencente à interseção  $(\gamma\varphi)$  dos dois planos secantes dados.

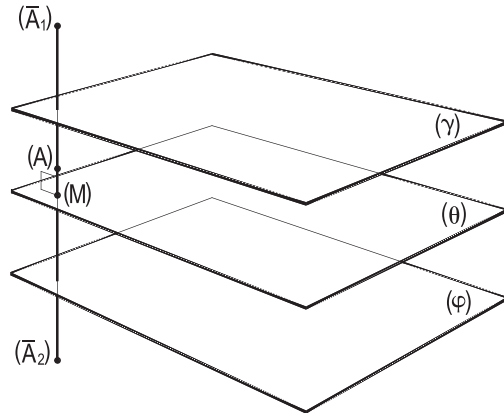


Figura 455

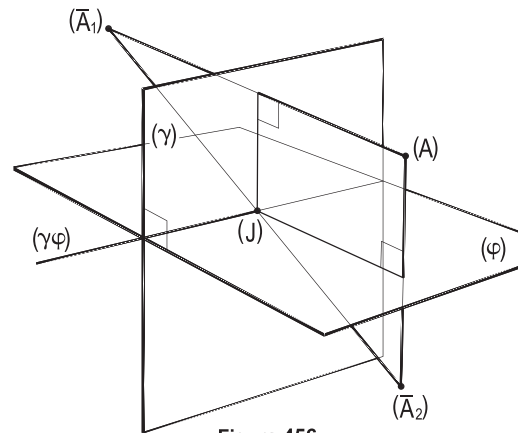


Figura 456

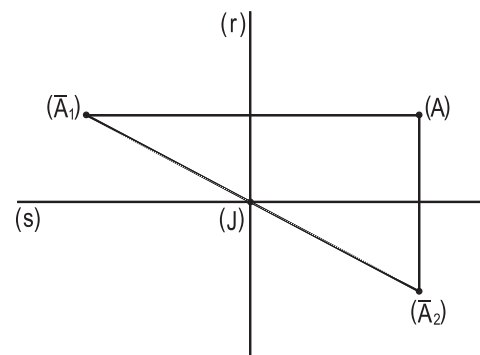


Figura 457

## 111 – Corolários

1 – O produto de duas simetrias consecutivas de um ponto (A) em relação a  $(\pi)$  e a  $(\pi')$  – ou na ordem inversa – é o seu simétrico ( $\bar{A}_2$ ) em relação a  $(\pi'\pi)$  (Figura 458).

2 – O produto de duas simetrias consecutivas de um ponto (A) em relação a  $(\pi)$  e a  $(\pi'')$  – ou na ordem inversa – é o seu simétrico ( $\bar{A}_2$ ) em relação à reta  $(\pi\pi'')$  (Figura 459).

3 – O produto de duas simetrias consecutivas de um ponto (A) em relação a  $(\pi')$  e a  $(\pi'')$  – ou na ordem inversa – é o seu simétrico ( $\bar{A}_2$ ) em relação à reta  $(\pi'\pi'')$  (Figura 460).

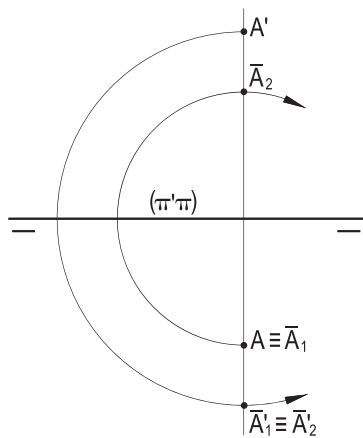


Figura 458

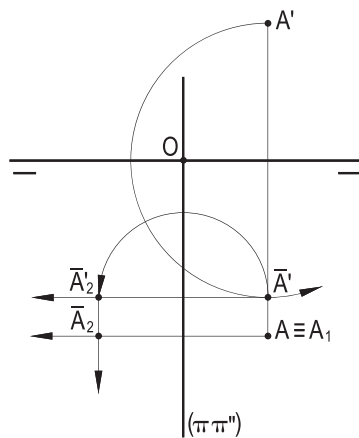


Figura 459

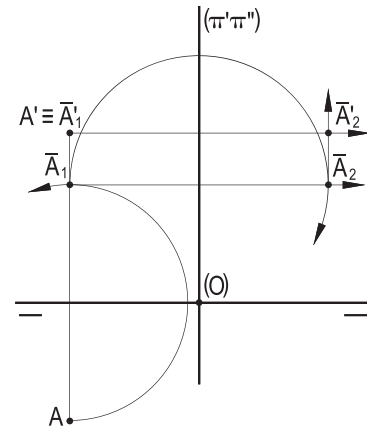


Figura 460

## 112 – Projeções da reta simétrica de uma reta dada em relação a $(\pi)$

Dada uma reta ( $r$ ) por suas projeções, é sempre bem simples obter as projeções da reta ( $\bar{r}$ ), simétrica de  $(r)$  em relação a  $(\pi)$ , visto que (número 105) as projeções horizontais das duas retas devem coincidir e que, em é pura, suas projeções verticais são simétricas em relação à linha de terra (Figuras 461, 462, 463 e 464).

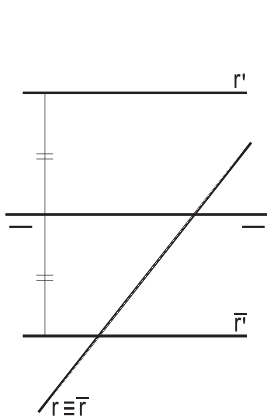


Figura 461

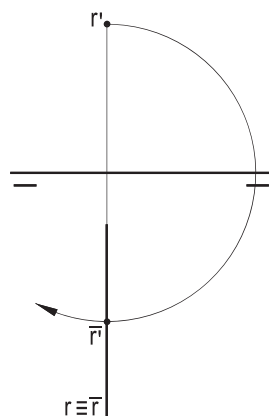


Figura 462

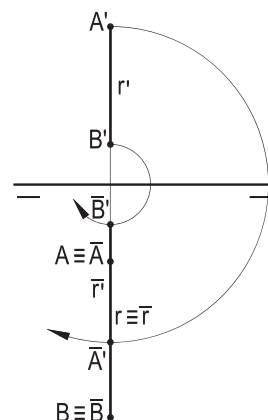


Figura 463

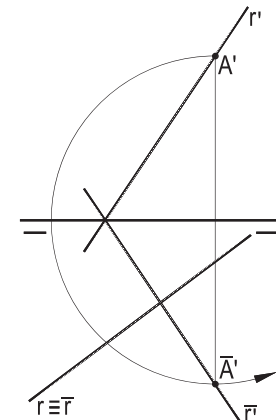


Figura 464

### 113 – Projeções da reta simétrica de uma reta dada em relação a ( $\pi'$ )

Agora são as projeções verticais da reta dada ( $r$ ) e de sua simétrica ( $\bar{r}$ ), em relação a ( $\pi'$ ), que devem coincidir, vindo a ser simétricas, em épura, suas projeções horizontais (número 105) em relação a ( $\pi'\pi$ ) (Figuras 465, 466, 467 e 468).

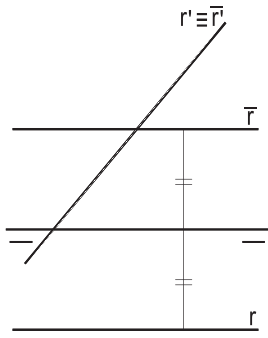


Figura 465

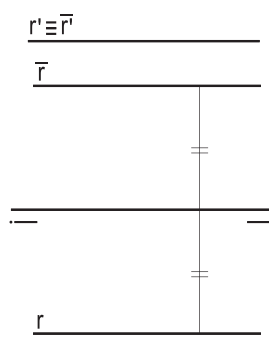


Figura 466

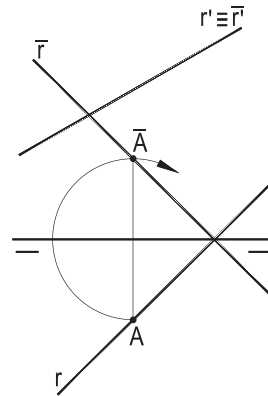


Figura 467

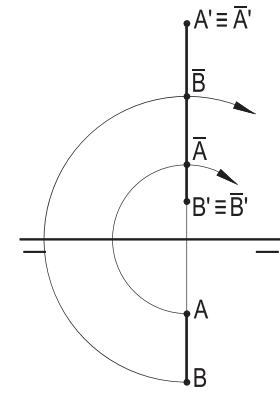


Figura 468

### 114 – Projeções da reta simétrica de uma reta dada em relação a ( $\pi''$ )

Para obter as projeções da reta ( $\bar{r}$ ), simétrica de uma reta dada ( $r$ ), em relação a ( $\pi''$ ), basta obter, para um ou dois de seus pontos, abscissas simétricas das dadas, mantidas constantes suas outras duas coordenadas (número 105) (Figuras 469, 470 e 471).

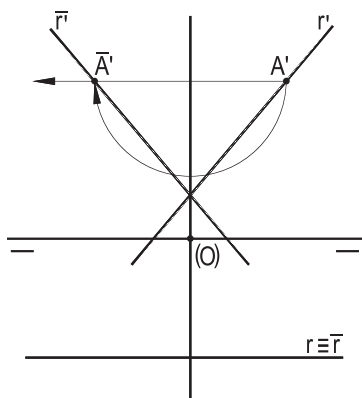


Figura 469

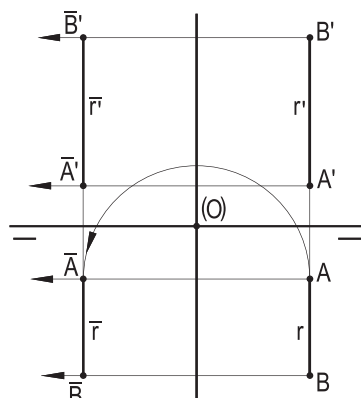


Figura 470

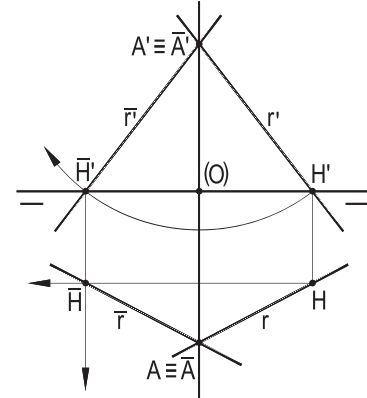


Figura 471

### 115 – Projeções da reta simétrica de uma reta dada em relação a ( $\pi'\pi$ )

Para obter as projeções da reta ( $\bar{r}$ ), simétrica de uma reta dada ( $r$ ) em relação a ( $\pi'\pi$ ), deve-se atender ao detalhado no item 106, de modo que, em épura, cada ponto de ( $\bar{r}$ ), simétrico de um ponto escolhido de ( $r$ ), tenha a mesma abscissa que ele, com suas projeções simétricas, em relação à linha de terra, às de mesmo nome do ponto homólogo de ( $r$ ) (Figuras 472, 473 e 474).



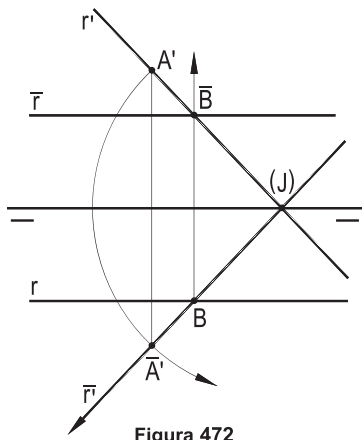


Figura 472

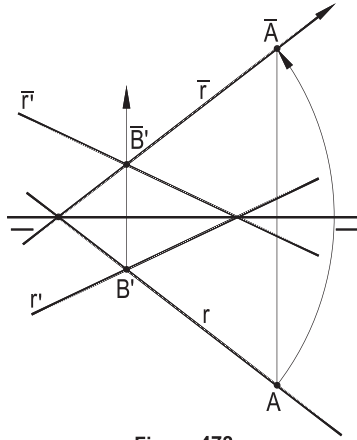


Figura 473

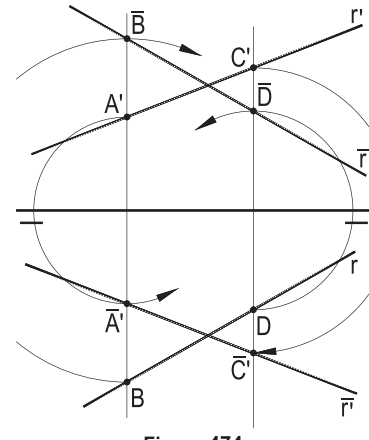


Figura 474

### 116 – Projeções do polígono simétrico de um polígono dado em relação a $(\pi)$

A construção das projeções do simétrico procurado é bem simples, em obediência às utilizadas para pontos e retas (projeções horizontais coincidentes e as verticais, em épura, simétricas em relação à linha de terra), materializada nos exemplos que seguem:

1 – Triângulo (A)(B)(C), dado por suas projeções, com um vértice pertencendo a  $(\pi)$ .

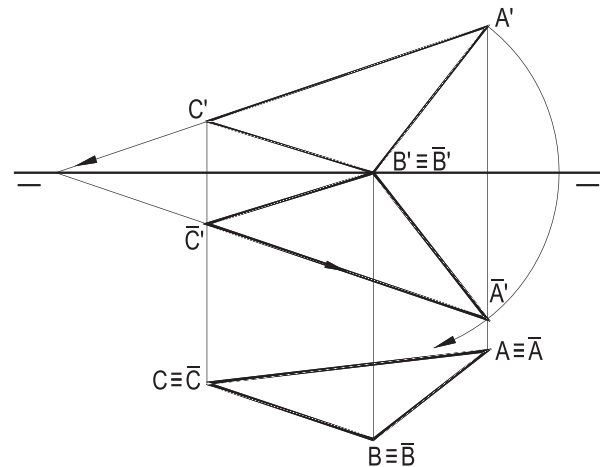


Figura 475

Para a simetria das projeções verticais em relação à linha de terra foi utilizada a projeção vertical da reta suporte do lado (A)(C) (Figura 475).

2 – Paralelogramo (A)(B)(C)(D), pertencente a um plano vertical, dado por suas projeções.

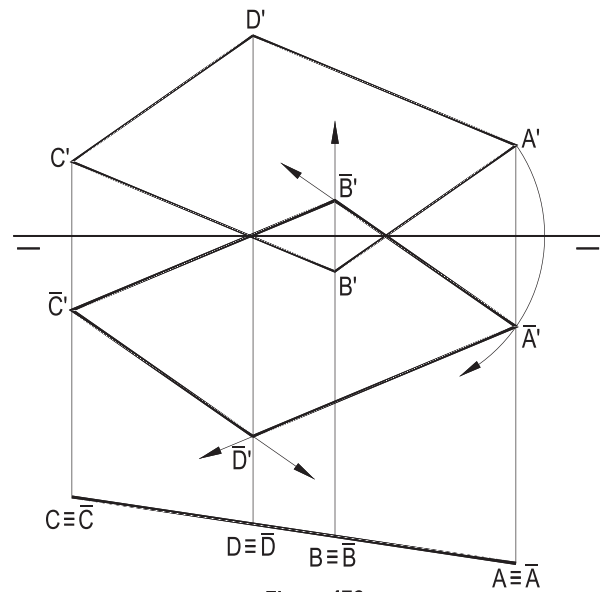


Figura 476

Para a simetria das projeções verticais, em relação à linha de terra, foram aproveitados os traços com ela, das projeções verticais  $A'B'$  e  $B'C'$  (Figura 476).

As projeções horizontais dos dois paralelogramos, naturalmente, coincidem.

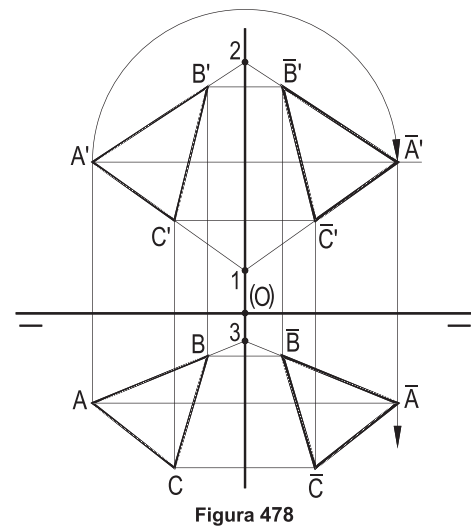
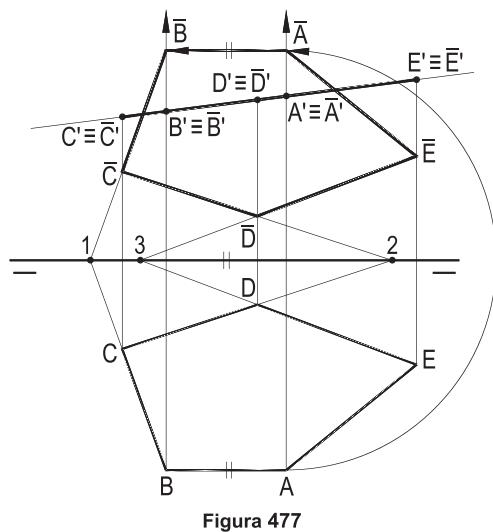
### 117 – Projeções do polígono simétrico de um polígono dado em relação a $(\pi')$

Simples, também, a construção das projeções do simétrico de um polígono dado em relação a  $(\pi')$ , visto que hão de coincidir as projeções verticais dos dois polígonos, enquanto que as horizontais, em écura, serão simétricas em relação à linha de terra.

Assim são os pentágonos  $(A)(B)(C)(D)(E)$  e  $(\bar{A})(\bar{B})(\bar{C})(\bar{D})(\bar{E})$  da Figura 477, simétricos em relação a  $(\pi')$ .

### 118 – Projeções do polígono simétrico de um polígono dado em relação a $(\pi'')$

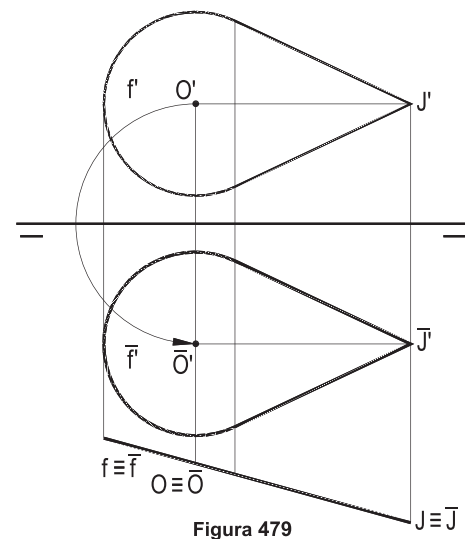
Porque, nessas simetrias, os vértices homólogos têm cotas e afastamentos respectivamente iguais e abscissas simétricas, as épuras são de prontas construções, como a da Figura 478, que mostra os triângulos  $(A)(B)(C)$  e  $(\bar{A})(\bar{B})(\bar{C})$  simétricos em relação a  $(\pi'')$ , aproveitados os pontos 1, 2 e 3, duplos na abscissa nula.



### 119 – Projeções da figura simétrica de uma figura dada em relação a $(\pi)$

Tal como com os polígonos (número 116), a simetria entre duas figuras em relação a  $(\pi)$  conta com a coincidência de suas projeções horizontais e, em écura, com a simetria de suas projeções verticais em relação à linha de terra, como as figuras mistas  $(f)$  e  $(\bar{f})$  da Figura 479.

Observe-se a utilização da simetria entre os centros  $(O)$  e  $(\bar{O})$  dos arcos de círculo que compõem as figuras.



## 120 – Projeções da figura simétrica de uma figura dada em relação a $(\pi')$

Mais uma vez simples a construção, por coincidirem as projeções verticais das duas figuras e, em épura, serem simétricas em relação a  $(\pi'\pi)$  as duas projeções horizontais. Seguem dois exemplos.

1 – Figura mista não convexa, pertencente a um plano de topo, tendo, por projeção horizontal  $f$ , um semicírculo  $O$ , acoplado a um triângulo isósceles  $COB$ , construído sobre o raio  $OB$  como base e o vértice  $C$  em  $(\pi'\pi)$ .

Para simplificar a construção, procede-se à obtenção de  $\bar{O}$ , simétrico de  $O$ , em relação a  $(\pi'\pi)$ , com repetição do raio do semicírculo (Figura 480).

2 – Pentágono convexo  $(A)(B)(C)(D)(E)$ , dado por suas projeções.

Para a obtenção da projeção horizontal  $\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}\bar{E}$  do simétrico do pentágono dado iniciou-se com o vértice  $\bar{A}$ , simétrico de  $A$ , em relação a  $(\pi'\pi)$ , para, então, operar com os suportes dos lados  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$  e, com a impossibilidade de aproveitar  $DE$ , foi utilizada a diagonal  $CE$  (Figura 481).

Projeções verticais naturalmente coincidentes.

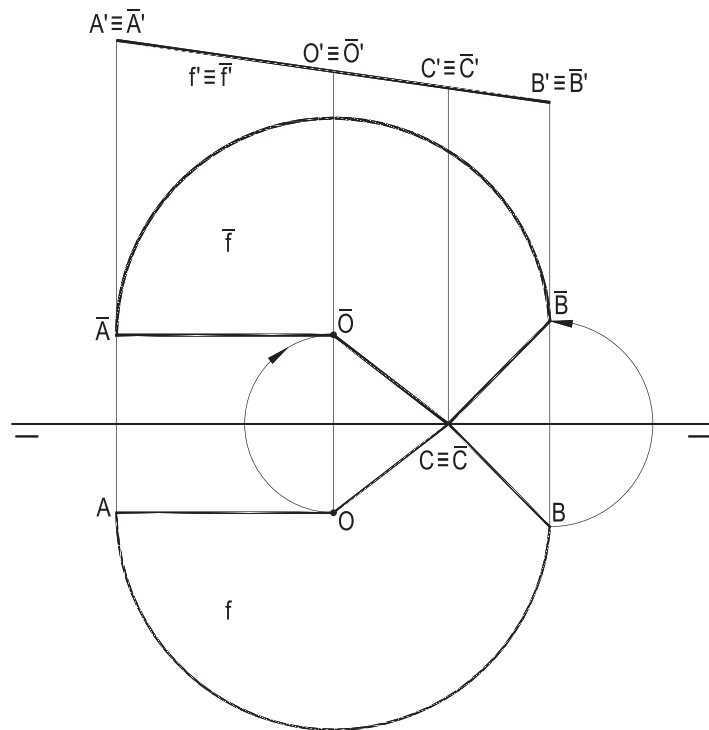


Figura 480

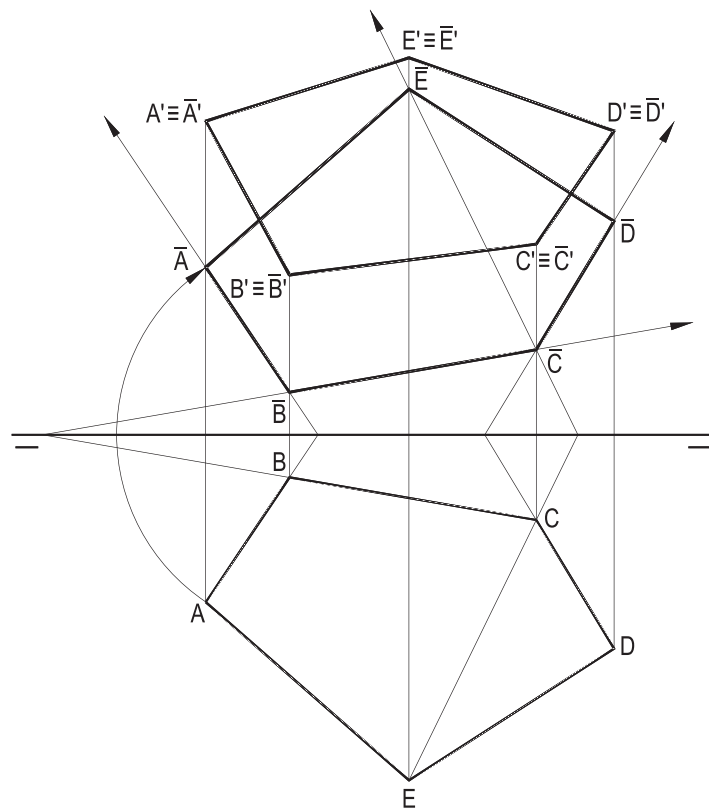


Figura 481

## 121 – Projeções da figura simétrica de uma figura dada em relação a ( $\pi''$ )

Estas simetrias repetem em épura o que acontece no espaço, apresentando as duas figuras simétricas em relação a ( $\pi''$ ), com suas abscissas simétricas, as projeções de mesmo nome refletidas em relação à linha de chamada de abscissa nula (número 105.3).

Assim são os dois exemplos abaixo de duas figuras curvas verticais (Figura 482) e de duas mistas (Figura 483).

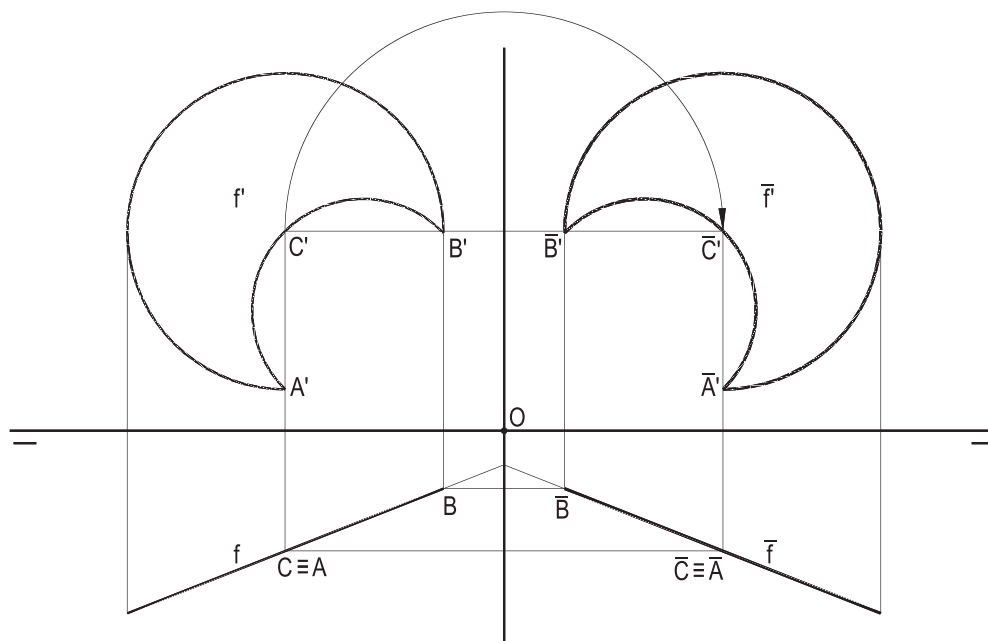


Figura 482

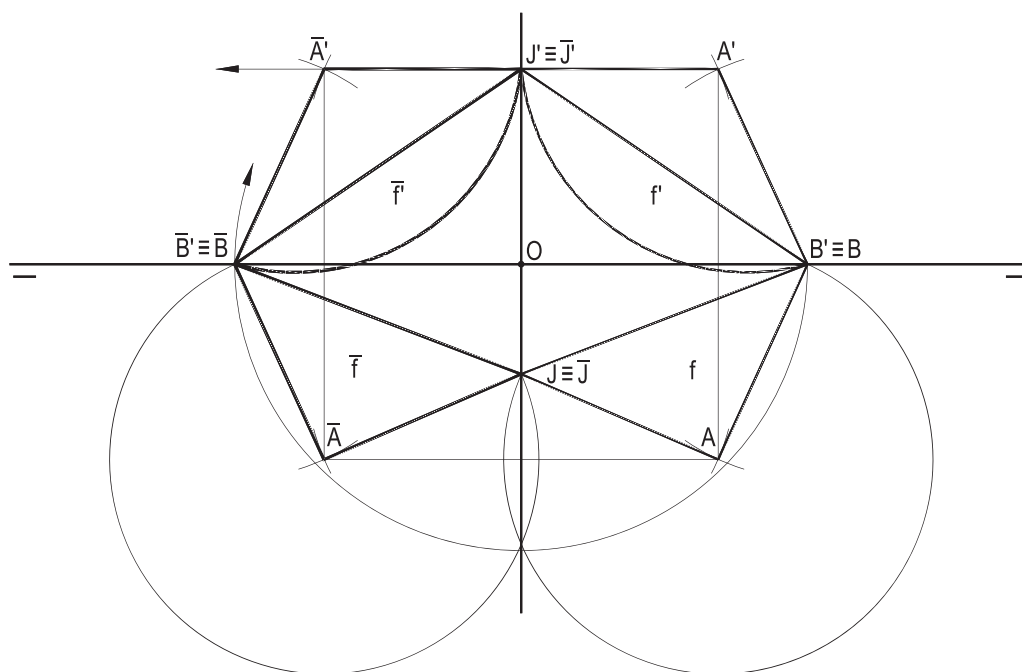


Figura 483

## 122 – Projeções do poliedro simétrico de um poliedro dado em relação a $(\pi)$

Tal como com os polígonos e com as figuras mistas, na simetria entre dois poliedros em relação a  $(\pi)$  coincidem as projeções horizontais e apresentam-se, em é pura, simétricas suas projeções verticais, em relação à linha de terra.

Assim são os dois tetraedros,  $(J)-(A)(B)(C)$ , dado, e  $(\bar{J})-(\bar{A})(\bar{B})(\bar{C})$ , seu simétrico em relação a  $(\pi)$ , construído na Figura 484.

A visibilidade foi representada apenas para o sólido dado, visto que, o tetraedro simétrico construído, em projeção horizontal a aresta  $(\bar{A})(\bar{B})$ , é invisível.

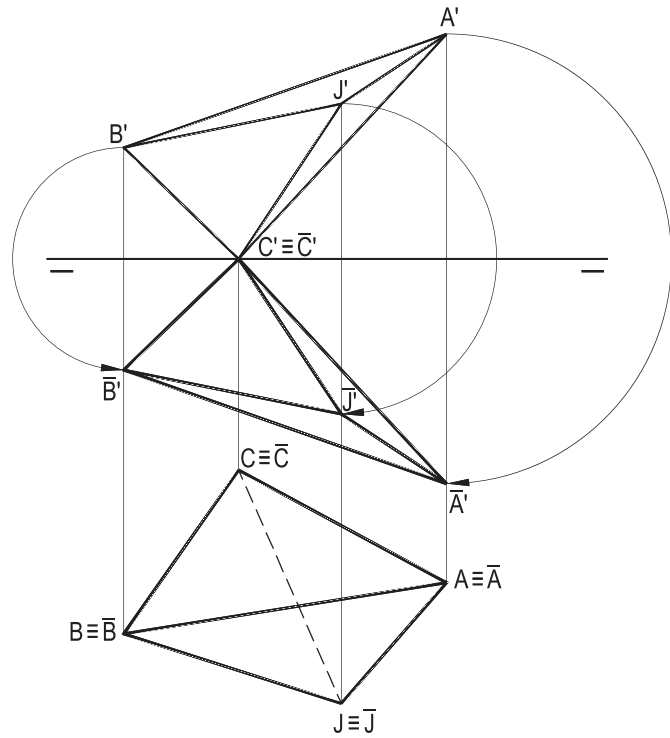


Figura 484

## 123 – Projeções do poliedro simétrico de um poliedro dado em relação a $(\pi')$

Agora são as projeções verticais dos dois poliedros que coincidem, enquanto que as horizontais são, em é pura, simétricas em relação à linha de terra, tal como antes apresentado para pontos e retas.

Assim é o caso (Figura 485) do prisma triangular  $(A)(B)(C)-(R)(S)(T)$  com as duas bases em planos de topo e de seu simétrico em relação a  $(\pi')$ .

Simetria, em é pura, iniciada com o vértice A e, a seguir, com as arestas AR, TR e TS.

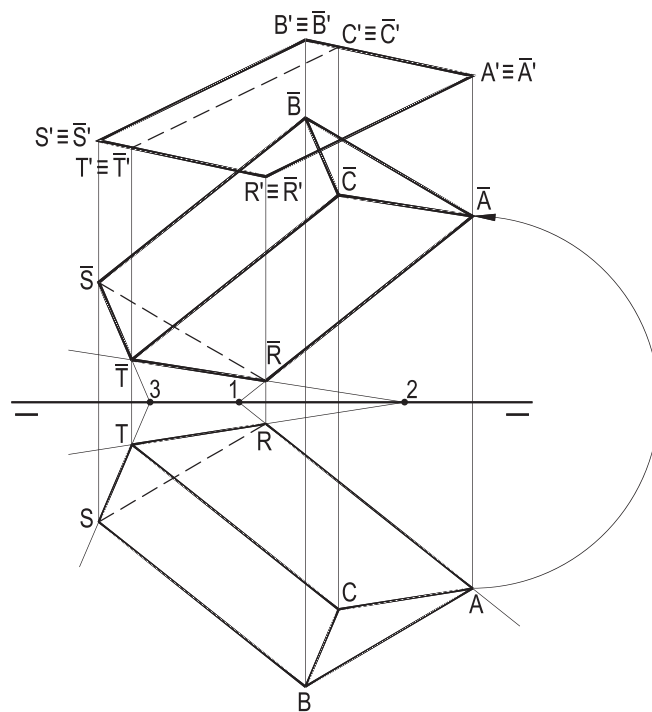


Figura 485

## 124 – Projeções do poliedro simétrico de um poliedro dado em relação a ( $\pi''$ )

A construção da é pura se faz pelo uso de fronto-horizontais, levando cada vértice do poliedro à abscissa simétrica da original.

O exemplo abaixo analisa um ortoedro, do primeiro diedro, cuja face quadrada (A)(B)(C)(D) tem o lado (A)(B), dado, em ( $\pi$ ), o vértice (D), em ( $\pi'$ ), e o vértice (R), da aresta (A)(R), em ( $\pi''$ ).

Construída a V.G. da face quadrada (A)(B)(C)(D), o vértice (D), de ( $\pi'$ ), é determinado com o auxílio do triângulo de rebatimento (A)(D)<sub>1</sub>D e, levando a cota D(D)<sub>1</sub>, do vértice (D), à projeção vertical D' (Figura 486). Uma frontal (f) do plano da face (A)(B)(C)(D) proporciona as arestas laterais, perpendiculares a esse plano e, assim, o vértice (R) em ( $\pi''$ ), completado o sólido com paralelas.

A simetria é, então, imediata.

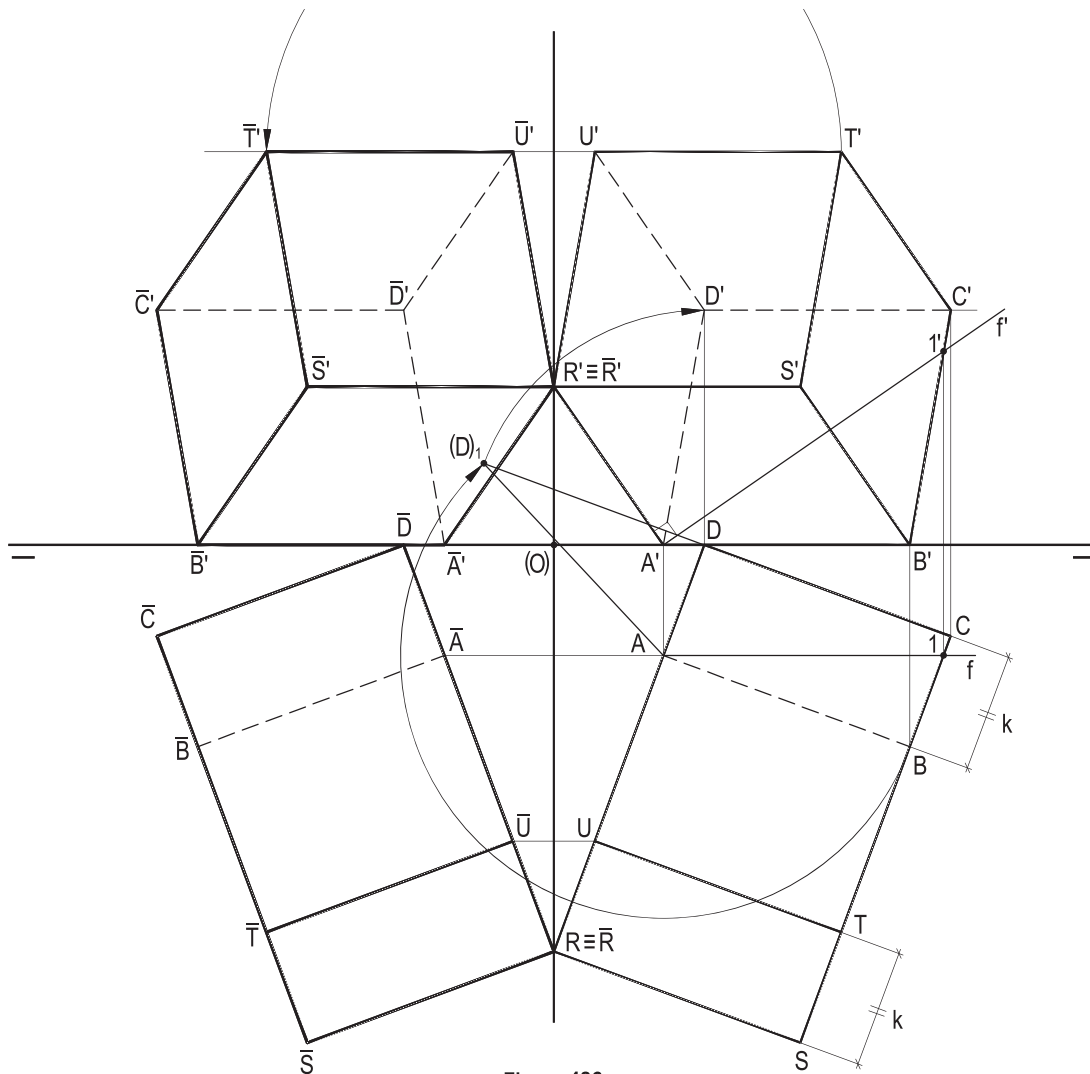


Figura 486

## 125 – Simetria de plano em relação a cada um dos planos referenciais

Nas simetrias de um plano dado em relação a  $(\pi)$  (Figuras 487, 488, 489 e 490), os traços horizontais coincidem e os verticais são simétricos em relação a  $(\pi'\pi)$ , ocorrendo o contrário na simetria em relação a  $(\pi')$  (Figuras 491, 492, 493 e 494).

Na simetria em relação a  $(\pi'')$ , os traços de mesmo nome do plano dado ( $\alpha$ ) e de seu simétrico ( $\bar{\alpha}$ ) ficam simétricos em relação à linha de chamada que passa pela origem (O) das abscissas, como indicado nas Figuras 495, 496 e 497.

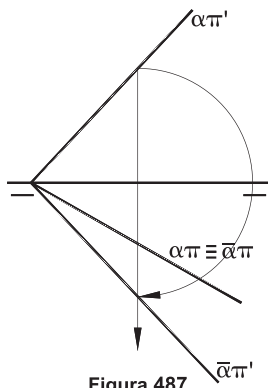


Figura 487

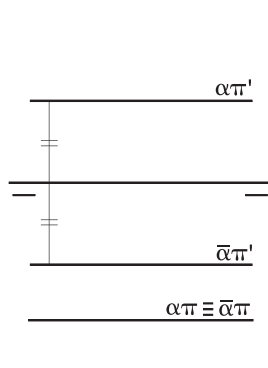


Figura 488

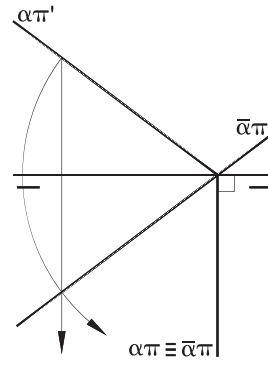


Figura 489

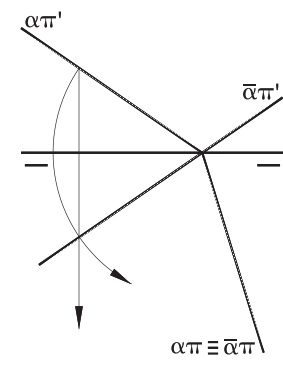


Figura 490

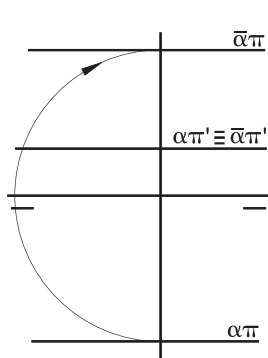


Figura 491

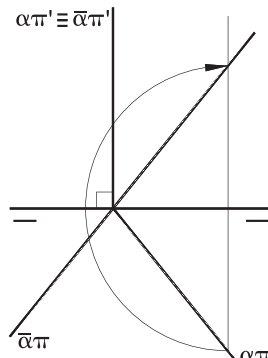


Figura 492

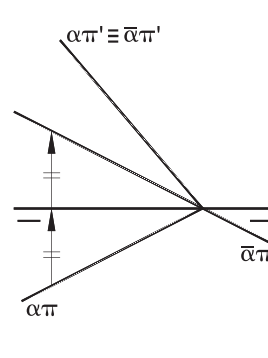


Figura 493

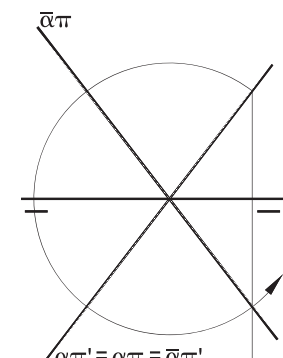


Figura 494

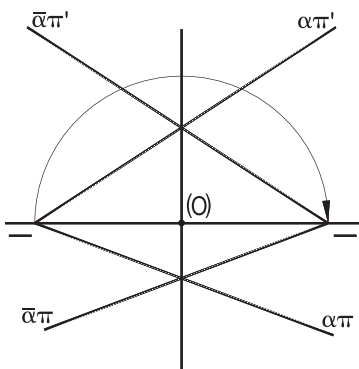


Figura 495

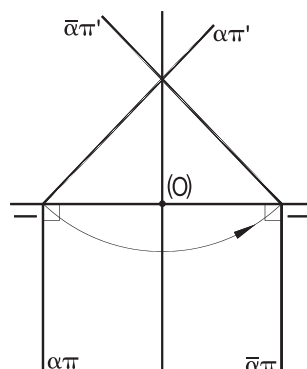


Figura 496

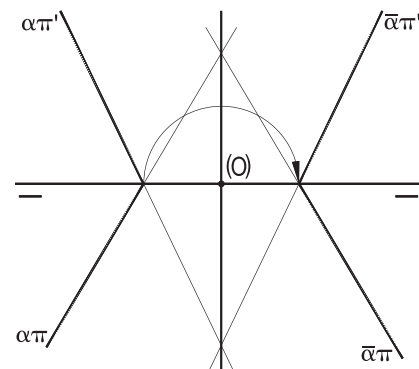


Figura 497

## 126 – Simetria de plano em relação a $(\pi'\pi)$

Propriedades iguais às demonstradas da simetria de um ponto em relação a  $(\pi'\pi)$  valem, naturalmente, para os traços, em *épura*, de dois planos  $(\alpha)$  e  $(\bar{\alpha})$ , simétricos em relação a  $(\pi'\pi)$ , ou seja, que seus traços de mesmo nome são, em *épura*, simétricos em relação a  $(\pi'\pi)$ .

De fato, consideremos três pontos não colineares de um plano  $(\alpha)$ , qualquer: seu traço  $(J)$  com  $(\pi'\pi)$ , fixo durante a operação, um ponto  $(V)$  de seu traço vertical e outro  $(H)$  de seu traço horizontal, assim como seus simétricos  $(\bar{V})$  e  $(\bar{H})$  em relação a  $\pi'\pi$  (Figura 498), os quais definirão, com  $(J)$ , os dois traços do plano  $(\bar{\alpha})$  procurado, com traços de mesmo nome dos de  $(\alpha)$  simétricos em relação a  $(\pi'\pi)$ .

Os exemplos seguintes trazem simetrias de planos de diferentes naturezas em relação a  $(\pi'\pi)$  (Figuras 499, 500, 501, 502, 503 e 504), observando que o da Figura 501 mostra que coincidem  $(\alpha)$  e seu simétrico  $(\bar{\alpha})$ , por conterem  $(\pi'\pi)$ .

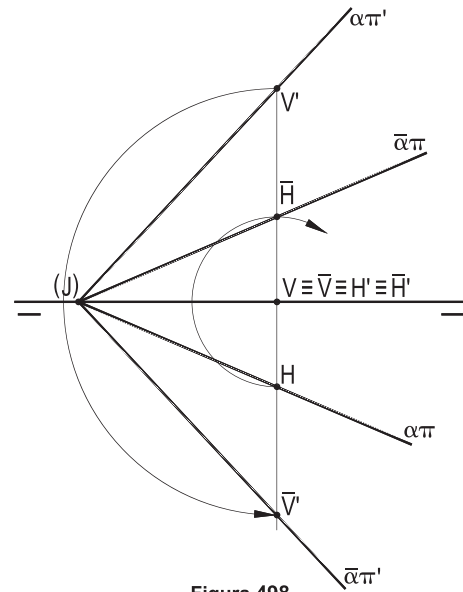


Figura 498

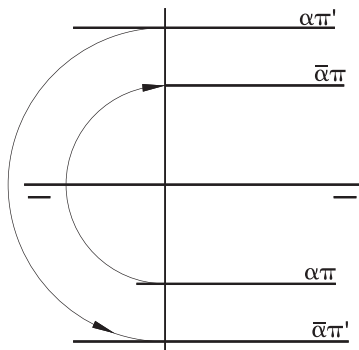


Figura 499

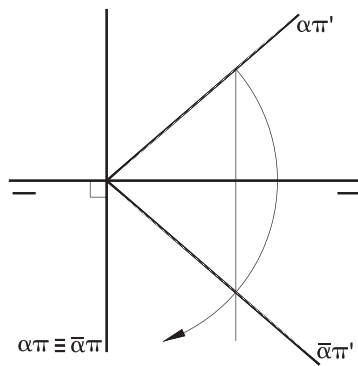


Figura 500

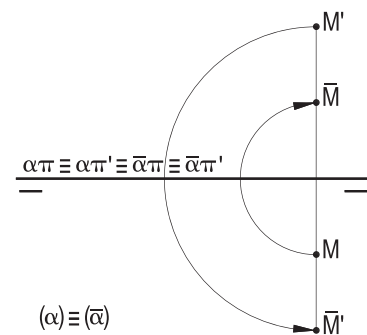


Figura 501

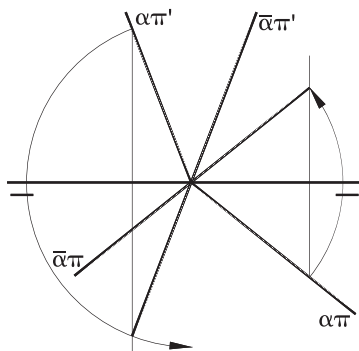


Figura 502

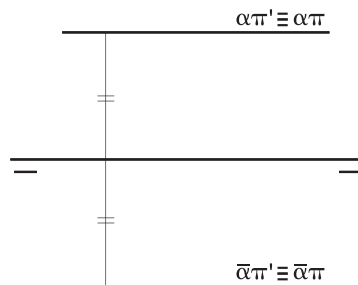


Figura 503

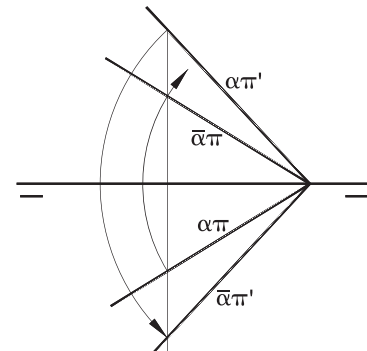


Figura 504



# CAPÍTULO VIII

## SIMETRIAS EM RELAÇÃO AOS BISSETORES

### 127 – Projeções do ponto $(\bar{A})$ , simétrico de um ponto dado $(A)$ em relação a $(\beta_{24})$

Para obter o ponto  $(\bar{A})$ , simétrico de um ponto dado  $(A)$  em relação a  $(\beta_{24})$ , deve-se enviar a perpendicular por  $(A)$  a esse bissetor, que, tendo direção ortogonal à da linha de terra, tem que ser de perfil, para obter seu traço  $(P)$  com  $(\beta_{24})$  e fazer  $(P)(\bar{A}) = (A)(P)$  (Figura 505).

Sabe-se (números 34.1 e 34.3) que todo segmento de perfil, como  $(A)(\bar{A})$ , perpendicular a  $(\beta_{24})$  tem projeções com comprimentos iguais, mas sentidos contrários, e que o traço  $(P)$  da reta  $(A)(\bar{A})$  com  $(\beta_{24})$  tem, em *épura*, suas projeções coincidentes com o ponto médio de  $A\bar{A}$  (Figura 506). Disso resulta que  $\bar{A}$  coincide com  $A'$  e  $\bar{A}'$  com  $A$ .

Assim, dois pontos simétricos em relação a  $(\beta_{24})$  têm, em *épura*, coincidentes suas projeções de nomes contrários (Figura 507).

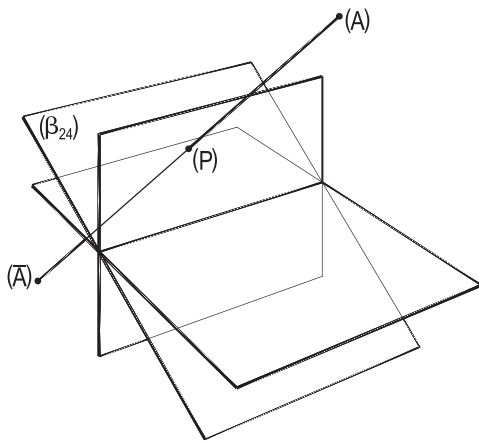


Figura 505

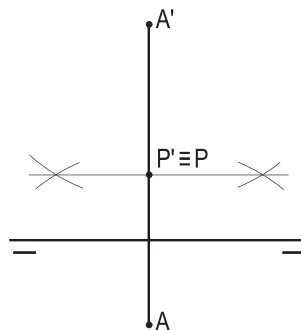


Figura 506

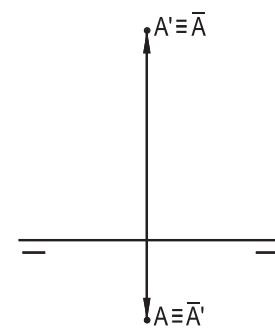


Figura 507

### 128 – Projeções da reta $(\bar{r})$ , simétrica de uma reta dada $(r)$ em relação a $(\beta_{24})$

Como decorrência natural do acima concluído, vem que, em *épura*, as projeções de nomes contrários de duas retas  $(r)$  e  $(\bar{r})$ , simétricas em relação a  $(\beta_{24})$ , devem coincidir. Isto implica em certas particularidades, como se passa a listar:

1 – A simétrica ( $\bar{r}$ ) de uma reta horizontal ( $r$ ), em relação a ( $\beta_{24}$ ), é uma frontal (Figura 508), e reciprocamente.

2 – A simétrica ( $\bar{r}$ ) de uma reta vertical ( $r$ ), em relação a ( $\beta_{24}$ ), é uma reta de topo (Figura 509), e reciprocamente.

3 – A simétrica ( $\bar{r}$ ) de uma fronto-horizontal ( $r$ ), em relação a ( $\beta_{24}$ ), é outra fronto-horizontal (Figura 510).

4 – A simétrica ( $\bar{A}$ )( $\bar{B}$ ) de uma reta de perfil ( $A$ )( $B$ ), em relação a ( $\beta_{24}$ ), é outra reta de perfil (Figura 511).

5 – A simétrica ( $\bar{r}$ ) de uma reta qualquer ( $r$ ), em relação a ( $\beta_{24}$ ), é outra reta qualquer (Figura 512). E, é claro, ( $r$ ) e ( $\bar{r}$ ) concorrem num ponto ( $P$ ) do Bissetor Par, já que são simétricas em relação a esse plano.

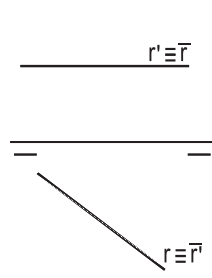


Figura 508

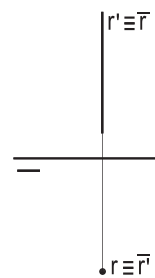


Figura 509

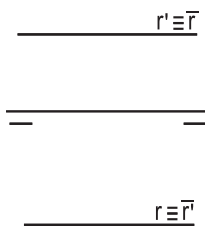


Figura 510

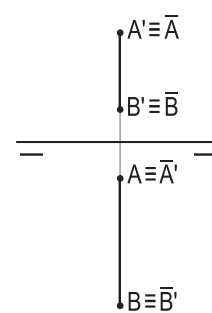


Figura 511

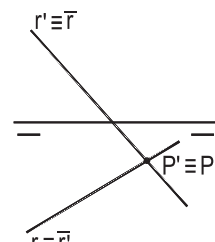


Figura 512

## 129 – Projeções da figura ( $\bar{f}$ ), simétrica de uma figura plana dada ( $f$ ) em relação a ( $\beta_{24}$ )

Tal como com os pontos e as retas, as simetrias de quaisquer figuras planas ( $f$ ) e ( $\bar{f}$ ), em relação a ( $\beta_{24}$ ), trazem, em épura, as coincidências de suas projeções de nomes contrários (Figuras 513, 514 e 515).

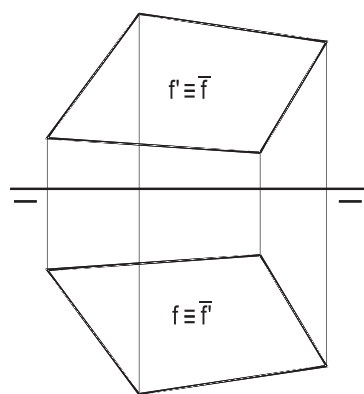


Figura 513

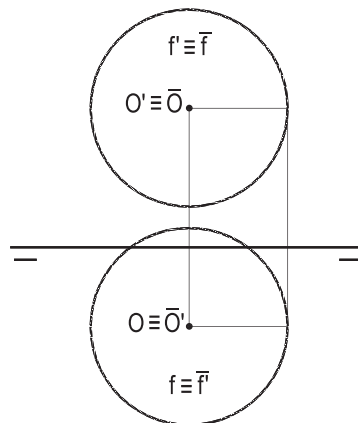


Figura 514

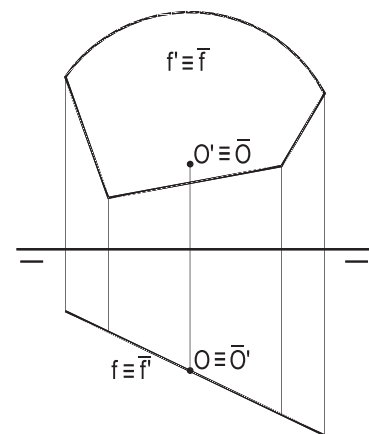


Figura 515

### 130 – Projeções do poliedro simétrico de um poliedro dado, em relação a $(\beta_{24})$

A construção das projeções do poliedro simétrico de um poliedro, dado por suas projeções, em relação a  $(\beta_{24})$ , é imediata, já que devem coincidir as projeções de nomes contrários dos dois sólidos.

Os dois exemplos seguintes apresentam as simetrias, em relação a  $(\beta_{24})$ , de uma pirâmide (Figura 516) e de um prisma (Figura 517).

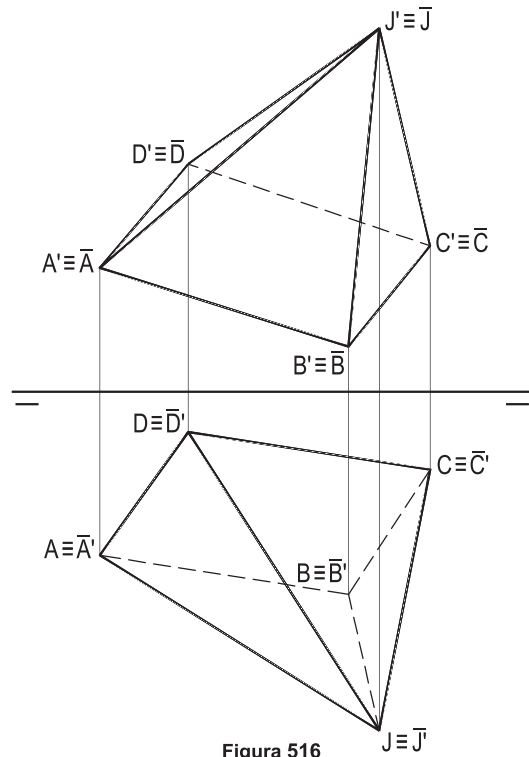


Figura 516

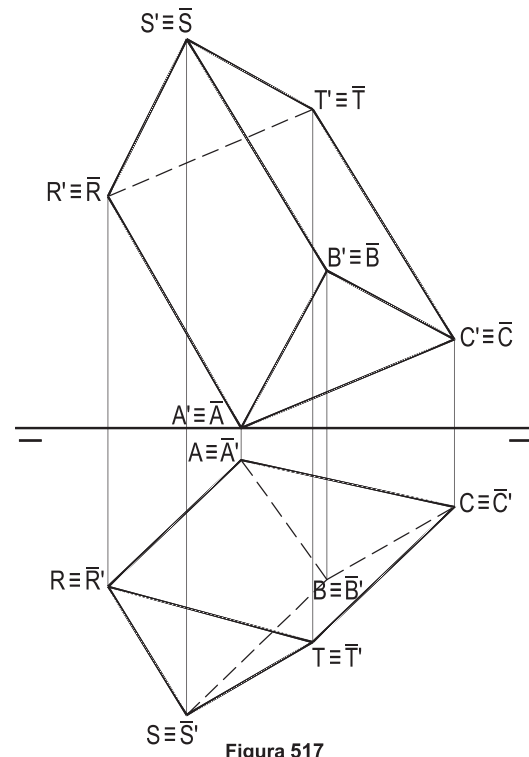


Figura 517

### 131 – Traços do plano simétrico de um plano dado em relação a $(\beta_{24})$

Por resultar das simetrias de três pontos não colineares de um plano  $(\alpha)$ , seu simétrico  $(\bar{\alpha})$ , em relação a  $(\beta_{24})$ , há de ser tal que, em épura, coincidam os traços de nomes contrários de  $(\alpha)$  e de  $(\bar{\alpha})$ , o que proporciona as seguintes particularidades:

1 – O plano  $(\bar{\alpha})$ , simétrico de um plano horizontal  $(\alpha)$ , em relação a  $(\beta_{24})$ , é um plano frontal (Figura 518). E reciprocamente. Então, a interseção  $(p)$  desses dois planos há de ser a fronto-horizontal que tenha, em épura, suas duas projeções coincidentes com os traços dos dois planos (Figura 518).

2 – O plano  $(\bar{\alpha})$ , simétrico de um plano vertical  $(\alpha)$ , em relação a  $(\beta_{24})$ , é um plano de topo (Figura 519). E reciprocamente.

3 – O simétrico  $(\bar{\alpha})$  de um plano de perfil  $(\alpha)$  em relação a  $(\beta_{24})$  é ele próprio (Figura 520).

4 – O plano ( $\bar{\alpha}$ ), simétrico de um plano ( $\alpha$ ), paralelo a ( $\pi'\pi$ ), em relação a ( $\beta_{24}$ ), é outro plano paralelo a ( $\pi'\pi$ ) (Figura 521). E a interseção ( $p$ ) dos dois é, naturalmente, uma fronto-horizontal de ( $\beta_{24}$ ).

5 – O plano ( $\bar{\alpha}$ ), simétrico de um plano ( $\pi'\pi$ )-(M), em relação a ( $\beta_{24}$ ), é outro plano pertencente à linha de terra (Figura 522). Esses dois planos, ( $\alpha$ ) e ( $\bar{\alpha}$ ), têm por interseção a própria linha de terra, uma reta, é claro, de ( $\beta_{24}$ ).

6 – O plano ( $\bar{\alpha}$ ), simétrico de um plano qualquer ( $\alpha$ ), em relação a ( $\beta_{24}$ ), é outro plano qualquer. E a interseção ( $p$ ), dos dois planos, é uma reta ( $p$ ) de ( $\beta_{24}$ ) (Figura 523), o que se observa mesmo quando ( $\alpha$ ) é dado por duas retas ( $a$ ) e ( $b$ ) (Figura 524).

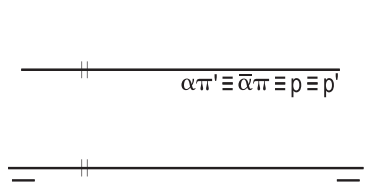


Figura 518

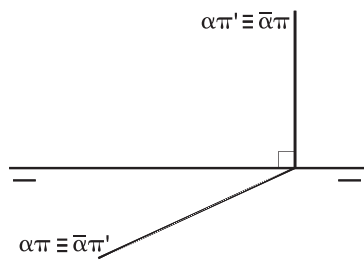


Figura 519

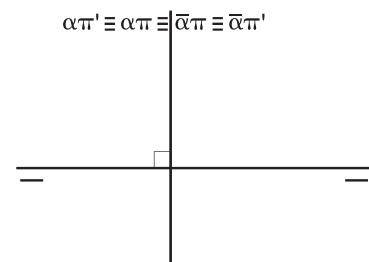


Figura 520

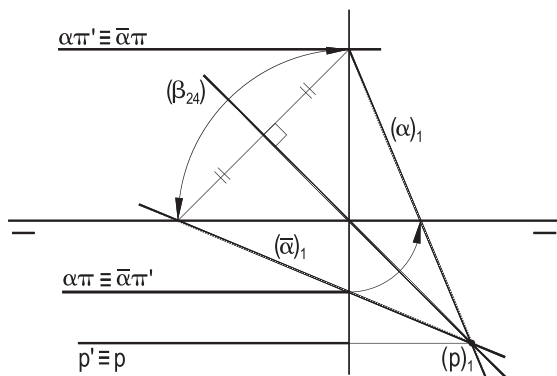


Figura 521

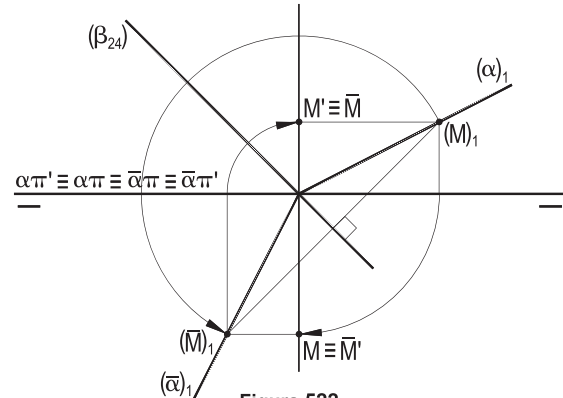


Figura 522

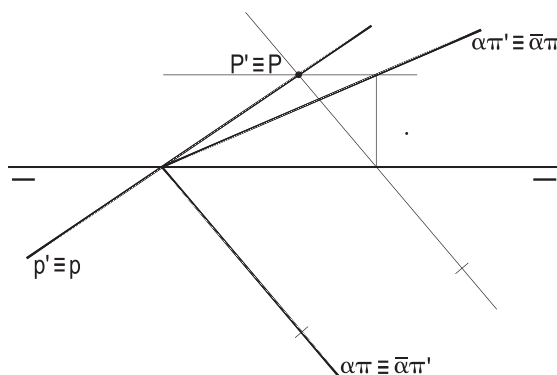


Figura 523

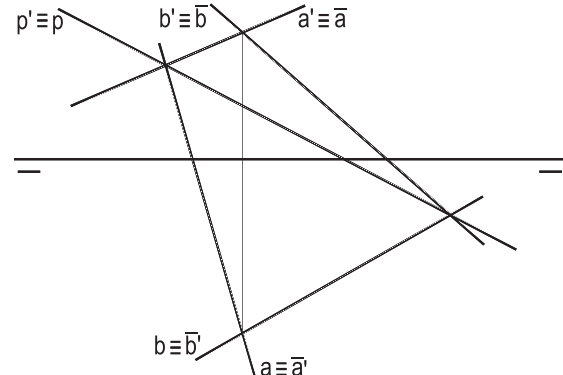


Figura 524

### 132 – Projeções do ponto $(\bar{A})$ simétrico de um ponto dado $(A)$ em relação a $(\beta_{13})$

Para estudar a simetria de dois pontos  $(A)$  e  $(\bar{A})$  em relação a  $(\beta_{13})$ , vale considerar uma vista de perfil (Figura 525) e observar os triângulos retângulos  $(A)_1(J)_1(\bar{A})_1$  e  $(B)_1(L)_1(\bar{B})_1$  que, devido aos ângulos de  $45^\circ$ , são isósceles, obrigando as igualdades de seus catetos:

$$(J)_1(A)_1 = (J)_1(\bar{A})_1 \quad \text{e} \quad (L)_1(B)_1 = (L)_1(\bar{B})_1$$

Assim, dois pontos simétricos em relação a  $(\beta_{13})$  têm, em épura, projeções de nomes contrários simétricas em relação à linha de terra (Figuras 525 e 526).

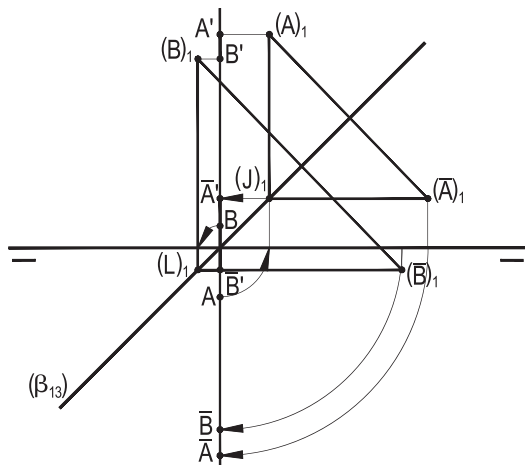


Figura 525

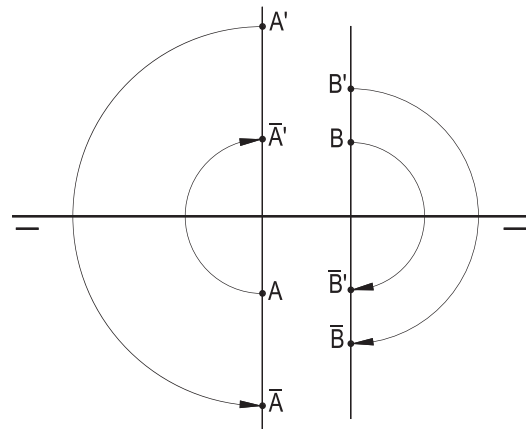


Figura 526

### 133 – Projeções da reta $(\bar{r})$ , simétrica de uma reta dada $(r)$ , em relação a $(\beta_{13})$

Aplicando o que ficou acima concluído para pares de pontos simétricos em relação a  $(\beta_{13})$ , vem que, também para duas retas  $(r)$  e  $(\bar{r})$  simétricas em relação a  $(\beta_{13})$ , as épuras trazem suas projeções de nomes contrários simétricas em relação à linha de terra, como exemplificado para retas horizontal (Figura 527), de perfil (Figura 528) e qualquer (Figura 529), resultando, respectivamente, para suas simétricas, uma frontal, outra de perfil e outra qualquer.

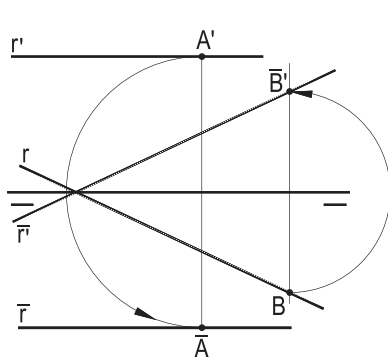


Figura 527

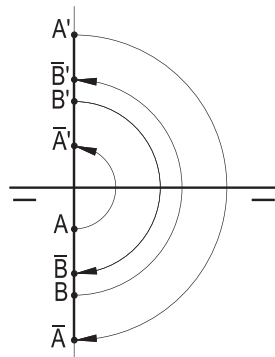


Figura 528

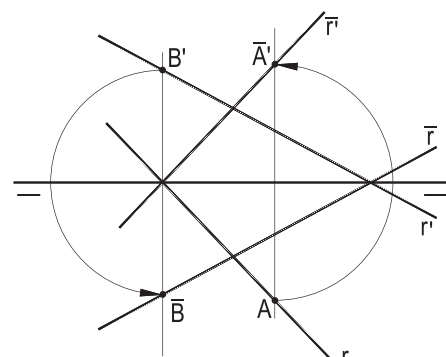


Figura 529

**134 – Projeções da figura ( $\bar{f}$ ), simétrica de uma figura plana dada ( $f$ ), em relação a ( $\beta_{13}$ )**

Da mesma forma que para pontos e retas, duas figuras planas simétricas em relação a ( $\beta_{13}$ ) apresentam, em épura, projeções de nomes contrários simétricas em relação à linha de terra (Figuras 530, 531 e 532).

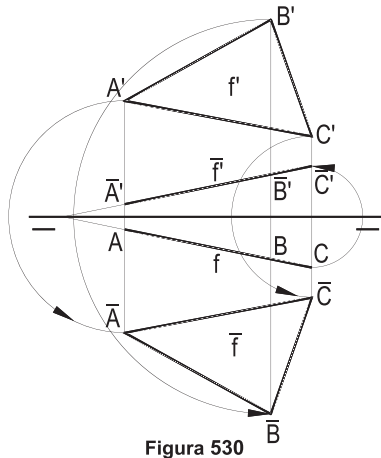


Figura 530

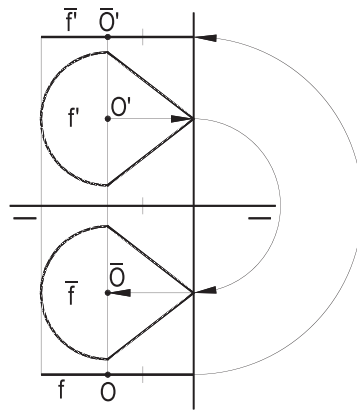


Figura 531

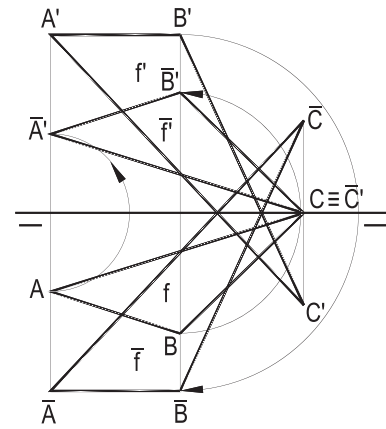


Figura 532

**135 – Projeções do poliedro simétrico de um poliedro dado em relação a ( $\beta_{13}$ )**

Tal como para pontos, retas e figuras planas, dois poliedros simétricos em relação a ( $\beta_{13}$ ) têm, em épura, projeções de nomes contrários simétricas em relação a ( $\pi'\pi$ ), visto que tal propriedade ocorre para todos os seus pontos, como exemplificado na Figura 533 para o tetraedro (J)-(A)(B)(C) e seu simétrico ( $\bar{J}$ )-( $\bar{A}$ )( $\bar{B}$ )( $\bar{C}$ ) em relação a ( $\beta_{13}$ ).

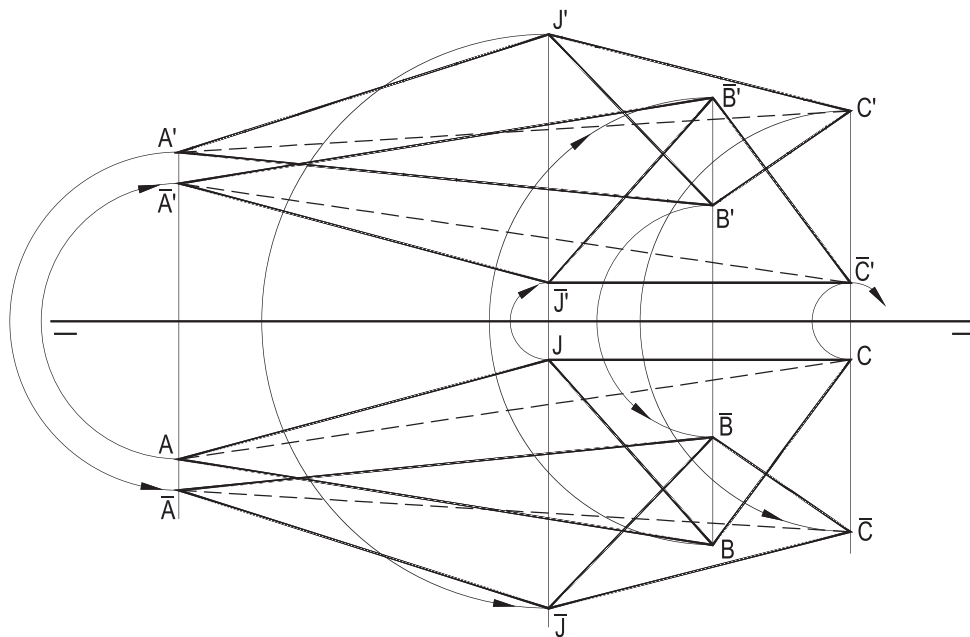


Figura 533

### 136 – Traços do plano simétrico de um plano dado em relação a $(\beta_{13})$

Tal como com pontos, retas e figuras, dois planos  $(\alpha)$  e  $(\bar{\alpha})$ , simétricos em relação a  $(\beta_{13})$ , apresentam, em é pura, traços de nomes contrários simétricos em relação a  $(\pi'\pi)$ , o que resulta nas seguintes particularidades:

1 – O plano  $(\bar{\alpha})$ , simétrico de um plano horizontal  $(\alpha)$  em relação a  $(\beta_{13})$ , é frontal, com afastamento igual à cota de  $(\alpha)$  (Figuras 534 e 536).

A interseção  $(i)$  de  $(\alpha)$  e  $(\bar{\alpha})$  é, naturalmente, uma reta fronto-horizontal, com projeções coincidentes, respectivamente, com os traços dos dois planos (Figura 536) e, por isso, é claro, pertencente a  $(\beta_{13})$ .

2 – O plano  $(\bar{\alpha})$  simétrico de um plano vertical  $(\alpha)$  em relação a  $(\beta_{13})$  é um plano de topo (Figura 537).

3 – O simétrico de um plano perfil, em relação a  $(\beta_{13})$ , é o próprio plano  $(\alpha)$  (Figura 538).

4 – O plano  $(\bar{\alpha})$  simétrico de um plano  $(\alpha)$ , paralelo a  $(\pi'\pi)$ , em relação a  $(\beta_{13})$ , é outro plano paralelo a  $(\pi'\pi)$ , apresentando a é pura correspondente (Figura 535) os traços de nomes contrários de  $(\alpha)$  e de  $(\bar{\alpha})$  simétricos em relação a  $(\pi'\pi)$ .

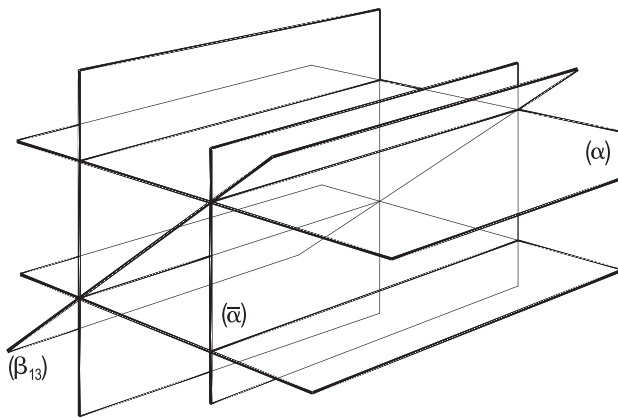


Figura 534

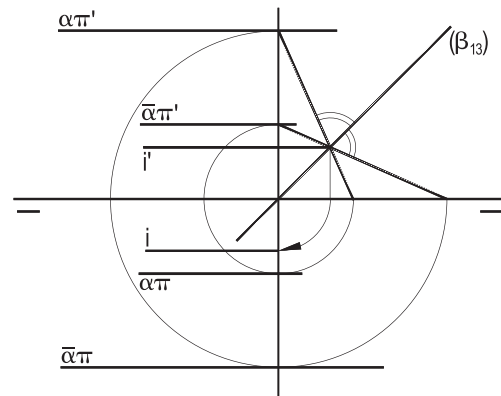


Figura 535

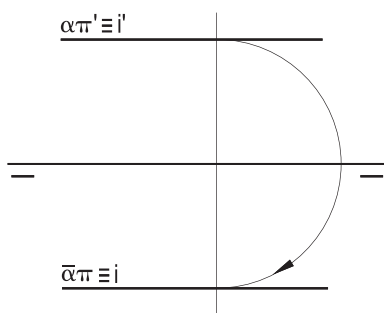


Figura 536

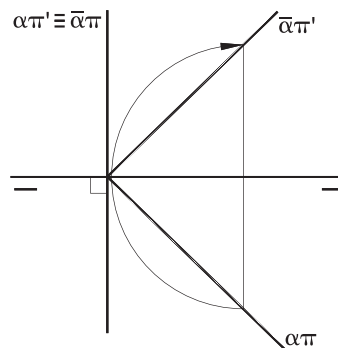


Figura 537

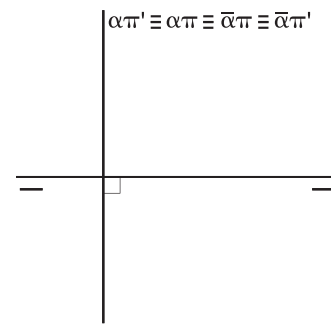


Figura 538

5 – O plano ( $\bar{\alpha}$ ) simétrico de um plano ( $\pi'\pi$ )-(M), em relação a ( $\beta_{13}$ ), é outro plano pertencente à linha de terra (Figura 539).

Observe-se a simetria dos pontos (M) e ( $\bar{M}$ ), que definem os dois planos, em relação a ( $\beta_{13}$ ).

6 – O plano ( $\bar{\alpha}$ ) simétrico de um plano qualquer ( $\alpha$ ), em relação a ( $\beta_{13}$ ), é outro plano qualquer, com traços, em épura, simétricos dos de nomes contrários de ( $\alpha$ ), em relação à linha de terra (Figura 540).

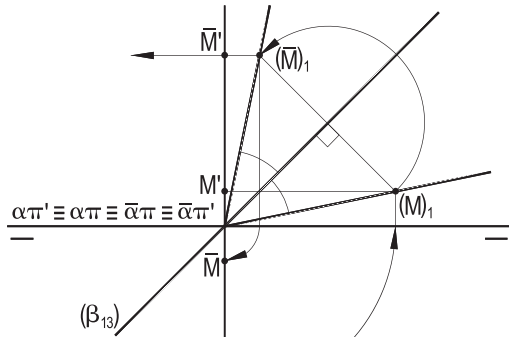


Figura 539

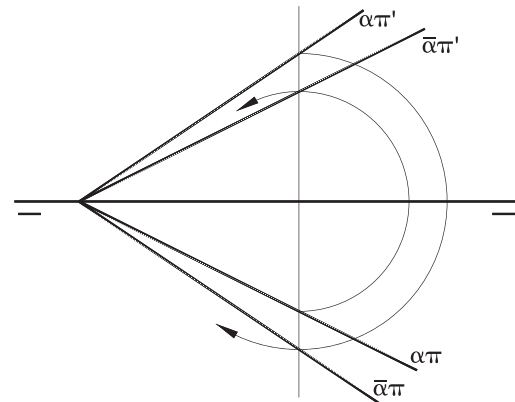


Figura 540

### 137 – Produto de simetrias em relação aos bissetores

Sabe-se (número 108.2) que o produto de duas simetrias consecutivas em relação a dois planos perpendiculares resulta na simetria, em relação à sua interseção, dos pontos, ou figuras, inicial e final. Assim, o produto de duas simetrias consecutivas, em relação a ( $\beta_{13}$ ) e a ( $\beta_{24}$ ), ou na ordem inversa, é igual à simetria em relação a ( $\pi'\pi$ ) dos dois entes envolvidos, como indicado nas Figuras 541 e 542, abaixo, onde, para um ponto dado (M), ( $\bar{M}_1$ ) é o seu simétrico em relação a ( $\beta_{13}$ ) e ( $\bar{M}_2$ ) o simétrico de ( $\bar{M}_1$ ) em relação a ( $\beta_{24}$ ), ( $\bar{M}_2$ ) sendo o simétrico de (M) em relação a ( $\beta_{13}$ ).

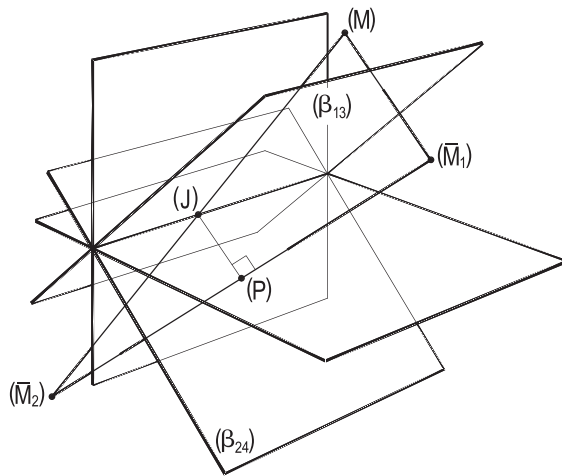


Figura 541

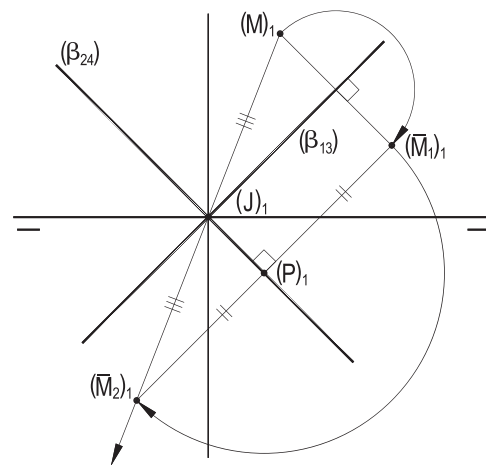


Figura 542



# CAPÍTULO IX

## HOMOLOGIA E AFINIDADE

### 138 – Homografia

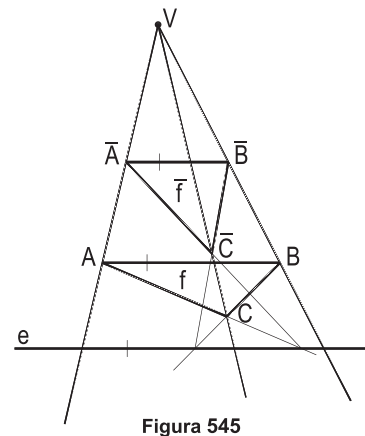
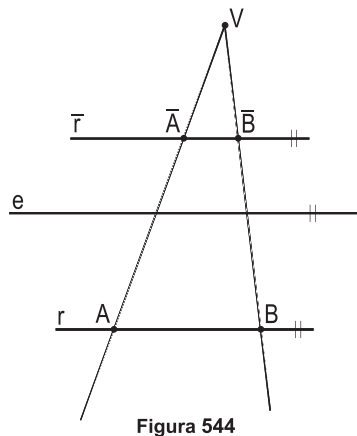
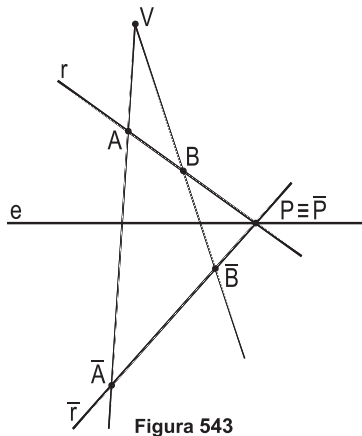
Homografia é toda dependência entre duas figuras planas que correspondem a posições obedientes a determinadas condições. Em tais correspondências as figuras associam-se ponto a ponto e reta a reta biunivocamente, cada qual numa das figuras, que são ditas homográficas.

### 139 – Homologia

Homologia é a transformação geométrica de uma figura plana  $f$  em outra  $\bar{f}$ , tal que a cada ponto de uma corresponda um, e apenas um, ponto da outra, os dois sempre colineares com um ponto fixo  $V$  e tal que duas retas correspondentes, uma dada  $r$  e outra  $\bar{r}$ , dela transformada, concorram sobre uma reta fixa  $e$  (Figura 543), ou lhe sejam paralelas (Figura 544).

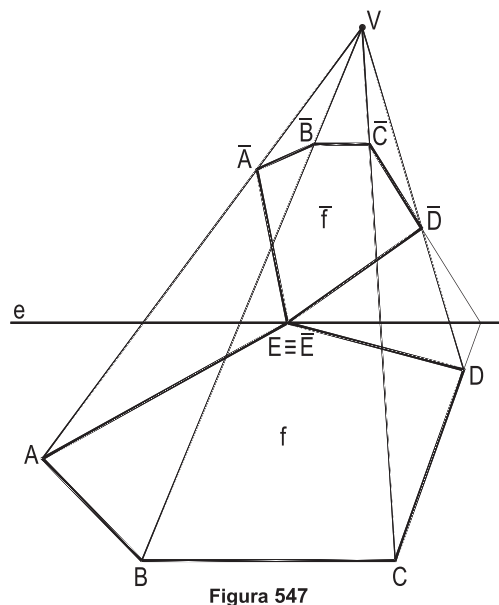
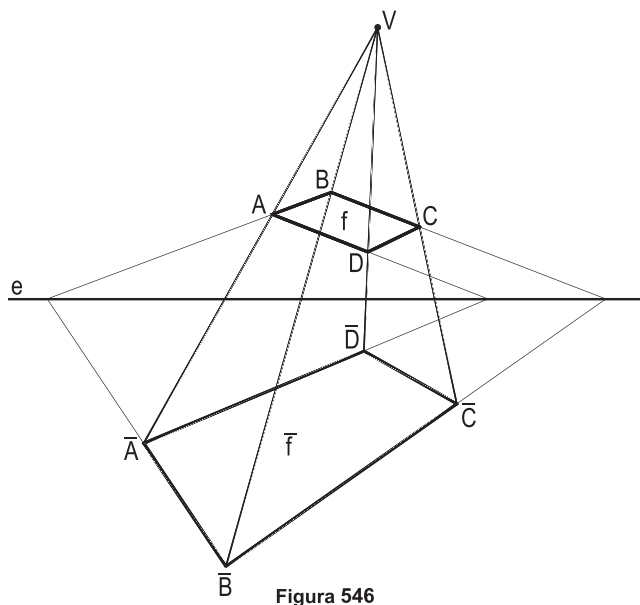
O ponto fixo  $V$  e a reta fixa  $e$  são respectivamente denominadas centro, ou polo, e eixo da homologia e os entes correspondentes são ditos homólogos. As retas que reúnem dois pontos homólogos são os raios da homologia. Os pontos, como  $P \equiv \bar{P}$ , comuns a um par de retas homólogas  $r$  e  $\bar{r}$  e pertencentes ao eixo da homologia são ditos pontos duplos.

Observe-se que a homologia pode associar figuras de semiplanos diferentes em relação ao eixo (Figuras 543 e 544), ou num mesmo semiplano limitado por esse eixo (Figura 545).



Pode, também, acontecer que a figura dada seja seccionada pelo eixo da homologia e que, por isso, sua afim fique também cortada pelo eixo, como exemplificado adiante (ver Figura 560).

E mais, que a figura  $\bar{f}$ , transformada de outra, dada,  $f$ , por homologia, num determinado sistema, pode resultar ampliada (Figura 546) ou reduzida (Figura 547), em relação à dada, tudo dependendo das posições relativas entre a figura dada  $f$  e dos elementos determinantes do sistema de homologia estabelecido (o centro  $V$  e o eixo  $e$ ).



## 140 – Observações

1 – O eixo da homologia é o lugar geométrico dos pontos duplos.

2 – A homóloga da reta que passa pelo centro de uma homologia coincide com ela, visto que ambas têm por suporte o mesmo raio dessa homologia.

3 – A homóloga de uma reta dada paralela ao eixo é também paralela ao eixo  $e$ , portanto, à dada.

Porque o ponto duplo de concurso das duas é o ponto impróprio do eixo.

4 – Em toda homologia, mantêm-se as pertinências de pontos a retas. Assim, o homólogo do ponto comum a duas retas concorrentes é o ponto de cruzamento das retas homólogas daquelas duas.

5 – Os valores dos ângulos e dos comprimentos dos segmentos não se conservam nas homologias.

### 141 – Determinação do sistema

Um sistema de homologia fica, habitualmente, determinado quando são dados seu centro  $V$ , seu eixo  $e$  e um par de pontos homólogos  $P$  e  $\bar{P}$  (Figura 548), naturalmente alinhados com  $V$ .

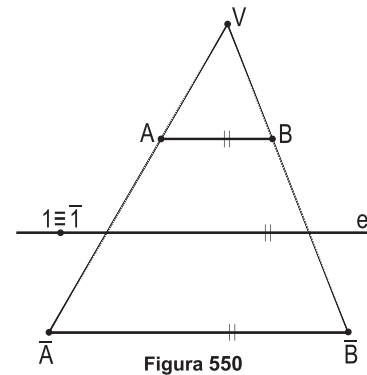
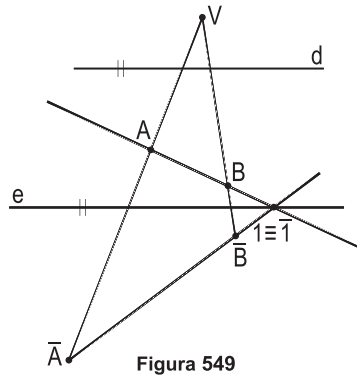
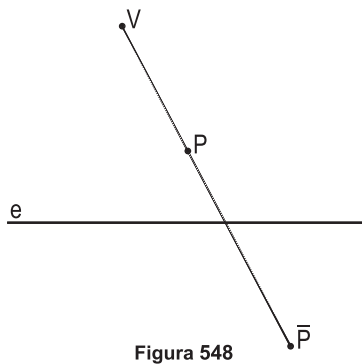
Outras combinações de dados podem, também, definir um sistema homológico, como se passa a exemplificar.

1 – Dados dois pares de pontos homólogos  $A$  e  $\bar{A}$  e  $B$  e  $\bar{B}$ , tais que sejam oblíquas as retas  $AB$  e  $\bar{A}\bar{B}$ , além da direção  $d$  do eixo (Figura 549).

Os raios  $A\bar{A}$  e  $B\bar{B}$  dão, por corte, o polo  $V$  e, pelo ponto duplo  $1 \equiv \bar{1}$  das retas  $AB$  e  $\bar{A}\bar{B}$ , com a direção  $d$ , vem o eixo  $e$ , retornando-se às condições anteriores.

2 – Dados dois pares de pontos homólogos  $A$  e  $\bar{A}$  e  $B$  e  $\bar{B}$ , tais que sejam paralelas as retas  $AB$  e  $\bar{A}\bar{B}$ , além de um ponto duplo  $1 \equiv \bar{1}$  (Figura 550).

Os raios  $A\bar{A}$  e  $B\bar{B}$  trazem, como no caso anterior, o polo  $V$  e, pelo ponto duplo, com a direção de  $AB$  e  $\bar{A}\bar{B}$ , vem o eixo  $e$ .



### 142 – Observação

Além dos acima detalhados, um sistema de homologia pode ser determinado por diferentes conjuntos de elementos dados, como apresentaremos, durante o desenvolvimento da matéria (ver número 149).

### 143 – Determinação do homólogo de um ponto dado

Para a determinação do ponto  $\bar{A}$ , homólogo de um ponto dado  $A$ , num sistema dado por seu polo  $V$ , seu eixo  $e$  e por um par de pontos homólogos  $P$  e  $\bar{P}$ , naturalmente alinhados com  $V$ , diversas construções podem ser utilizadas.

Há três hipóteses a considerar:

1 – Situação genérica, em que A e P formem uma reta não paralela ao eixo (Figura 551), quando basta obter o ponto de corte da reta PA com o eixo, duplo, portanto, e, por ele, a reta homóloga de PA, passando por  $\bar{P}$ , que cortará o raio VA, proporcionando  $\bar{A}$ .

2 – Posição particular, com a reta PA paralela ao eixo e (Figura 552), o que obriga que sua homóloga tenha a mesma direção, trazendo, no corte com o raio VA, o homólogo  $\bar{A}$  procurado.

3 – Outra situação particular em que A pertença ao raio VPP (Figura 553), bastando utilizar uma reta auxiliar r, arbitrada, por P, e sua homóloga  $\bar{r}$ , além das paralelas A2 e  $\bar{A}\bar{2}$  ao eixo, para determinar  $\bar{A}$ .

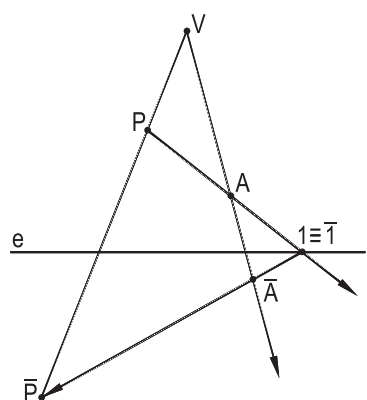


Figura 551

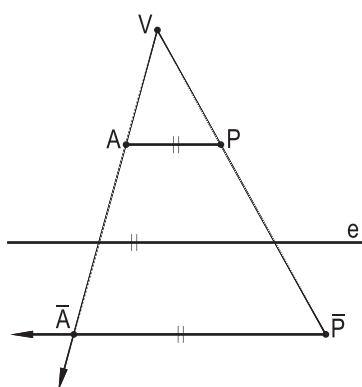


Figura 552

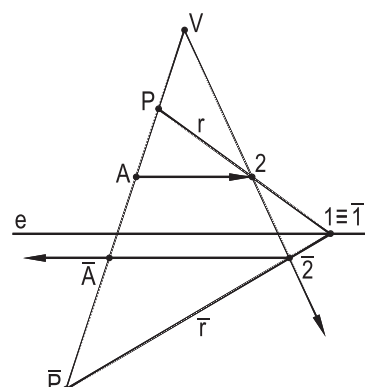


Figura 553

### 144 – Determinação da homóloga de uma reta dada

Para construir a homóloga  $\bar{r}$  de uma reta dada r, num sistema definido por seu polo V, seu eixo e e um par de pontos homólogos P e  $\bar{P}$ , exteriores a r, mas colineares com V, basta operar com uma reta s, por P, e sua homóloga  $\bar{s}$ , por  $\bar{P}$ , para obter um segundo ponto  $\bar{2}$ , da reta procurada  $\bar{r}$ , além de seu ponto duplo  $1 \equiv \bar{1}$  (Figuras 554 e 555), ou, ainda, com uma segunda auxiliar t e com sua homóloga, caso o ponto duplo de r seja inacessível (Figura 556).

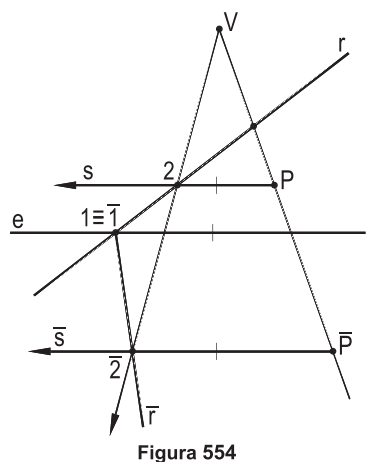


Figura 554

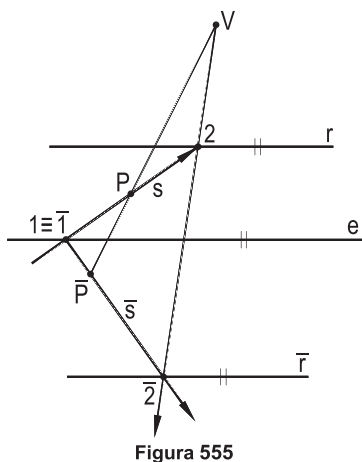


Figura 555

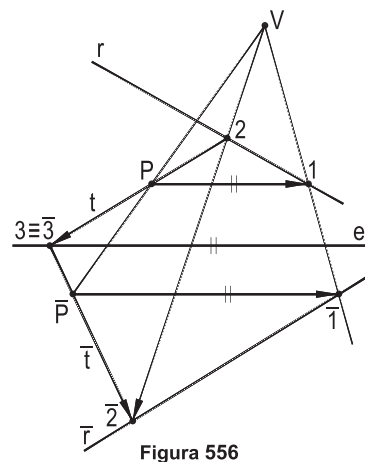


Figura 556

## 145 – Construção do homólogo de um polígono dado

A construção do polígono homólogo de um polígono dado, num sistema definido por seu polo  $V$ , seu eixo  $e$  e por um par de pontos  $P$  e  $\bar{P}$ , se faz pela obtenção dos vértices e/ou dos lados homólogos dos dados, como antes detalhado.

Os exemplos a seguir apresentados mostram polígonos dados, respectivamente, em posição genérica (Figura 557), com um lado  $AE$  sobre o eixo (Figura 558), com um lado  $AB$  colinear com o polo  $V$  (Figura 559) e sendo seccionado pelo eixo (Figura 560).

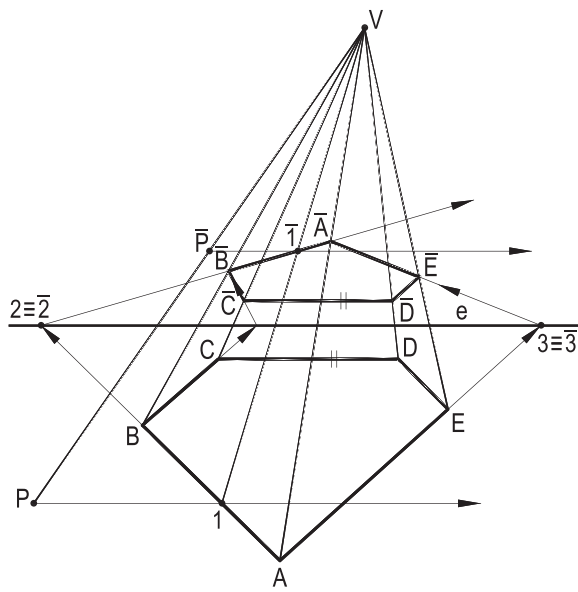


Figura 557

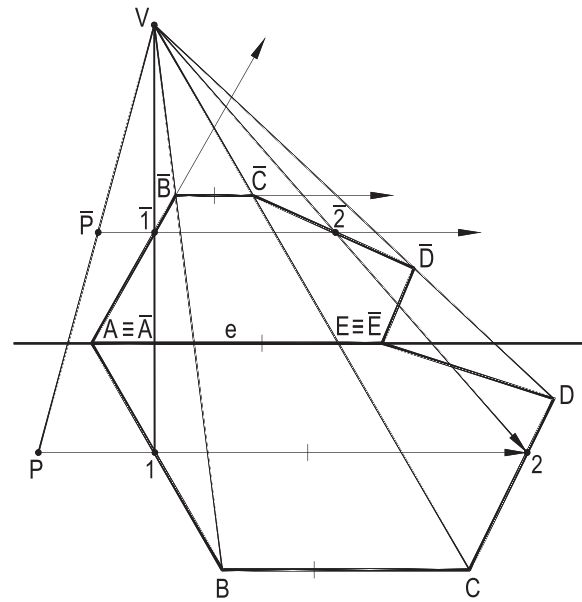


Figura 558

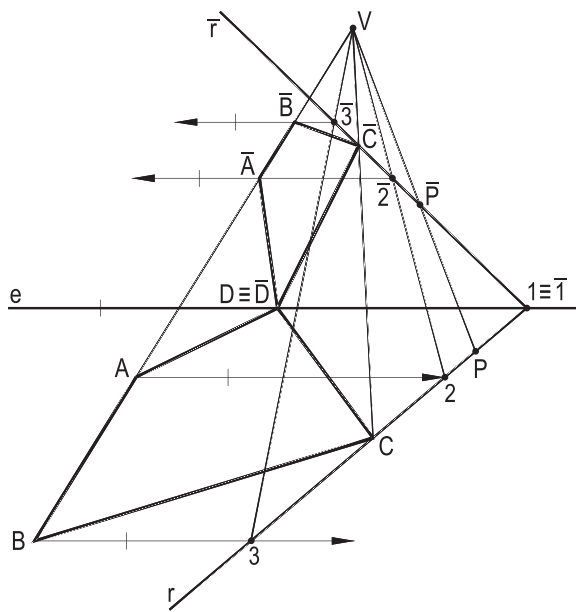


Figura 559

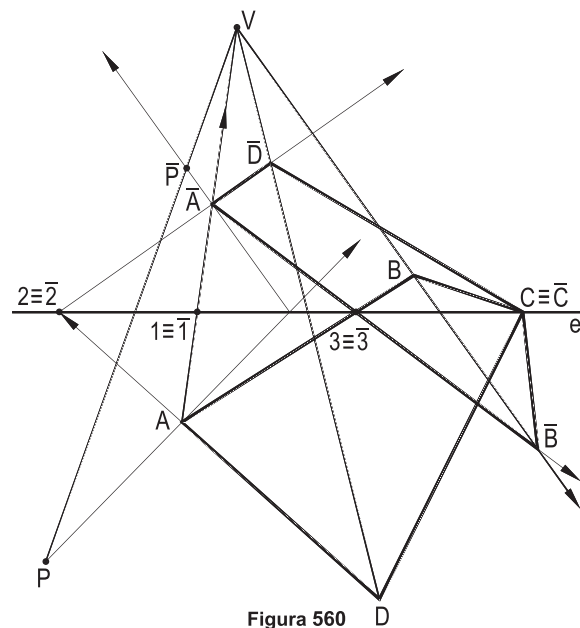


Figura 560

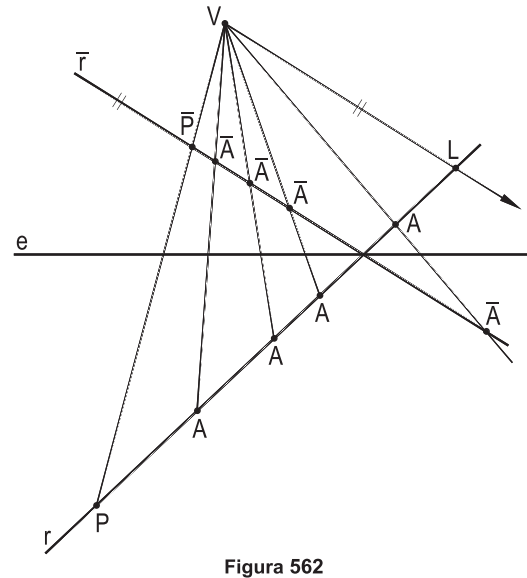
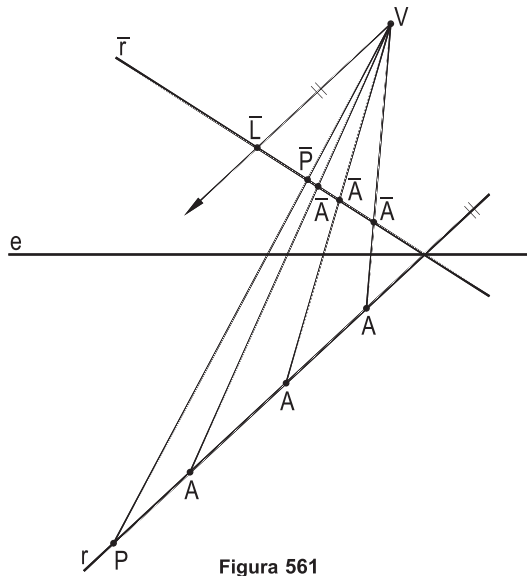
## 146 – Teorema

Num determinado sistema de homologia, que associe dois conjuntos de pontos, ou figuras, o lugar geométrico dos homólogos dos pontos impróprios de um dos conjuntos é uma reta paralela ao eixo da homologia.

Demonstração: Seja um sistema de homologia definido por seu polo  $V$ , seu eixo  $e$  e por um par de pontos homólogos  $P$  e  $\bar{P}$  e consideremos, para análise, uma reta  $r$ , genérica, de um dos conjuntos associados e sua homóloga  $\bar{r}$ .

Façamos, um ponto  $A$  descrever a reta  $r$  e estudemos seus homólogos  $\bar{A}$ , naturalmente sobre  $\bar{r}$ , observando que, para obter o homólogo do ponto impróprio  $A_\infty$  de  $r$ , o raio a utilizar tem que ser o paralelo à reta  $r$ , proporcionando, por correspondência, seu homólogo em  $\bar{r}$ , que designaremos  $\bar{L}$  (Figura 561).

Da mesma forma, considerando, agora, pontos  $\bar{A}$  de  $\bar{r}$ , e seus homólogos  $A$ , em  $r$ , o ponto de  $r$  que corresponde ao ponto impróprio  $\bar{A}_\infty$  é aquele que se obtém com o raio da homologia paralelo a  $\bar{r}$ , que anotaremos como  $L$  (Figura 562).



Posto isso, voltemos a considerar um sistema de homologia definido por seu polo  $V$ , seu eixo  $e$  e por um par  $P$  e  $\bar{P}$  de pontos homólogos, além de duas retas paralelas  $r_1$  e  $r_2$ , da região original, com direção genérica, e, para construir suas homólogas  $\bar{r}_1$  e  $\bar{r}_2$ , utilizemos o par de retas auxiliares homólogas  $t$  e  $\bar{t}$ , paralelas ao eixo, traçadas pelos pontos  $P$  e  $\bar{P}$ , que proporcionam, além de  $\bar{r}_1$  e de  $\bar{r}_2$ , os segmentos  $AB$ ,  $12$  e  $\bar{A}\bar{B}$ , respectivamente, entre  $r_1$  e  $r_2$ , sobre o eixo e entre  $\bar{r}_1$  e  $\bar{r}_2$ , sobre  $\bar{t}$  (Figura 563).

O ponto  $\bar{L}$ , homólogo do ponto impróprio da direção das paralelas  $r_1$  e  $r_2$ , construído como detalhado acima, traz os triângulos semelhantes  $\bar{L}\bar{A}\bar{B}$  e  $\bar{L}12$ , que asseguram que a razão entre suas alturas iguale a razão entre  $\bar{A}\bar{B}$  e  $12$ , ou entre  $\bar{A}\bar{B}$  e  $AB$ , já que  $12 = AB$ , como paralelas entre paralelas.

Essa razão, mostram os triângulos semelhantes  $\bar{V}\bar{P}\bar{B}$  e  $VPB$ , é igual à constante  $\bar{V}\bar{P} / VP$ , para os pontos dados  $V, P$  e  $\bar{P}$ , o que implica em que o ponto  $\bar{L}$  fique a uma distância conhecida e invariável do eixo  $e$ .

Assim, o lugar geométrico dos pontos  $\bar{L}$ , homólogos dos pontos impróprios das retas da região original do plano, é uma reta  $R\bar{L}$  (Figura 563) paralela ao eixo da homologia.

Da mesma forma, considerando, na região dos pontos ou figuras transformados, duas retas  $\bar{r}_1$  e  $\bar{r}_2$  paralelas, homólogas de duas retas  $r_1$  e  $r_2$ , do sistema original, assim como o ponto  $L$  a elas comum  $e$ , sabendo que ele é o homólogo do ponto impróprio das paralelas  $\bar{r}_1$  e  $\bar{r}_2$ , os pares de triângulos semelhantes  $L12$  e  $LAB$  e  $\bar{V}\bar{P}\bar{B}$  e  $VPB$  (Figura 564) asseguram ser constante a distância do ponto  $L$  ao eixo  $e$ .

Fica, então, demonstrado que, num determinado sistema de homologia, o lugar geométrico dos homólogos dos pontos impróprios de cada conjunto associado é uma reta paralela ao eixo de homologia.

### 147 – Retas limites

Essas duas paralelas  $RL$  e  $R\bar{L}$  (Figuras 563 e 564) são denominadas retas limites do sistema de homologia considerado.

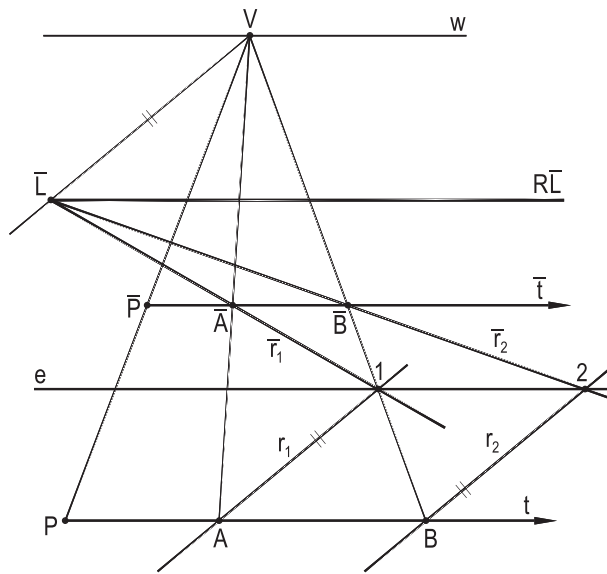


Figura 563

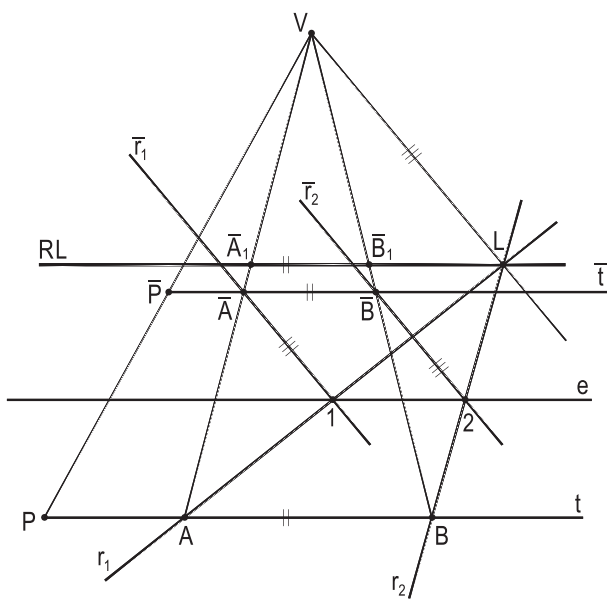


Figura 564

## 148 – Teorema

Em todo sistema de homologia, são iguais as distâncias de uma reta limite ao polo e da outra ao eixo da homologia.

Demonstração: Seja um sistema de homologia de polo  $V$ , eixo  $e$ , com um par  $P$  e  $\bar{P}$  de pontos homólogos e suas retas limites  $RL$  e  $R\bar{L}$  (Figura 565).

Pela própria construção das duas retas limites  $RL$  e  $R\bar{L}$  (números 146 e 147), o paralelogramo  $V\bar{L}1L$  proporciona a igualdade dos triângulos retângulos  $VN\bar{L}$  e  $LM1$ , por terem lados respectivamente paralelos e as hipotenusas iguais, como lados opostos do paralelogramo, o que assegura a igualdade de seus catetos  $VN$  e  $LM$ , que medem as distâncias de uma reta limite ao polo  $V$  e da outra ao eixo  $e$  da homologia, como se queria demonstrar.

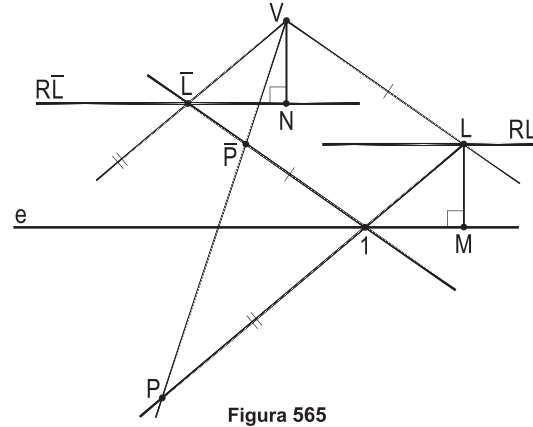


Figura 565

## 149 – Determinação do sistema de homologia, a partir das retas limites

Algumas hipóteses se põem para a determinação de um sistema homológico, a partir de suas retas limites:

1 – Dados o centro  $V$ , o eixo  $e$  e a reta limite  $RL$  do ambiente original.

Arbitrados um ponto  $L$  de  $RL$  e um ponto duplo  $1$  do eixo, a paralela  $\bar{r}$  a  $VL$ , por  $1$ , é a homóloga da reta  $r$ , formada pelos pontos  $L$  e  $1$  (Figura 566), e um raio qualquer proporciona, em  $r$  e em  $\bar{r}$ , o par de pontos  $P$  e  $\bar{P}$ , com o que retorna-se às condições mais habituais (ver número 141).

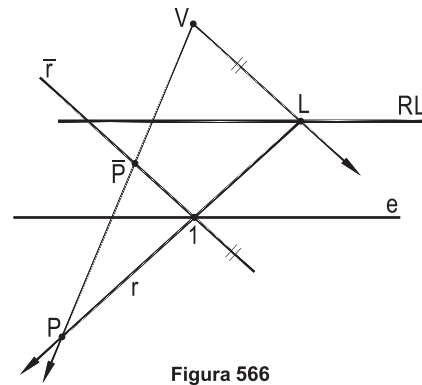


Figura 566

2 – Dados o centro  $V$ , o eixo  $e$  e a reta limite  $R\bar{L}$  do ambiente transformado.

Arbitrados um ponto  $\bar{L}$  de  $R\bar{L}$  e outro  $1$  do eixo, forma-se o par de retas homólogas  $r$  e  $\bar{r}$ ,  $r$  paralela à reta  $V\bar{L}$  (Figura 567), e um raio qualquer proporciona o par de pontos homólogos  $P$  e  $\bar{P}$  procurados, para que se volte às condições mais comuns.

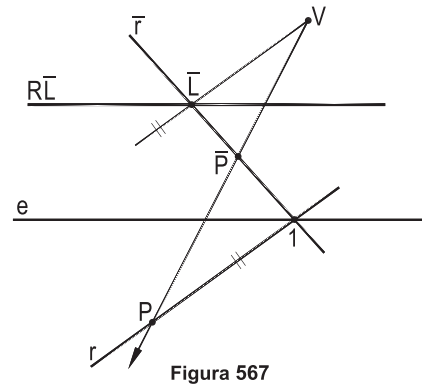


Figura 567



3 – Dados o eixo  $e$ , a reta limite  $R\bar{L}$  e um par de pontos homólogos  $P$  e  $\bar{P}$ .

Dada a reta limite transformada  $R\bar{L}$ , arbitrado um ponto duplo 1 do eixo  $e$ ,  $P1$  e  $1\bar{P}$  trazem duas retas homólogas  $r$  e  $\bar{r}$ , e a paralela a  $1\bar{P}$ , por  $\bar{L}$ , ponto de corte de  $P1$  com  $R\bar{L}$ , proporciona, no cruzamento com a reta  $P\bar{P}$ , o polo  $V$ , que completa o sistema (Figura 568).

4 – Dados o eixo  $e$ , a reta limite  $RL$  e um par de pontos homólogos  $P$  e  $\bar{P}$ .

Resolução equivalente à do exemplo anterior.

5 – Dados as duas retas limites  $RL$  e  $R\bar{L}$  e o polo  $V$  da homologia.

Construção imediata, por se saber que são iguais as distâncias do centro da homologia a uma das retas limites e da outra ao eixo (número 148). Assim, traçado o segmento 23 igual a  $V1$  (Figura 569), vem, por 3, o eixo  $e$ , retornando-se a um caso anterior.

6 – Dados as duas retas limites e o eixo da homologia.

Resolução idêntica ao exemplo anterior.

7 – Dados o polo  $V$ , um par de pontos homólogos  $P$  e  $\bar{P}$  e uma das retas limites ( $RL$  ou  $R\bar{L}$ ).

Simple, também, a resolução, pela escolha de um ponto  $\bar{L}$  qualquer da reta limite dada  $R\bar{L}$  e pelos traçados das retas  $V\bar{L}$  e, por  $\bar{P}$ , a paralela a  $V\bar{L}$ , que corta  $\bar{L}P$  num ponto duplo 1, proporcionando o eixo  $e$  (Figura 570), retornando-se a condições anteriores. E com construção equivalente, tivesse sido dada a outra reta limite, seria imediato obter o eixo  $e$ .

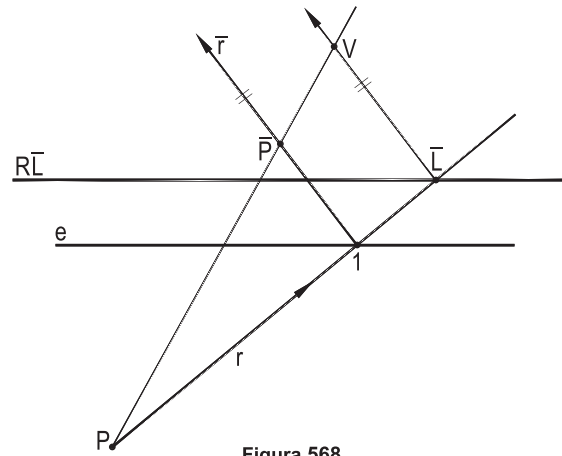


Figura 568

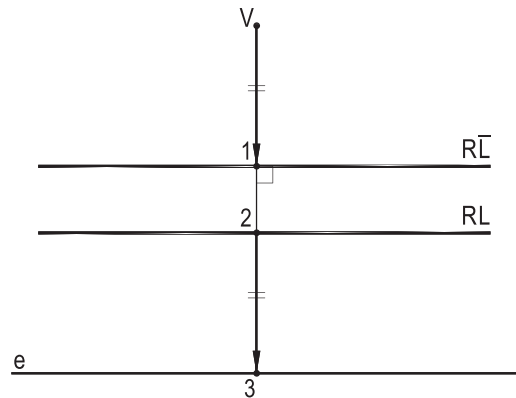


Figura 569

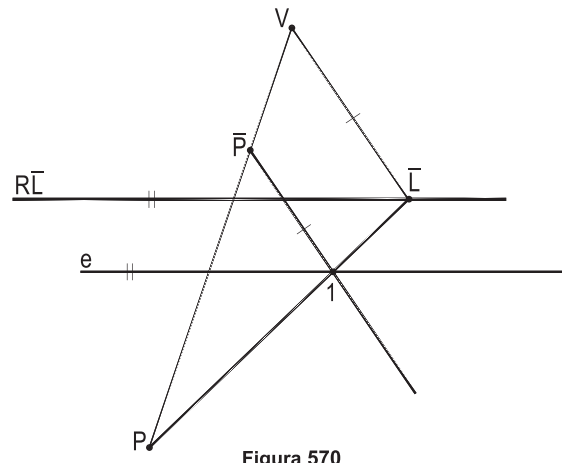


Figura 570

## 150 – Polígonos com um vértice ou um lado sobre sua reta limite

O homólogo de um polígono apoiado por um vértice em sua reta limite é uma linha poligonal aberta, seus lados limites sendo duas semirretas paralelas, correspondendo ao ponto impróprio, homólogo do vértice pertencente à reta limite (Figuras 571 e 572).

Quando o polígono dado se apoia por um lado em sua reta limite, seu homólogo é uma linha poligonal aberta, seus lados extremos sendo duas semirretas divergentes, cada qual trazendo o ponto impróprio homólogo de cada vértice do polígono dado situado na reta limite (Figuras 573 e 574).

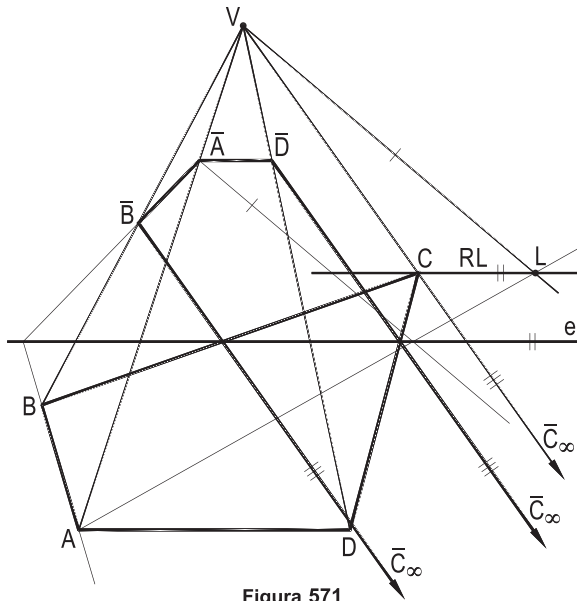


Figura 571

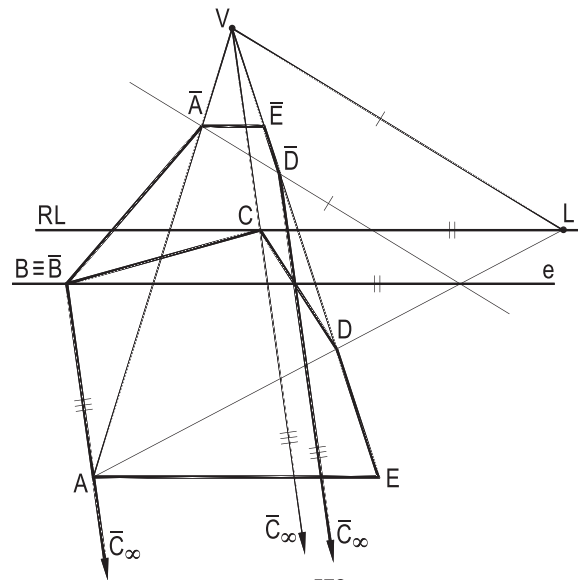


Figura 572

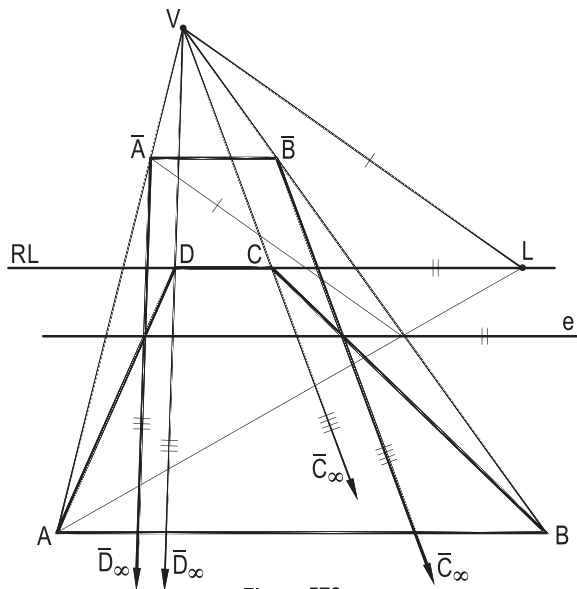


Figura 573

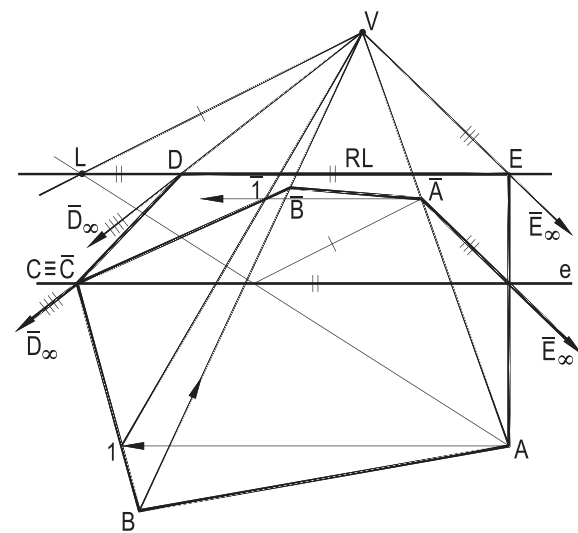


Figura 574

## 151 – Polígonos seccionados por uma reta limite

Quando o polígono dado é cortado por sua reta limite, tudo se passa como se ele fosse a soma de dois polígonos, ambos apoiados por um lado nessa reta limite (Figuras 575 e 576), lado esse correspondente ao segmento 12 formado pelos pontos de corte, no polígono dado, pela reta limite RL.

Com isso, a figura homóloga do polígono dado será composta por duas linhas poligonais abertas, com aberturas invertidas, cujos lados extremos são semirretas divergentes, cada qual correspondendo ao homólogo impróprio de cada um dos pontos de corte 1 e 2 do polígono dado com a reta limite considerada.

Assim são os dois exemplos (Figuras 575 e 576) ao lado, que trazem, respectivamente, os transformados do quadrilátero ABCD e do retângulo ABCD.

Observe-se que são colineares os pares de semirretas limites das poligonais abertas homólogas dos polígonos dados.

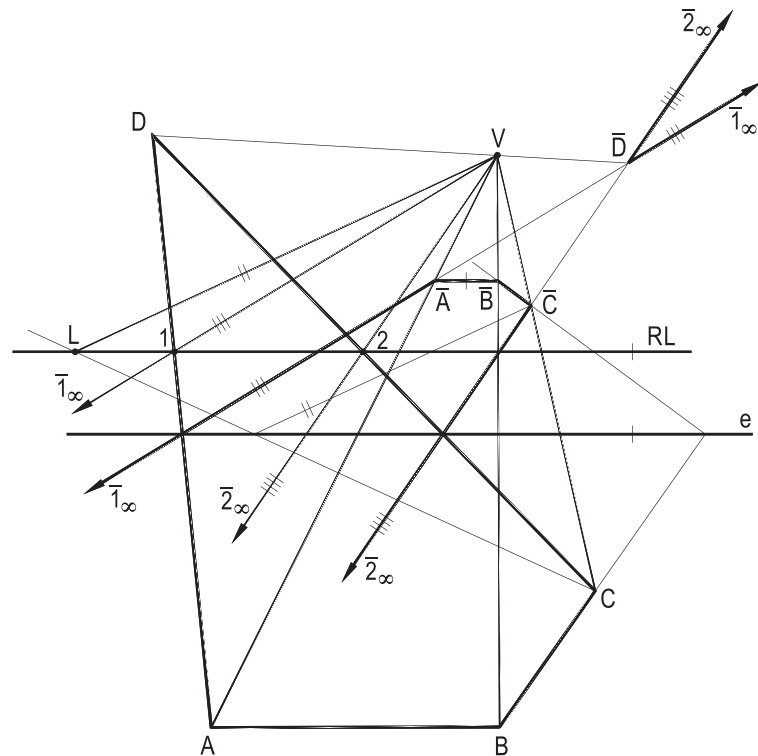


Figura 575

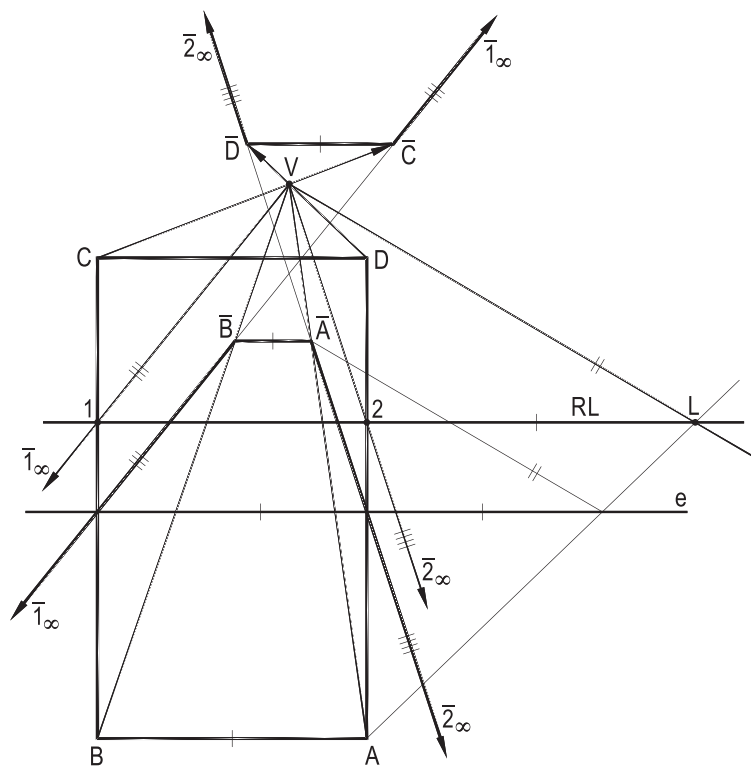


Figura 576

No terceiro e último exemplo foi utilizada a reta limite do ambiente transformado do dado, ao qual pertence o pentágono convexo ABCDE, com o detalhe particular de ter seu lado DE colinear com o polo V, numa paralela ao eixo. São os pontos 1 e 2 de corte do pentágono pela reta limite RL do conjunto a que pertence o polígono dado que proporcionam os homólogos impróprios  $\bar{1}_\infty$  e  $\bar{2}_\infty$ , que dão direções às semirretas divergentes que completam o par de poligonais abertas, compondo o homólogo do pentágono ABCDE (Figura 577).

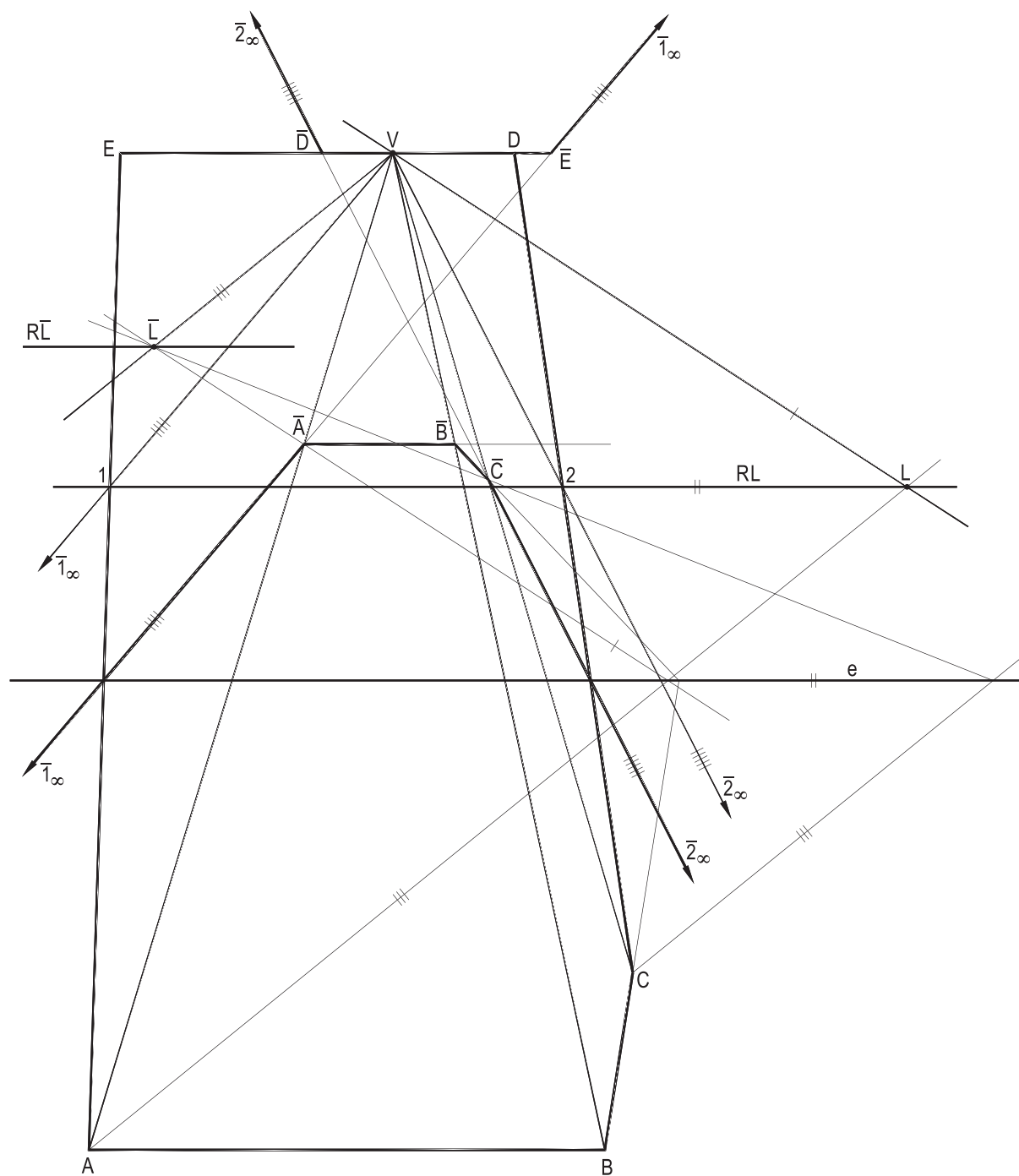


Figura 577

## 152 – Afinidade

Afinidade é o caso particular da homologia que tem seu polo rejeitado ao infinito, segundo determinada direção. Nessas condições, os raios da transformação geométrica correspondente são paralelos.

Assim, afinidade é a transformação geométrica de uma figura plana  $f$  em outra figura plana  $\bar{f}$ , de modo tal que a cada ponto de uma corresponda um, e apenas um, ponto da outra, os dois sempre situados sobre retas paralelas a uma reta fixa  $d$  e que duas retas correspondentes, como  $r$  e  $\bar{r}$  na Figura 579, cortem-se sobre o eixo  $e$  da transformação, ou que, como  $s$  e  $\bar{s}$ , na mesma figura, sejam paralelas a esse eixo.

O eixo da afinidade, tal como na homologia, é o lugar geométrico dos pontos duplos, a direção fixa dos raios é denominada direção da afinidade e os entes correspondentes, pontos, retas ou figuras, são ditos afins.

Conforme a direção  $d$  da afinidade seja oblíqua (Figuras 578 e 579), ou perpendicular (Figura 580), ao eixo, a afinidade é qualificada oblíqua ou ortogonal, respectivamente.

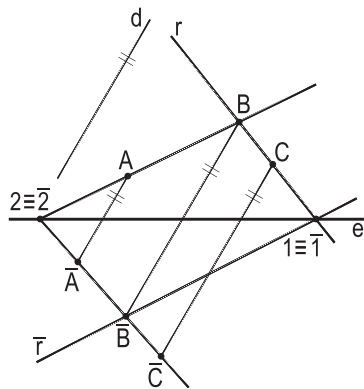


Figura 578

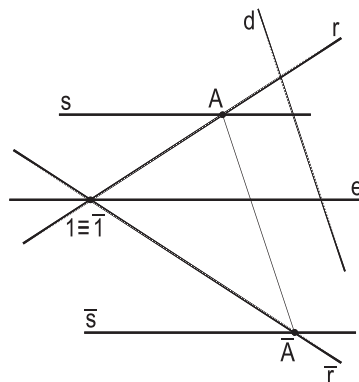


Figura 579

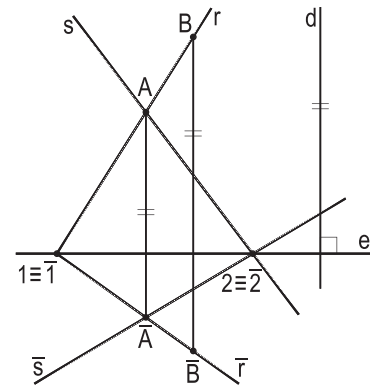


Figura 580

Naturalmente, duas figuras afins  $f$  e  $\bar{f}$  podem se situar num mesmo semiplano (Figura 581), ou opostos (Figura 582), em relação ao eixo  $e$  da afinidade.

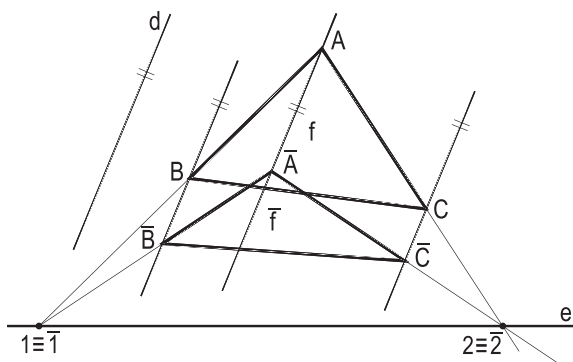


Figura 581

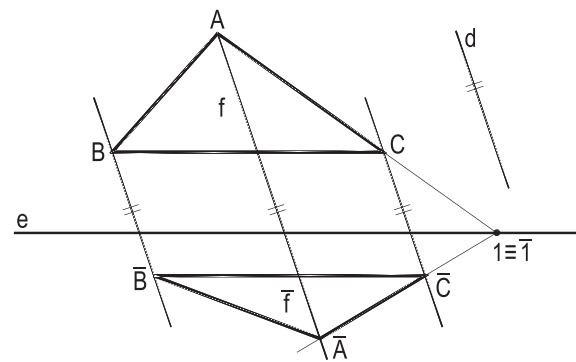


Figura 582

### 153 – Observações

1 – Num determinado sistema de afinidade, é constante a razão entre os segmentos  $XA$  e  $X\bar{A}$  formados, sobre cada raio, entre seu traço  $X$  com o eixo  $e$  e o par de pontos afins, como  $\bar{A}$  e  $A$ ,  $B$  e  $\bar{B}$ , etc. (Figura 583), tais as semelhanças entre os triângulos  $J\bar{A}\bar{A}$ ,  $J\bar{B}\bar{B}$ , etc., que os raios paralelos a  $d$  asseguram.

Essa razão  $XA/X\bar{A}$ , constante para cada sistema, é denominada razão da afinidade e pode, naturalmente orientados os segmentos  $XA$  e  $X\bar{A}$ , ser positiva (Figura 584) ou negativa (Figura 583), cabendo destacar o caso especial da afinidade ortogonal de razão  $-1$ , que resulta numa simetria em relação ao eixo  $e$  da afinidade (Figura 585).

2 – O paralelismo das retas conserva-se em qualquer afinidade, como, na Figura 583, as indicadas para as paralelas  $r$  e  $s$  e suas afins  $\bar{r}$  e  $\bar{s}$ , tudo assegurado pelas semelhanças dos triângulos  $J\bar{A}\bar{A}$  e  $J\bar{B}\bar{B}$ .

3 – As divisões proporcionais entre segmentos de retas paralelas se conservam nas afinidades, garantidas por essas mesmas semelhanças.

4 – O eixo de afinidade é o lugar geométrico dos pontos duplos na transformação, como nas homologias genéricas.

5 – Ao contrário, nas afinidades não existem retas limites, já que é impossível, nessa transformação geométrica, associar pontos impróprios de uma figura e afins próprios em sua figura correspondente.

6 – As afins das retas que tenham a mesma direção da afinidade considerada coincidem com elas.

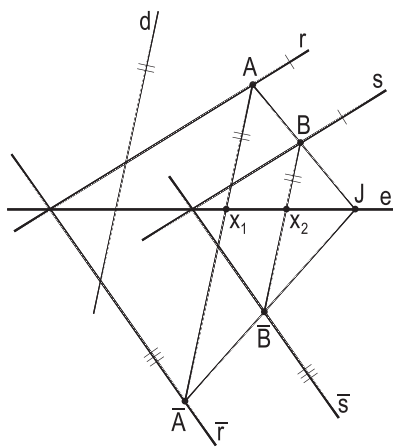


Figura 583

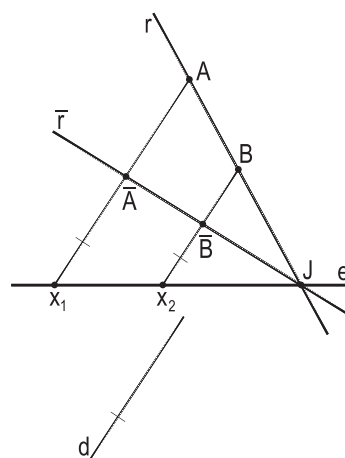


Figura 584

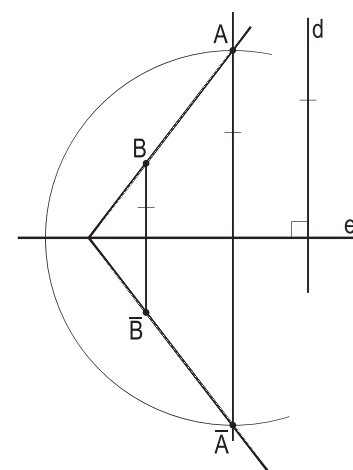


Figura 585

## 154 – Determinação do sistema

Um sistema de afinidade fica, usualmente, determinado quando são dados seu eixo  $e$  e um par de pontos afins  $A$  e  $\bar{A}$  (Figura 586), embora diversas outras combinações de dados possam ser organizadas para precisar o sistema, como as a seguir exemplificadas:

1 – Dados o eixo  $e$ , a direção  $d$  e a razão  $k = \frac{m}{n}$ , da afinidade.

Basta aplicar sobre uma reta  $r$  paralela a  $d$ , a partir do eixo, dois segmentos  $XA = m$  e  $X\bar{A} = n$ , para obter um par de pontos afins  $A$  e  $\bar{A}$ , retornando às condições habituais (Figura 587).

2 – Dadas duas retas concorrentes  $r$  e  $s$  e suas afins  $\bar{r}$  e  $\bar{s}$ .

Os pontos duplos  $1 \equiv \bar{1}$  e  $2 \equiv \bar{2}$  definem o eixo  $e$  e a reta  $A\bar{A}$  formada pelos pontos de concurso, a direção da afinidade (Figura 588).

3 – Dados três pares de pontos afins  $A$  e  $\bar{A}$ ,  $B$  e  $\bar{B}$ ,  $C$  e  $\bar{C}$ , situados sobre retas paralelas.

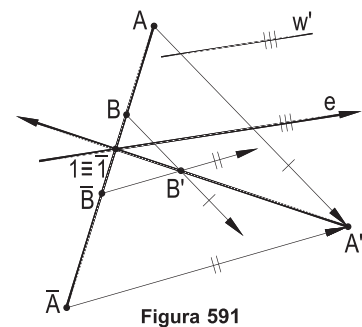
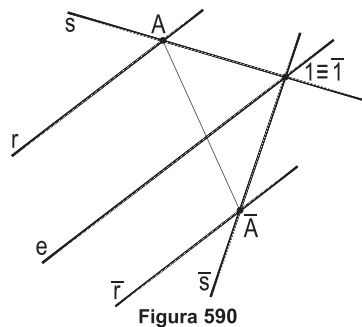
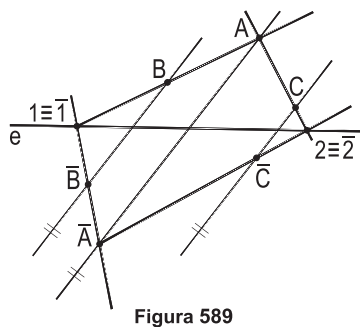
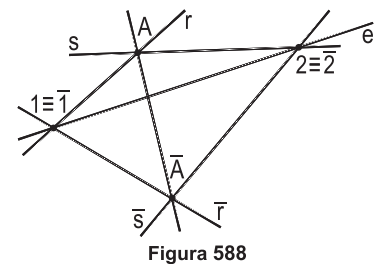
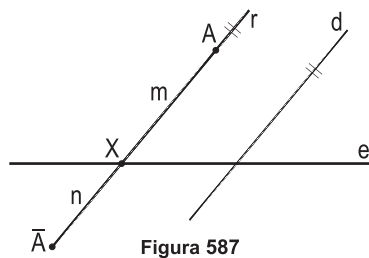
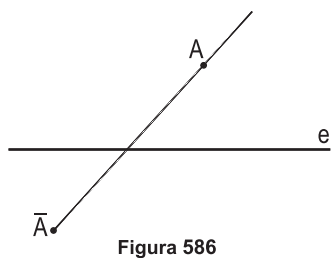
As retas  $AB$  e  $AC$  e suas afins  $\bar{A}\bar{B}$  e  $\bar{A}\bar{C}$  retornam às condições do item anterior (Figura 589).

4 – Dadas duas concorrentes  $r$  e  $s$  e suas afins  $\bar{r}$  e  $\bar{s}$ , sendo  $r$  e  $\bar{r}$  paralelas.

O eixo tem a direção de  $r$  e  $\bar{r}$ , conduzido pelo ponto duplo  $1 \equiv \bar{1}$  de  $s$  e  $\bar{s}$  (Figura 590).

5 – Dados dois pares de pontos afins  $A$  e  $\bar{A}$  e  $B$  e  $\bar{B}$ , todos colineares, e a direção  $w$  do eixo.

Com direções arbitradas,  $A$  e  $\bar{A}$  proporcionam  $A'$  e  $B$  e  $\bar{B}$  dão  $B'$ . A reta  $A'B'$  produz o ponto duplo  $1 \equiv \bar{1}'$ , por manter a proporção nas divisões de  $A\bar{A}$  e de  $B\bar{B}$  (Figura 591).



### 155 – Determinação do afim de um ponto dado

Dados o eixo  $e$  e dois pontos afins  $P$  e  $\bar{P}$ , a construção mais simples para obter, nesse sistema, o ponto  $\bar{A}$ , afim de um ponto dado  $A$ , consiste em traçar a reta  $PA$ , determinar seu traço  $J \equiv \bar{J}$  com o eixo, unir  $J$  a  $\bar{P}$  e traçar, por  $A$ , a paralela a  $P\bar{P}$ , que traz o ponto  $\bar{A}$ , pedido (Figura 592). No caso, muito particular, de  $A$  e  $P$  definirem uma paralela a  $e$ , as paralelas que completam o paralelogramo  $\bar{P}PA\bar{A}$  resolvem a questão (Figura 593) e, na posição desfavorável de  $A$  que corresponda a uma reta  $PA$ , cujo traço com o eixo  $e$  reste inacessível, basta arbitrar um par de retas afins  $t$  e  $\bar{t}$ , com o par de pontos afins dados  $P$  e  $\bar{P}$ , para, com as paralelas  $t_1$  e  $\bar{t}_1$  a elas (Figura 594), obter  $\bar{A}$ .

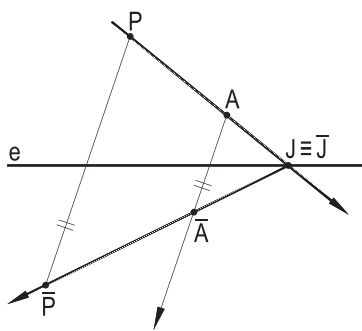


Figura 592

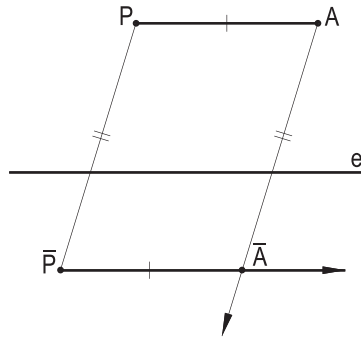


Figura 593

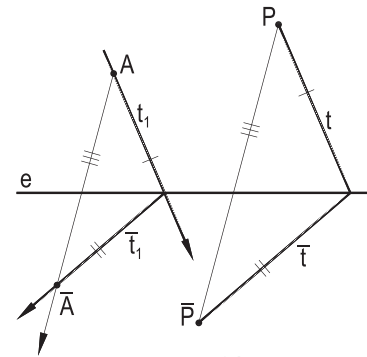


Figura 594

### 156 – Determinação da afim de uma reta dada

Para construir a reta  $\bar{r}$ , afim de uma outra dada,  $r$ , num sistema de afinidade dado pelo eixo  $e$  e por um par de pontos afins  $P$  e  $\bar{P}$ , basta determinar um ponto  $\bar{A}$ , afim de um arbitrado  $A$ , de  $r$ , além de seu ponto duplo  $J \equiv \bar{J}$ , pois sua união traz  $\bar{r}$  (Figura 595), ou uma paralela  $t$  a  $r$  e sua afim  $\bar{t}$ , que dá a direção de  $\bar{r}$  (Figura 596), ou mesmo um par de paralelas ao eixo, afins, para obter um segundo ponto  $\bar{A}$  de  $\bar{r}$  (Figura 597).

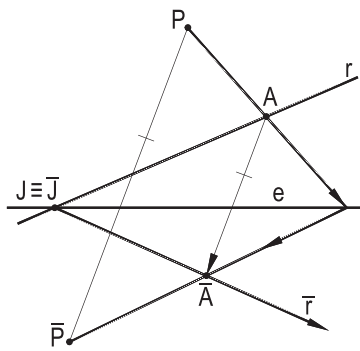


Figura 595

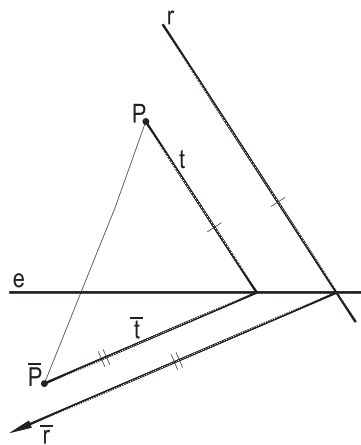


Figura 596

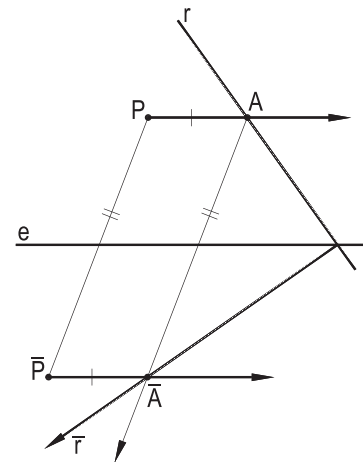


Figura 597



## 157 – Construção do afim de um polígono dado

Para construir o polígono afim de um polígono dado, basta determinar os afins dos vértices e/ou dos lados desse polígono, usando o anteriormente detalhado (números 155 e 156).

Os exemplos seguintes enfatizam a utilização de paralelas ao eixo (Figura 598), de lados paralelos (Figura 600), de retas auxiliares (Figuras 600 e 601) e de pontos duplos sobre o eixo da afinidade (Figuras 598, 599, 600 e 601).

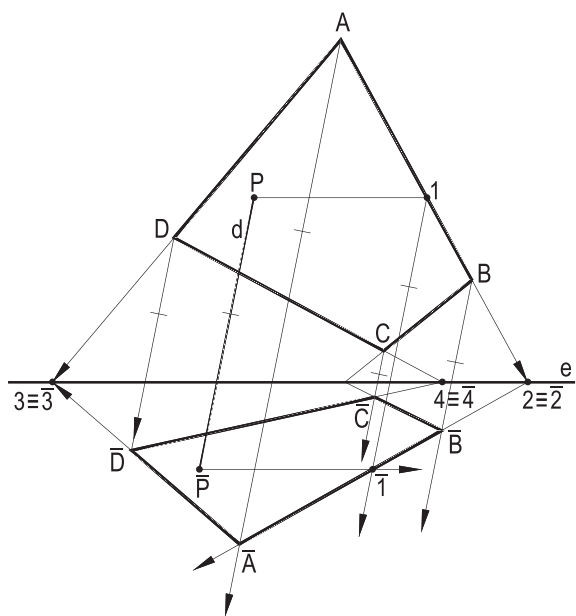


Figura 598

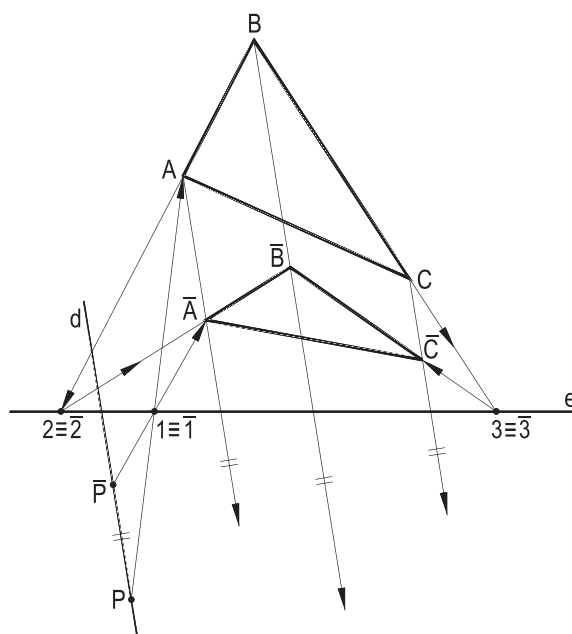


Figura 599

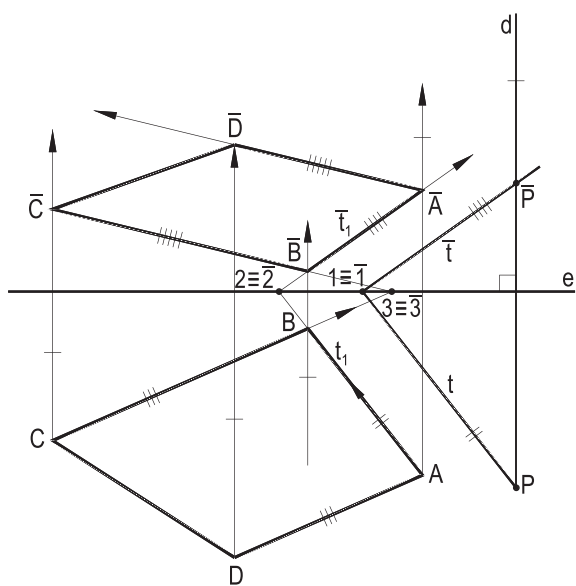


Figura 600

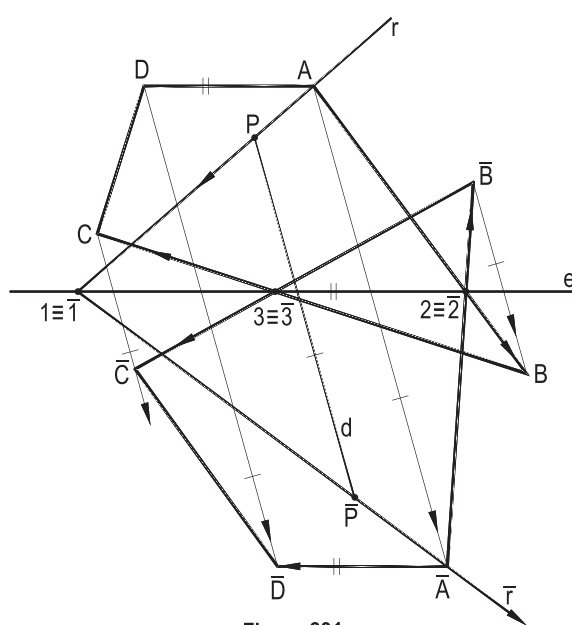


Figura 601

## 158 – Teorema

A projeção ortogonal e o produto do rebatimento de uma figura plana sobre um plano oblíquo ao seu são afins ortogonais.

Demonstração: Consideremos dois planos  $(\gamma)$  e  $(\alpha)$ , oblíquos, assim como um polígono de  $(\gamma)$ , sua projeção ortogonal sobre  $(\alpha)$  e seu rebatimento, em torno da charneira  $(\alpha\gamma)$  sobre  $(\alpha)$ , e observemos que, em tal rebatimento, cada vértice do polígono pertencente a  $(\gamma)$  descreve um arco de círculo pertencente a um plano perpendicular a essa charneira, o que garante que cada par de pontos formado por um vértice da projeção do polígono dado e por seu rebatimento defina uma reta perpendicular a  $(\alpha\gamma)$  (Figura 602).

Além disso, observe-se que cada reta suporte de um lado do polígono, sua projeção e seu rebatimento sobre  $(\alpha)$  encontram-se num ponto da charneira, seu traço com o plano  $(\alpha)$ , fixo durante o movimento do rebatimento (Figura 602). Ou lhe são, eventualmente, paralelas.

Assim, o polígono do rebatimento é uma transformação daquele da projeção ortogonal sobre  $(\alpha)$ , tal que a cada ponto de um corresponda um ponto do outro sempre, os pares correspondentes sobre uma reta perpendicular a  $(\alpha\gamma)$  e tais que cada par de retas correspondentes cortem-se sobre  $(\alpha\gamma)$ , ou que lhe sejam paralelas. Em outras palavras (número 152), são ortogonalmente afins, como se queria demonstrar.

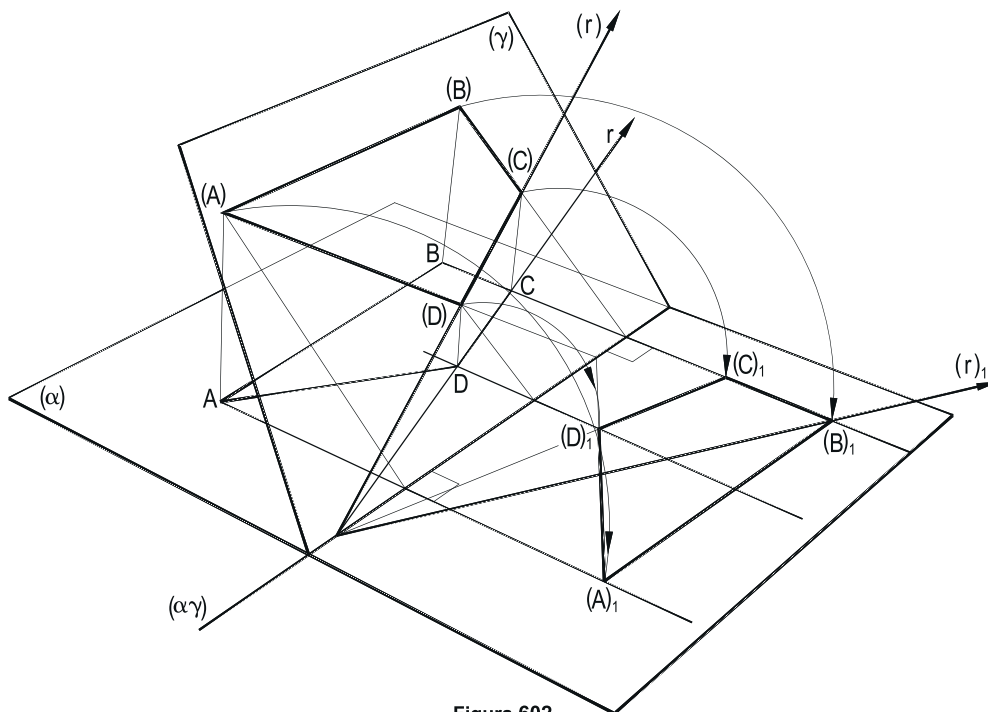


Figura 602

## 159 – Corolários

1 – Para todo plano ( $\gamma$ ) oblíquo a ( $\pi$ ), existe afinidade ortogonal entre a projeção horizontal e o rebatimento sobre ( $\pi$ ) de qualquer polígono a ele pertencente (Figuras 603 e 604), sendo o traço  $\gamma\pi$  o eixo dessa afinidade.

2 – Igualmente, há sempre afinidade ortogonal entre a projeção vertical e o rebatimento sobre ( $\pi'$ ) de todo polígono pertencente a um plano ( $\gamma$ ) oblíquo a ( $\pi'$ ), sendo o traço vertical  $\gamma\pi'$  o eixo dessa afinidade (Figuras 605 e 606).

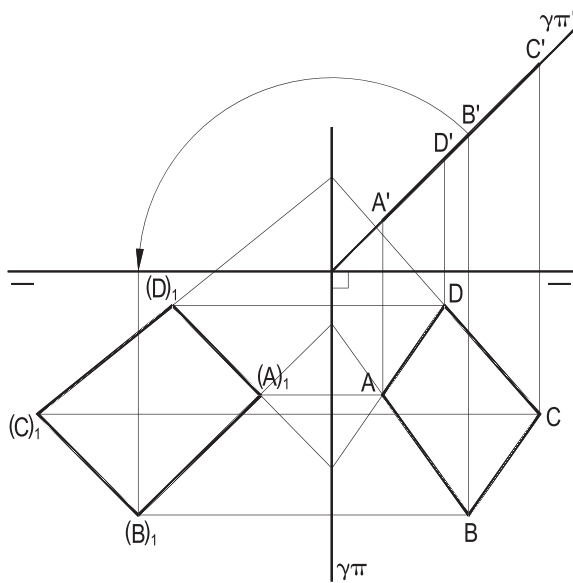


Figura 603

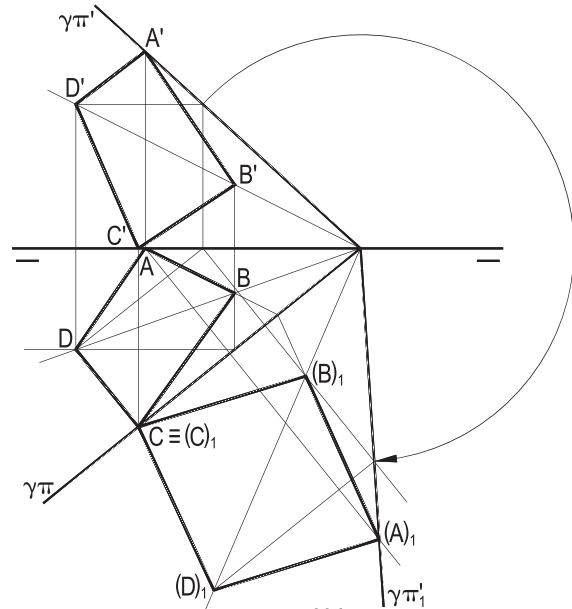


Figura 604

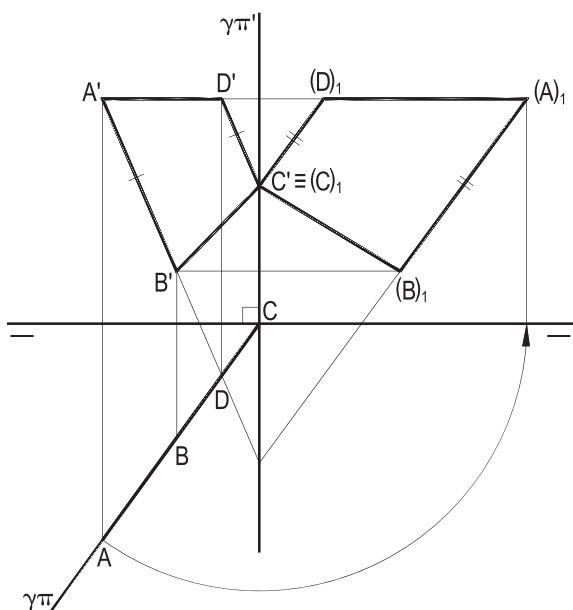


Figura 605

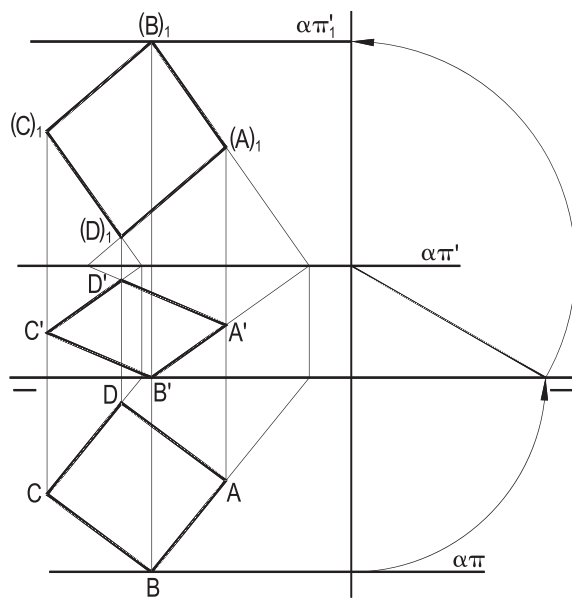


Figura 606

3 – Quando não é dada a linha de terra e é preciso operar com a V.G. de determinada figura de um plano ( $\gamma$ ), dado por duas retas (a) e (b), ao se rebater ( $\gamma$ ) sobre um plano referencial ( $\theta$ ), existe uma afinidade ortogonal entre a projeção daquela figura e a do seu rebatimento sobre ( $\theta$ ), funcionando como eixo para tal afinidade a charneira ( $\gamma\theta$ ), na projeção em que se estuda a V.G. (h na Figura 607 e f' na Figura 608).

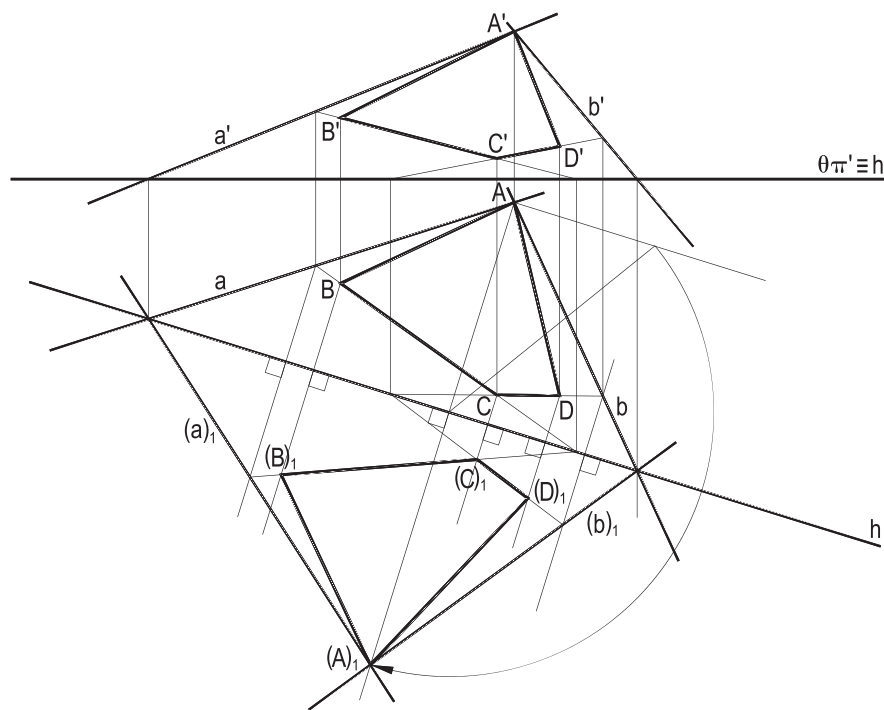


Figura 607

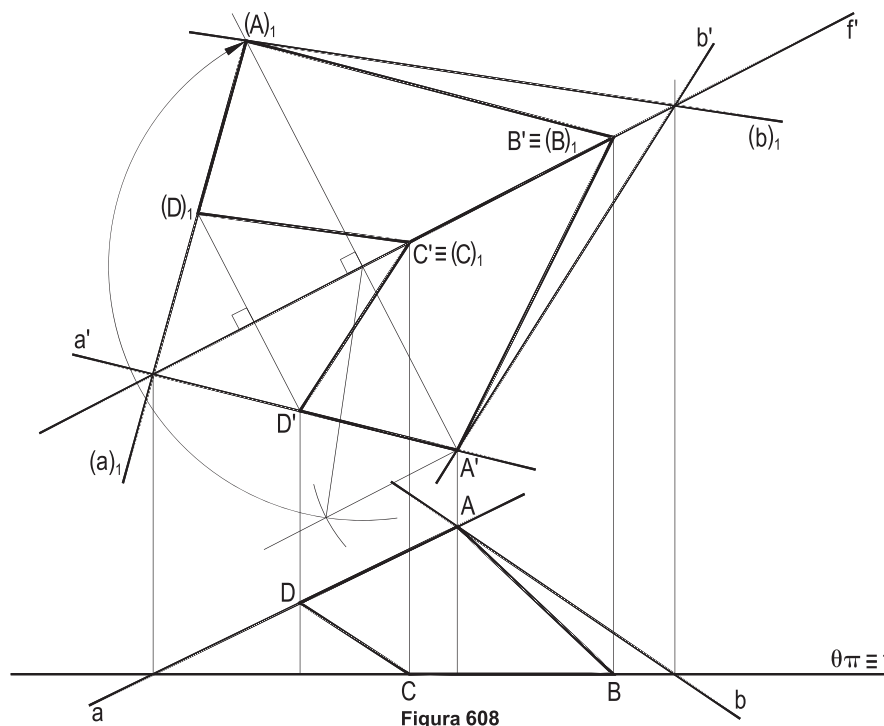


Figura 608

# CAPÍTULO X

## PROJEÇÕES CÔNICAS SOBRE ( $\beta_{24}$ )

### 160 – Projeções cônicas

Projeção cônica é aquela em que todas as projetantes originam-se num mesmo ponto, denominado centro, ou polo, da projeção e que pode ser efetuada sobre uma superfície qualquer.

Assim, a projeção cônica de um ponto (A), a partir do centro de projeção (V) sobre uma superfície ( $\theta$ ), pode ser apenas um outro ponto ( $\bar{A}$ ), ou mais que um – ( $\bar{A}$ ), ( $\bar{\bar{A}}$ ), etc. –, conforme a natureza da superfície de projeção considerada e as posições relativas de (V), (A) e ( $\theta$ ), tal como exemplificado nas Figuras 609, 610 e 611, em que ( $\theta$ ) é, respectivamente, um plano, uma superfície esférica e uma superfície de grau superior (um toro circular, no caso).

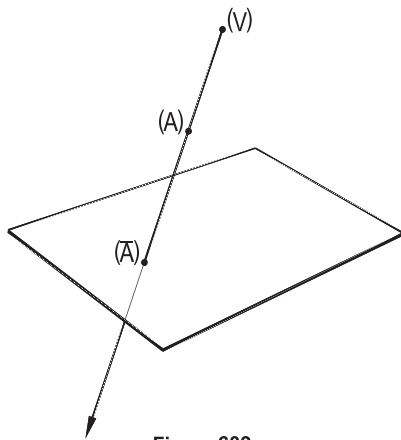


Figura 609

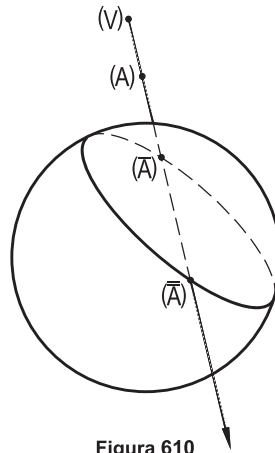


Figura 610

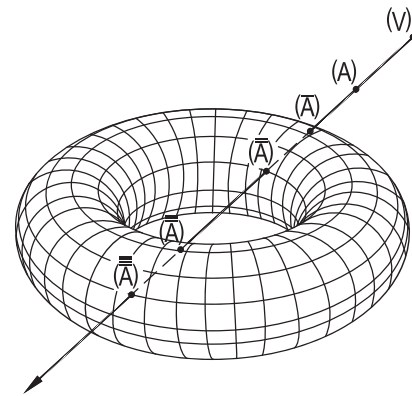


Figura 611

### 161 – Projeções cônicas sobre planos

No presente estudo, dedicado especialmente ao Bissetor Par, estaremos analisando apenas projeções cônicas sobre planos, cabendo ressaltar que, nestes casos, para um centro próprio e fixo de projeção e para um plano de projeção, fixo, também, a projeção de todo ponto considerado há de ser outro ponto, traço de sua projetante no plano de projeção, e que tal projeção é também um ponto próprio, salvo para o caso da projetante, em posição particular, ser paralela ao plano de projeção, o que, então, acarreta que sua projeção seja um ponto impróprio.

## 162 – Teorema

A projeção cônica de uma reta sobre um plano exterior é outra reta, ou um ponto.

Demonstração: Consideremos a projeção cônica da reta  $(r)$ , definida pelos pontos  $(A)$  e  $(B)$ , sobre o plano  $(\theta)$ , a partir do centro  $(V)$  de projeção e tais que  $(V)$  não pertença a  $(r)$ .

Como  $(V)$  e  $(r)$ , então, definem um plano  $(\gamma)$ , desde que  $(r)$  seja secante a  $(\theta)$ , a interseção  $(\bar{r})$  de  $(\gamma)$  e  $(\theta)$  (Figura 612), reunindo as projeções  $(\bar{A})$  e  $(\bar{B})$  daqueles pontos, será a projeção cônica de  $(r)$ , a partir de  $(V)$ , sobre  $(\theta)$ .

E, fosse  $(r)$  paralela a  $(\theta)$ , o plano  $(\gamma)$ , formado por  $(V)$  e  $(r)$ , cortaria  $(\theta)$  segundo uma reta  $(\bar{r})$  paralela a  $(r)$  (*Geometria Espacial*, número 9), o que, assim, demonstra a primeira parte do teorema.

Há, ainda, duas possibilidades a considerar, a primeira para o caso particular do plano  $(\gamma)$  formado por  $(V)$  e  $(r)$  ser paralelo a  $(\theta)$ , quando a projeção  $(\bar{r})$ , ainda retilínea, passa a ser uma reta imprópria de  $(\theta)$ , respeitando a tese do teorema; a segunda quando, também em situação particular,  $(V)$  pertence à reta  $(r)$ , implicando em que as projeções  $(\bar{A})$  e  $(\bar{B})$  coincidam com a projeção  $(\bar{r})$ , o próprio traço de  $(r)$  em  $(\theta)$  (Figura 613), demonstrando a segunda parte do teorema.

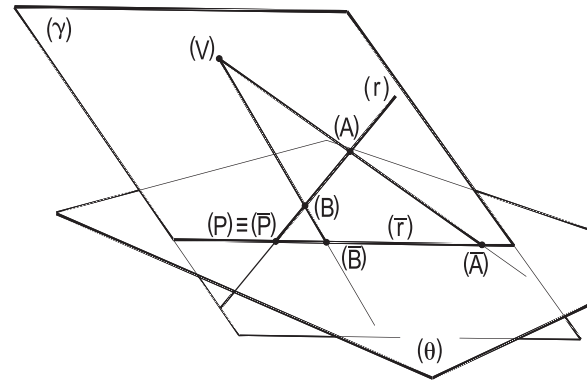


Figura 612

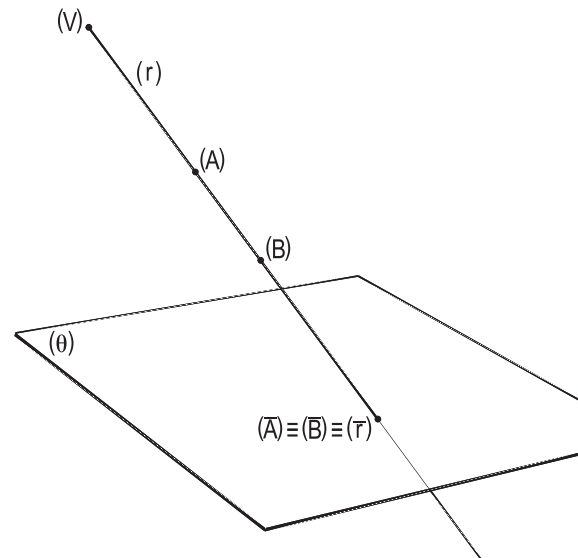


Figura 613

Assim, a projeção cônica de uma reta sobre um plano exterior é outra reta, ou um ponto.

## 163 – Corolário

Quando o centro da projeção é exterior à reta considerada e esta é secante ao plano de projeção, a reta e sua projeção cortam-se segundo o próprio traço da reta dada com o plano de projeção que é, enfim, o ponto comum àquela reta e à sua projeção cônica, como o ponto  $(P) \equiv (\bar{P})$  da Figura 612.

## 164 – Homologia como projeção cilíndrica de uma projeção cônica

Consideremos um sistema de projeção cônica, de centro  $(V)$ , associando uma figura qualquer de um plano  $(\alpha)$  à sua projeção cônica sobre um plano  $(\gamma)$ , secante a  $(\alpha)$ , assim como a projeção cilíndrica de todo esse sistema sobre um plano  $(\pi)$ , genérico (Figura 614).

Porque as concorrências das retas se conservam em toda projeção cilíndrica, tal como as pertinências de pontos a retas, o resultado dessa projeção é uma transformação plana entre as projeções das duas figuras consideradas, tal que a cada ponto de uma delas corresponde um ponto da outra, os pares de pontos associados sempre pertencentes a retas que passam por um ponto fixo – a projeção  $V$  do centro  $(V)$  da projeção cônica original – e os pares de retas correspondentes, uma de cada figura, cortando-se sobre uma reta  $r$ , nada mais que a projeção cilíndrica da interseção  $(r)$  de  $(\alpha)$  e  $(\gamma)$  (Figura 614) ou, em caso particular, paralelas a  $r$ .

Assim (número 139), tal projeção cilíndrica implica numa homologia de centro  $V$  e eixo  $r$ .

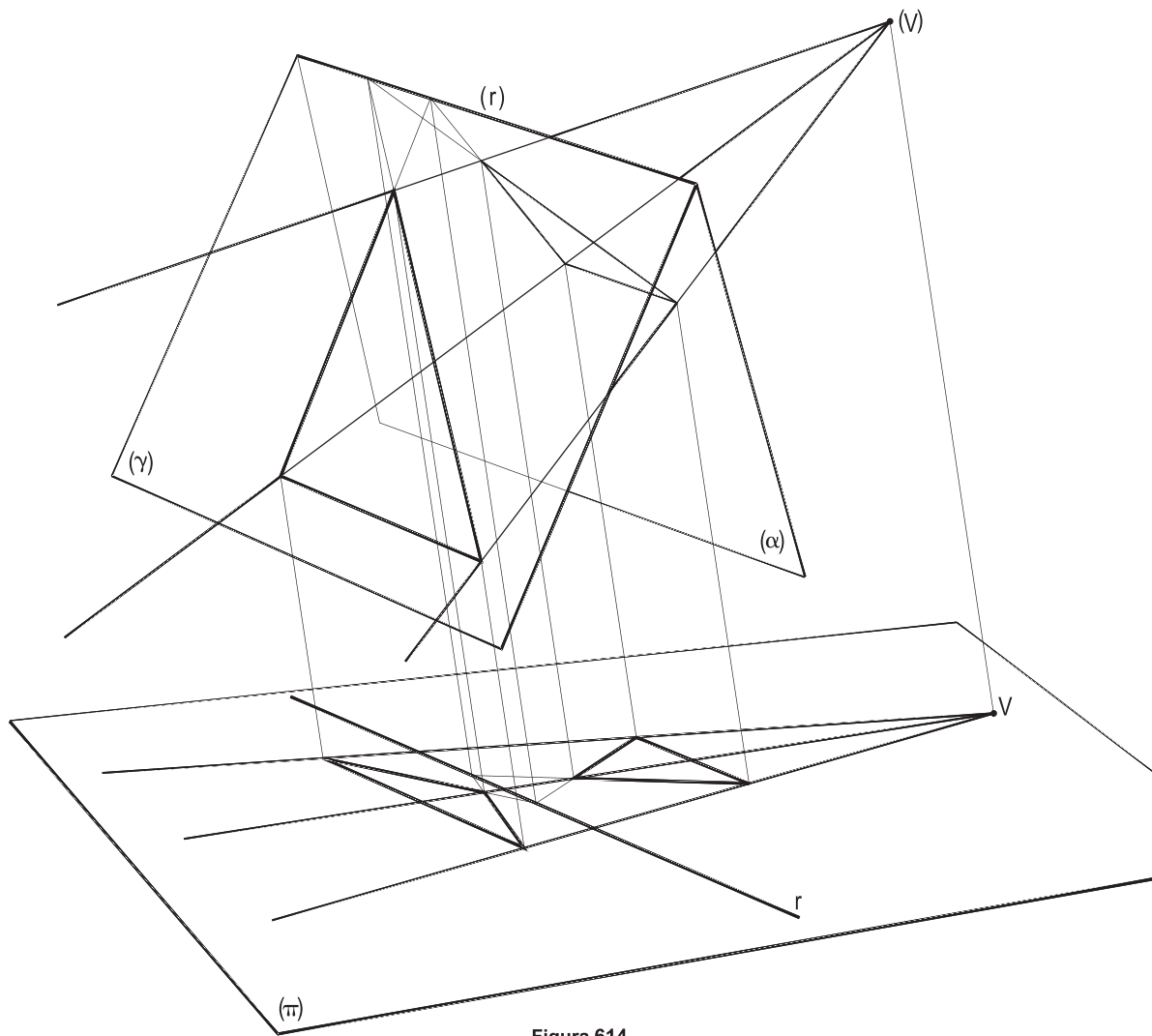
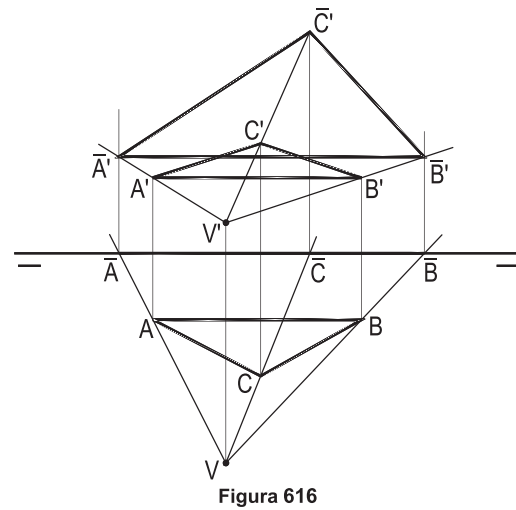
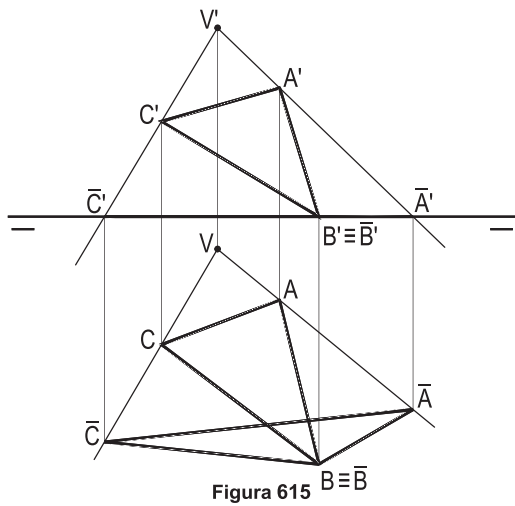


Figura 614

### 165 – Projeções cônicas sobre $(\pi)$ e sobre $(\pi')$

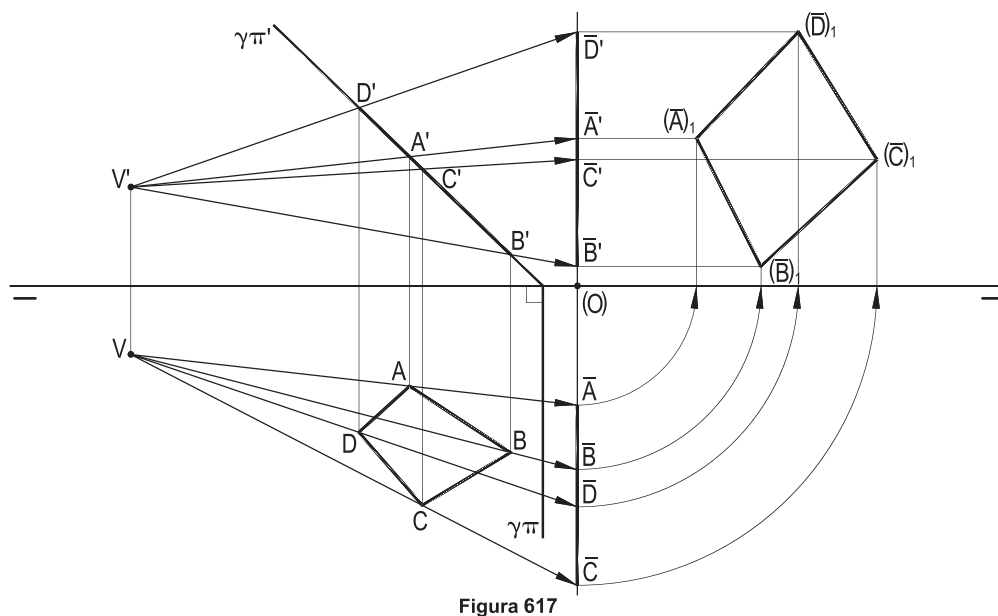
Como aplicação primeira, para obter as projeções ortogonais da projeções cônicas de uma figura  $(A)(B)(C)$ , dada, sobre  $(\pi)$  (Figura 615), ou sobre  $(\pi')$  (Figura 616), a partir de um centro  $(V)$ , dado por suas projeções, basta construir as projetantes e obter seus traços horizontais (Figura 615), ou verticais (Figura 616), respectivamente.



As projeções cônicas vêm em V.G., respectivamente, na projeção horizontal  $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$  (Figura 615) e na vertical  $\bar{A}'\bar{B}'\bar{C}'$  (Figura 616).

### 166 – Projeções cônicas sobre $(\pi'')$

Construção imediata, pelos traços das projetantes em  $(\pi'')$ , com a V.G. numa vista lateral (Figura 617), como, no caso, de um quadrilátero  $(A)(B)(C)(D)$ , dado por suas projeções.





## 167 – Projeções cônicas sobre um plano projetante

A obtenção dos traços das projetantes dos vértices do polígono dado, para o polo (V), sobre o plano projetante ( $\theta$ ), produz as duas projeções ortogonais da projeção cônica procurada e o rebatimento de ( $\theta$ ) sua verdadeira grandeza (Figuras 618 e 619).

Observe-se que, no primeiro exemplo (Figura 618), há uma redução da figura dada, na projeção cônica, e que, no segundo (Figura 619), ocorre uma ampliação.

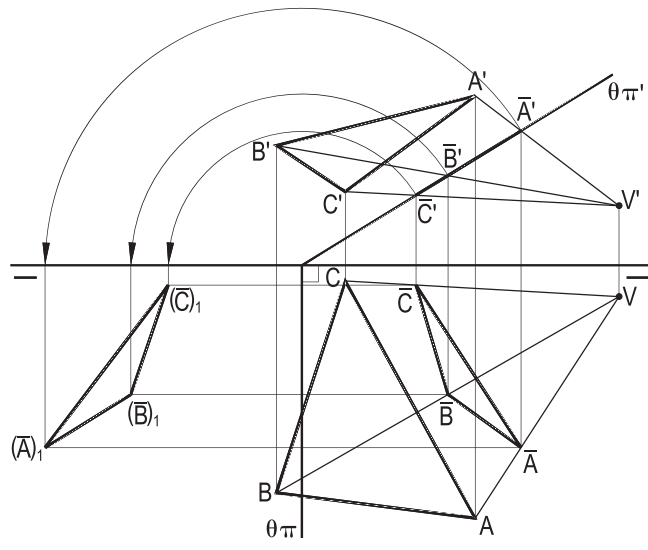


Figura 618

No segundo caso, a projeção cônica ( $\bar{A}$ )( $\bar{B}$ )( $\bar{C}$ ) do triângulo dado (A)(B)(C) excede o primeiro diedro, estando o vértice ( $\bar{A}$ ) no segundo.

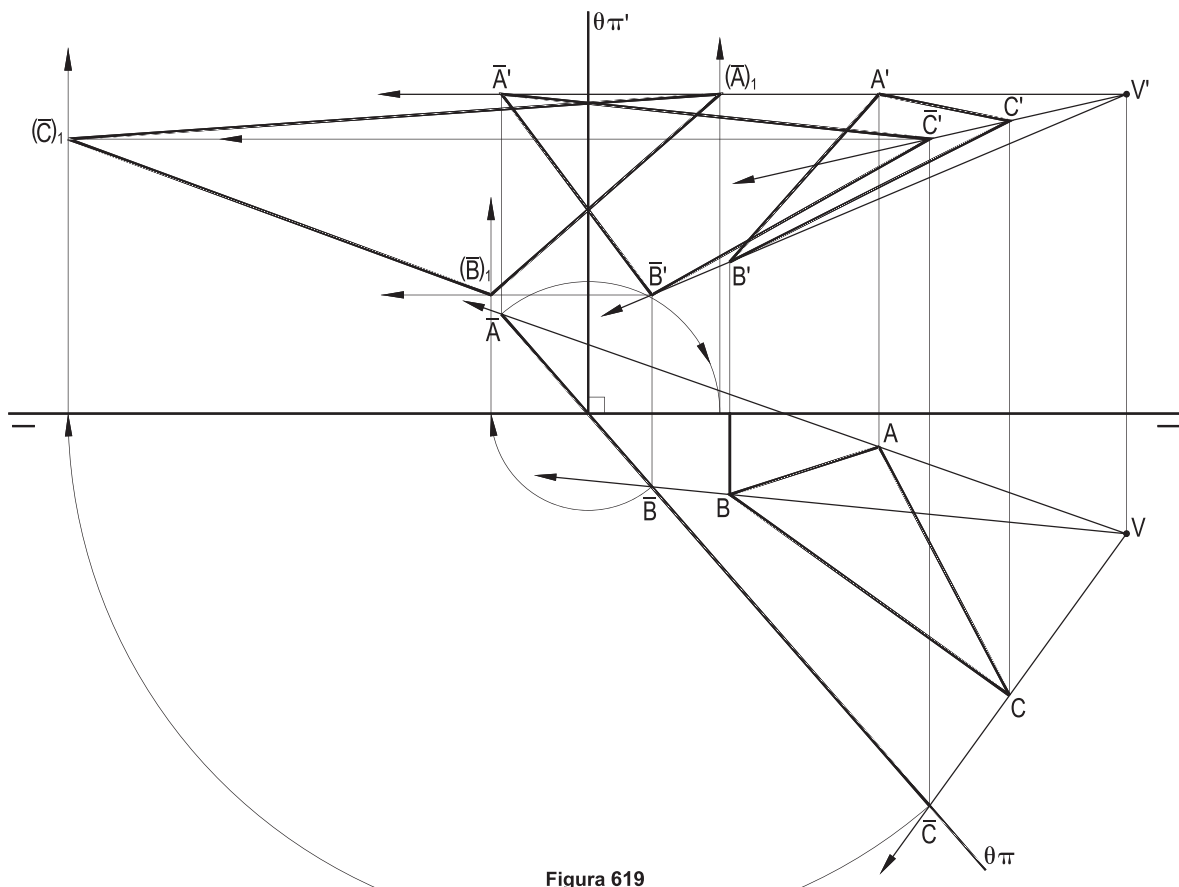


Figura 619

## 168 – Projeções cônicas sobre um plano não projetante

O procedimento é o mesmo dos casos anteriores, determinando-se os traços das projetantes que interessam à questão no plano de projeção ( $\theta$ ), e, em seguida, com seu rebatimento, a V.G. da projeção cônica obtida. Seguem dois exemplos.

1 – O trapézio dado  $(A)(B)(C)(D)$ , situado em  $(\pi)$ , com suas bases  $(A)(D)$  e  $(B)(C)$  paralelas a  $\theta\pi$ , origina, por projeção cônica sobre o plano qualquer dado  $(\theta)$ , a partir do centro  $(V)$ , nesta situação particular, o paralelogramo  $(\bar{A})(\bar{B})(\bar{C})(\bar{D})$ , que tem dois lados  $(\bar{B})(\bar{C})$  e  $(\bar{A})(\bar{D})$  horizontais, paralelos a  $\theta\pi$ , o que alivia a écura (Figura 620).

Obtidos os traços com  $(\theta)$  das projetantes de  $(B)$  e de  $(D)$ , a homologia existente entre o trapézio  $ABCD$ , de  $(\pi)$ , e o paralelogramo  $\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}$ , projeção horizontal da projeção cônica em estudo, utilizado o traço  $\theta\pi$  como eixo de tal homologia, torna simples completar essa projeção horizontal, bem como seu rebatimento  $(\bar{A})_1(\bar{B})_1(\bar{C})_1(\bar{D})_1$ , verdadeira grandeza da projeção cônica em estudo, agora com a afinidade ortogonal entre  $\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}$  e  $(\bar{A})_1(\bar{B})_1(\bar{C})_1(\bar{D})_1$  (Figura 620).

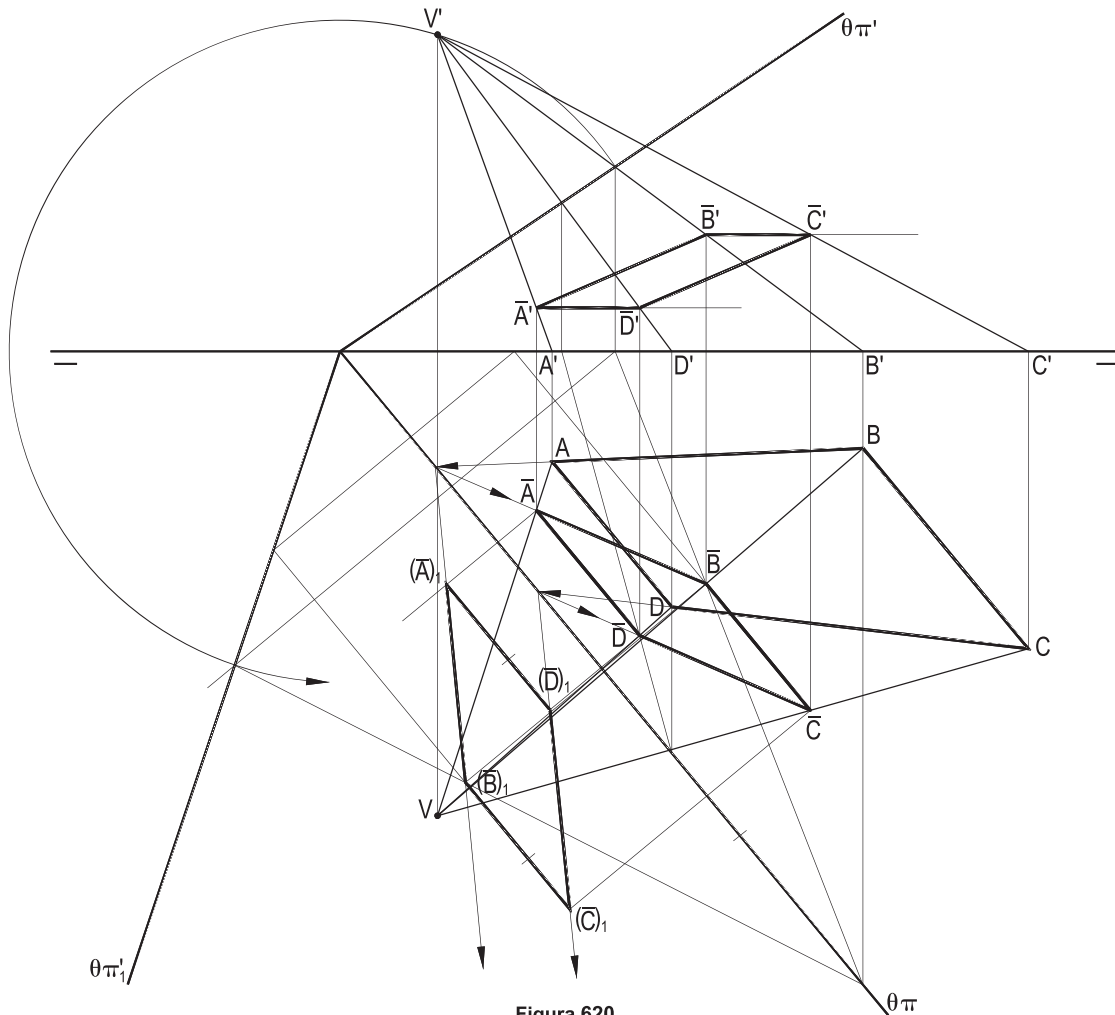


Figura 620

2 – Neste exemplo, o plano ( $\theta$ ) para a projeção cônica é paralelo à linha de terra e o procedimento é o mesmo para obter a projeção cônica do triângulo (A)(B)(C), a partir do polo (V), todos dados por suas projeções.

O rebatimento de ( $\theta$ ) sobre ( $\pi$ ) traz a V.G.  $(\bar{A})_1(\bar{B})_1(\bar{C})_1$  da projeção cônica  $(\bar{A})(\bar{B})(\bar{C})$ , pedida (Figura 621), com auxílio das retas (H)(1), (H)(2) e (H)(3) de ( $\theta$ ), as mesmas utilizadas para a obtenção dessa projeção cônica.

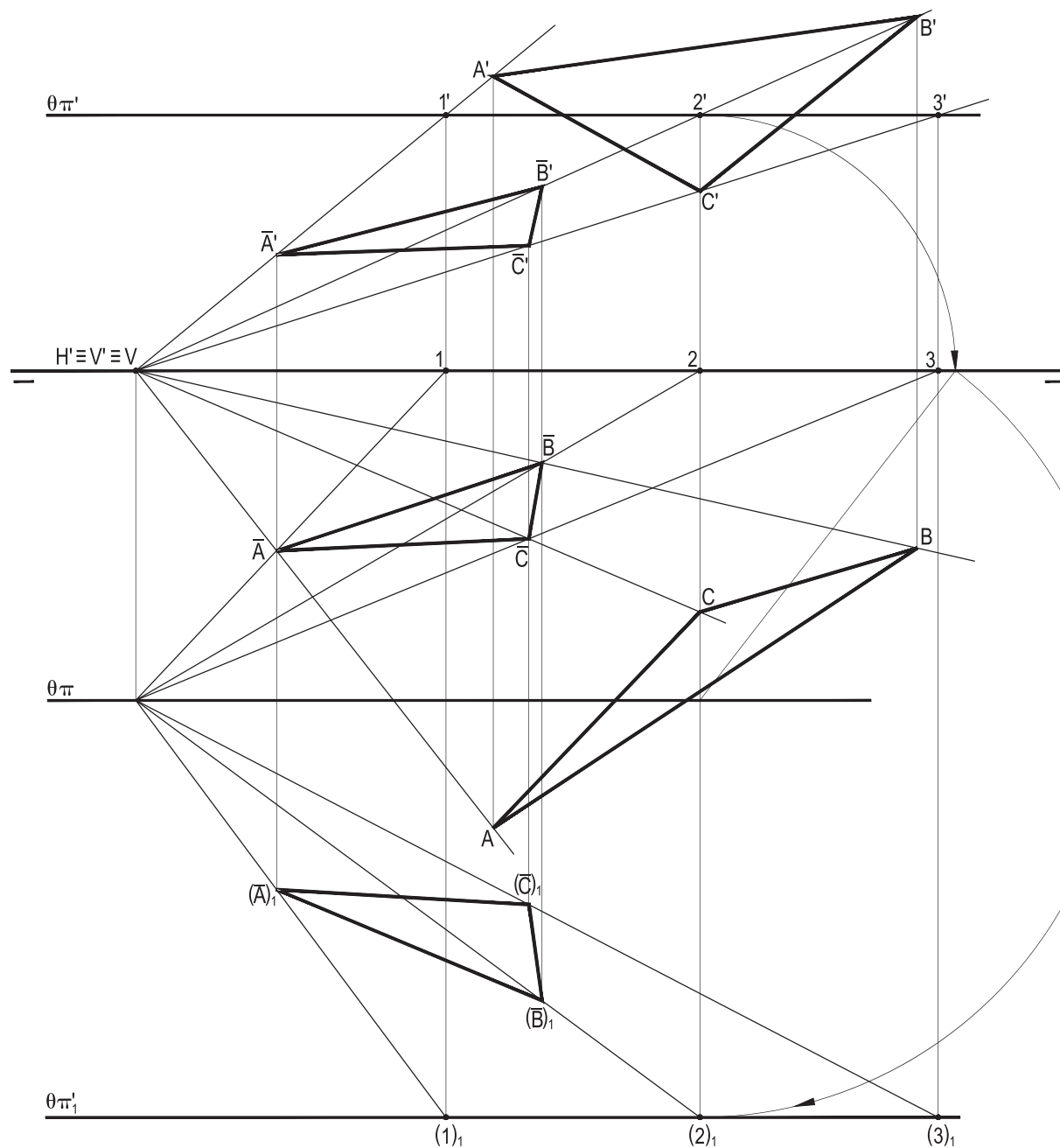


Figura 621

## 169 – Projeção cônica de poliedro

Para construir a projeção cônica de um poliedro dado, a partir de um centro (V) conhecido, sobre um plano dado ( $\theta$ ), deve-se enviar as projetantes que passem por cada um de seus vértices, obter seus traços em ( $\theta$ ) e unir suas projeções ordenadamente.

Habitualmente, representa-se apenas o contorno de tal projeção e, quando solicitado, sua verdadeira grandeza, tal como nos exemplos a seguir.

1 – Dado, por suas projeções, o tetraedro (J)–(A)(B)(C), pede-se construir sua projeção cônica sobre ( $\pi'$ ), a partir do ponto (V), dado por suas projeções.

As projetantes (V)(J), (V)(A), (V)(B) e (V)(C), enviadas do centro (V) da projeção cônica, são de imediatas construções, dados que são todos os cinco pontos. Simples, também, obter os traços verticais ( $\bar{J}$ ), ( $\bar{A}$ ), ( $\bar{B}$ ) e ( $\bar{C}$ ), cujas projeções verticais  $\bar{J}'$ ,  $\bar{A}'$ ,  $\bar{B}'$  e  $\bar{C}'$  formam a projeção cônica pedida, tendo sido representado (Figura 622) apenas seu contorno aparente  $\bar{J}'\bar{A}'\bar{B}'$ , naturalmente em V.G., ficando assinalado o quarto vértice  $\bar{C}'$ , interior àquele contorno.

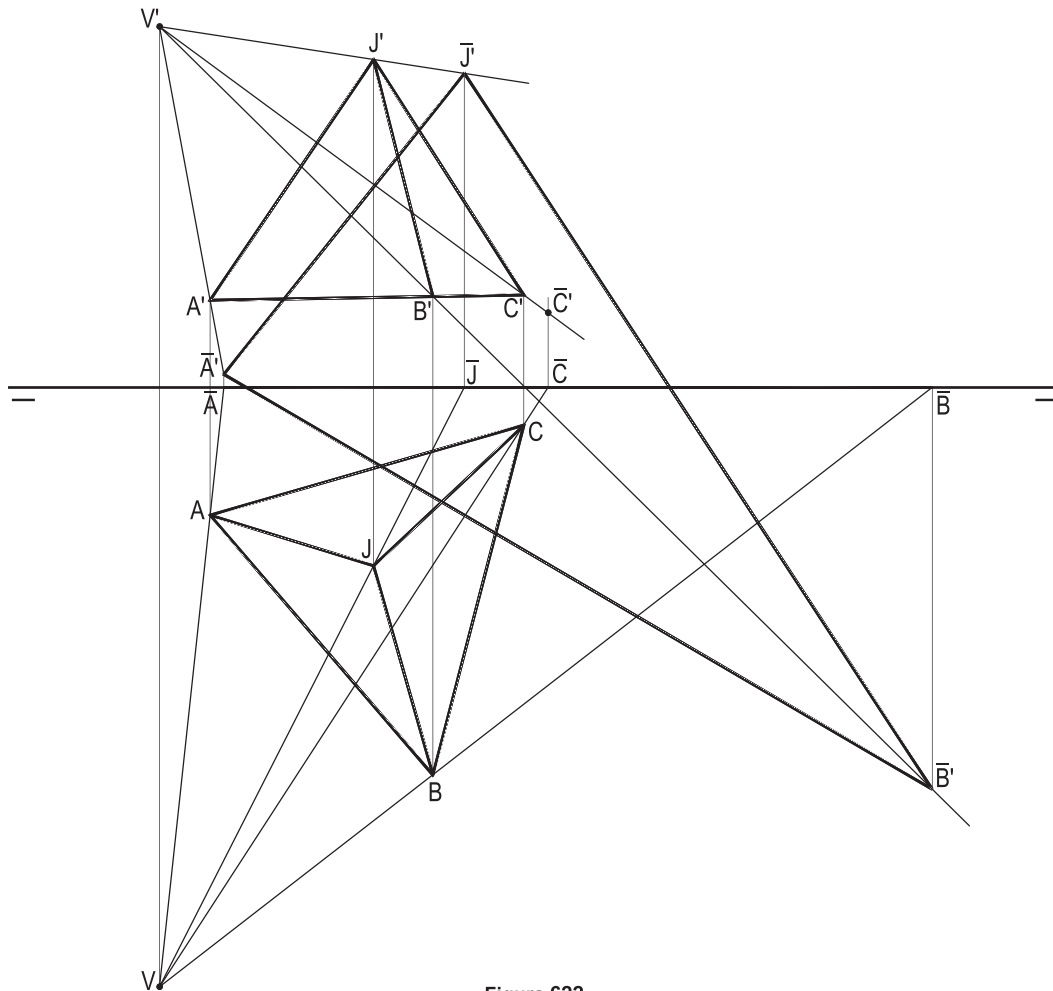
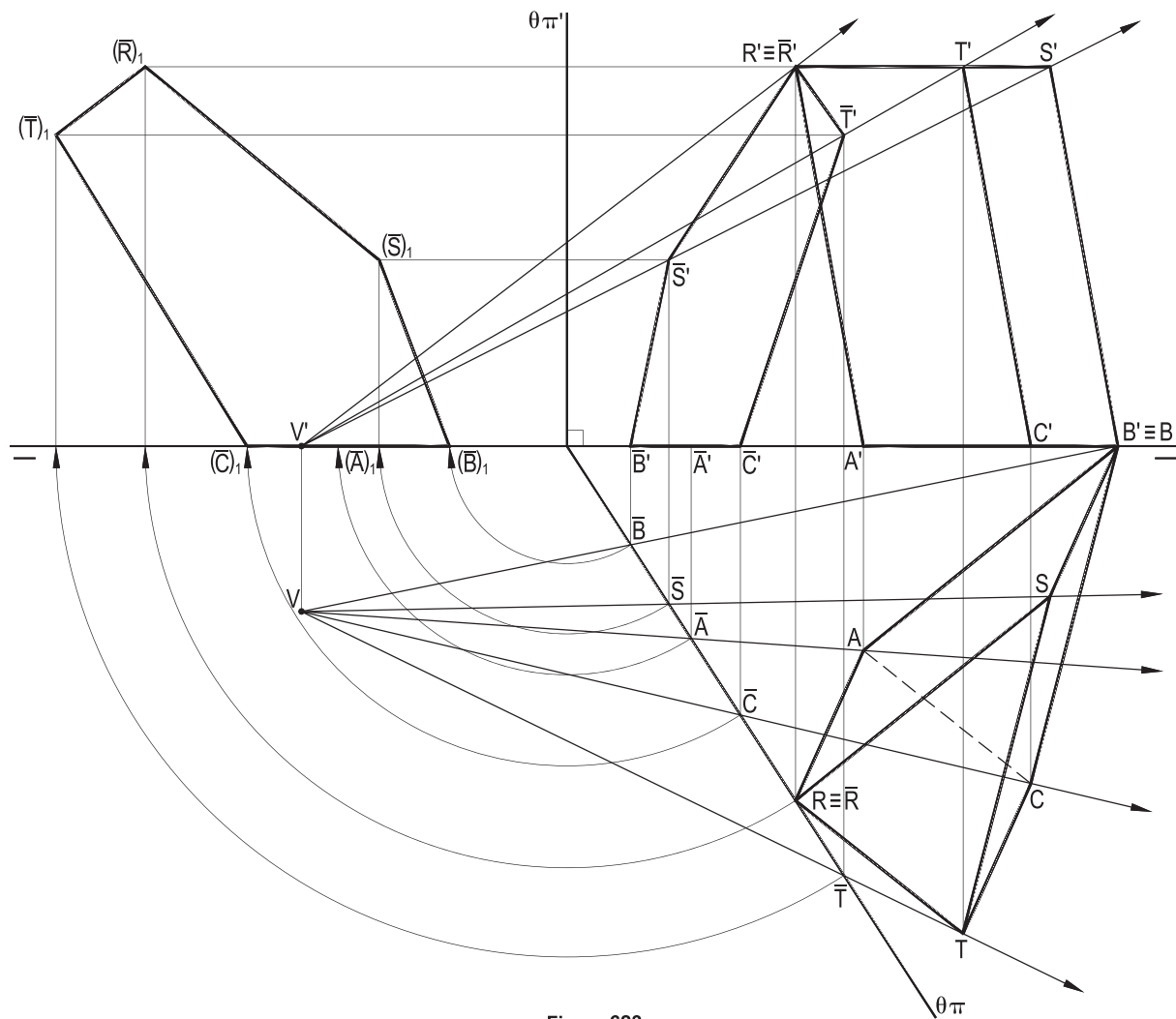


Figura 622

2 – Dado, por suas projeções, o prisma triangular oblíquo (A)(B)(C)–(R)(S)(T), pede-se construir o contorno e a verdadeira grandeza de sua projeção cônica sobre o plano vertical ( $\theta$ ), dado por seu traço horizontal  $\theta\pi$ , a partir do centro (V) dessa projeção, dado, também, por suas projeções.

Observe-se que o prisma dado tem uma base (A)(B)(C) em ( $\pi$ ), o vértice (B) em ( $\pi'\pi$ ) e que o polo (V) da projeção cônica pertence também a ( $\pi$ ), o que acarreta que a projeção cônica dessa base reduza-se a um segmento de reta  $(\bar{B})(\bar{C})$ , ( $\bar{A}$ ) em seu interior, tais as posições dadas (Figura 623). Além disso, note-se que o vértice (R) da base superior pertence ao plano ( $\theta$ ) da projeção cônica, o que obriga sua coincidência com sua projeção ( $\bar{R}$ ).

Assim, o contorno da projeção cônica do prisma triangular reduz-se a um pentágono  $(\bar{B})(\bar{C})(\bar{T})(\bar{R})(\bar{S})$ , obtido com os traços das projetantes de (V) em ( $\theta$ ), com sua projeção vertical  $\bar{B}'\bar{C}'\bar{T}'\bar{R}'\bar{S}'$  e sua V.G.  $(\bar{B})_1(\bar{C})_1(\bar{T})_1(\bar{R})_1(\bar{S})_1$ , decorrente do rebatimento de ( $\theta$ ) sobre ( $\pi'$ ), com a particularidade das pertinências de  $\bar{A}'$  e de  $(\bar{A})_1$  a tais contornos (Figura 623).



## 170 – Projeção cônica de ponto sobre $(\beta_{24})$

Muito simples a determinação da projeção cônica ( $\bar{P}$ ) de um ponto qualquer (P) sobre  $(\beta_{24})$  a partir do centro (V) de projeção, pelo envio da projetante (V)(P) e pela obtenção de seu traço ( $\bar{P}$ ) em  $(\beta_{24})$  (Figuras 624 e 625).

No caso particular em que (V) e (P) têm a mesma abscissa, a projetante (V)(P) passa a ser de perfil, vertical, ou de topo e, na primeira dessas hipóteses, um rebatimento de perfil dá pronta solução à questão (Figuras 628 e 629), sendo imediatas as resoluções das outras duas situações (Figuras 626 e 627).

E, enfim, quando (V) e (P) formam uma reta paralela a  $(\beta_{24})$ , a projeção ( $\bar{P}$ ) procurada passa a ser o ponto impróprio ( $\bar{P}_\infty$ ) da projetante (V)(P) (Figura 630).

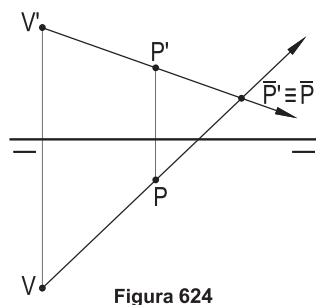


Figura 624

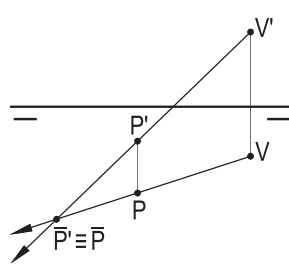


Figura 625

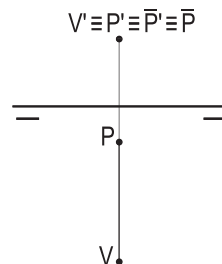


Figura 626

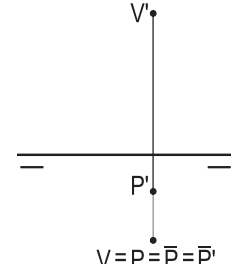


Figura 627

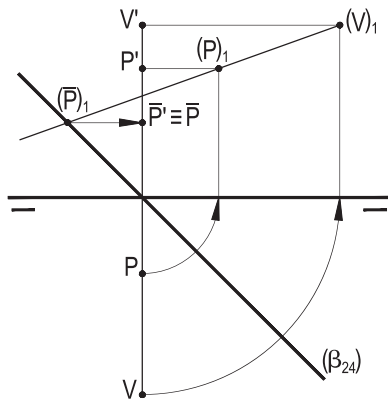


Figura 628

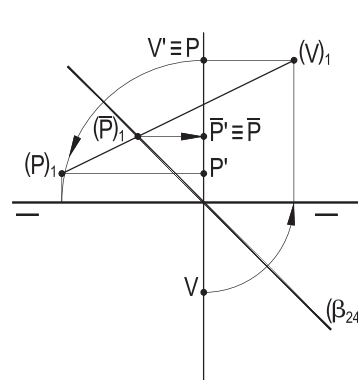


Figura 629

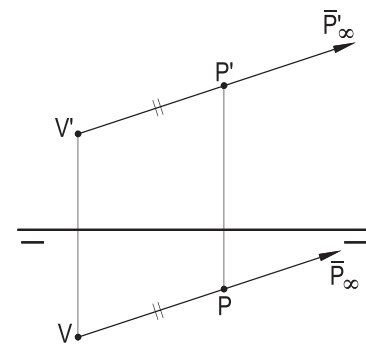


Figura 630

## 171 – Projeção cônica de reta sobre $(\beta_{24})$

A construção da projeção cônica de uma reta (r) sobre  $(\beta_{24})$ , a partir de um centro (V), se faz, habitualmente, pelo envio de duas projetantes, passando, cada uma, por um ponto (A), ou (B), de (r), determinando seus traços ( $\bar{A}$ ) e ( $\bar{B}$ ) com o bisetor par, para, com sua união, obter a projeção ( $\bar{r}$ ), desejada. Sempre que possível, convém determinar o traço (P) de (r) com  $(\beta_{24})$ , que já será um desses dois pontos. Seguem alguns exemplos.

Atenção a casos particulares de retas paralelas a ( $\beta_{24}$ ) (Figuras 637 e 638), ou a ele pertencente (Figura 636), e de posições especiais para os dados (Figuras 639 e 642).

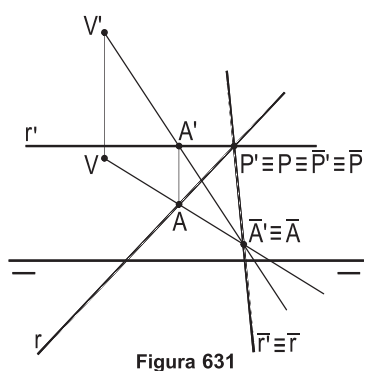


Figura 631

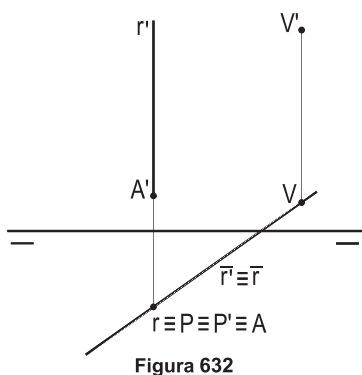


Figura 632

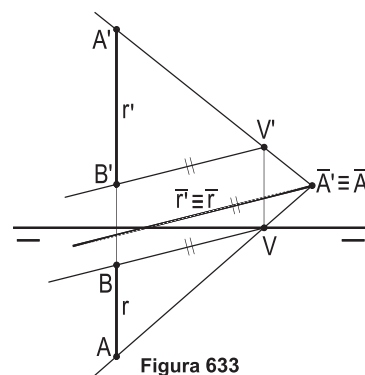


Figura 633

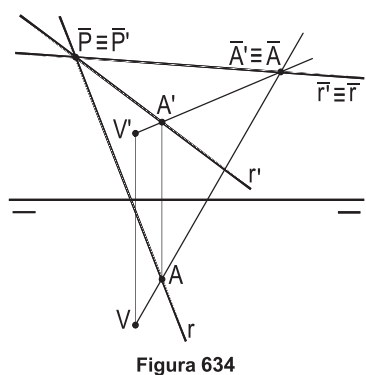


Figura 634

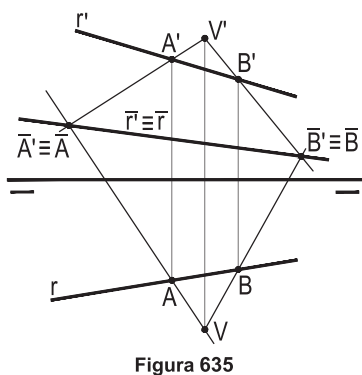


Figura 635

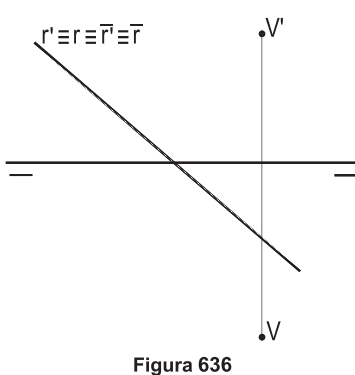


Figura 636

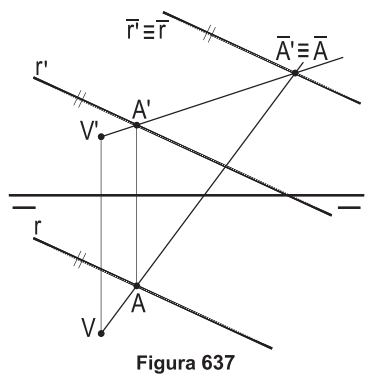


Figura 637

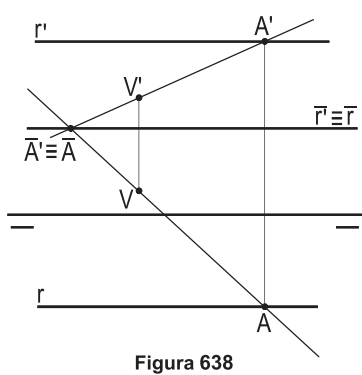


Figura 638

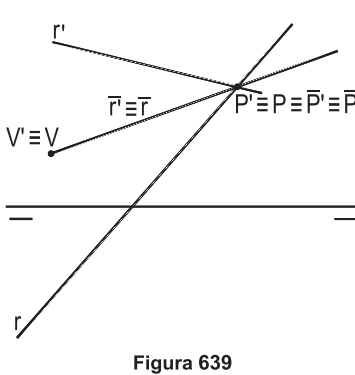


Figura 639

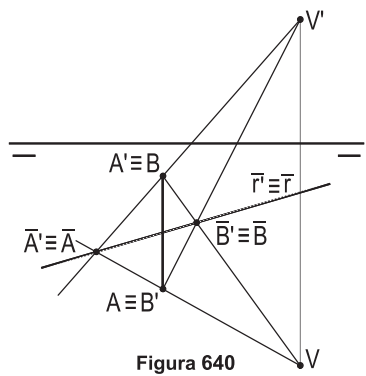


Figura 640

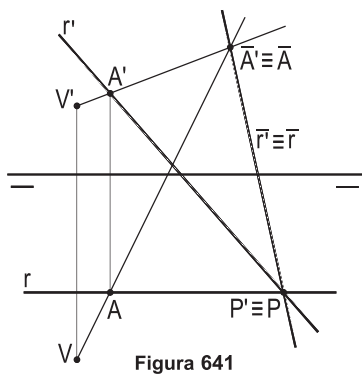


Figura 641

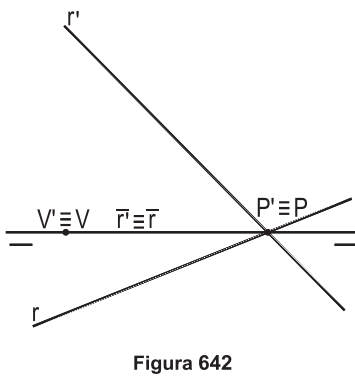
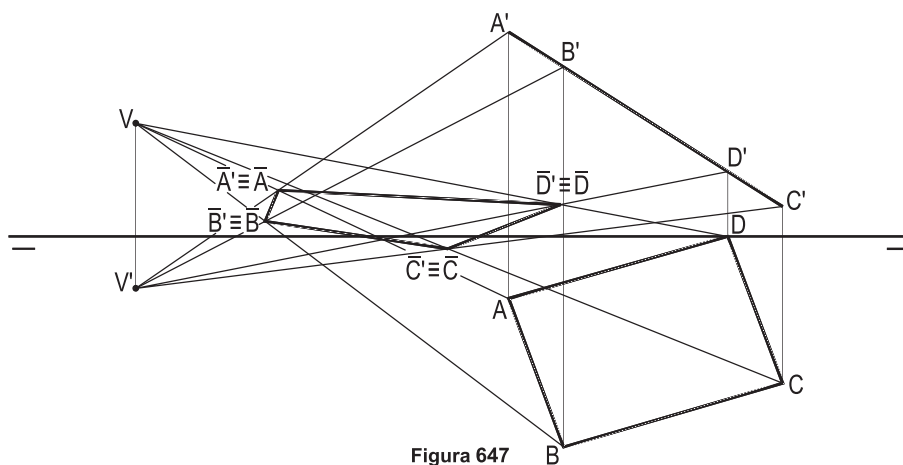
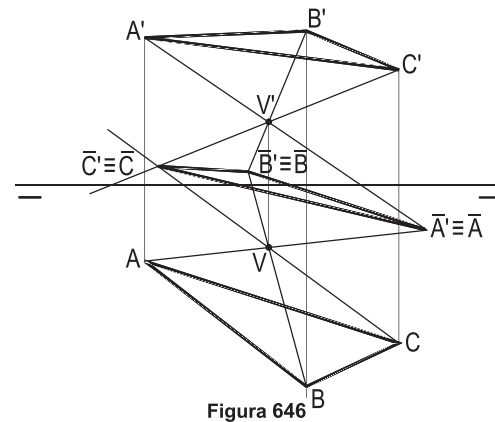
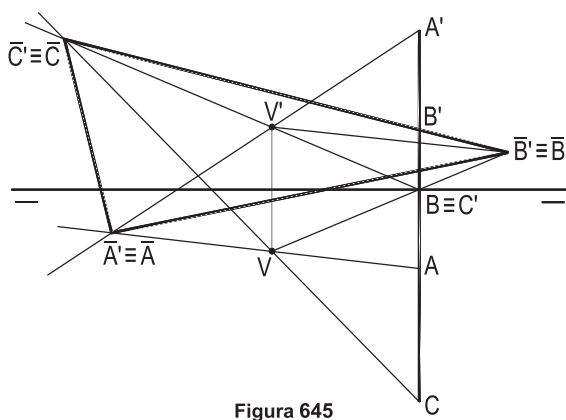
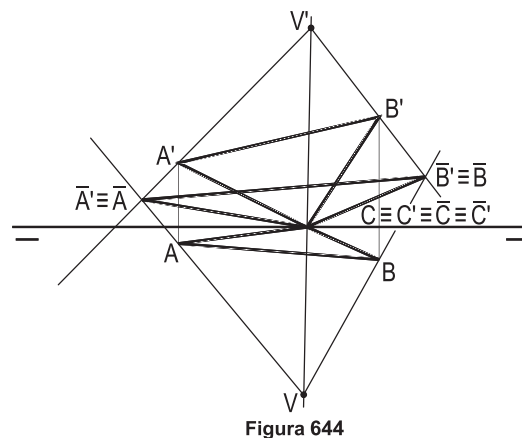
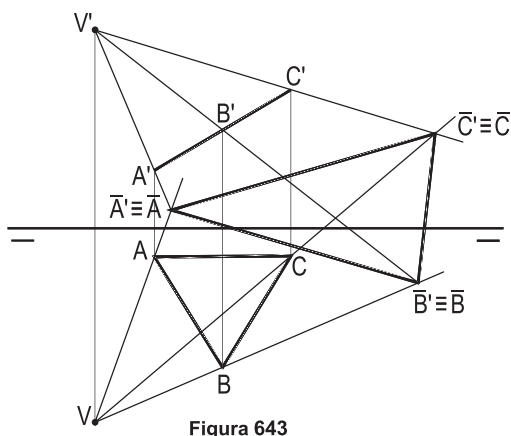


Figura 642

## 172 – Projeção cônica de polígono sobre ( $\beta_{24}$ )

A determinação da projeção cônica de um polígono, dado por suas projeções, sobre ( $\beta_{24}$ ), a partir de um ponto ( $V$ ), também dado por suas projeções, se faz pela obtenção da projeção de cada vértice, ou de algum lado, sobre ( $\beta_{24}$ ), a partir de ( $V$ ), unindo-os, adequadamente.

Seguem alguns exemplos, os quatro primeiros para triângulos (A)(B)(C) e o último para um paralelogramo (A)(B)(C)(D).





### 173 – Projeção cônica de poliedro sobre $(\beta_{24})$

É habitual – e assim vai apresentado nos exemplos abaixo incluídos – representar a projeção cônica do poliedro dado apenas por seu contorno aparente, embora, nas figuras escolhidas, todos os vértices tenham sido representados.

1 – Tetraedro (J)–(A)(B)(C), dado por suas projeções, com seu vértice (J) em  $(\pi'\pi)$ , sendo o centro (V) da projeção também dado por suas projeções.

Simple a construção pelo traçado das projetantes (V)(A), (V)(B) e (V)(C) e pela determinação de seus traços  $(\bar{A})$ ,  $(\bar{B})$  e  $(\bar{C})$  com  $(\beta_{24})$  (Figura 648), dispensada a projetante de (J), já que  $(\bar{J})$  coincide com (J).

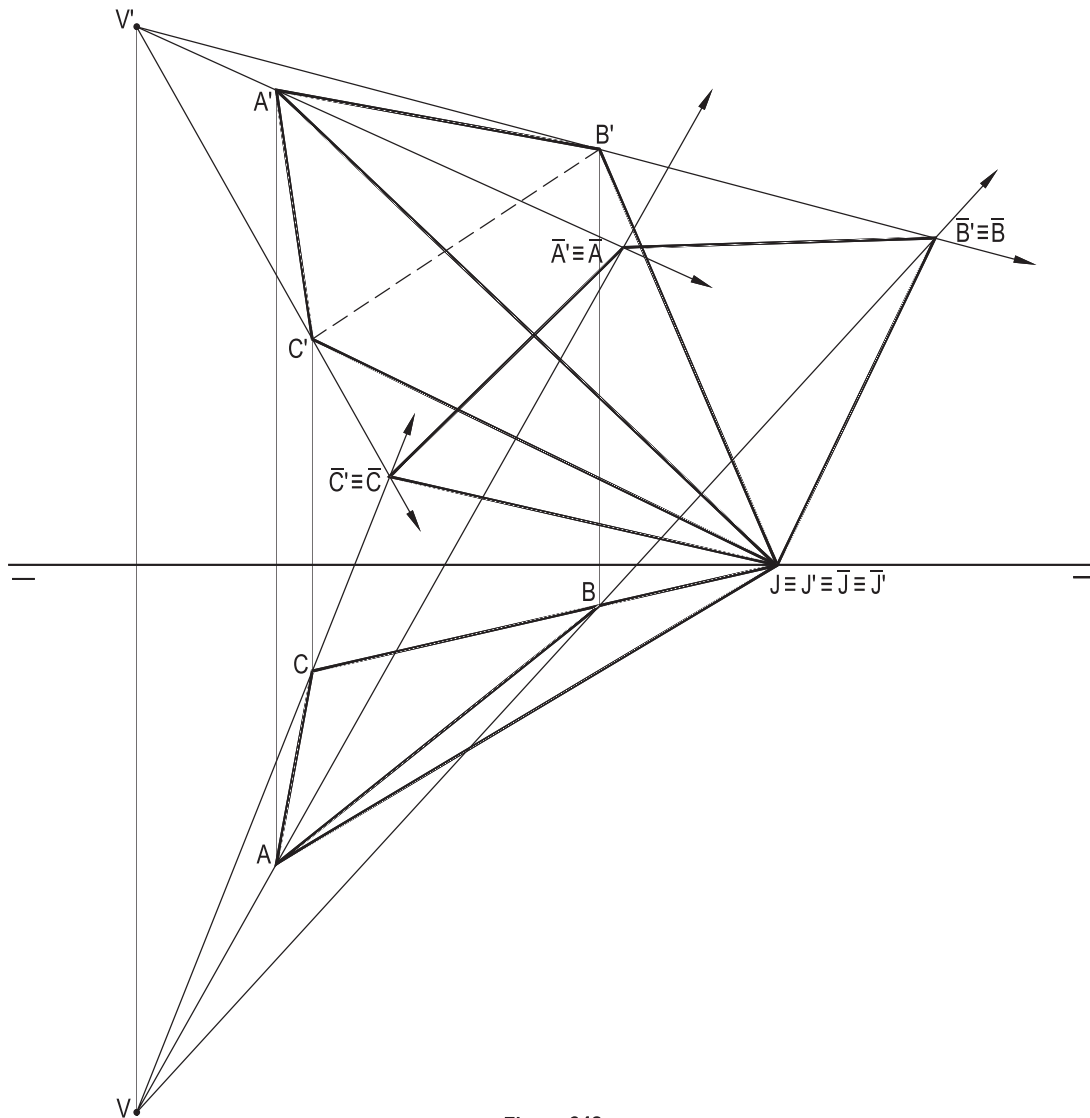


Figura 648

Observe-se que, pelos dados, o tetraedro (J)–(A)(B)(C) tem a face (J)(B)(C) vertical, o que em nada compromete a construção de sua projeção  $(\bar{J})$ – $(\bar{A})$ – $(\bar{B})$ – $(\bar{C})$  sobre  $(\beta_{24})$  (Figura 648), que vai representada por seu contorno, nenhum vértice interior.

2 – Prisma triangular (A)(B)(C)–(R)(S)(T), apoiado pela base (A)(B)(C) num plano horizontal, dadas as projeções dos vértices (A), (B), (C) e (R) do sólido e do centro (V) da projeção cônica pedida.

Completadas as projeções do prisma, traçadas as projetantes (V)(A), (V)(B), (V)(C), (V)(R), (V)(S) e (V)(T) e obtidos seus traços ( $\bar{A}$ ), ( $\bar{B}$ ), ( $\bar{C}$ ), ( $\bar{R}$ ), ( $\bar{S}$ ) e ( $\bar{T}$ ), com ( $\beta_{24}$ ), sua união ordenada dá, para as posições determinadas do sólido e de (V), à projeção pedida, contorno pentagonal, com o vértice  $\bar{A}' \equiv \bar{A}$  em seu interior (Figura 649).

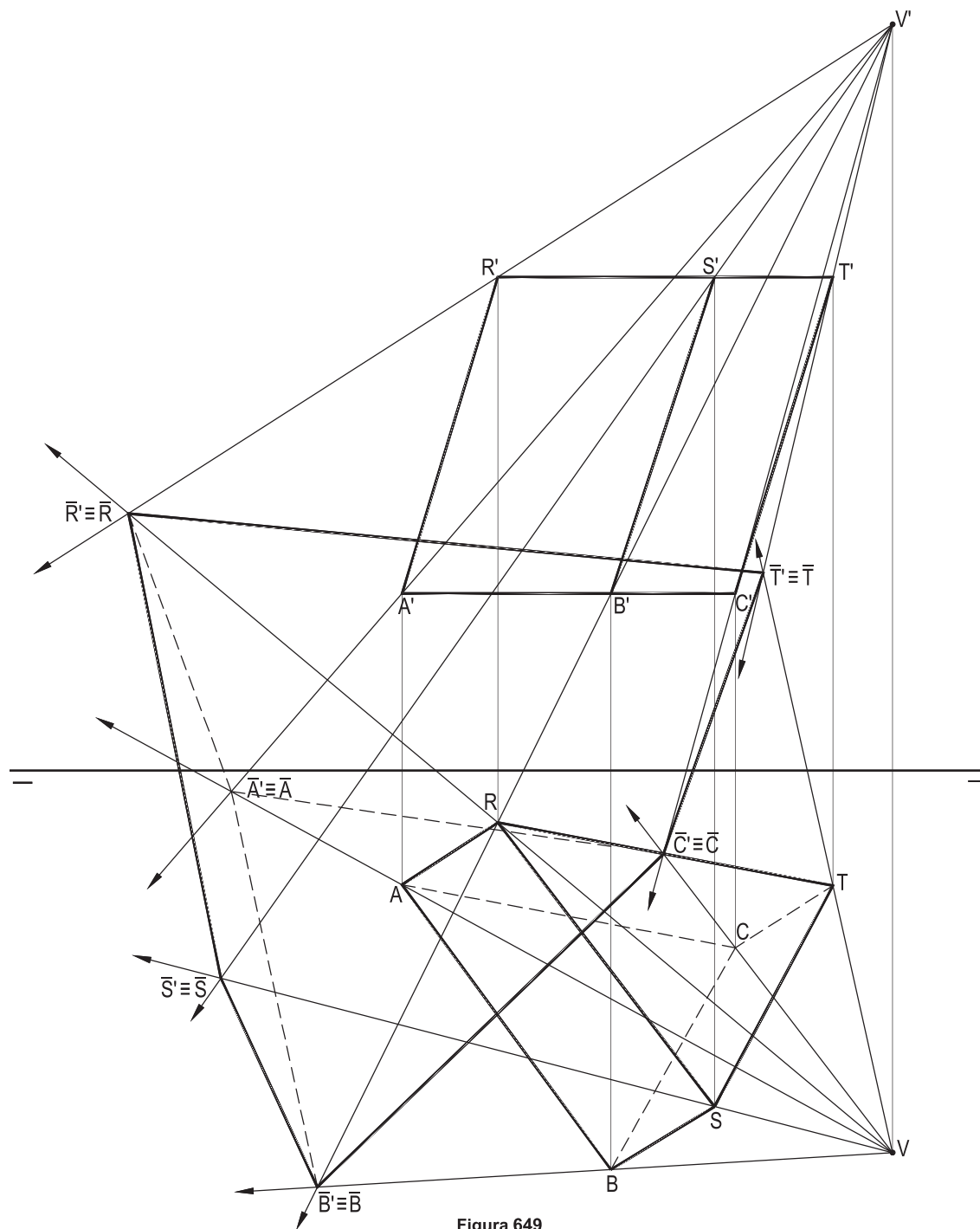


Figura 649

3 – Pirâmide quadrangular (J)–(A)(B)(C)(D), dada por suas projeções, destacando-se que duas arestas básicas – (A)(B) e (C)(D) – são fronto-horizontais. Dado o centro (V) da projeção cônica, por suas projeções.

Por serem paralelas a  $(\beta_{24})$ , as duas arestas básicas fronto-horizontais hão de se projetar sobre  $(\beta_{24})$  segundo outras fronto-horizontais  $(\bar{A})(\bar{B})$  e  $(\bar{C})(\bar{D})$  (Figura 650).

Com isso, basta obter as projeções cônicas de (J), (A) e (C), para, com paralelas à linha de terra, determinar os outros dois vértices básicos  $(\bar{B})$  e  $(\bar{D})$ , concluindo a projeção cônica pedida, todos os vértices no contorno.

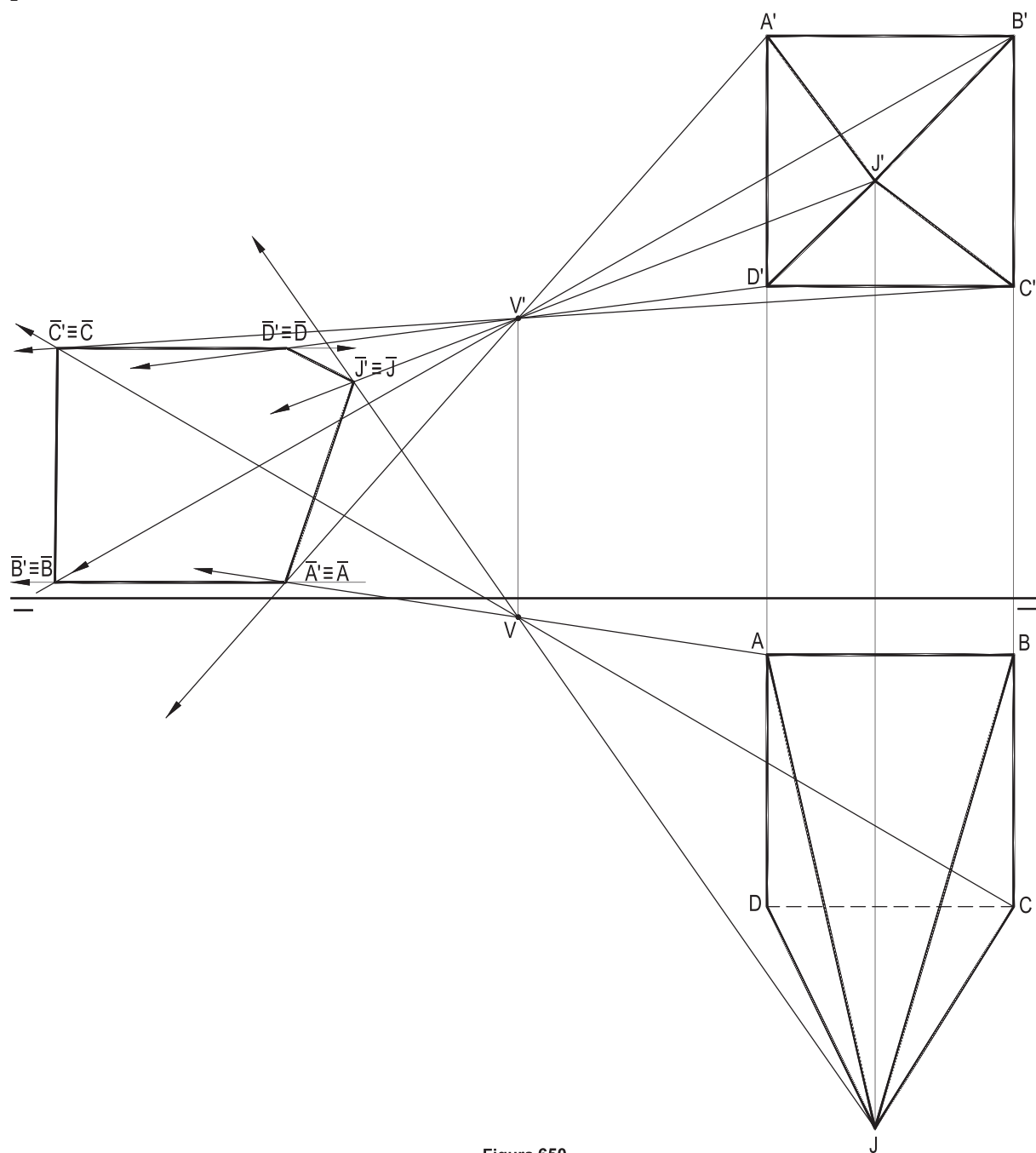


Figura 650

4 – Prisma quadrangular (A)(B)(C)(D)–(R)(S)(T)(U), dado pelas projeções de seus vértices, tanto quanto as projeções do centro (V) da projeção pedida.

Resolução habitual, buscando os traços  $(\bar{A})$ ,  $(\bar{B})$ ,  $(\bar{C})$ ,  $(\bar{D})$ ,  $(\bar{R})$ ,  $(\bar{S})$ ,  $(\bar{T})$  e  $(\bar{U})$  das projetantes de cada vértice com  $(\beta_{24})$ , resultando num contorno heptagonal, com apenas o vértice  $\bar{D}' \equiv \bar{D}$  em seu interior (Figura 651).

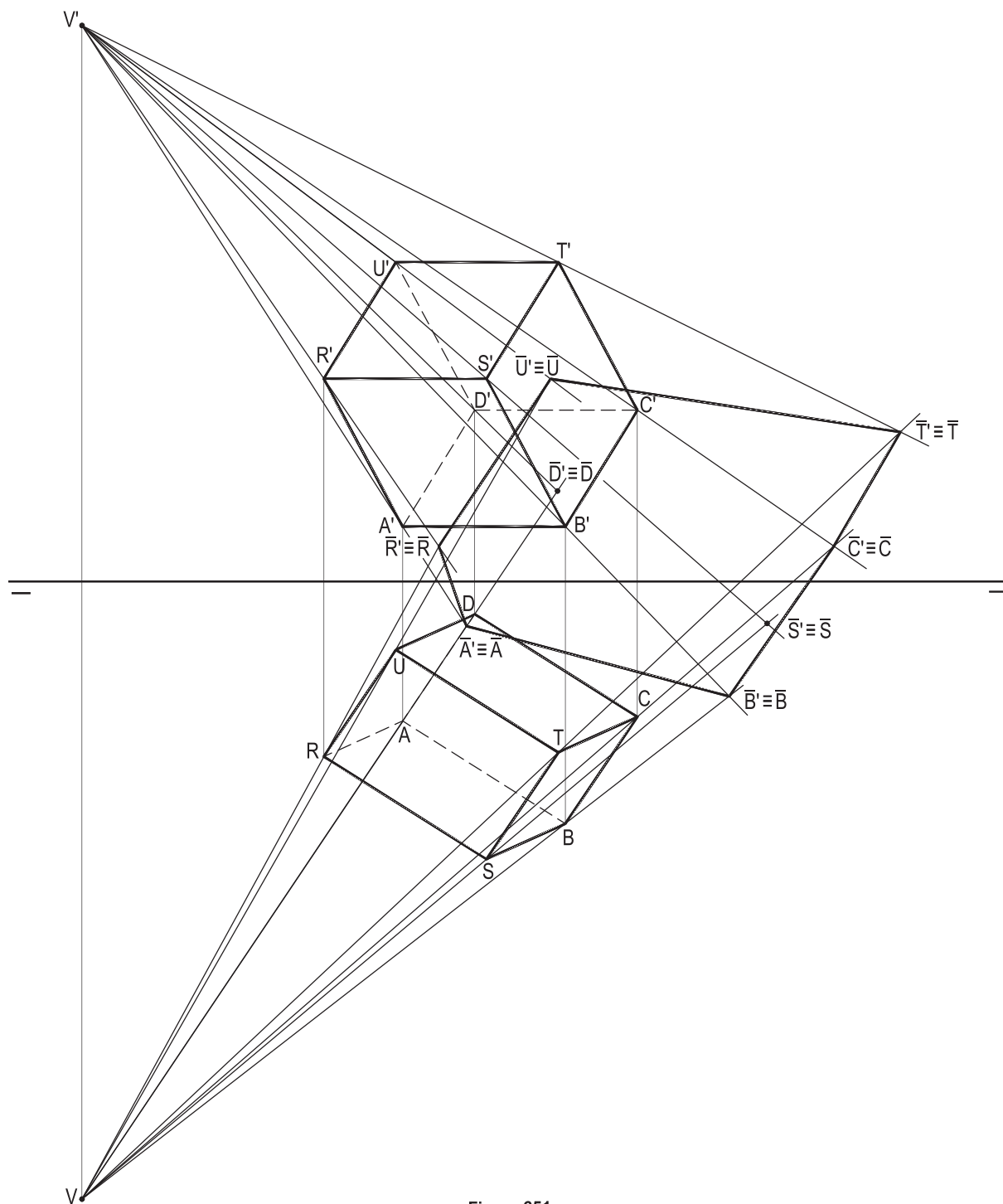


Figura 651

# CAPÍTULO XI

## PROJEÇÕES CILÍNDRICAS SOBRE $(\beta_{24})$

### 174 – Projeções cilíndricas

Projeção cilíndrica é aquela em que todas as projetantes são paralelas a uma determinada reta fixa, denominada, então, direção da projeção, podendo ser efetuada sobre qualquer tipo de superfície.

A projeção cilíndrica de um ponto (A), segundo uma direção (d), sobre uma superfície  $(\theta)$  pode ser apenas um ponto  $(\bar{A})$ , ou mais que um, conforme a natureza da superfície de projeção  $(\theta)$  considerada (Figuras 652, 653 e 654).

A denominação projeção cilíndrica deve-se ao fato de, ao se projetar uma curva (c), segundo uma direção (d) fixa, sobre qualquer superfície, as projetantes incumbidas de conduzir os pontos da curva (c) até suas projeções, todas paralelas a (d), apoiarem-se em (c), criando uma superfície cilíndrica (*Geometria Espacial*, número 180).

E, quando a superfície  $(\theta)$  de projeção é plana, e a direção (d) é oblíqua a ela, a projeção cilíndrica é denominada oblíqua, ou, simplesmente, cilíndrica. E diz-se cilíndrico-ortogonal, ou apenas ortogonal, quando (d) e  $(\theta)$  são perpendiculares (Figura 655).

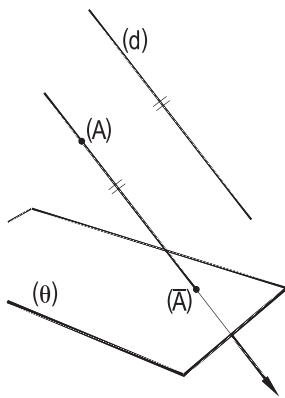


Figura 652

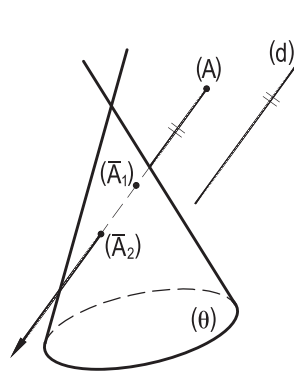


Figura 653

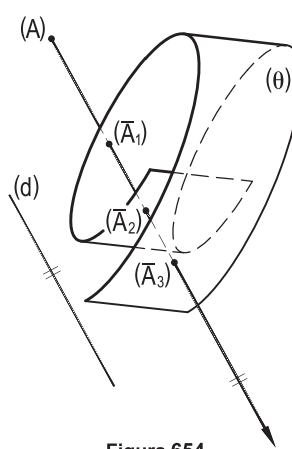


Figura 654

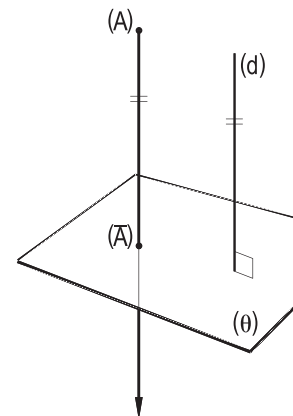


Figura 655

## 175 – Observação

As projeções cilíndricas podem ser consideradas projeções cônicas, quando o polo das projeções é rejeitado ao infinito, segundo, afinal, a própria direção dessa projeção cilíndrica.

## 176 – Teorema

A projeção cilíndrica de uma reta sobre um plano é uma reta, ou um ponto.

Demonstração: Consideremos uma reta  $(r)$ , a ser projetada sobre um plano dado  $(\theta)$ , segundo uma direção, também dada  $(d)$ , e observemos que, para efetuar a projeção em estudo, deve-se buscar a interseção com  $(\theta)$  do plano projetante  $(\gamma)$ , pertencente a  $(r)$  e paralelo a  $(d)$ , ou seja, do plano formado pela reta  $(r)$  e por projetantes como  $(A)(\bar{A})$  e  $(B)(\bar{B})$ , paralelas a  $(d)$  e conduzidas por dois pontos quaisquer  $(A)$  e  $(B)$ , de  $(r)$  (Figura 656).

Desse modo, a interseção do plano  $(\gamma)$ , projetante de  $(r)$ , com  $(\theta)$  é a projeção  $(\bar{r})$  procurada, uma reta como se queria demonstrar, para a situação genérica.

No caso particular em que a reta  $(r)$  em estudo é paralela à reta  $(d)$ , ela própria,  $(r)$ , é a projetante de todos seus pontos, como  $(A)$  e  $(B)$  da Figura 657, fazendo com que, nesta situação particular, a projeção de  $(r)$  sobre  $(\theta)$  seja um ponto  $(\bar{r})$ , traço de  $(r)$  em  $(\theta)$ , o que completa a demonstração do teorema.

## 177 – Corolário

Uma reta qualquer  $(r)$  e sua projeção cilíndrica  $(\bar{r})$ , para uma direção qualquer  $(d)$ , sobre um plano genérico  $(\theta)$ , cortam-se segundo o traço de  $(r)$  em  $(\theta)$ . Porque esse ponto  $(T) \equiv (\bar{T})$  há de pertencer simultaneamente a  $(r)$  e à interseção de seu plano projetante  $(\gamma)$  com  $(\theta)$  (Figura 658).

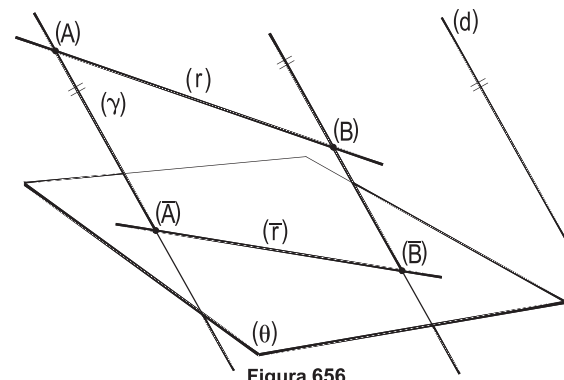


Figura 656

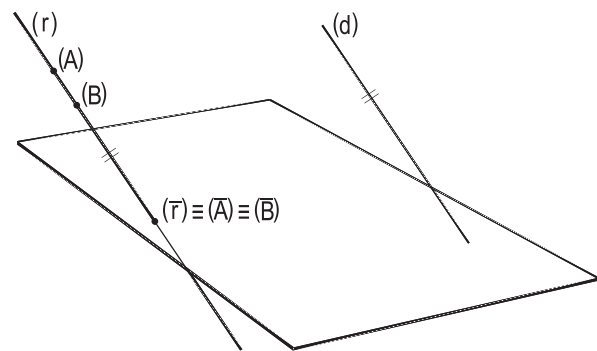


Figura 657

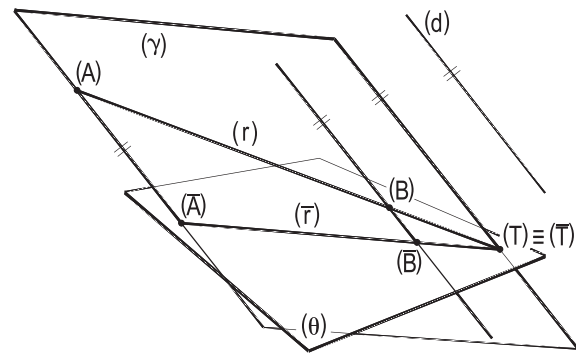


Figura 658

## 178 – Afinidade como projeção cilíndrica de um sistema de projeção cilíndrica entre dois planos secantes

Consideremos um sistema de projeção cilíndrica, associando figuras de dois planos  $(\gamma)$  e  $(\theta)$ , secantes, segundo uma direção genérica  $(d)$ , não paralela à interseção  $(\gamma\theta)$  desses dois planos e, inicialmente, estudemos uma reta qualquer  $(A)(B)$  de  $(\gamma)$  e sua projeção cilíndrica  $(\bar{A})(\bar{B})$  em  $(\theta)$  e observemos que essas duas retas cortam-se segundo um ponto  $(J)$  de  $(\gamma\theta)$  (número 177).

Para análise, estudemos a projeção cilíndrica desse sistema sobre um plano  $(\alpha)$ , qualquer, obtendo-se, então, os pontos  $A, B, \bar{A}$  e  $\bar{B}$  e as retas  $d$  e  $\gamma\theta$ , projeções respectivamente dos pontos  $(A), (B), (\bar{A})$  e  $(\bar{B})$  e das retas  $(d)$  e  $(\gamma\theta)$  (Figura 659). A direção utilizada para a projeção sobre  $(\alpha)$  é também genérica.

Como as pertinências de pontos a retas e os paralelismos de retas se conservam em toda projeção cilíndrica, as projeções  $AB$  e  $\bar{A}\bar{B}$  das retas  $(A)(B)$  e  $(\bar{A})(\bar{B})$  hão de se cortar num ponto  $J$ , projeção cilíndrica do ponto  $(J)$ , segundo a mesma direção utilizada para todo o conjunto espacial, ponto esse pertencente à reta  $\gamma\theta$ , projeção da interseção  $(\gamma\theta)$  dos dois planos considerados, já que  $(J)$  pertence a  $(\gamma\theta)$ .

As retas  $A\bar{A}, B\bar{B}$  e  $d$  serão, ainda nessa projeção, paralelas entre si (Figura 659).

Configura-se, então, (número 152), a afinidade entre as retas  $AB$  e  $\bar{A}\bar{B}$ , segundo a direção  $d$ , sendo  $\gamma\theta$  o eixo dessa afinidade, já que as retas como  $A\bar{A}$  e  $B\bar{B}$ , que associam pares de pontos correspondentes, obedecem a uma direção  $d$  constante, e retas homólogas, como  $AB$  e  $\bar{A}\bar{B}$ , cortam-se segundo um ponto da reta fixa  $\gamma\theta$  (Figura 659).

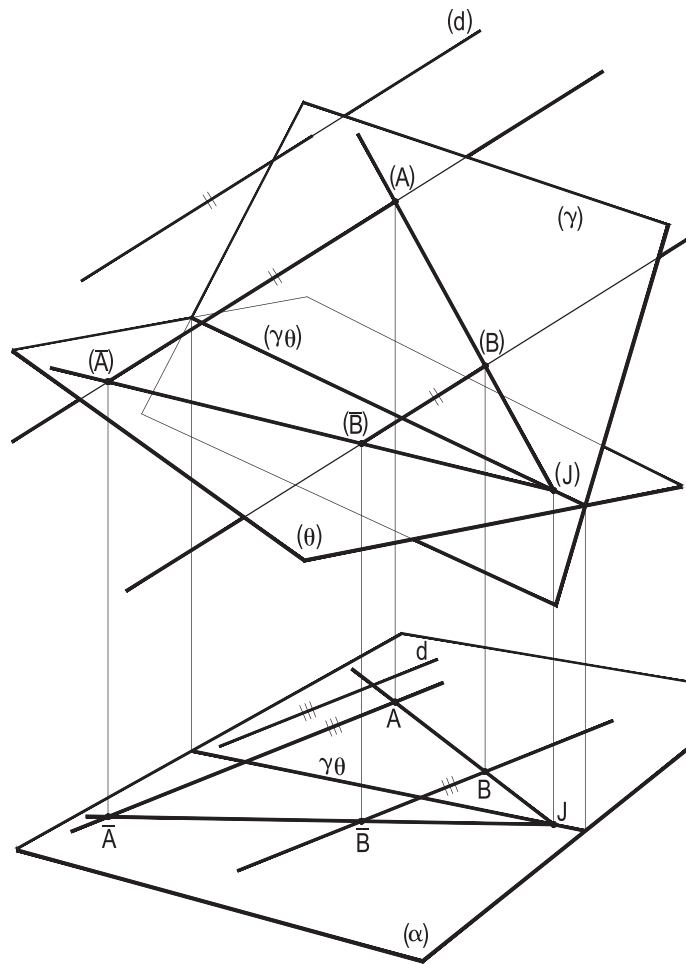


Figura 659

Repetindo a operação para um triângulo  $(A)(B)(C)$  de um plano  $(\gamma)$  e sua projeção cilíndrica  $(\bar{A})(\bar{B})(\bar{C})$  sobre outro plano  $(\theta)$ , secante ao primeiro, segundo uma direção genérica  $(d)$ , não paralela à interseção  $(\gamma\theta)$  dos planos considerados, projetemos cilíndricamente todo esse sistema sobre um plano qualquer  $(\alpha)$ , também segundo uma direção  $(t)$  qualquer.

Tal como no caso anterior, de duas retas, também agora, para os triângulos  $ABC$  e  $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$ , projeções sobre  $(\alpha)$  dos dois dados, fica constituída uma afinidade de direção  $d$  e eixo  $\gamma\theta$  (Figura 660), respectivamente, projeções das retas  $(d)$  e  $(\gamma\theta)$ .

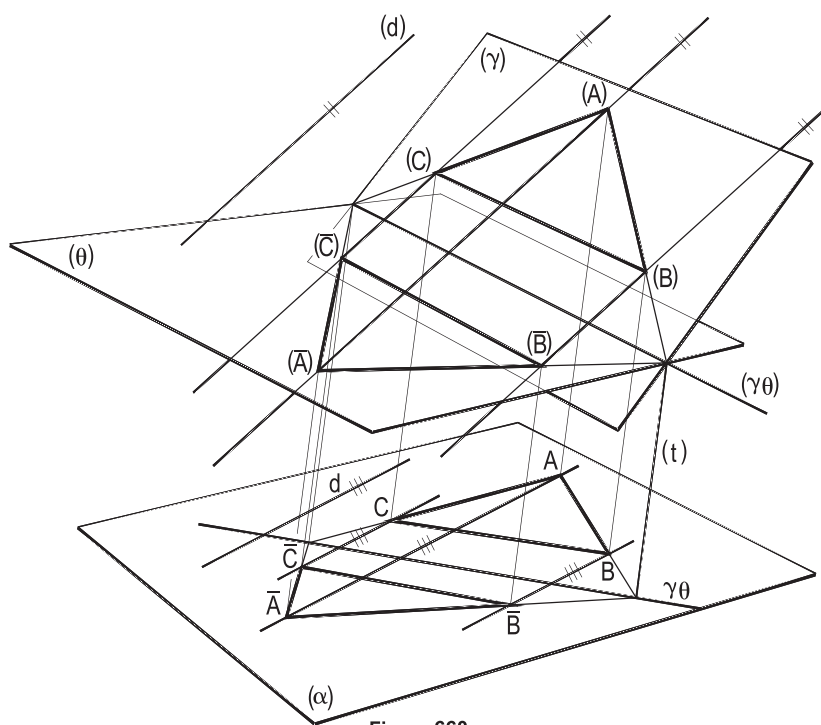


Figura 660

E fossem polígonos de quaisquer gêneros, ou figuras curvas ou mistas, com o mesmo raciocínio chegaríamos à conclusão de que a projeção cilíndrica (oblíqua ou ortogonal), sobre um plano genérico, de duas figuras planas situadas em dois planos secantes, sendo uma a projeção cilíndrica da outra, resultaria, em  $(\alpha)$ , numa afinidade entre as projeções das duas figuras consideradas, independentemente de ser a projeção cilíndrica, oblíqua ou ortogonal.

Mais uma vez, nessa afinidade, o eixo  $\gamma\theta$  e a direção  $d$  seriam, respectivamente, as projeções da interseção  $(\gamma\theta)$  dos dois planos e da direção  $(d)$  considerados.

### 179 – Observação

No caso de serem paralelos os planos  $(\gamma)$  e  $(\theta)$ , as projeções cilíndricas das figuras de um sobre o outro resultam em translações, o que se repete entre suas projeções cilíndricas sobre um plano genérico.



## 180 – Projeções cilíndricas sobre $(\pi)$ e sobre $(\pi')$

Como primeiro passo, para as épuras, passemos a estudar as projeções cilíndricas de uma figura plana, dada por suas projeções, sobre cada um dos dois planos de projeção  $(\pi)$  e  $(\pi')$ , segundo a direção de uma reta  $(d)$ , dada por suas projeções.

Nos dois exemplos escolhidos são projetados um triângulo  $(A)(B)(C)$ , dado por suas projeções.  $(\bar{A})(\bar{B})(\bar{C})$  é a projeção cilíndrica do triângulo dado, segundo a direção  $(d)$ , também dada.

Na projeção sobre  $(\pi)$  (Figura 661),  $(\bar{A})$ ,  $(\bar{B})$  e  $(\bar{C})$  são os traços horizontais das projetantes dos vértices do triângulo  $(A)(B)(C)$ , dado; no segundo exemplo – projeção cilíndrica sobre  $(\pi')$  – são os traços verticais das projetantes (Figura 662) que resolvem a questão.

Em ambos os casos, a projeção cilíndrica obtida apresenta sua verdadeira grandeza, por pertencer a um dos planos de projeção.

## 181 – Projeções cilíndricas sobre $(\pi'')$

Agora são as interseções, com  $(\pi'')$ , das projetantes, todas paralelas à reta dada  $(d)$ , dos vértices do polígono dado, que proporcionam a projeção cilíndrica (Figura 663).

A verdadeira grandeza da projeção vem numa vista lateral (Figura 663).

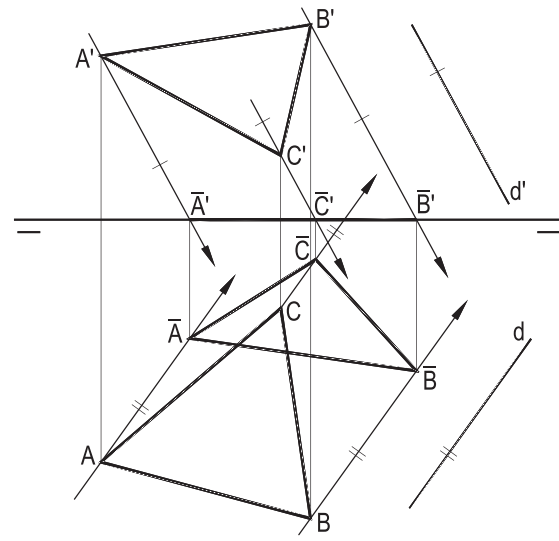


Figura 661

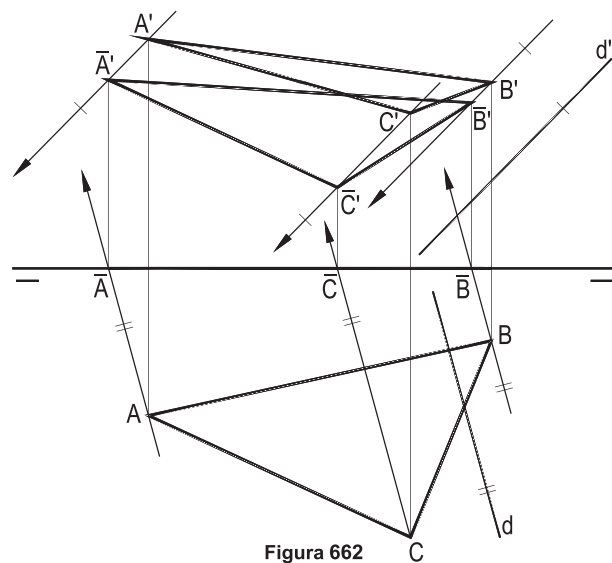


Figura 662

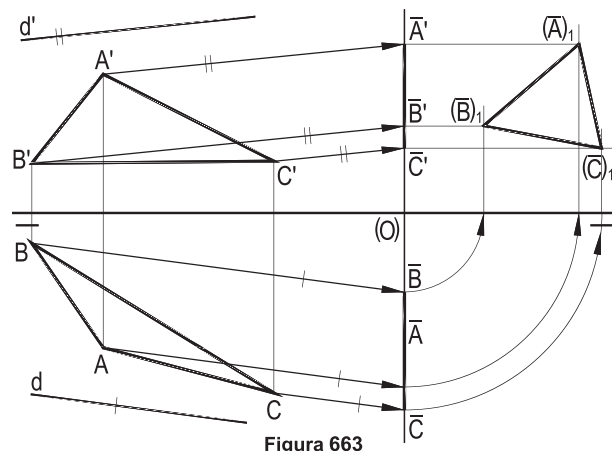


Figura 663

## 182 – Projeções cilíndricas sobre planos projetantes

As interseções das projetantes paralelas à direção dada ( $d$ ), traçadas pelos vértices do polígono dado, com o plano de projeção, são bem simples, por ser este projetante, produzindo os vértices da projeção cilíndrica  $(\bar{A})(\bar{B})(\bar{C})$  pedida, levada à V.G.  $(\bar{A})_1(\bar{B})_1(\bar{C})_1$  com um rebatimento (Figuras 664 e 665).

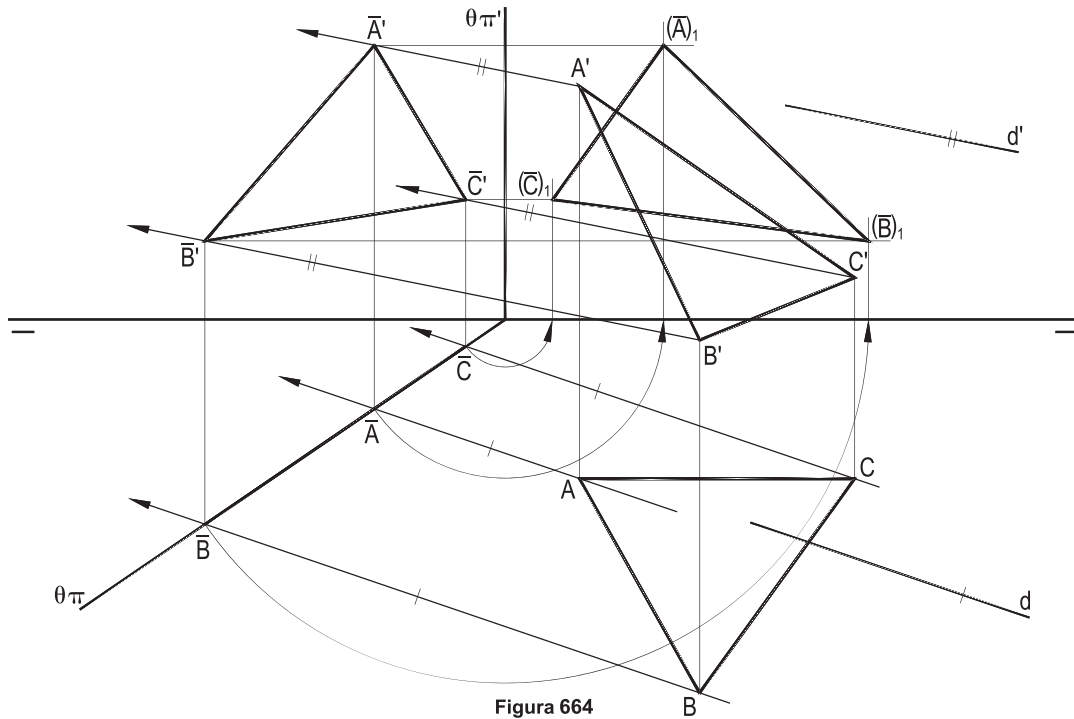


Figura 664

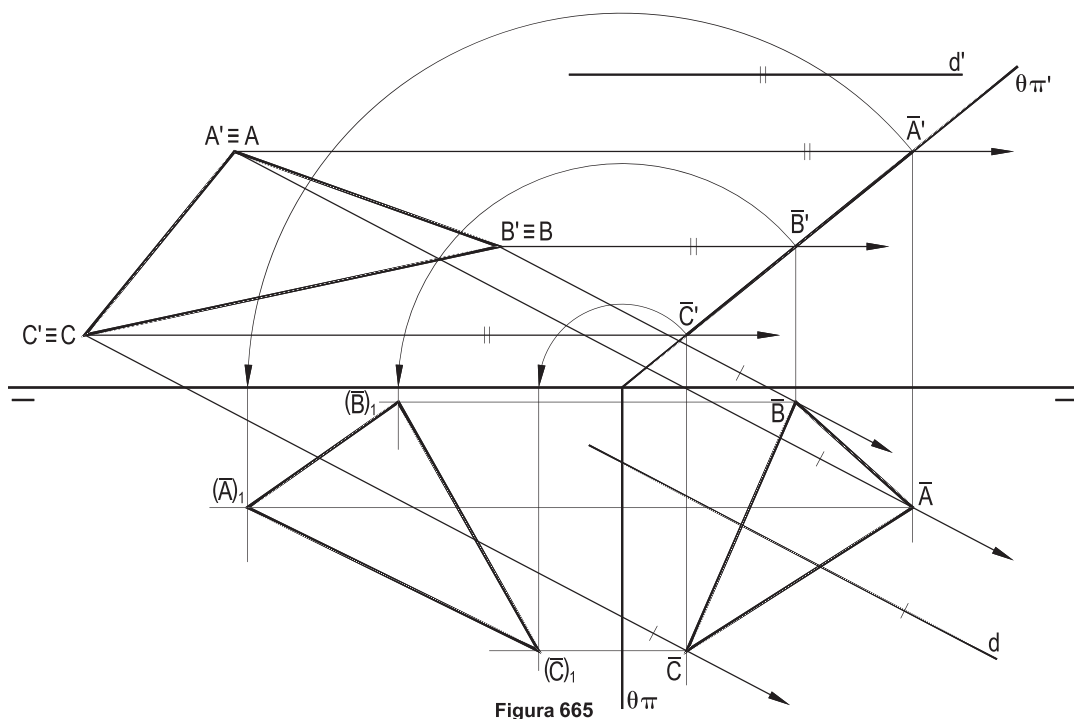


Figura 665

### 183 – Projeções cilíndricas sobre planos não projetantes

Procedimento igual aos anteriormente utilizados: projetantes paralelas à reta dada (d), pelos vértices do polígono a projetar, e determinação de suas interseções com o plano de projeção dado entregam as projeções da projeção cilíndrica pedida e, com um rebatimento, vem sua verdadeira grandeza.

No exemplo abaixo, além do plano de projeção ( $\theta$ ), dado por seus traços, são dadas, também, as projeções da direção (d) da projeção cilíndrica pedida e as dos vértices do trapézio (A)(B)(C)(D), pertencente a ( $\pi$ ), com suas bases (B)(C) e (A)(D) paralelas a  $\theta\pi$ .

A determinação da projeção horizontal  $\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}$  da projeção cilíndrica pedida se fez com o traço ( $\bar{C}$ ) da projetante de (C) em ( $\theta$ ) e com a afinidade entre ela e o trapézio ABCD de ( $\pi$ ).

Marcada  $(\bar{A})(\bar{B})(\bar{C})(\bar{D})$ , em ( $\theta$ ), vem sua projeção vertical e, com o rebatimento de ( $\theta$ ) sobre ( $\pi$ ), a V.G.  $(\bar{A})_1(\bar{B})_1(\bar{C})_1(\bar{D})_1$  (Figura 666).

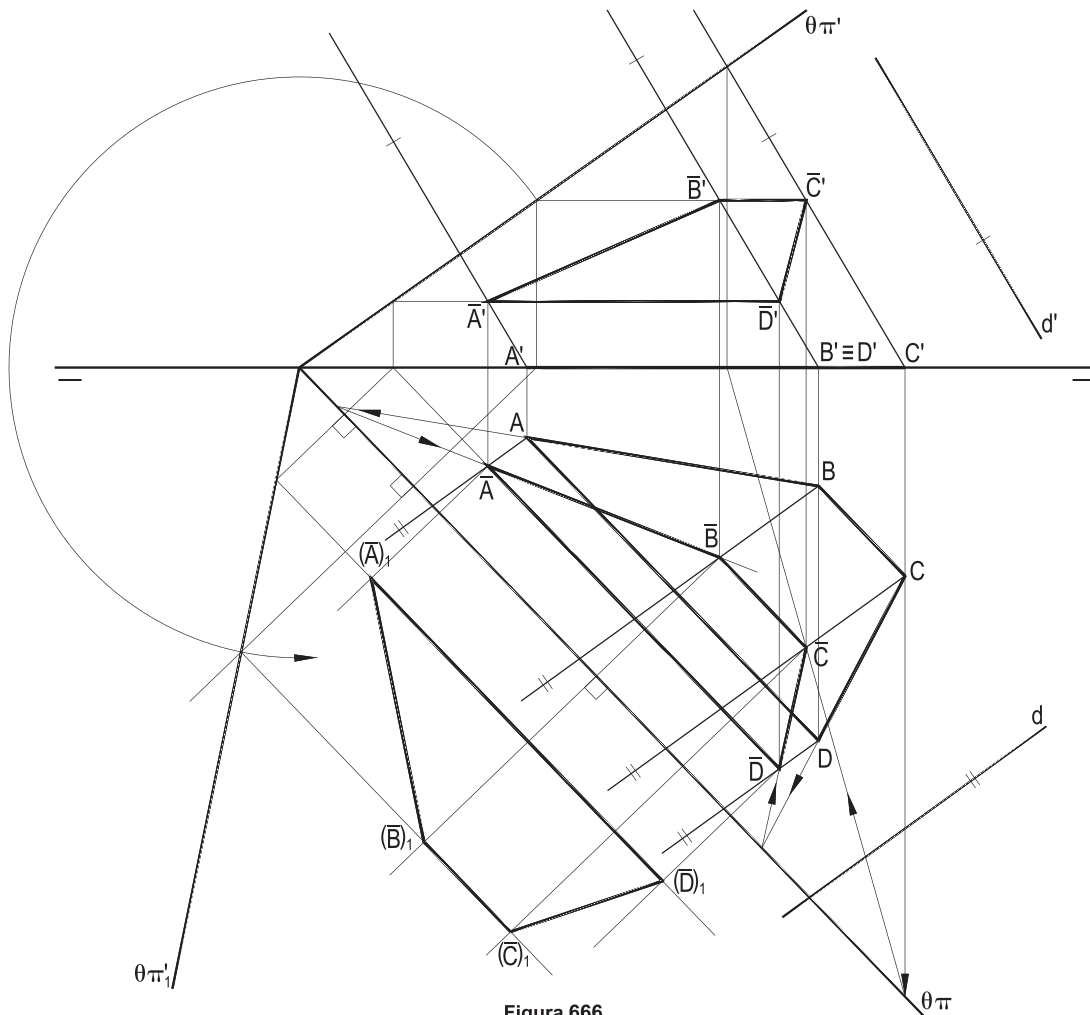


Figura 666

Neste segundo exemplo (Figura 667), busca-se a projeção cilíndrica do triângulo (A)(B)(C), dado por suas projeções, sobre o plano ( $\theta$ ), paralelo a ( $\pi'\pi$ ), dado por seus traços, segundo a direção (d), também dada por suas projeções. Pede-se, ainda, a verdadeira grandeza dessa projeção.

Como de hábito, construídas as projetantes dos vértices do triângulo, são suas interseções com ( $\theta$ ) que resolvem a questão, e o rebatimento de ( $\theta$ ) sobre ( $\pi$ ) proporciona a V.G.  $(\bar{A})_1(\bar{B})_1(\bar{C})_1$  pedida (Figura 667).

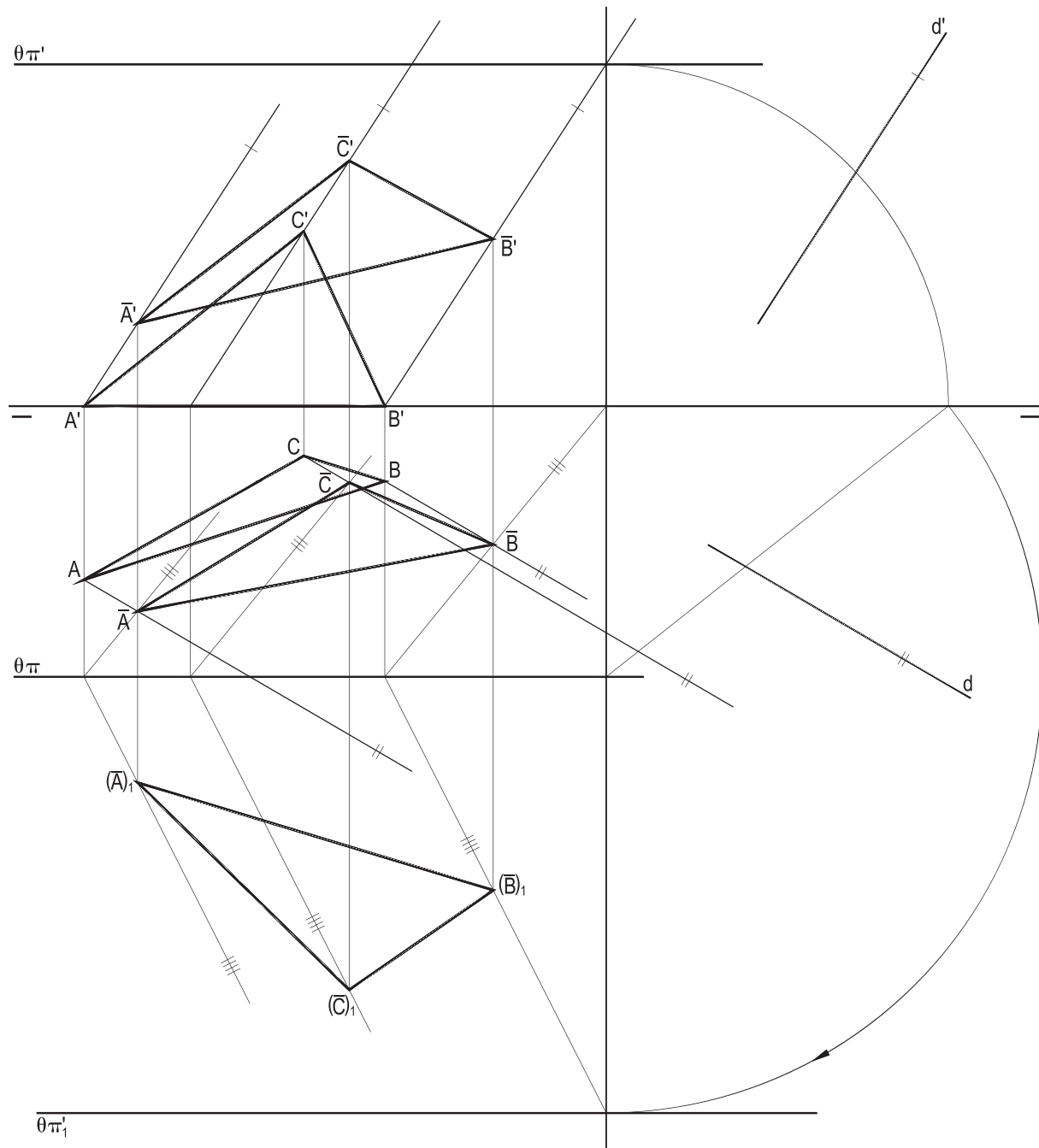


Figura 667

No exemplo seguinte (Figura 668), dado, por suas projeções, o triângulo  $(A)(B)(C)$  e, pelas projeções de duas retas  $(r)$  e  $(s)$ , um plano  $(\alpha)$ , sabendo que  $(A)(B)(C)$  é uma projeção cilíndrica do triângulo  $(\bar{A})(\bar{B})(\bar{C})$ , de  $(\alpha)$ , e que este triângulo é a projeção cilíndrica ortogonal de  $(A)(B)(C)$  sobre  $(\alpha)$ , pede-se determinar as projeções e a V.G. do triângulo  $(\bar{A})(\bar{B})(\bar{C})$ .

$(\bar{A})(\bar{B})(\bar{C})$  se consegue pelo envio das frontais, por  $(A)$ , por  $(B)$  e por  $(C)$ , perpendiculares ao plano  $(\alpha)$ , de topo das retas dadas  $(r)$  e  $(s)$ , e pela determinação dos traços dessas frontais em  $(\alpha)$ , que são os vértices do triângulo  $(\bar{A})(\bar{B})(\bar{C})$  pedido.

Sua verdadeira grandeza  $(\bar{A})_1(\bar{B})_1(\bar{C})_1$  é obtida com o rebatimento de  $(\alpha)$  sobre  $(\pi)$  (Figura 668).

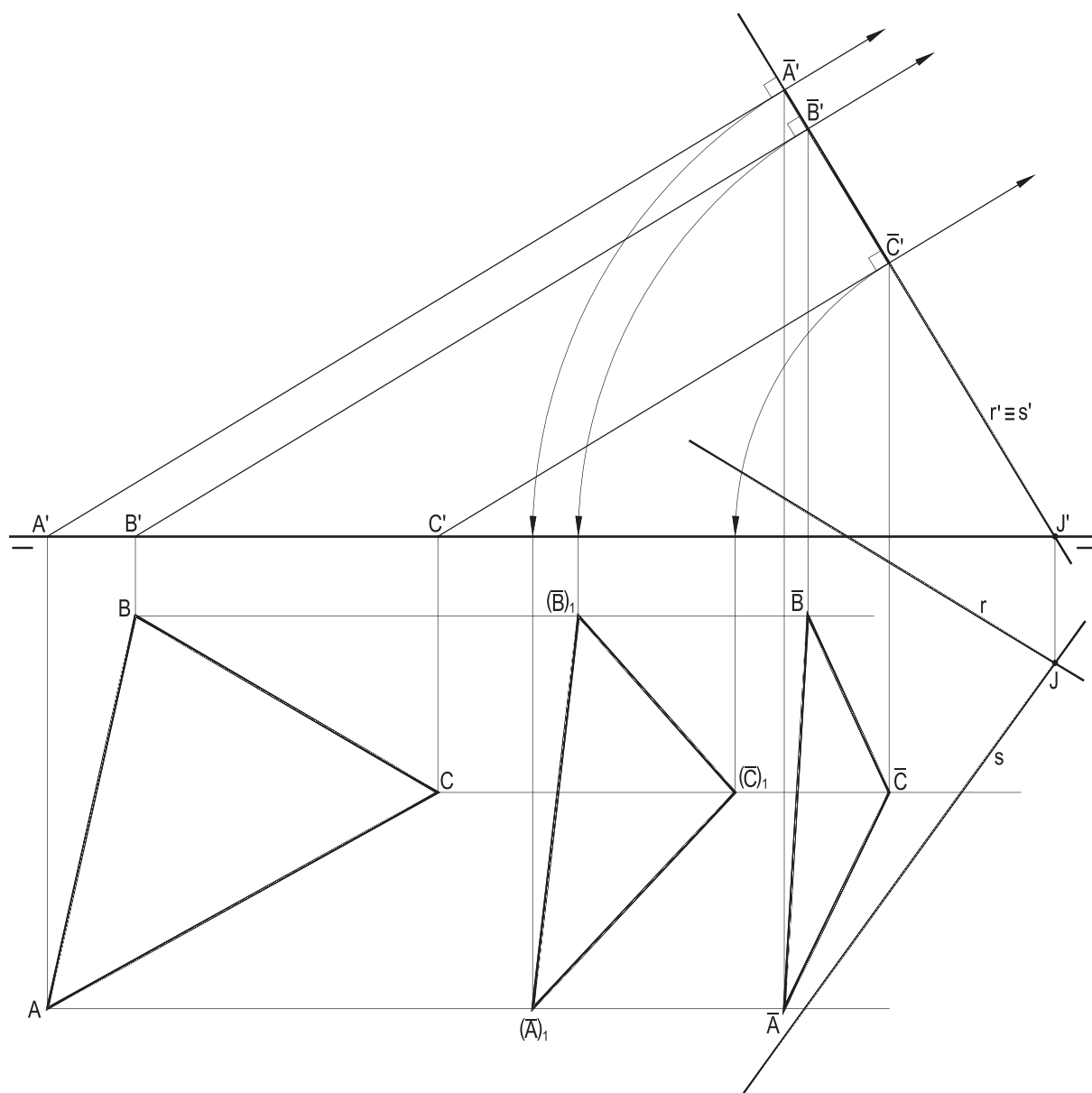


Figura 668

## 184 – Projeção cilíndrica de poliedro

Mesmos procedimentos utilizados para os polígonos. Seguem alguns exemplos:

1 – Dada a pirâmide quadrangular  $(J)-(A)(B)(C)(D)$ , pede-se construir sua projeção cilíndrica, sobre  $(\pi)$ , segundo a direção dada  $(d)$ .

São os traços horizontais  $\bar{J}$ ,  $\bar{A}$ ,  $\bar{B}$  e  $\bar{C}$  (Figura 669), que delimitam, por seu contorno, a projeção cilíndrica da pirâmide dada sobre  $(\pi)$ , restando a projeção  $\bar{D}$ , no interior do contorno.

2 – Determinar a verdadeira grandeza do contorno da projeção cilíndrica da pirâmide  $(J)-(A)(B)(C)(D)$ , dada por suas projeções, sobre  $(\pi'')$ , segundo a direção dada  $(d)$ .

Os traços com  $(\pi'')$  das projetantes pertencentes aos vértices do sólido e paralelas a  $(d)$  formam a projeção pedida, que, com seu rebatimento, entrega a V.G. procurada  $(\bar{J})_1(\bar{B})_1(\bar{A})_1(\bar{D})_1$  (Figura 670), com o vértice  $(\bar{C})_1$  em seu interior.

Observe-se que, como de hábito, não vão representadas as arestas que chegam a  $(\bar{C})_1$ .

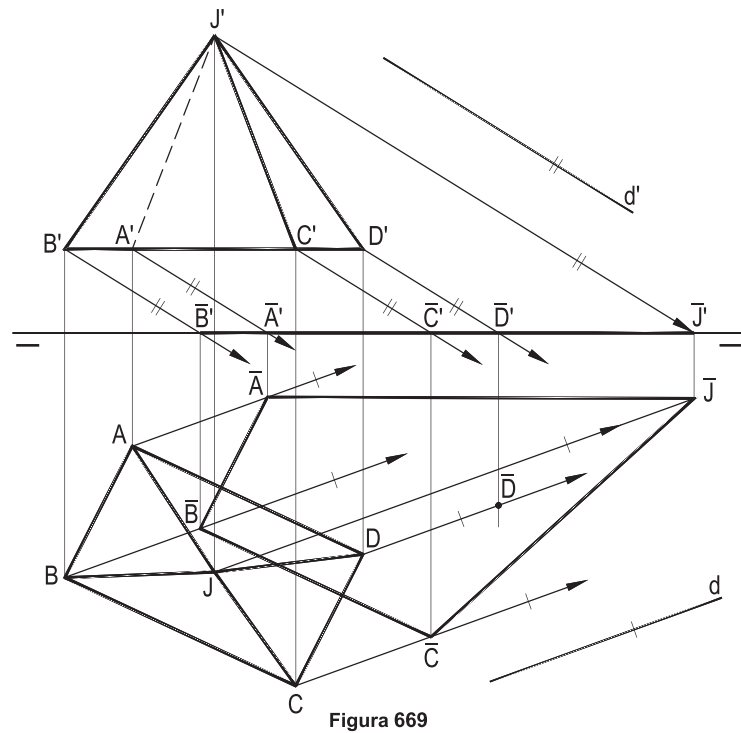


Figura 669

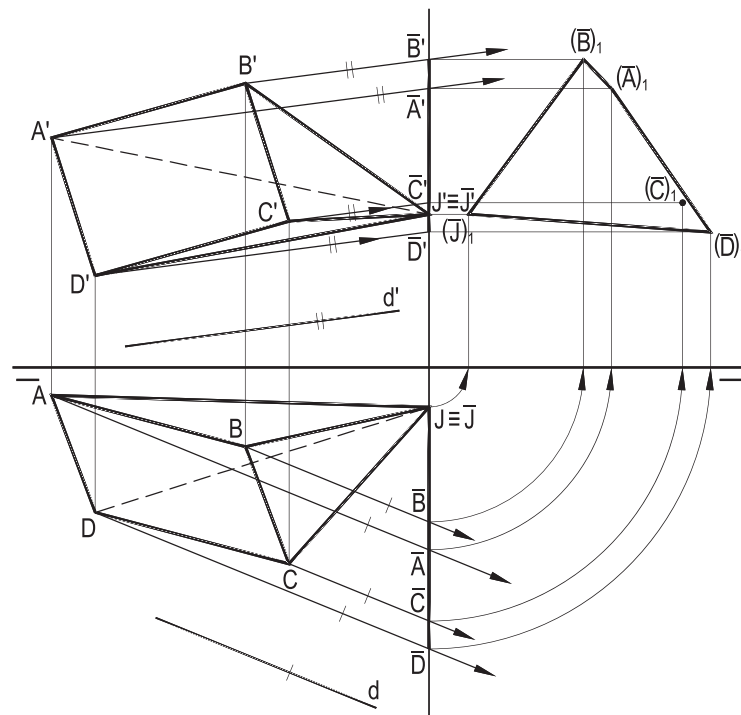


Figura 670

3 – O prisma triangular (A)(B)(C)–(R)(S)(T), com as duas base de perfil, dadas por suas projeções, deve ser projetado, segundo a direção (d), também dada por suas projeções, sobre o plano de topo ( $\theta$ ), dado por seus traços.

Pede-se determinar essa projeção cilíndrica, bem como a V.G. de seu contorno.

A obtenção da projeção cilíndrica do prisma é bem simples, por ser o plano ( $\theta$ ), de projeção, projetante, o que proporciona imediata determinação de sua projeção vertical  $\bar{A}' \bar{B}' \bar{C}' - \bar{R}' \bar{S}' \bar{T}'$  (Figura 671), entregando a seguir sua projeção horizontal. A verdadeira grandeza do contorno da projeção cilíndrica do sólido vem com o rebatimento de ( $\theta$ ) sobre ( $\pi$ ), representada pelo pentágono  $(\bar{B})_1(\bar{S})_1(\bar{R})_1(\bar{T})_1(\bar{C})_1$ , ficando o rebatimento  $(\bar{A})_1$  do último vértice no interior desse contorno.

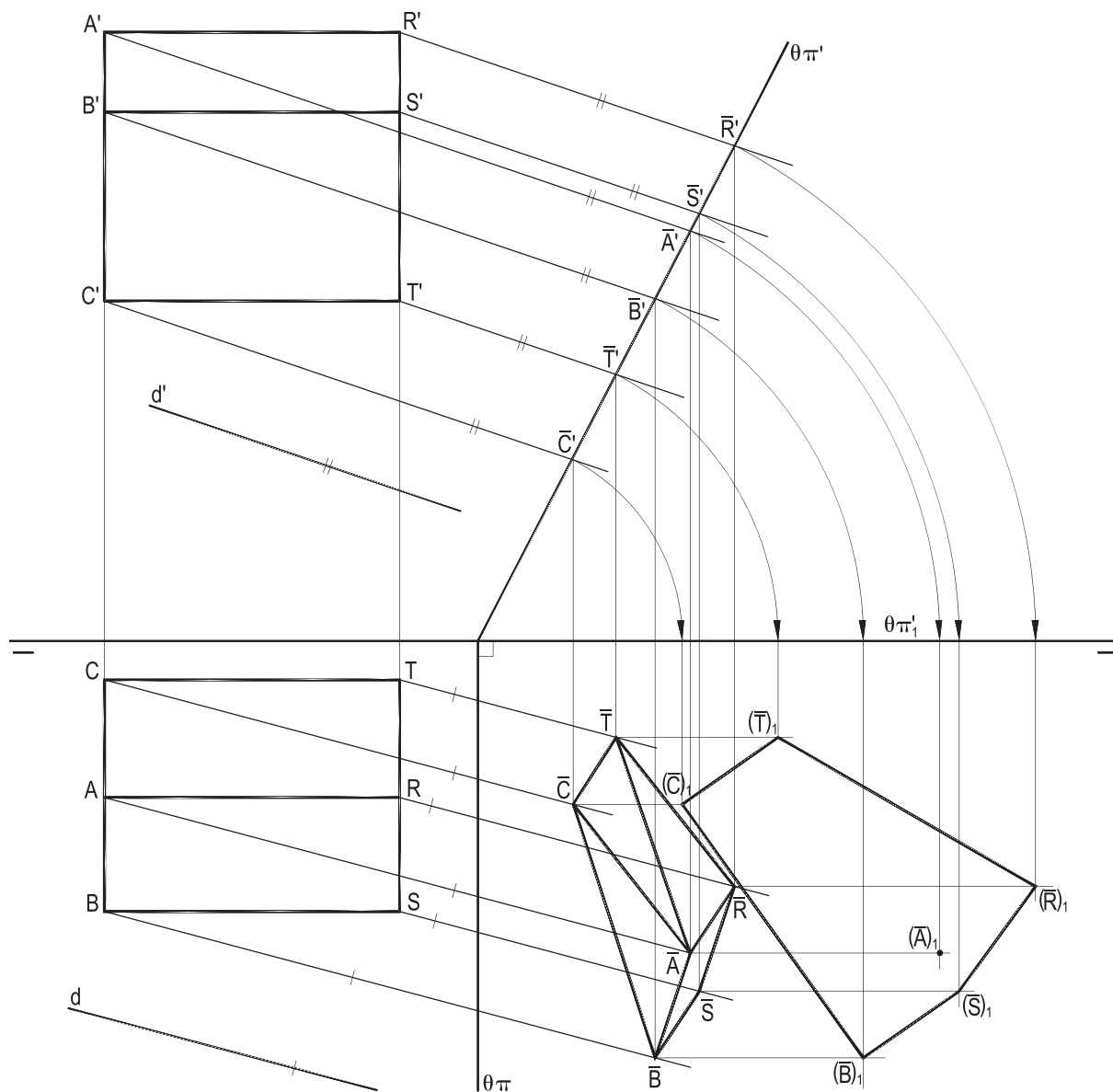


Figura 671

## 185 – Projeção cilíndrica de ponto sobre $(\beta_{24})$

Bastante simples a determinação da projeção cilíndrica ( $\bar{A}$ ) de um ponto dado (A), segundo uma direção também dada (d), sobre  $(\beta_{24})$ , pelo traçado, por (A), da paralela a (d) e pela obtenção da interseção dessa reta com  $(\beta_{24})$ .

Nos exemplos abaixo, varia a natureza da direção (d), destacadas as hipóteses de ser (d) de perfil (Figura 678), solucionada com uma vista lateral, e as duas (Figuras 676 e 677) em que ( $\bar{A}$ ) há de ser o ponto impróprio da reta (d), ou, o que é o mesmo, da paralela ( $d_1$ ) a (d), traçada por (A).

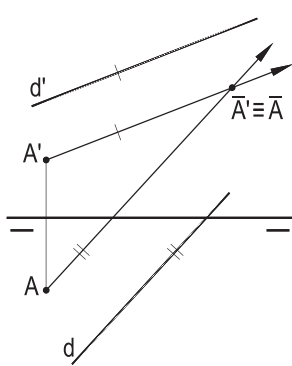


Figura 672

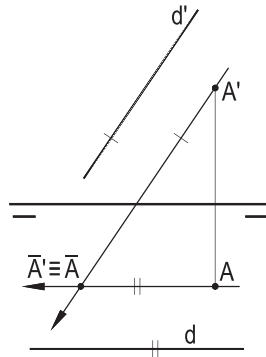


Figura 673

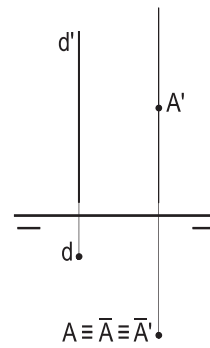


Figura 674

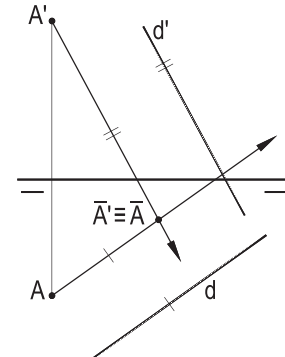


Figura 675

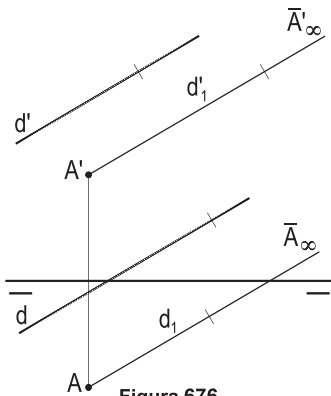


Figura 676

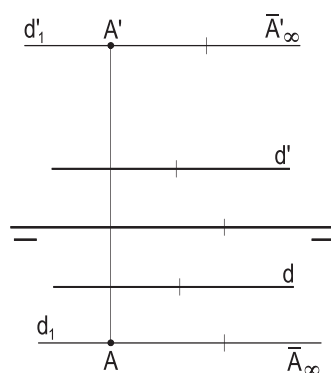


Figura 677

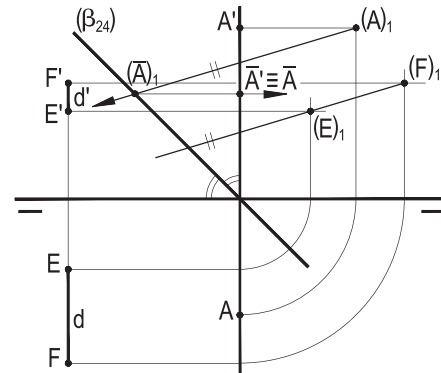


Figura 678

## 186 – Projeção cilíndrica de reta sobre $(\beta_{24})$

Para construir a projeção cilíndrica de uma reta dada (r), segundo uma direção também dada (d), sobre  $(\beta_{24})$ , basta projetar dois de seus pontos (A) e (B) sobre  $(\beta_{24})$ , segundo aquela direção, como visto acima, pois suas projeções ( $\bar{A}$ ) e ( $\bar{B}$ ) sobre  $(\beta_{24})$  definirão a projeção ( $\bar{r}$ ) procurada.

É claro que, sempre que possível, convém utilizar o traço (P) de (r) com  $(\beta_{24})$ , coincidente com sua projeção sobre  $(\beta_{24})$ .



Nos exemplos abaixo vão apresentadas diferentes naturezas da reta ( $r$ ) a ser projetada sobre  $(\beta_{24})$ , incluídos casos em que seu traço com  $(\beta_{24})$  é inacessível (Figuras 682 e 685) e em que  $(r)$  assume a posição de perfil (E)(F) (Figuras 684 e 686).

Cabe destacar outras três situações particulares, a saber: a reta qualquer ( $r$ ), projetada segundo uma direção ( $d$ ) paralela a  $(\beta_{24})$ , gera a projeção ( $\bar{r}$ ) paralela àquela direção e conduzida pelo traço ( $P$ ) de  $(r)$  em  $(\beta_{24})$  (Figura 680); a reta ( $r$ ), paralela a  $(\beta_{24})$ , projetada por uma direção genérica ( $d$ ), sobre  $(\beta_{24})$ , proporciona, como projeção ( $\bar{r}$ ), uma reta paralela a  $(r)$  (Figura 687); uma vertical ( $r$ ) (Figura 683), porque forma com as projetantes de todos os seus pontos um plano vertical ( $\gamma$ ), paralelo à reta ( $d$ ), tem por projeção em  $(\beta_{24})$ , segundo essa direção, a reta ( $\bar{r}$ ) que, em épura, tem suas projeções coincidentes com o traço horizontal  $\gamma\pi$ .

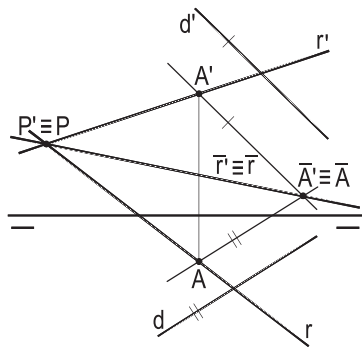


Figura 679

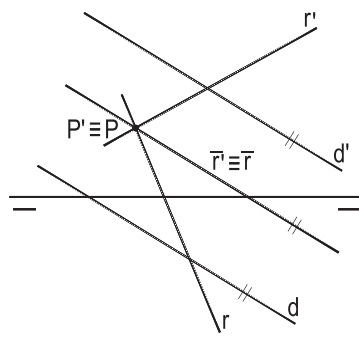


Figura 680

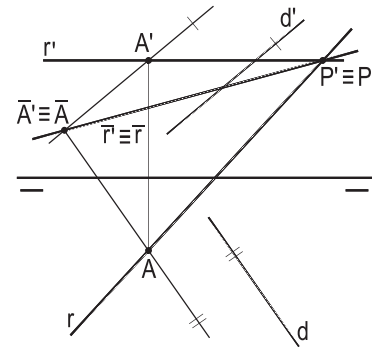


Figura 681

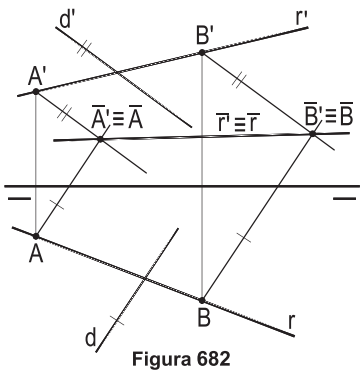


Figura 682

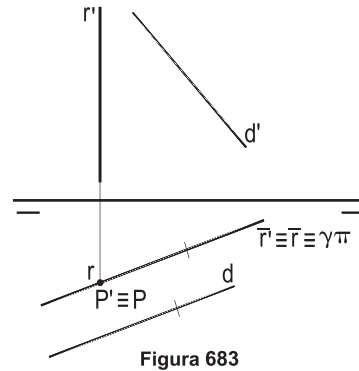


Figura 683

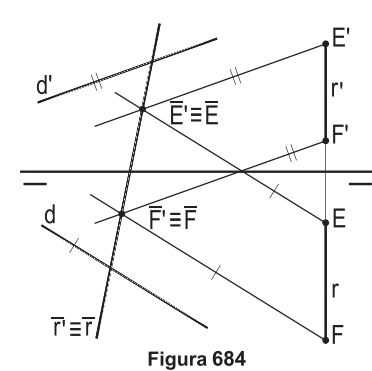


Figura 684

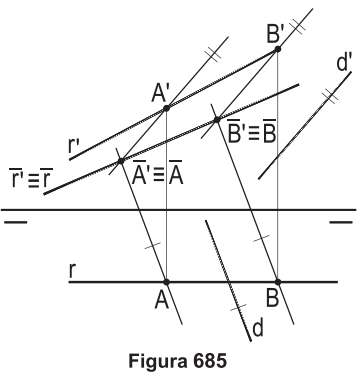


Figura 685

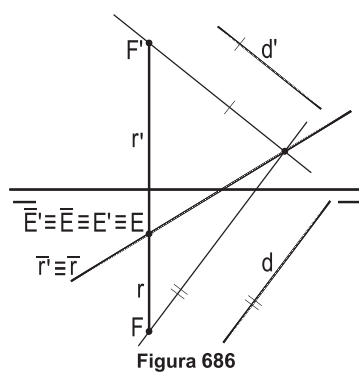


Figura 686

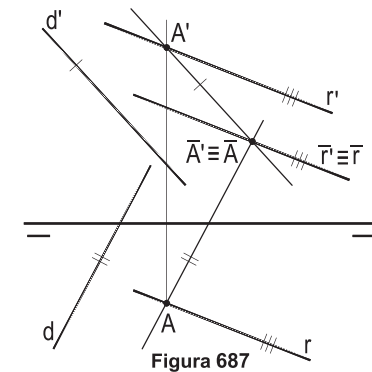


Figura 687

## 187 – Projeção cilíndrica de polígono sobre $(\beta_{24})$

A projeção de um polígono dado sobre  $(\beta_{24})$ , segundo uma direção dada, se faz pelas determinações das projeções de seus vértices e/ou de seus lados, segundo aquela direção, sobre  $(\beta_{24})$ , tal como detalhado anteriormente.

Os exemplos seguintes, além de incluir situações genéricas, ressaltam detalhes especiais, então comentados.

Observar (Figura 689) que  $(A)(B)$  é paralela a  $(\beta_{24})$  e, por isso, paralela à sua projeção  $(\bar{A})(\bar{B})$ , e que, na Figura 690,  $(B)(C)$  é fronto-horizontal, obrigando sua projeção  $(\bar{B})(\bar{C})$  a ser também fronto-horizontal, e que a particularidade da posição da direção  $(d)$ , na Figura 691, proporciona uma projeção retilínea  $(\bar{A})(\bar{B})(\bar{C})$  para o triângulo dado.

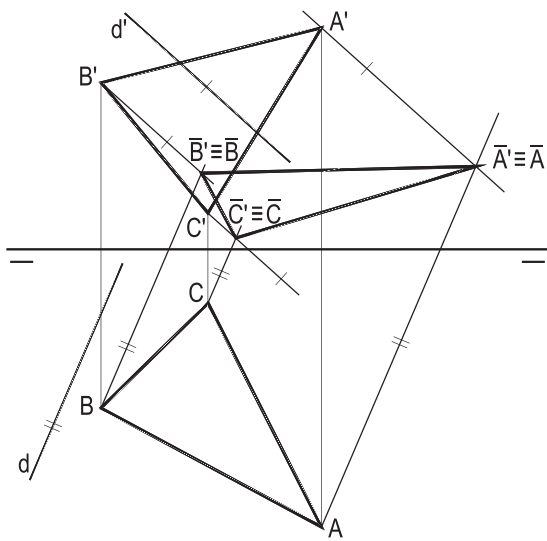


Figura 688

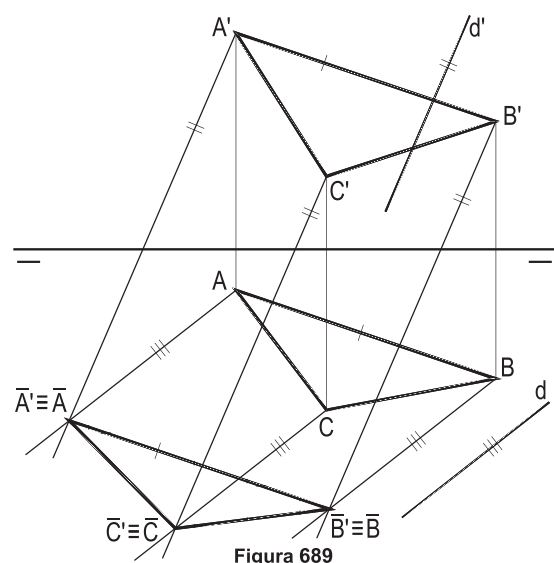


Figura 689

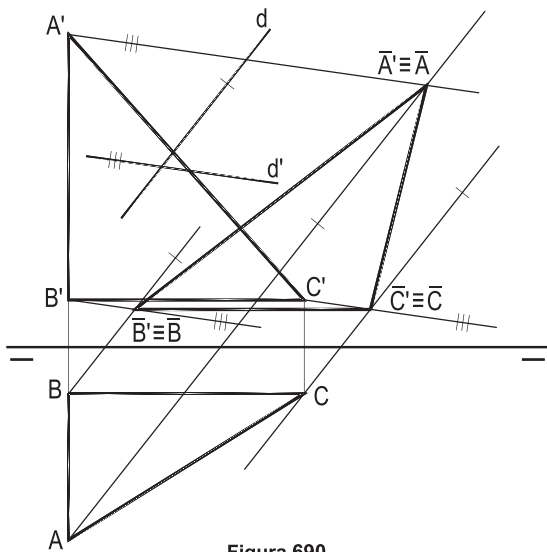


Figura 690

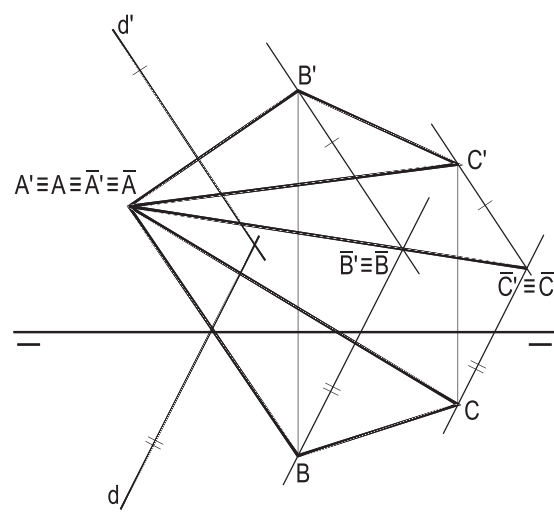
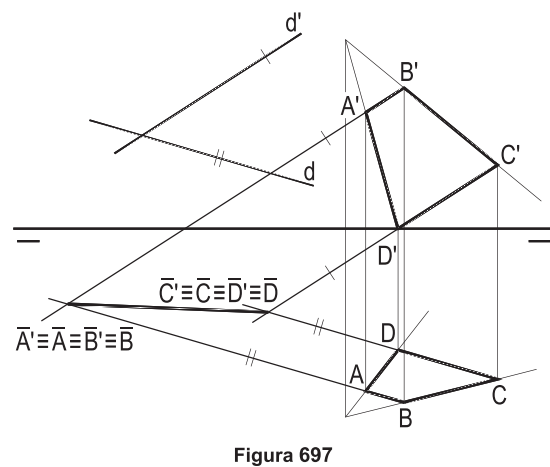
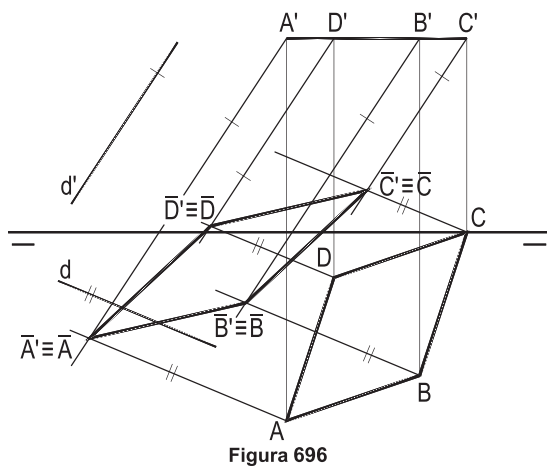
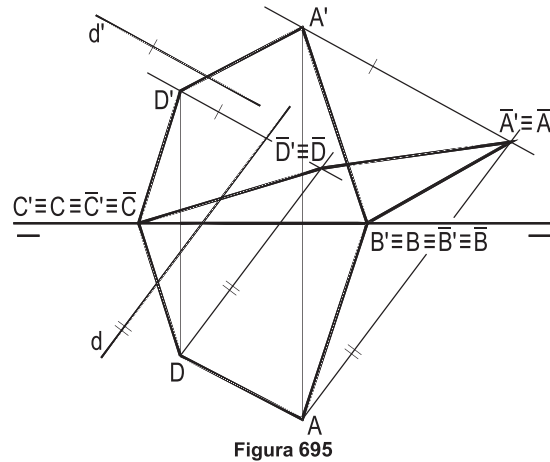
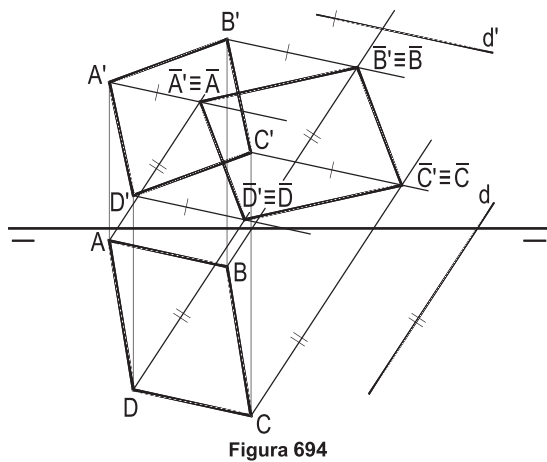
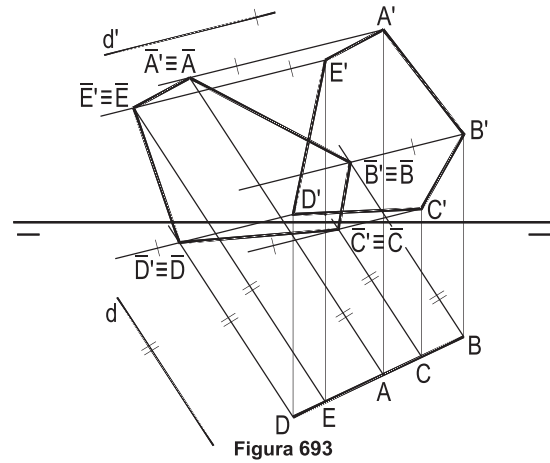
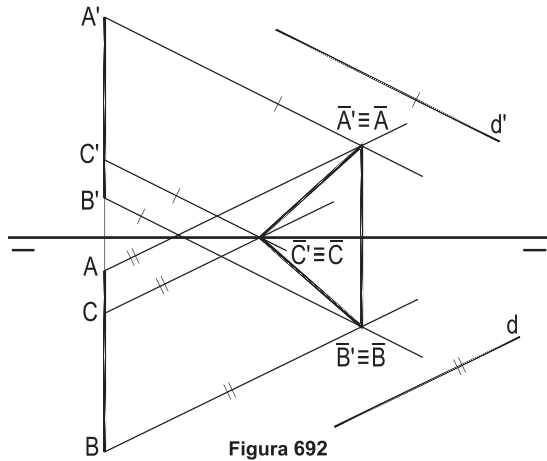


Figura 691

De ressaltar o paralelogramo (A)(B)(C)(D) que, projetado sobre  $(\beta_{24})$ , proporciona outro paralelogramo  $(\bar{A})(\bar{B})(\bar{C})(\bar{D})$  (Figura 694), o que se repete na Figura 696; e o trapézio (A)(B)(C)(D) (Figura 697), que, pelo fato de a direção (d) das projetantes ser a mesma das bases do trapézio, reduz sua projeção sobre  $(\beta_{24})$  a um segmento de reta, pelas projeções puntuais de cada uma dessas bases.



### 188 – Projeção cilíndrica de poliedro sobre $(\beta_{24})$

A construção da projeção cilíndrica de um poliedro sobre  $(\beta_{24})$ , segundo uma direção dada, se faz pela obtenção das projeções de seus vértices, tal como visto até agora, lembrando que, como habitual, apenas o contorno da projeção do poliedro sobre  $(\beta_{24})$  deve ser destacado.

Seguem alguns exemplos:

1 – Tetraedro (J)-(A)(B)(C), dado por suas projeções. Dada a direção (d) da projeção cilíndrica pedida.

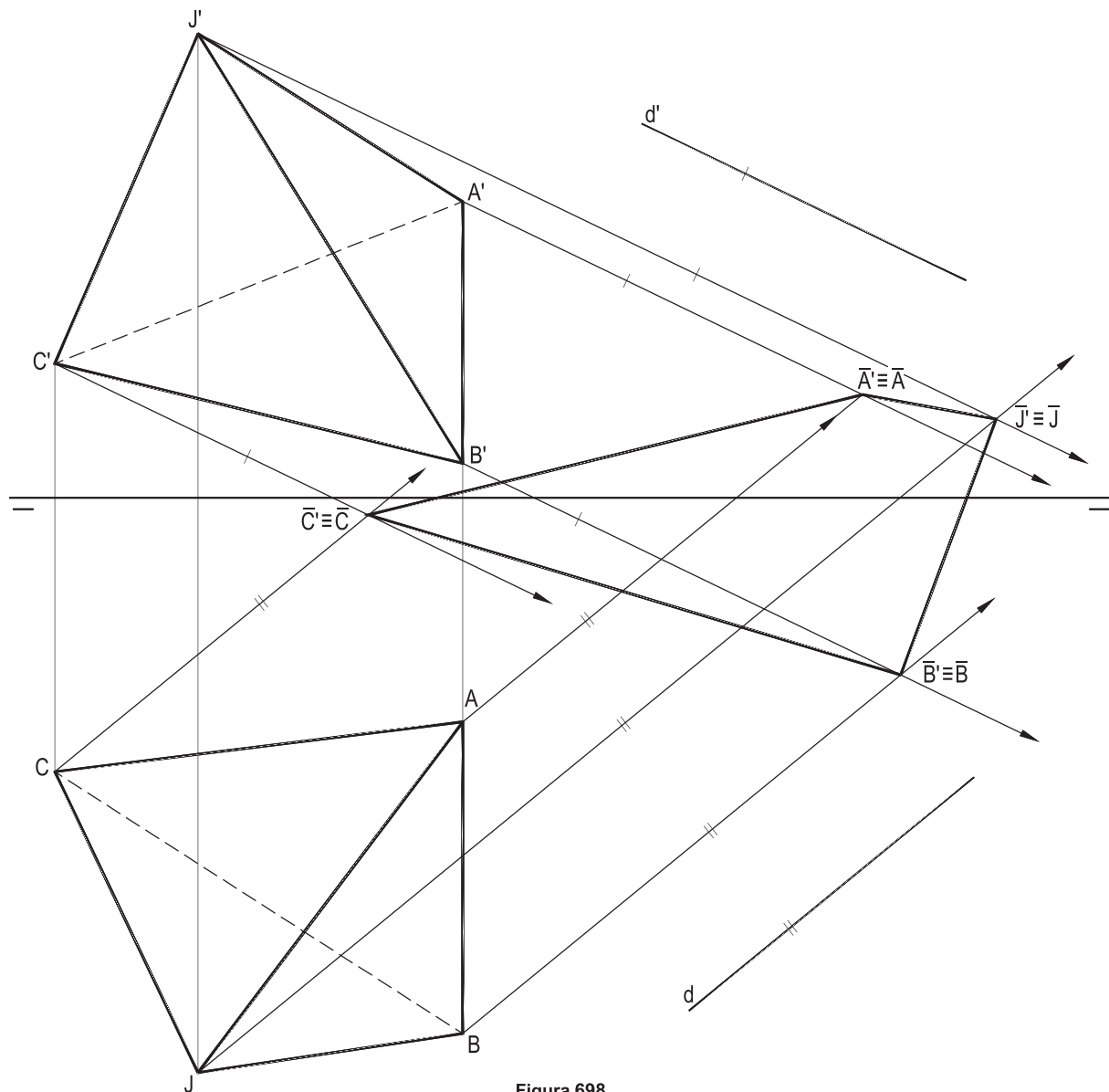


Figura 698

O quadrilátero  $(\bar{J})(\bar{A})(\bar{C})(\bar{B})$  (Figura 698) dá o contorno da projeção cilíndrica do tetraedro segundo a direção (d) sobre  $(\beta_{24})$ . Todos os vértices no contorno.

2 – Prisma quadrangular irregular (A)(B)(C)(D)–(R)(S)(T)(U), com as duas bases em planos frontais. Direção (d), horizontal, da projeção cilíndrica, paralela ao plano ( $\gamma$ ), dado por seus traços.

A direção (d) há de ser a mesma do traço horizontal  $\gamma\pi$ , do plano ( $\gamma$ ), o que facilita a determinação das projeções dos oito vértices da projeção do prisma, aproveitados os planos horizontais a eles pertencentes.

A projeção pedida tem por contorno o hexágono  $(\bar{R})(\bar{U})(\bar{D})(\bar{C})(\bar{B})(\bar{S})$ , restando interiores as projeções cilíndricas dos vértices  $(\bar{A})$  e  $(\bar{T})$  (Figura 699).

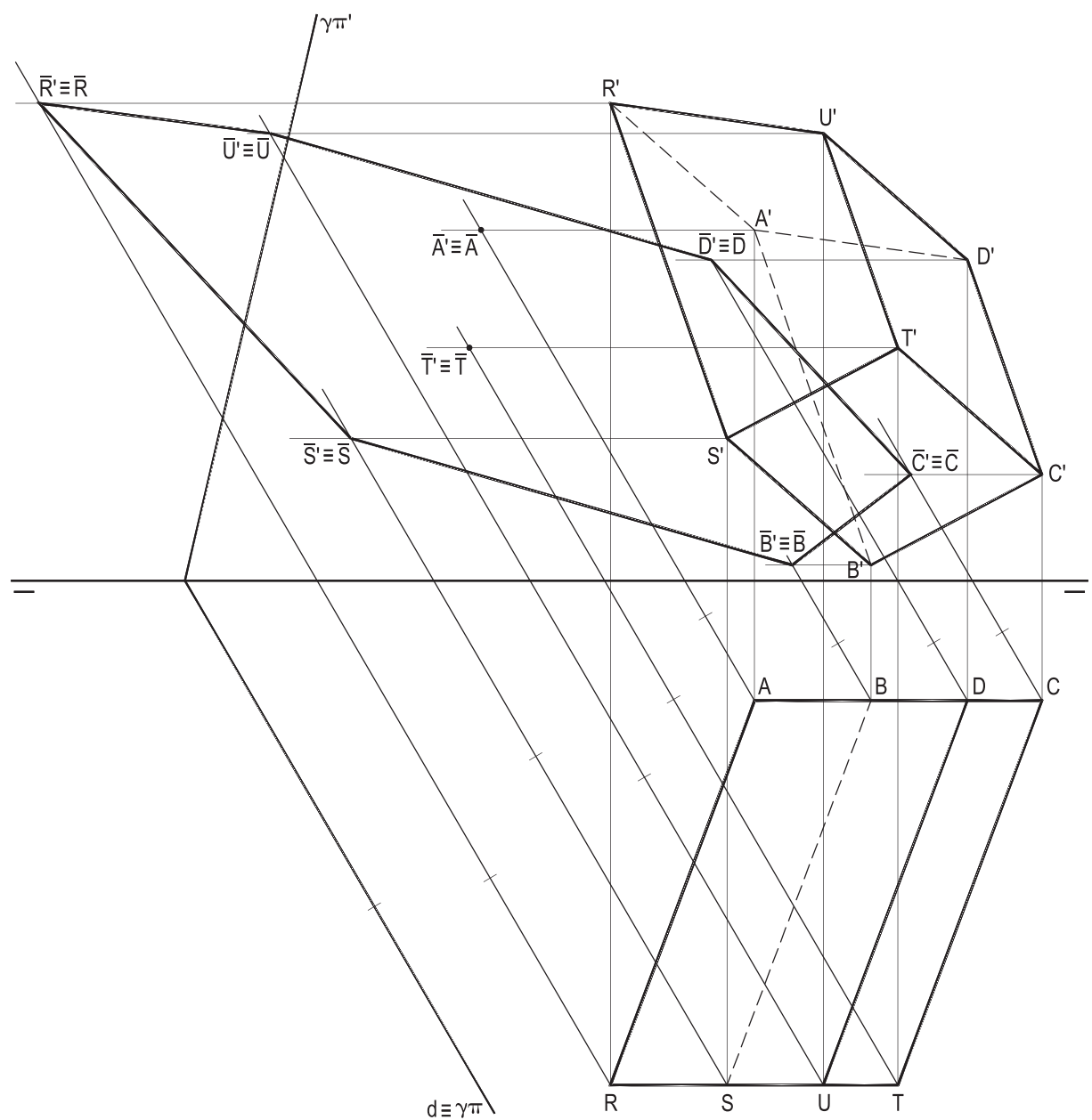


Figura 699

3 – Pirâmide pentagonal irregular (J)–(A)(B)(C)(D)(E), assente pela base em ( $\pi''$ ).

Dadas as projeções do sólido e da direção (d) da projeção cilíndrica.

Os traços, com ( $\beta_{24}$ ), das paralelas a (d), conduzidas pelos vértices do sólido, resolvem a questão.

A épura fica simplificada porque, pelos dados, as arestas básicas (C)(D) e (D)(E) são, respectivamente, de topo e vertical, diminuindo a quantidade de projeções das projetantes cilíndricas.

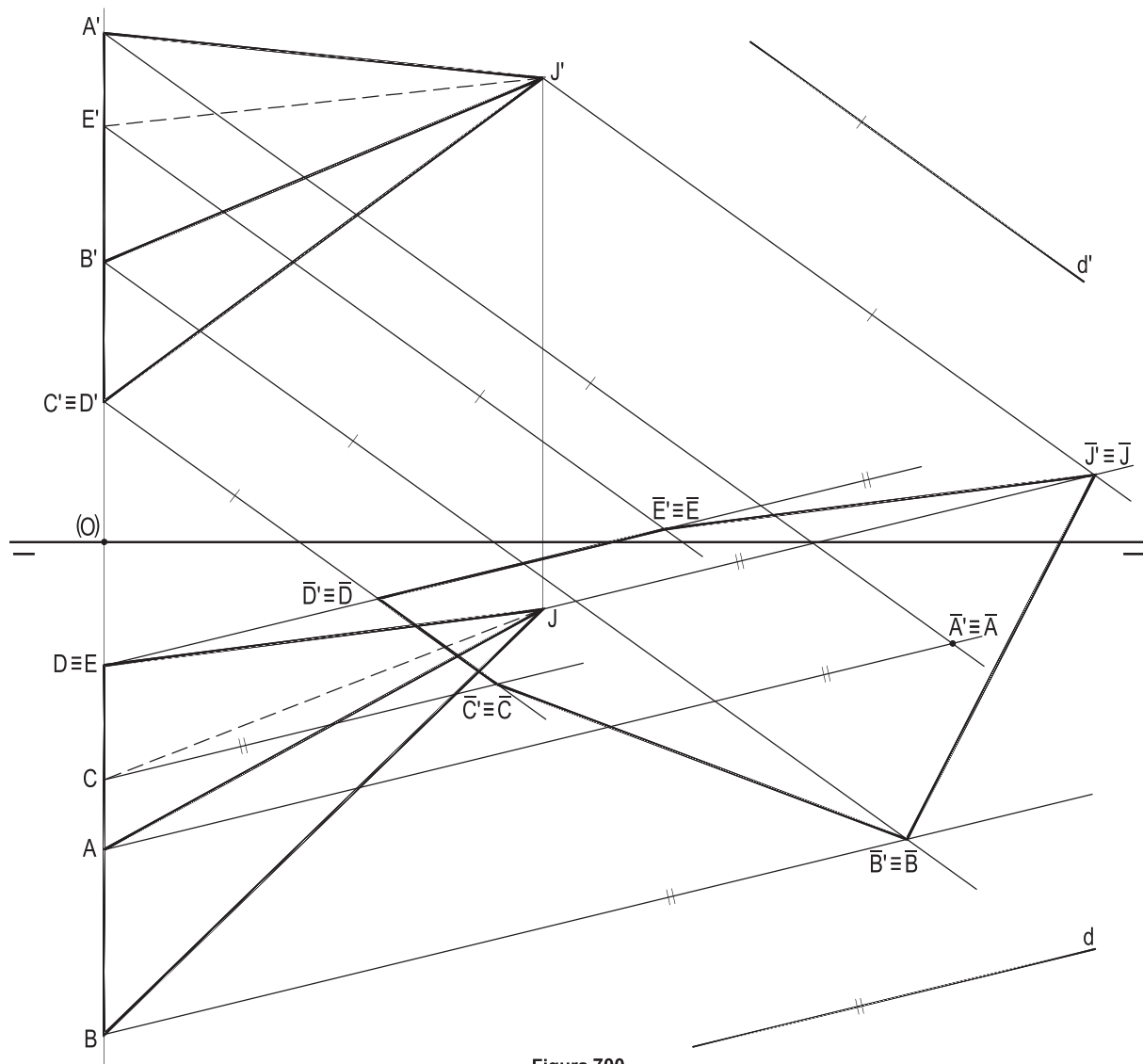


Figura 700

O contorno da projeção cilíndrica é o pentágono ( $\bar{J}$ )( $\bar{B}$ )( $\bar{C}$ )( $\bar{D}$ )( $\bar{E}$ ), ficando em seu interior a projeção ( $\bar{A}$ ) do vértice (A) (Figura 700).

4 – Prisma triangular (A)(B)(C)–(R)(S)(T), que tem as duas bases com todas as suas arestas paralelas a  $(\beta_{24})$ . Direção (d) das projetantes paralelas aos planos  $(\gamma)$  e  $(\theta)$ , dados por seus traços.

As projetantes têm, então, a direção (d) da interseção de  $(\gamma)$  e  $(\theta)$ .

Observe-se que as projeções das bases são iguais a elas (Figura 701), já que tais bases são paralelas a  $(\beta_{24})$ , a projeção cilíndrica em questão resultando numa translação de cada uma delas até  $(\beta_{24})$ . Foram, por isso (para ressaltar tais igualdades), indicadas com linhas finas na écura da Figura 701, as arestas  $(\bar{B})(\bar{C})$  de uma base e  $(\bar{R})(\bar{S})$  e  $(\bar{R})(\bar{T})$  da outra.

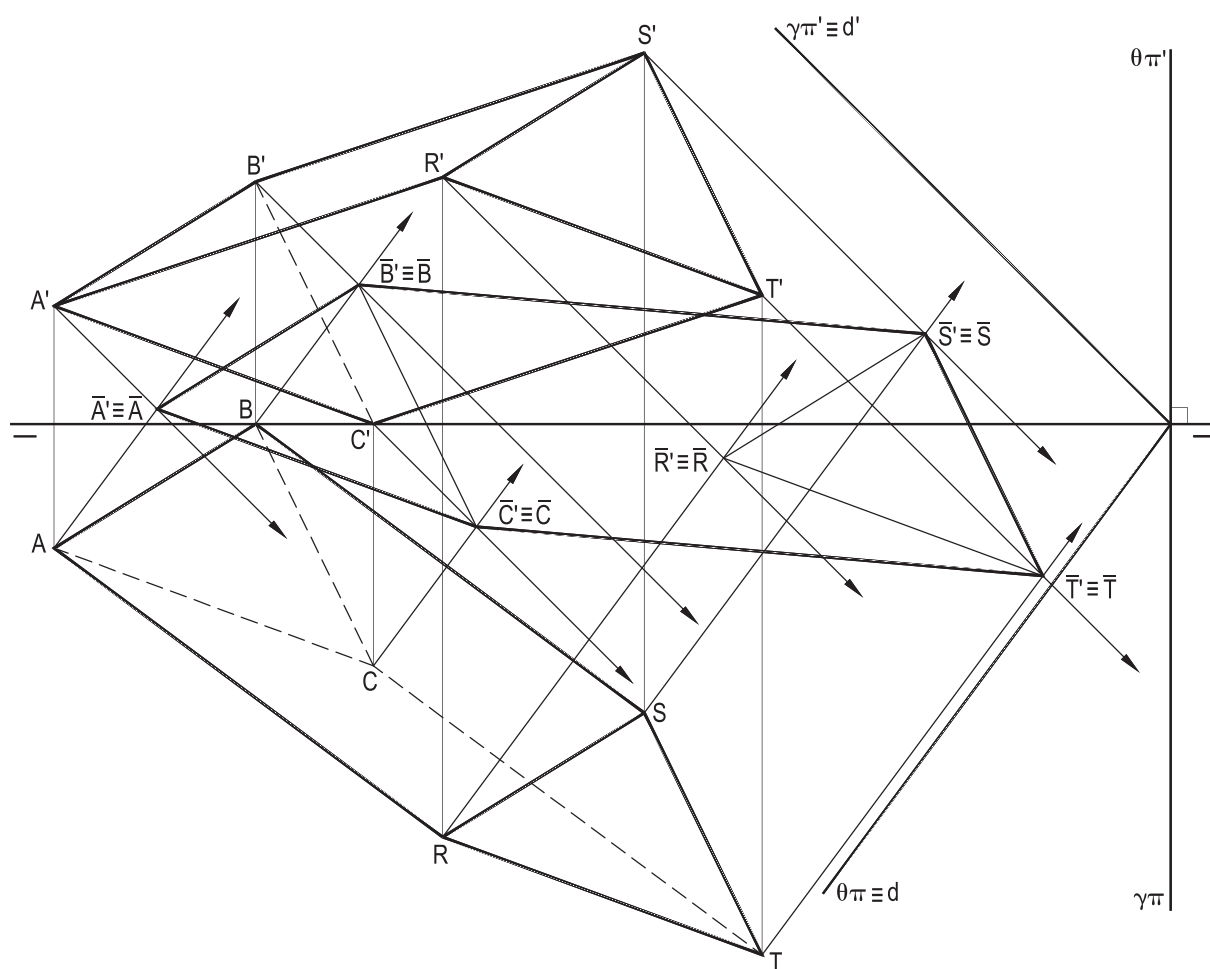


Figura 701

O contorno da projeção cilíndrica é o pentágono  $(\bar{A})(\bar{B})(\bar{S})(\bar{T})(\bar{C})$ , ficando a projeção  $(\bar{R})$  do último vértice no interior do contorno.

5 – Pirâmide quadrangular irregular (J)–(A)(B)(C)(D), dada por suas projeções, tendo por base um paralelogramo. Direção (d) da projeção cilíndrica também dada por suas projeções.

Observe-se que a aresta básica (A)(B) pertence a  $(\beta_{24})$ .

Por pertencer a  $(\beta_{24})$ , a aresta (A)(B) coincide com sua projeção  $(\bar{A})(\bar{B})$  sobre  $(\beta_{24})$ . E como a base da pirâmide é um paralelogramo, bastam duas projetantes, por (J) e por (C), para compor a projeção cilíndrica do sólido, já que  $(\bar{C})(\bar{D})$  tem que ser paralela e igual a  $(\bar{A})(\bar{B})$ , como mostra a Figura 702, visto que os paralelismos se conservam nas projeções cilíndricas.

O paralelogramo  $(\bar{A})(\bar{B})(\bar{C})(\bar{D})$ , projeção cilíndrica da base da pirâmide, vai indicado por linhas finas, no trecho interior do contorno.

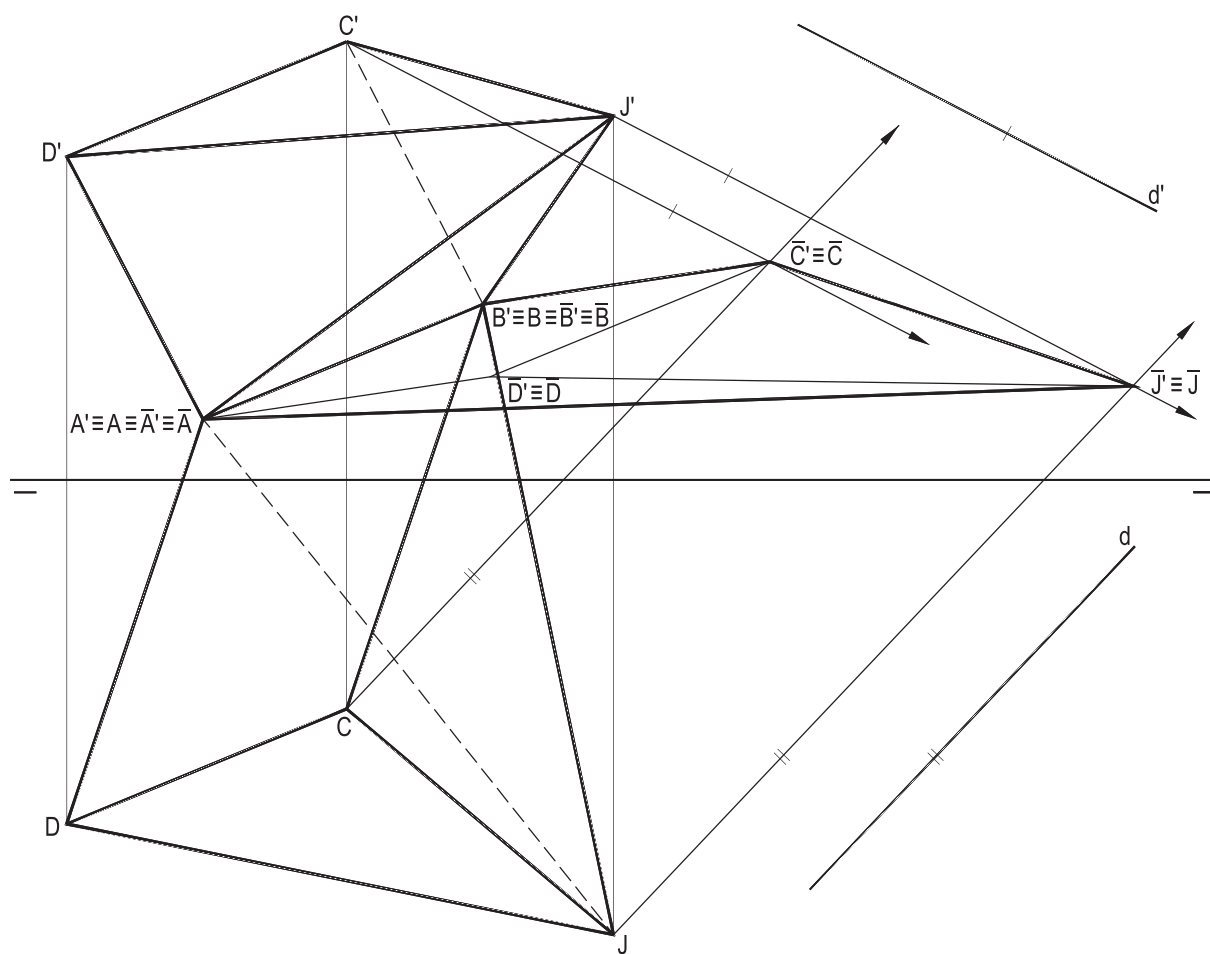


Figura 702

Afinal, a projeção  $(\bar{D})$  do vértice (D) resta no interior do contorno  $(\bar{J})(\bar{A})(\bar{B})(\bar{C})$  da pirâmide (Figura 702).



# CAPÍTULO XII

## PROJEÇÕES CILÍNDRICAS ORTOGONAIS

### 189 – Projeção cilíndrica ortogonal

Sabe-se (número 174) que uma projeção cilíndrica pode ser efetuada sobre um plano  $(\theta)$ , segundo uma direção  $(d)$  oblíqua a  $(\theta)$  (Figura 703), ou mediante uma direção  $(\bar{d})$  perpendicular a  $(\theta)$  (Figura 704), quando é, então, denominada projeção cilíndrica ortogonal, ou, simplesmente, projeção ortogonal sobre  $(\theta)$ .

Viu-se também (número 176), e aplica-se ao caso, que a projeção ortogonal de uma reta  $(r)$  sobre um plano  $(\theta)$  é outra reta  $(\bar{r})$  (Figura 705), salvo para a posição particular em que  $(r)$  é perpendicular a  $(\theta)$ , quando sua projeção ortogonal  $(\bar{r})$  resta um ponto (Figura 706), o próprio traço de  $(r)$  em  $(\theta)$ .

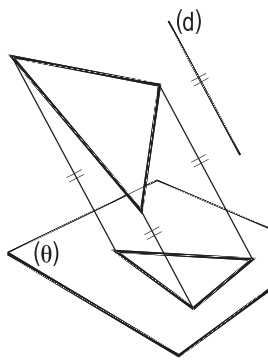


Figura 703

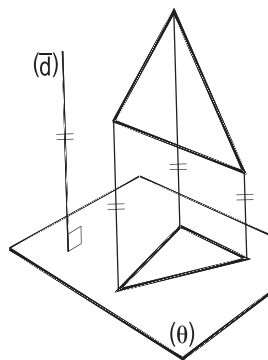


Figura 704

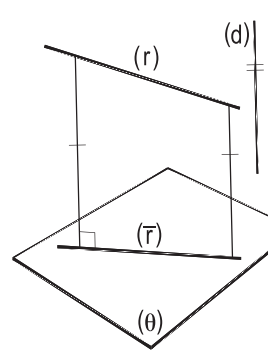


Figura 705

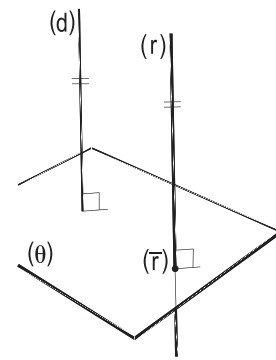


Figura 706

### 190 – Teorema

As projeções ortogonais de duas retas paralelas sobre um plano oblíquo a elas são duas retas paralelas, ou coincidentes.

Demonstração: Sejam  $(r)$  e  $(s)$  duas retas paralelas, ambas oblíquas ao plano de projeção  $(\theta)$  e, para projetá-las ortogonalmente sobre  $(\theta)$ , consideremos os planos projetantes  $(\gamma)$  e  $(\varphi)$ , pertencentes a cada uma delas e suas interseções com  $(\theta)$ , que serão, respectivamente, as projeções ortogonais  $(\bar{r})$  e  $(\bar{s})$  das paralelas consideradas (Figura 707).

Os planos  $(\gamma)$  e  $(\varphi)$  têm que ser paralelos, por possuírem, respectivamente, além das paralelas  $(r)$  e  $(s)$  consideradas, as perpendiculares a  $(\theta)$ , então também paralelas.

E, assim, os planos  $(\gamma)$  e  $(\varphi)$ , sendo paralelos, são cortados por  $(\theta)$ , segundo duas retas  $(\bar{r})$  e  $(\bar{s})$  necessariamente paralelas (*Geometria Espacial*, número 13).

Naturalmente, em situação particular, as duas retas paralelas  $(r)$  e  $(s)$  consideradas poderiam pertencer a um mesmo plano projetante  $(\rho)$  (Figura 708), o que levaria à coincidência suas projeções ortogonais  $(\bar{r})$  e  $(\bar{s})$  sobre  $(\theta)$ .

Logo, as projeções ortogonais de duas retas paralelas sobre um plano oblíquo a elas são duas retas paralelas, ou coincidentes, como se queria demonstrar.

### 191 – Observação

Cabe comentar que, naturalmente contrariando a hipótese, duas retas perpendiculares ao plano  $(\theta)$  de projeção – e, por isso, paralelas entre si – têm por projeções ortogonais sobre  $(\theta)$  dois pontos  $\bar{r}$  e  $\bar{s}$  (Figura 709).

### 192 – Teorema

O traço de uma reta num plano exterior é o ponto comum a ela e à sua projeção ortogonal sobre o plano.

Demonstração: Sejam  $(r)$  e  $(\theta)$  uma reta genérica e um plano exteriores e  $(\bar{r})$  a projeção ortogonal de  $(r)$  sobre  $(\theta)$ .

Sendo  $(r)$  oblíqua a  $(\theta)$ , também o será à sua projeção ortogonal  $(\bar{r})$  sobre  $(\theta)$ , encontrando essa projeção num ponto  $(T)$ , que, sendo de  $(\bar{r})$ , tem que ser de  $(\theta)$  (Figura 710).

E fosse  $(r)$  perpendicular a  $(\theta)$ , isso se repetiria (Figura 709), restando, assim, demonstrado o teorema.

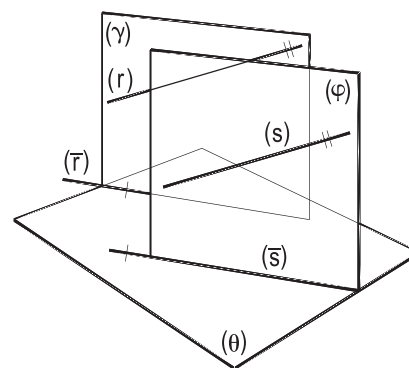


Figura 707

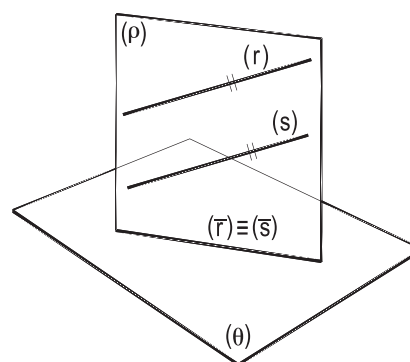


Figura 708

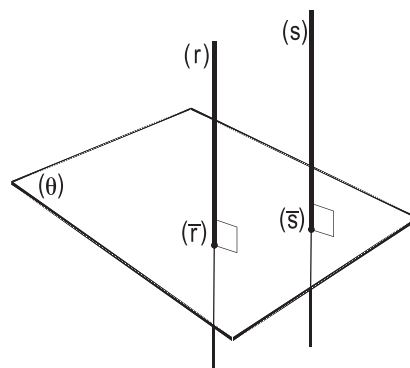


Figura 709

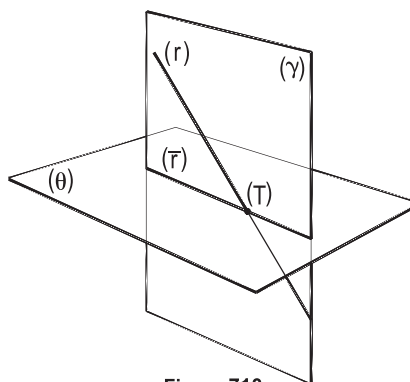


Figura 710

Mesmo para o caso particular da reta ( $r$ ) ser paralela ao plano de projeção ( $\theta$ ), permanece válida a tese do teorema, já que, então, o ponto comum a ( $r$ ) e à sua projeção ortogonal ( $\bar{r}$ ) sobre ( $\theta$ ) há de ser o ponto impróprio comum a ( $r$ ) e a ( $\bar{r}$ ).

### 193 – Teorema

O ponto comum às projeções ortogonais de duas retas concorrentes sobre um plano a elas oblíquo é a projeção ortogonal do ponto comum àquelas duas retas sobre tal plano.

Demonstração: Consideremos duas retas concorrentes ( $r$ ) e ( $s$ ) e suas projeções ortogonais ( $\bar{r}$ ) e ( $\bar{s}$ ) sobre um plano ( $\theta$ ), a elas oblíquo, que são, respectivamente, as interseções dos planos ( $\gamma$ ) e ( $\varphi$ ), projetantes de ( $r$ ) e de ( $s$ ), com ( $\theta$ ) (Figura 711).

Assim, ( $\bar{J}$ ), o ponto comum às projeções ( $\bar{r}$ ) e ( $\bar{s}$ ), há de pertencer à interseção desses dois planos projetantes ( $\gamma$ ) e ( $\varphi$ ) e, por isso, ( $\bar{J}$ ), pertencendo à reta ( $\gamma\varphi$ ), perpendicular a ( $\theta$ ), tem que ser a projeção do ponto ( $J$ ), comum a ( $r$ ) e a ( $s$ ).

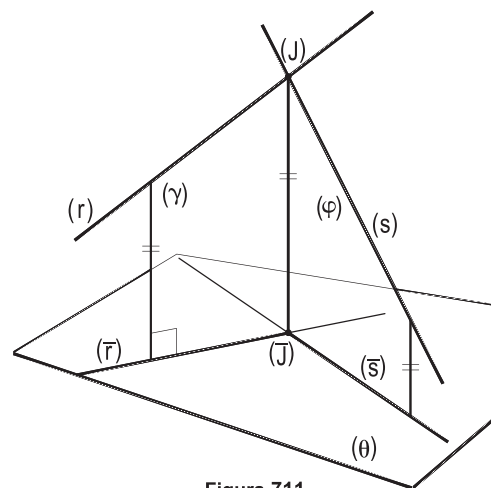


Figura 711

### 194 – Teorema

Os suportes dos lados de um polígono e suas projeções ortogonais sobre um plano oblíquo ao do polígono cortam-se sobre a interseção do plano do polígono com o de projeção.

Demonstração: Consideremos um polígono qualquer ( $A$ )( $B$ )( $C$ )( $D$ )..., pertencente a um plano ( $\alpha$ ), e sua projeção ortogonal ( $\bar{A}$ )( $\bar{B}$ )( $\bar{C}$ )( $\bar{D}$ )... sobre um plano ( $\theta$ ), oblíquo a ( $\alpha$ ), e tomemos, do polígono, o triângulo ( $A$ )( $B$ )( $C$ ), bem como sua projeção ortogonal ( $\bar{A}$ )( $\bar{B}$ )( $\bar{C}$ ) sobre ( $\theta$ ).

Como anteriormente visto (número 192), os traços ( $R$ ), ( $S$ ) e ( $T$ ) das retas suportes dos lados do triângulo com ( $\theta$ ) são, respectivamente, os pontos comuns a essas retas e às suas projeções ortogonais sobre ( $\theta$ ), pertencendo, naturalmente, à interseção ( $\alpha\theta$ ) do plano ( $\alpha$ ), do triângulo, com o plano ( $\theta$ ), de projeção (Figura 712).

E, com tantos novos triângulos consecutivos, chegaríamos a um polígono de qualquer gênero, demonstrando o teorema.

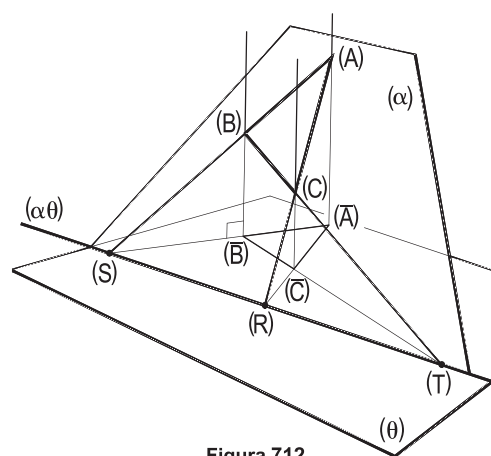


Figura 712

### 195 – Observação

Naturalmente, quando algum lado do polígono, como (A)(B) na Figura 713, é paralelo ao plano ( $\theta$ ), de projeção, ele é também paralelo à sua projeção  $(\bar{A})(\bar{B})$  e à interseção  $(\alpha\theta)$  do plano ( $\alpha$ ) do polígono com o plano de projeção, sendo, no caso, o ponto comum à reta suporte desse lado e à sua projeção sobre ( $\theta$ ), o ponto impróprio das retas (A)(B),  $(\bar{A})(\bar{B})$  e  $(\alpha\theta)$ .

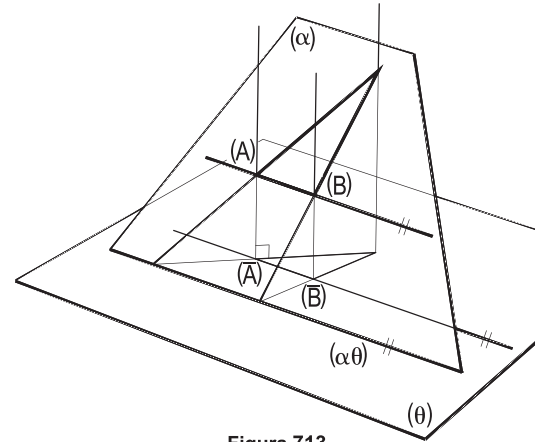


Figura 713

### 196 – Projeções ortogonais sobre os planos referenciais

São bem simples as determinações das projeções ortogonais de uma figura plana sobre cada um dos planos de projeção e sobre planos a eles paralelos, visto que as projetantes de todos os pontos em estudo são verticais, de topo, ou fronto-horizontais, conforme sejam eles respectivamente ( $\pi$ ), ( $\pi'$ ) ou ( $\pi''$ ), ou planos horizontais, frontais ou de perfil.

Assim são os exemplos abaixo, em que são construídas as projeções ortogonais de um triângulo (A)(B)(C), dado por suas projeções, sobre um plano ( $\theta$ ), respectivamente, horizontal (Figura 714), frontal (Figura 715) ou de perfil (Figura 716). Nos dois primeiros casos, as verdadeiras grandezas repetem uma das dadas e, no terceiro, uma vista lateral a proporciona.

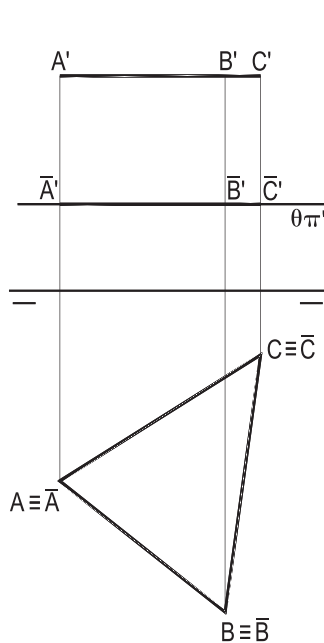


Figura 714

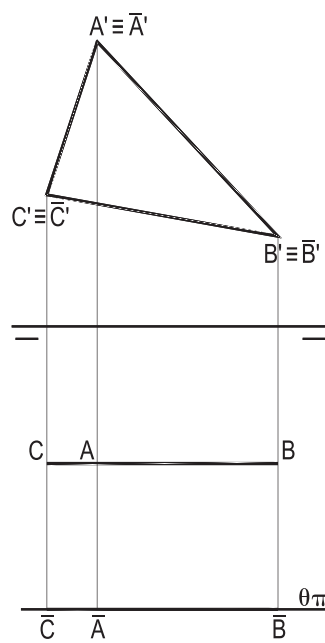


Figura 715

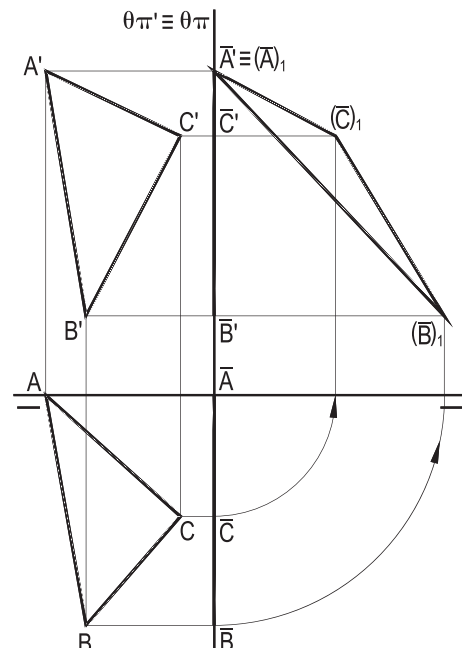
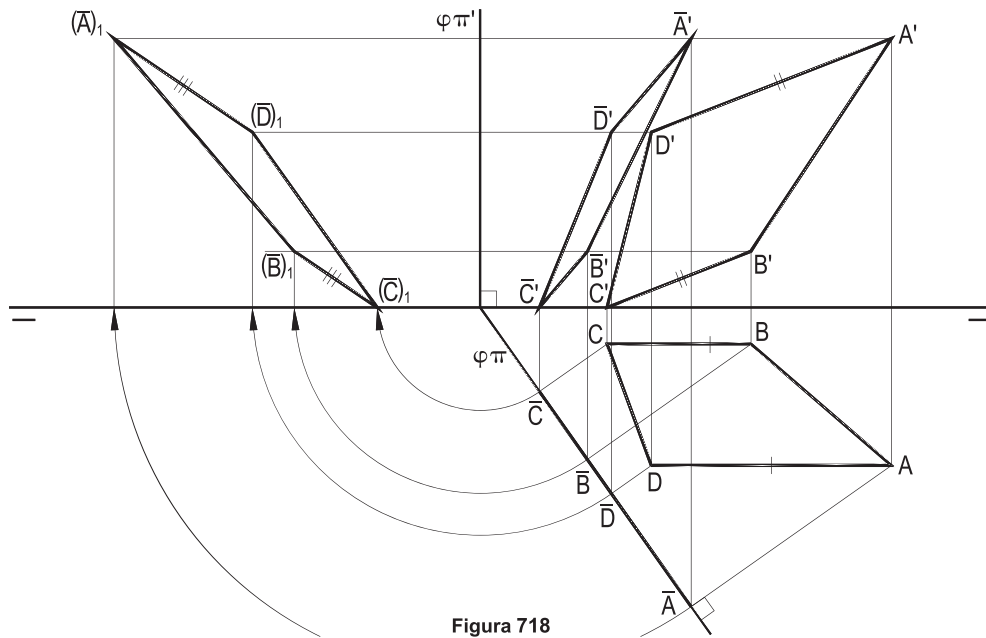
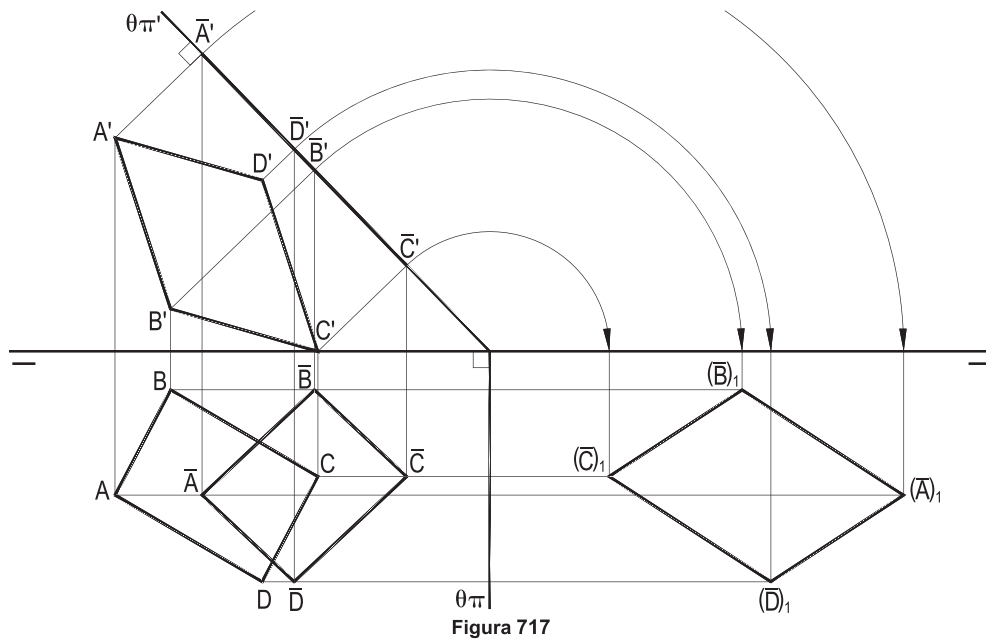


Figura 716

## 197 – Projeções ortogonais sobre planos projetantes

Ainda simples são as construções, visto que as projetantes, frontais para planos de topo e horizontais para planos verticais, proporcionam imediatas interseções com os planos dessas projeções ortogonais, por serem eles projetantes.

Assim são os dois exemplos abaixo, para quadriláteros (A)(B)(C)(D), projetados ortogonalmente sobre um plano ( $\theta$ ), de topo (Figura 717), ou ( $\varphi$ ), vertical (Figura 718). As verdadeiras grandezas vêm com os rebatimentos desses planos.



## 198 – Projeções ortogonais sobre planos não projetantes

O procedimento é o tradicional, enviando, pelos vértices do polígono dado, projetantes perpendiculares ao plano ( $\theta$ ), de projeção, e determinando suas interseções com ( $\theta$ ), vértices da projeção procurada. Como sempre, a V.G. vem com o rebatimento de ( $\theta$ ).

Dois exemplos, de quadriláteros (A)(B)(C)(D), o primeiro para um plano paralelo a ( $\pi'\pi$ ) (Figura 719) e o segundo (Figura 720) para um plano qualquer, ambos dados por seus traços.

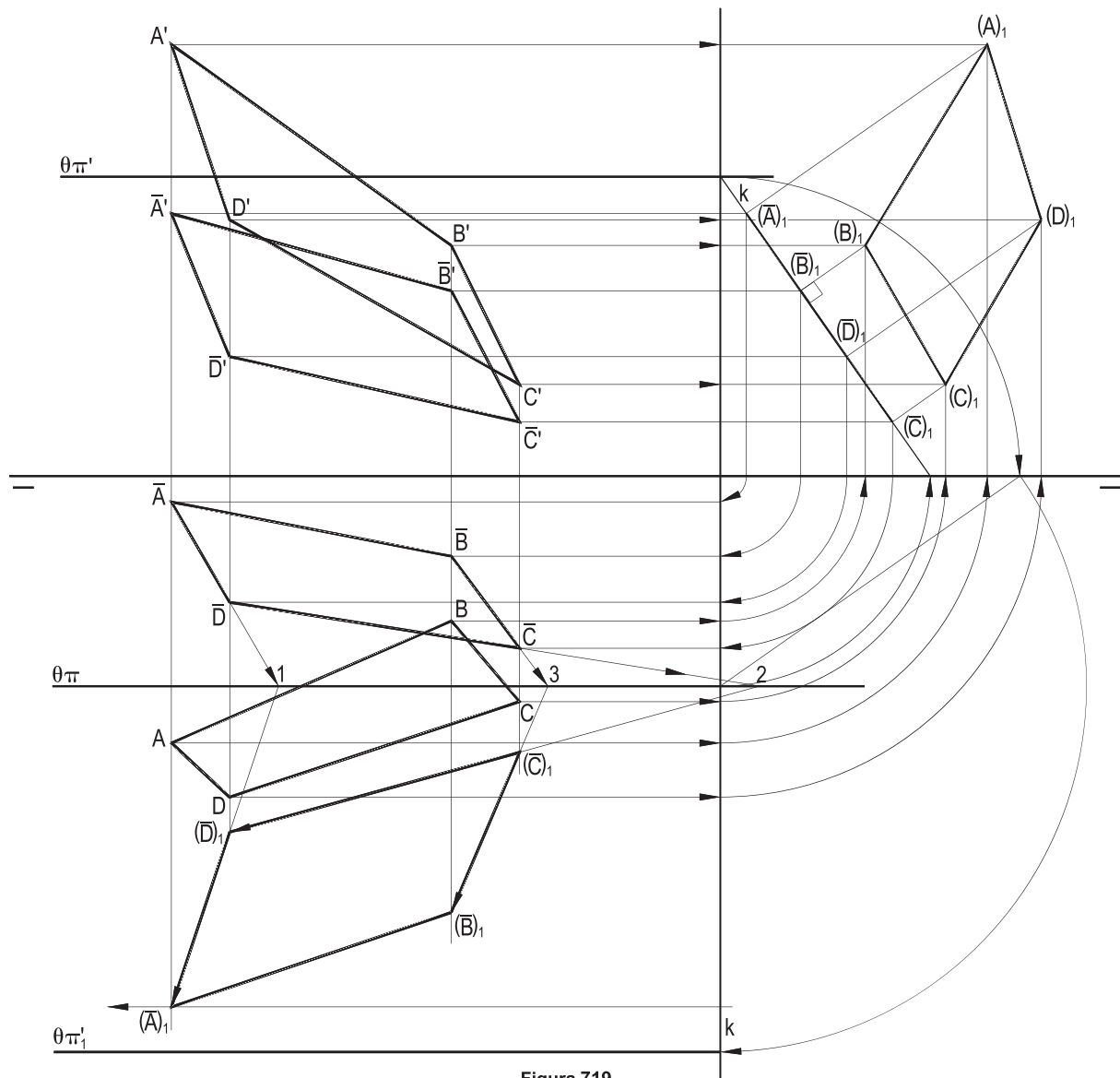


Figura 719

O rebatimento, que traz a V.G.  $(\bar{A})_1(\bar{B})_1(\bar{C})_1(\bar{D})_1$ , foi efetuado com a afinidade ortogonal existente entre ela e a projeção horizontal  $\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}$  do quadrilátero  $(\bar{A})(\bar{B})(\bar{C})(\bar{D})$ , de ( $\theta$ ).

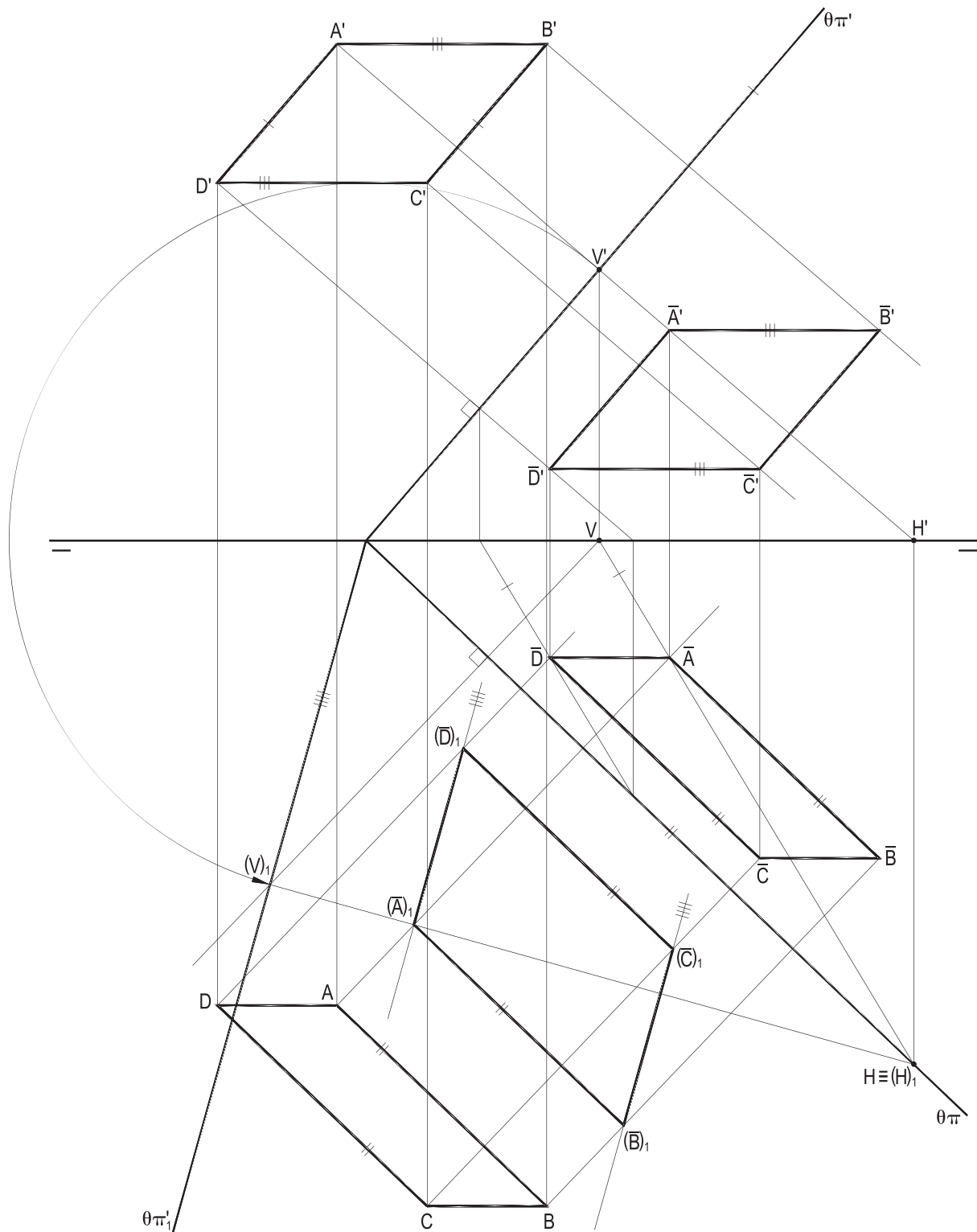


Figura 720

Observe-se que o paralelogramo (A)(B)(C)(D), dado, tem dois lados horizontais e dois frontais, todos paralelos ao plano de projeção ( $\theta$ ), o que simplifica em muito a épura.

## 199 – Projeções ortogonais de poliedro

Com o mesmo procedimento utilizado para os polígonos, isto é, enviando projetantes perpendiculares ao plano de projeção dado, pelos vértices do poliedro, e marcando-se seus traços neste plano, obtém-se a projeção ortogonal pedida, da qual é usual apresentar, apenas, o contorno sem indicação de visibilidade.

Seguem alguns exemplos:

1 – Dado o paralelepípedo  $(A)(B)(C)(D)-(R)(S)(T)(U)$ , pelas projeções da sua base  $(A)(B)(C)(D)$ , um paralelogramo, e pelas projeções do vértice  $(R)$ , da segunda base, pede-se construir a projeção ortogonal do poliedro sobre o plano de topo  $(\theta)$ , dado por seu traço vertical  $\theta\pi'$ , assim como a V.G. dessa projeção.

Com arestas verticais completa-se o paralelepípedo e, com perpendiculares ao plano  $(\theta)$ , por seus vértices, obtém-se sua projeção ortogonal  $(\bar{A})(\bar{B})(\bar{C})(\bar{D})-(\bar{R})(\bar{S})(\bar{T})(\bar{U})$ .

Para a determinação da V.G. da projeção ortogonal do paralelepípedo, para aliviar a écura, operou-se com uma translação de  $(\theta)$  para uma posição  $(\theta_1)$  e com o rebatimento deste sobre  $(\pi)$ , chegando-se à V.G. do contorno  $(\bar{B})_1(\bar{C})_1(\bar{D})_1(\bar{U})_1(\bar{R})_1(\bar{S})_1$ , da projeção estudada, ficando  $(\bar{A})_1$  e  $(\bar{T})_1$ , em seu interior (Figura 721).

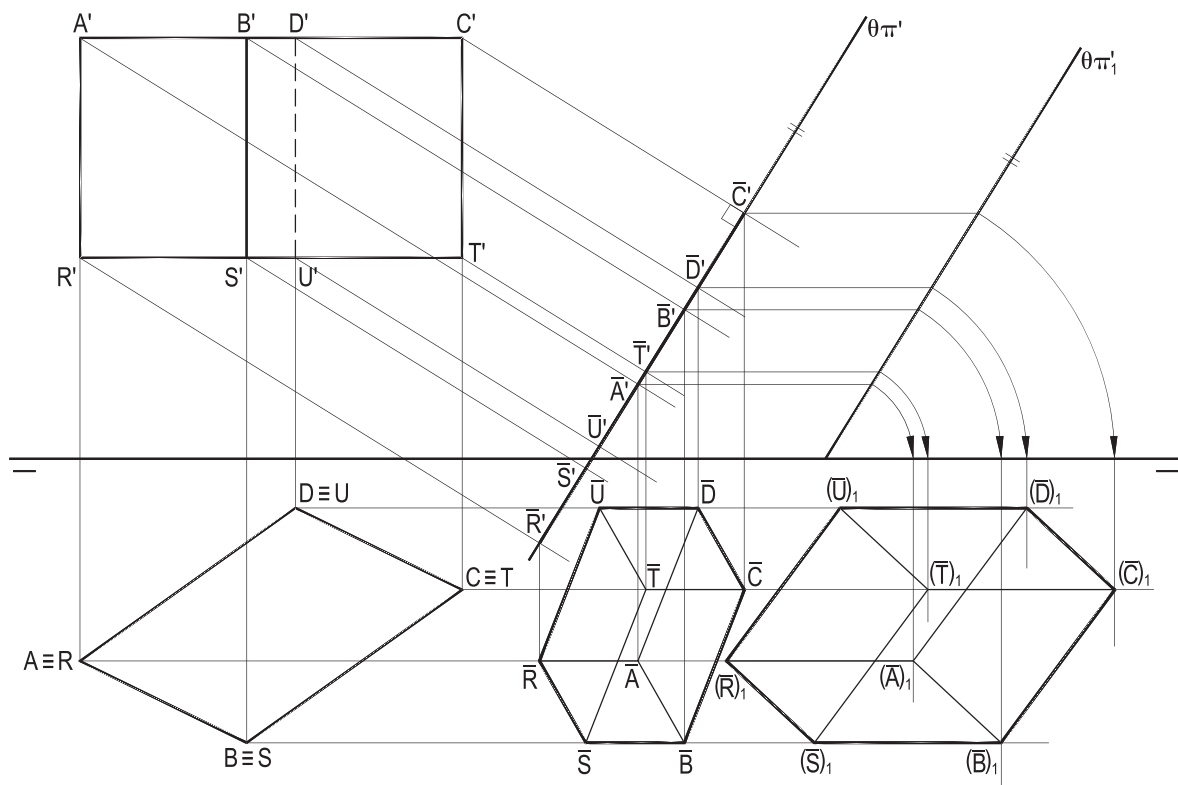


Figura 721



2 – A pirâmide irregular (J)–(A)(B)(C)(D), assente pela face (J)(A)(B) em  $(\pi)$ , tem por base um paralelogramo e se situa no primeiro diedro.

Dadas a projeção horizontal JAB da face de  $(\pi)$ , assim como as duas projeções do vértice (C), pede-se construir as projeções do sólido, assim como sua projeção ortogonal sobre o plano vertical  $(\theta)$ , dado por seu traço horizontal  $\theta\pi$ .

Determinar, em seguida, a verdadeira grandeza dessa projeção ortogonal.

A construção da pirâmide é bem simples, com paralelas, tanto quanto a de sua projeção ortogonal sobre o plano dado  $(\theta)$ , com projetantes horizontais, a ele perpendiculares.

A V.G.  $(\bar{J})_1(\bar{C})_1(\bar{D})_1(\bar{A})_1$  vem no rebatimento de  $(\theta)$  sobre  $(\pi)$  (Figura 722).

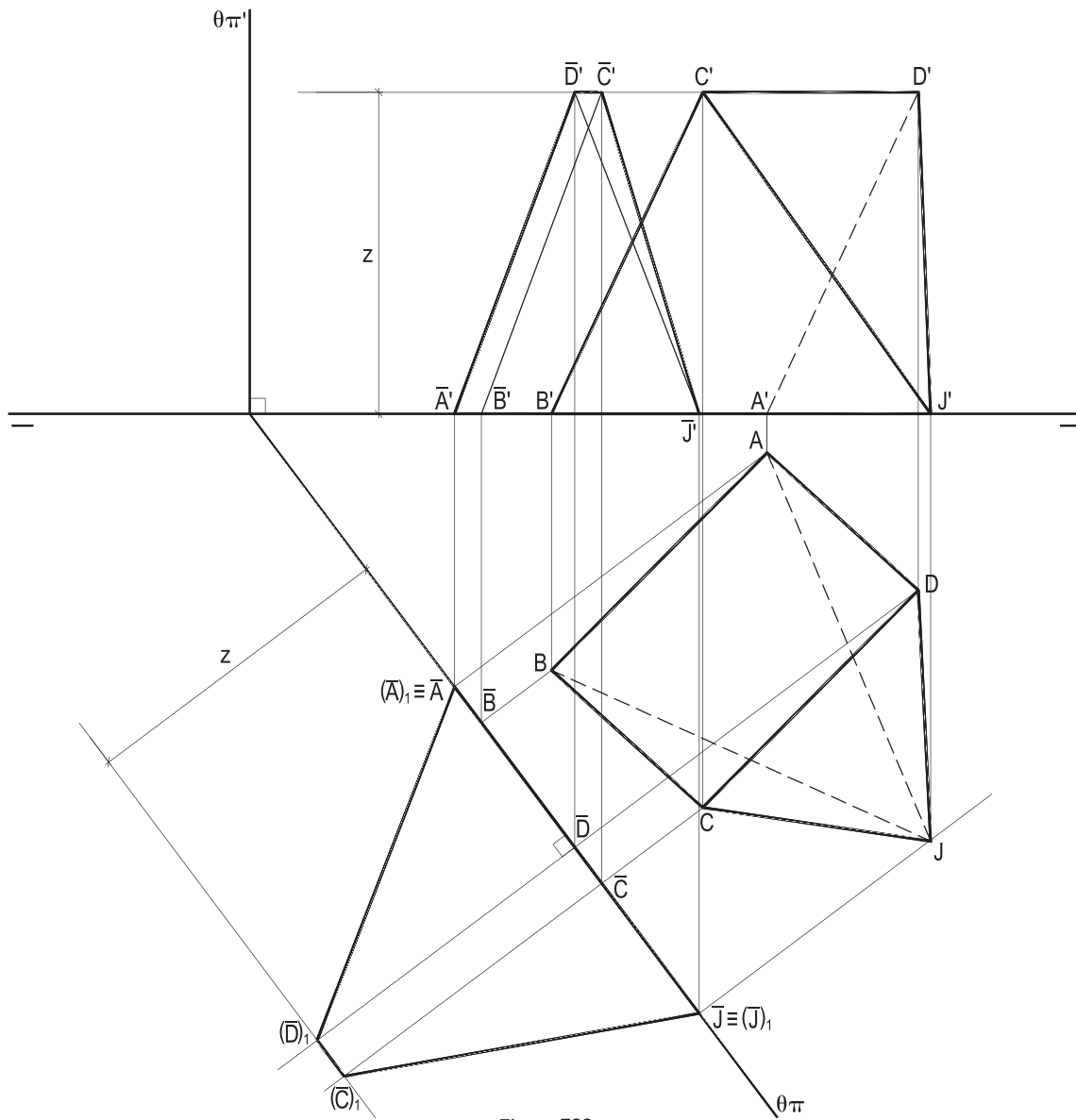


Figura 722

3 – O prisma triangular reto (A)(B)(C)–(R)(S)(T) tem suas bases nos planos de topo ( $\gamma$ ) e ( $\varphi$ ), dados por seus traços  $\gamma\pi'$  e  $\varphi\pi$ , respectivamente. Conhecidas as projeções horizontais A, B e C da base pertencente ao plano ( $\varphi$ ), pede-se construir as projeções da projeção ortogonal do prisma sobre o plano ( $\theta$ ), dado por seus traços, bem como sua V.G.

Completada a base (A)(B)(C) e, com perpendiculares aos planos ( $\gamma$ ) e ( $\varphi$ ), a segunda base (R)(S)(T), a projeção ortogonal do sólido sobre o plano ( $\theta$ ) se faz com o auxílio de uma vista lateral, já que as projetantes sobre ( $\theta$ ) hão de ser de perfil (Figura 723). Sua V.G. vem com o rebatimento  $\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{T}\bar{R}$  de ( $\theta$ ) sobre o plano de perfil dessa vista, ficando  $\bar{S}$  no interior do contorno.

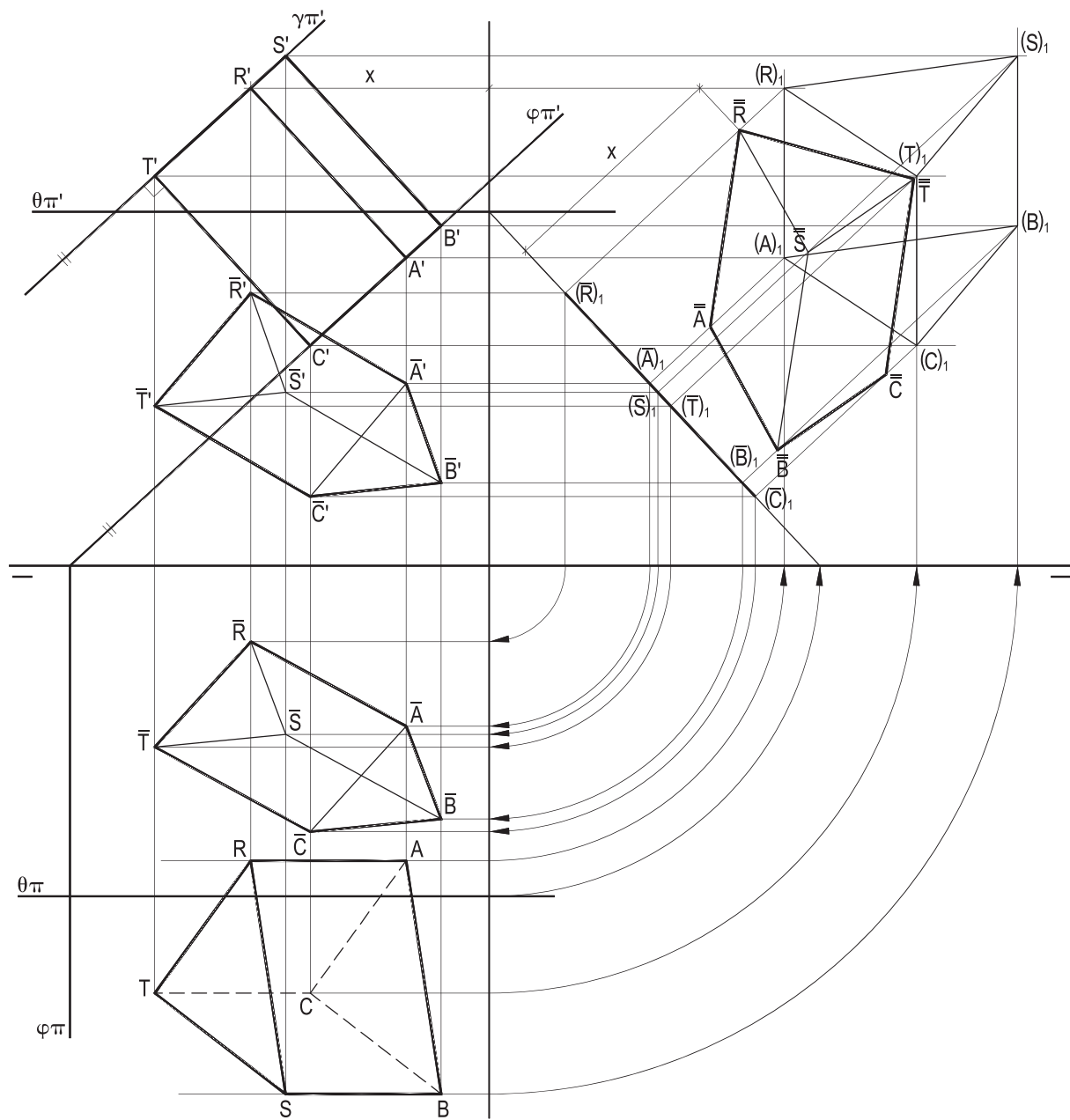


Figura 723

4 – Da pirâmide hexagonal regular (J)–(A)(B)(C)(D)(E)(F), assente pela base em  $(\pi)$ , tendo seu vértice (A) em  $(\pi')$ , com abscissa nula, são dadas as projeções do vértice (J) e informado que (B) tem abscissa positiva. Dada, ainda, a origem (O) das abscissas.

Pede-se desenhar as projeções da pirâmide e as projeções de sua projeção ortogonal sobre o plano  $(\theta)$ , dado por seu traço vertical  $\theta\pi'$ , observando que  $\theta\pi$  é perpendicular às arestas básicas (A)(B) e (D)(E) do sólido.

A pirâmide é de pronta construção, por ter a base em V.G., na projeção horizontal. E sua projeção ortogonal  $\bar{J}-\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}\bar{E}$  sobre  $(\theta)$  se faz pelo traçado das perpendiculares, por seus vértices, a  $(\theta)$  e pela marcação de suas interseções com esse plano (Figura 724), com  $\bar{F}$  interior ao contorno.

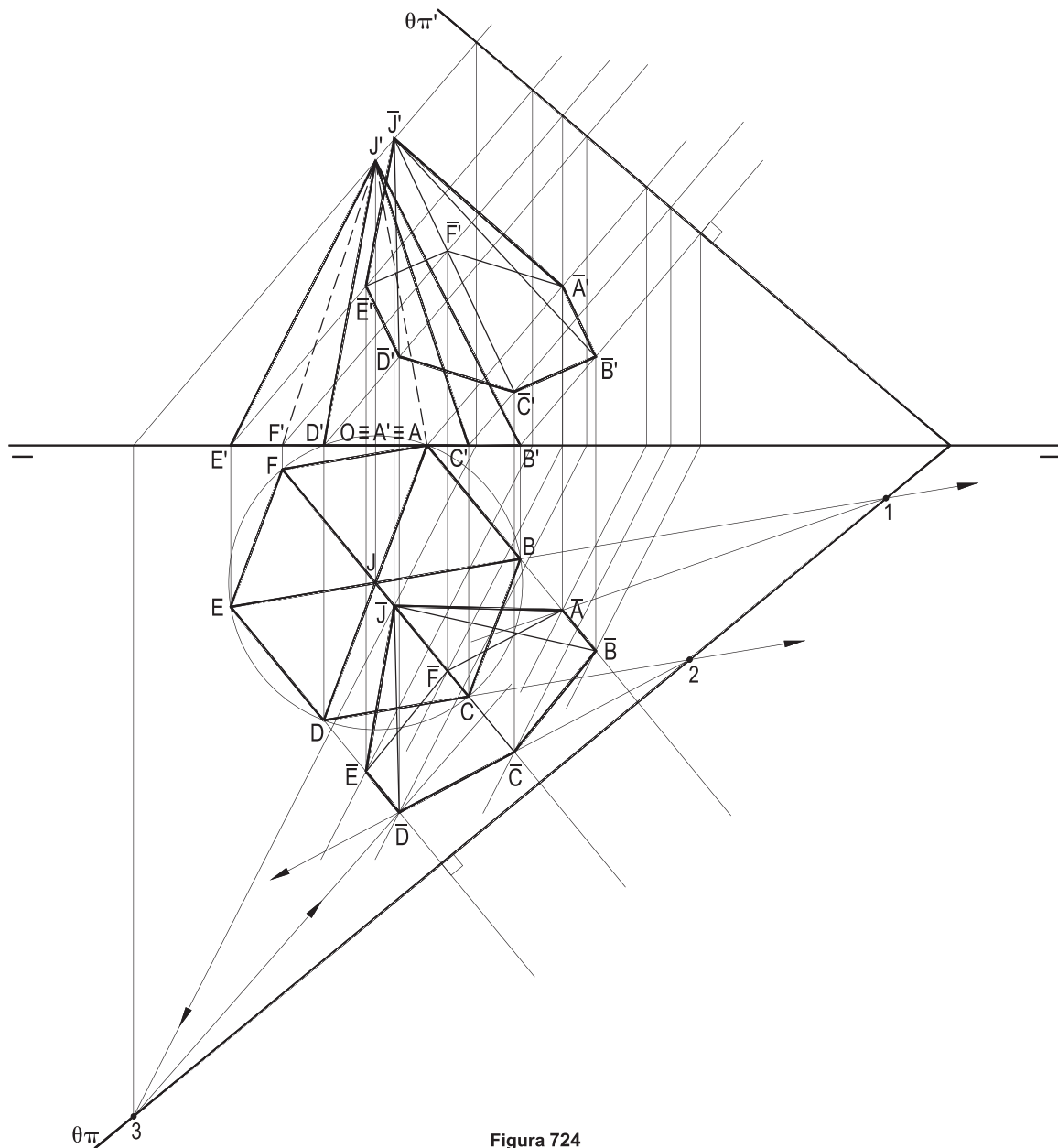


Figura 724

5 – Construir a projeção ortogonal do tetraedro irregular (J)–(A)(B)(C), dado por suas projeções, sobre o plano ( $\theta$ ), dado por seus traços, assim como a verdadeira grandeza dessa projeção.

A resolução segue o procedimento do exemplo anterior, conduzindo, pelos vértices do sólido, as perpendiculares ao plano ( $\theta$ ), determinando, a seguir, suas interseções com ( $\theta$ ), que são os vértices ( $\bar{J}$ ), ( $\bar{A}$ ), ( $\bar{B}$ ) e ( $\bar{C}$ ) da projeção pedida, que vai representada na éfura (Figura 725) por suas projeções mongeanas.

A verdadeira grandeza ( $\bar{J}$ )<sub>1</sub>( $\bar{B}$ )<sub>1</sub>( $\bar{A}$ )<sub>1</sub>( $\bar{C}$ )<sub>1</sub> é obtida com o rebatimento de ( $\theta$ ) sobre ( $\pi$ ), com auxílio de sua afinidade ortogonal com a projeção horizontal  $\bar{J}\bar{B}\bar{A}\bar{C}$ .

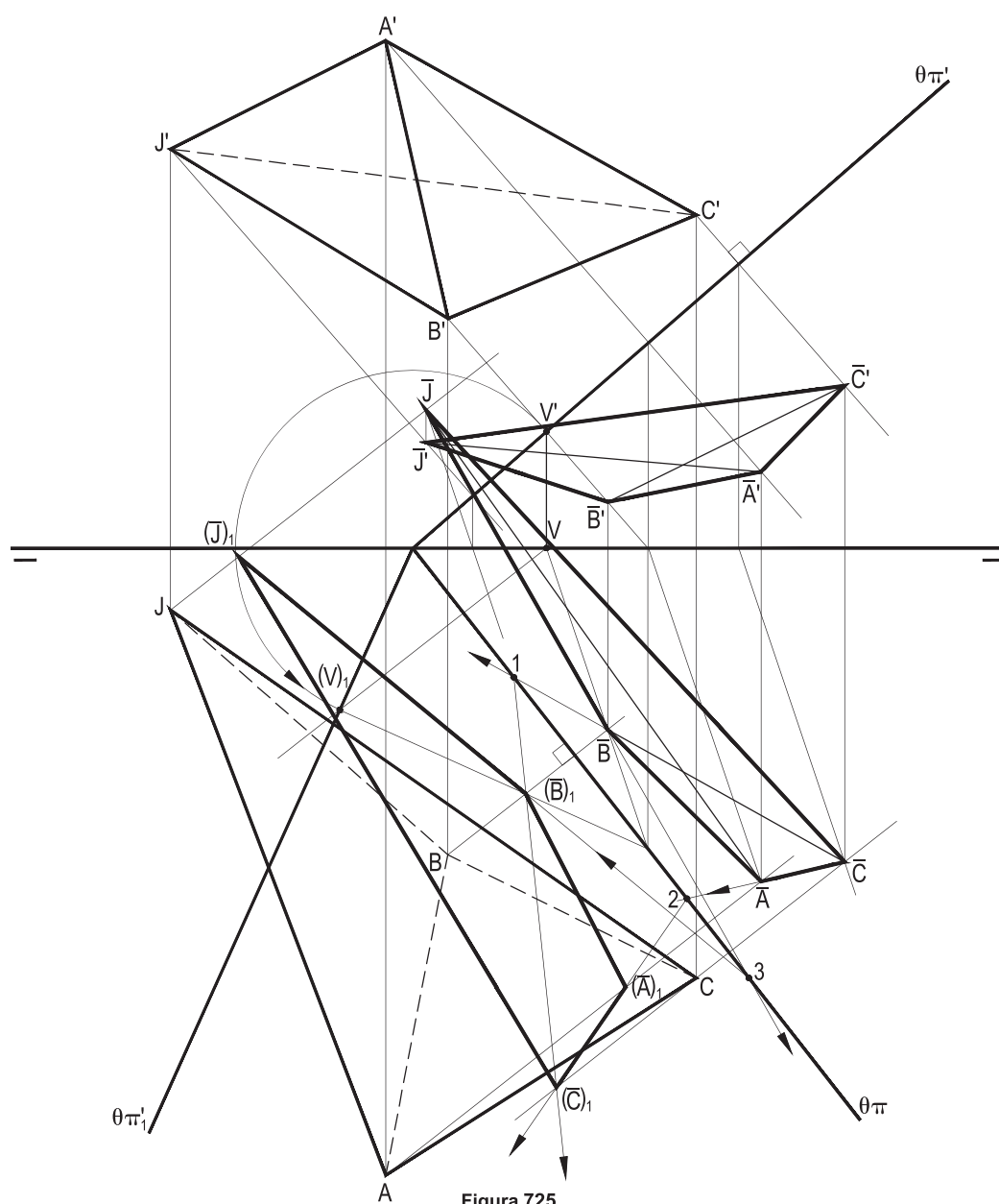


Figura 725

# CAPÍTULO XIII

## PROJEÇÕES ORTOGONAIS SOBRE $(\beta_{24})$

### 200 – Projeção ortogonal sobre $(\beta_{24})$

A projeção ortogonal de uma figura qualquer sobre  $(\beta_{24})$  se faz pelo envio, por seus pontos, de perpendiculares a esse bisetor e pela determinação dos traços de tais perpendiculares com ele, como se passa a detalhar.

### 201 – Projeção ortogonal de ponto sobre $(\beta_{24})$

Sabe-se (número 34) que uma reta  $(A)(B)$ , perpendicular a  $(\beta_{24})$ , é necessariamente de perfil, tendo seus segmentos  $(A)(B)$ , em época, projeções com comprimentos iguais e com sentidos contrários e que seu traço  $(P)$  com  $(\beta_{24})$  é o ponto médio comum aos segmentos formados, em época, pelas duas projeções de cada um de seus pontos. Assim é o ponto  $P' \equiv P$ , na Figura 726, médio de  $A'A$  e de  $B'B$ , que é, então, a projeção ortogonal, tanto do ponto  $(A)$  quanto do ponto  $(B)$ , sobre  $(\beta_{24})$ .

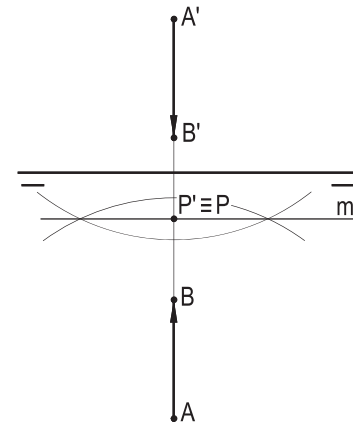


Figura 726

Imediata é, portanto, a determinação das projeções  $\bar{A}' \equiv \bar{A}$  da projeção ortogonal de um ponto qualquer  $(A)$ , sobre  $(\beta_{24})$ , independentemente de sua localização, em cada diedro, ou em cada plano de projeção (Figura 727).

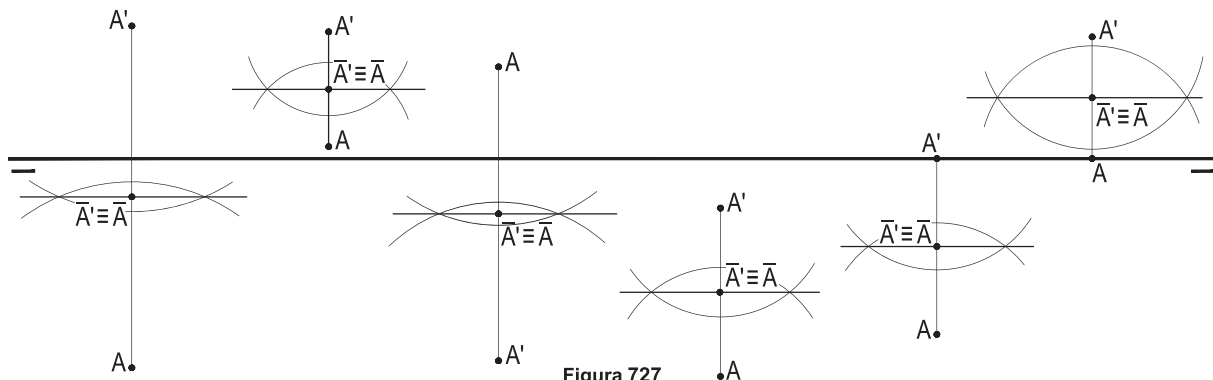


Figura 727

## 202 – Projeção ortogonal de reta sobre ( $\beta_{24}$ )

Em termos gerais, a projeção ortogonal ( $\bar{r}$ ) de uma reta ( $r$ ) sobre ( $\beta_{24}$ ) se constrói pela união das projeções ortogonais ( $\bar{A}$ ) e ( $\bar{B}$ ), sobre esse bissetor, de dois pontos ( $A$ ) e ( $B$ ) de ( $r$ ), que podem ser quaisquer (Figura 735), embora seja aconselhável, sempre que possível, que um deles seja o próprio traço de ( $r$ ) com ( $\beta_{24}$ ), visto que ele coincide com sua projeção ortogonal sobre ( $\beta_{24}$ ) (Figura 734).

As épuras abaixo exemplificam, para cada natureza da reta dada ( $r$ ), sua projeção ortogonal ( $\bar{r}$ ) sobre ( $\beta_{24}$ ), destacadas as retas ( $r$ ), das Figuras 731 e 736, que, por serem paralelas a ( $\beta_{24}$ ), produzem projeções a elas paralelas, e as retas vertical e de topo, das Figuras 732 e 733, que proporcionam, como projeções ortogonais sobre ( $\beta_{24}$ ), retas de perfil, ( $\bar{A}$ )( $\bar{B}$ ), naturalmente pertencentes a ( $\beta_{24}$ ), arbitrado um ponto ( $B$ ), na mesma abscissa de ( $A$ ).

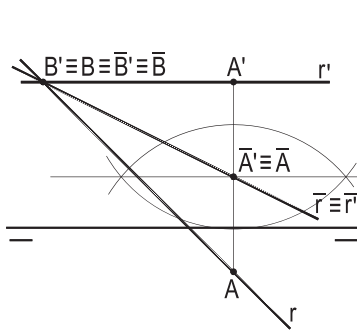


Figura 728

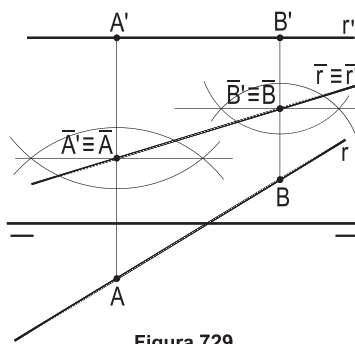


Figura 729

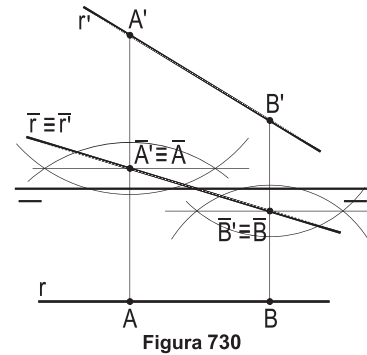


Figura 730

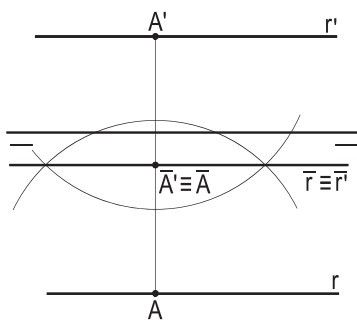


Figura 731

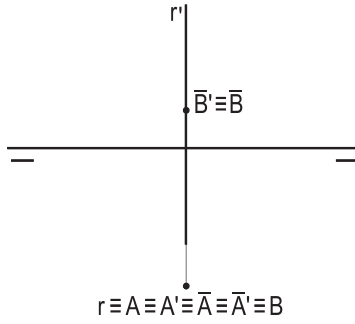


Figura 732

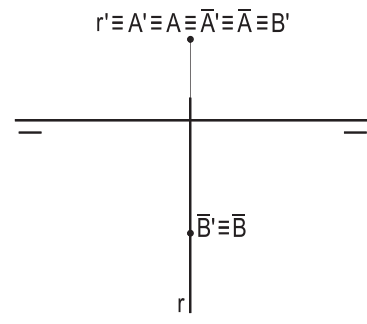


Figura 733

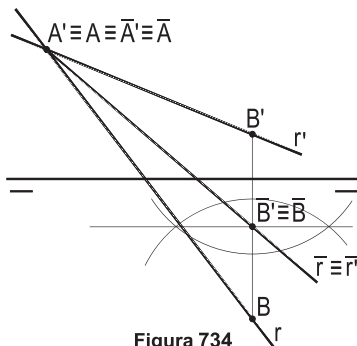


Figura 734

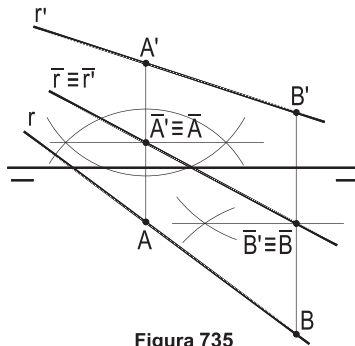


Figura 735

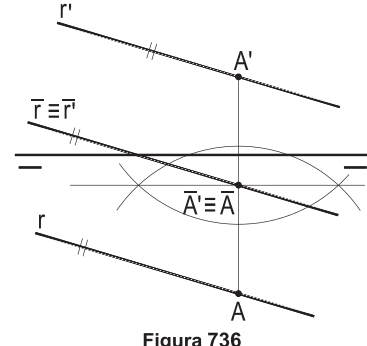
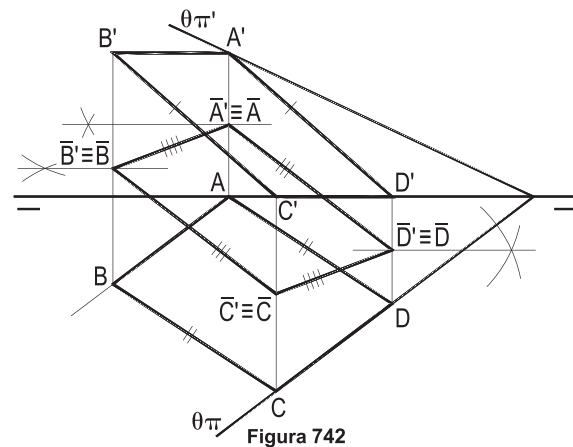
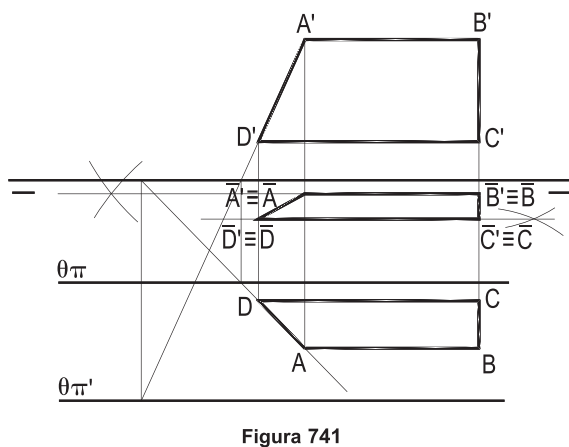
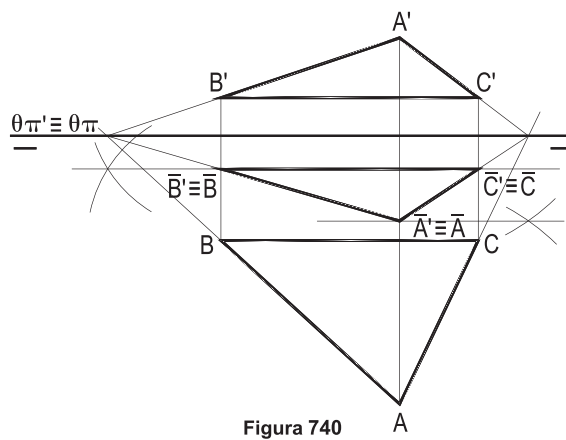
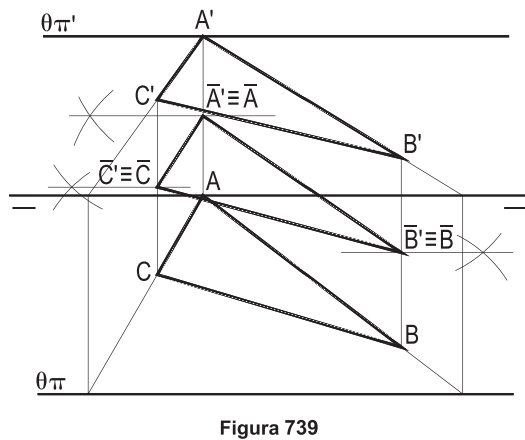
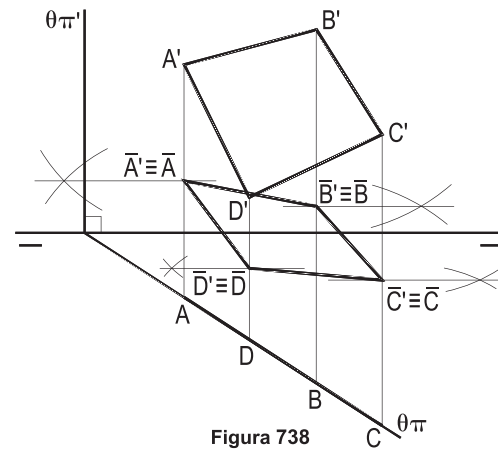
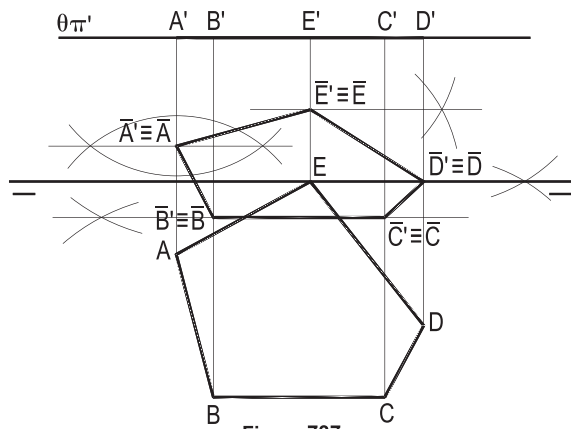


Figura 736

## 203 – Projeção ortogonal de polígono sobre ( $\beta_{24}$ )

A construção da projeção ortogonal de um polígono, dado por suas projeções, sobre ( $\beta_{24}$ ), se faz, simplesmente, projetando seus vértices e/ou seus lados ortogonalmente sobre esse bisetor, tal como anteriormente detalhado.

Seguem alguns exemplos, em que sempre são dadas as projeções do polígono a projetar.



Nos exemplos antes apresentados cabe comentar que, na Figura 737, a projeção  $(\bar{B})(\bar{C})$  do lado fronto-horizontal  $(B)(C)$  do pentágono horizontal dado é também, naturalmente, fronto-horizontal, o que se repete na Figura 740 e, com as bases  $(\bar{A})(\bar{B})$  e  $(\bar{C})(\bar{D})$  do trapézio  $(A)(B)(C)(D)$  da Figura 741, que dá, para seu lado de perfil  $(B)(C)$ , a projeção  $(\bar{B})(\bar{C})$ , também de perfil. E o paralelogramo  $(A)(B)(C)(D)$ , do plano qualquer  $(\theta)$ , da Figura 742, proporciona, por projeção ortogonal sobre  $(\beta_{24})$ , outro paralelogramo  $(\bar{A})(\bar{B})(\bar{C})(\bar{D})$ , visto que os paralelismos se conservam nas projeções cilíndricas ortogonais.

Para os dois exemplos abaixo, os polígonos dados pertencem a planos perpendiculares a  $(\beta_{24})$ , o que obriga que suas projeções ortogonais sobre esse bisetor reduzam-se a segmentos de reta (Figuras 743, 744, 745 e 746), no segundo caso um segmento da própria linha de terra, já que o triângulo  $(A)(B)(C)$ , dado, pertence a  $(\beta_{13})$  (Figuras 745 e 746).

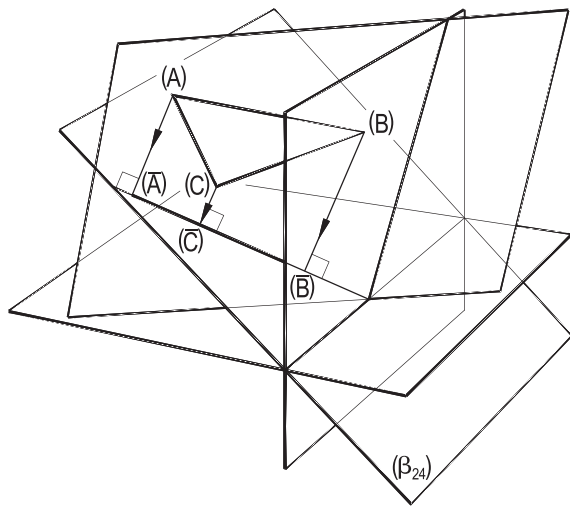


Figura 743

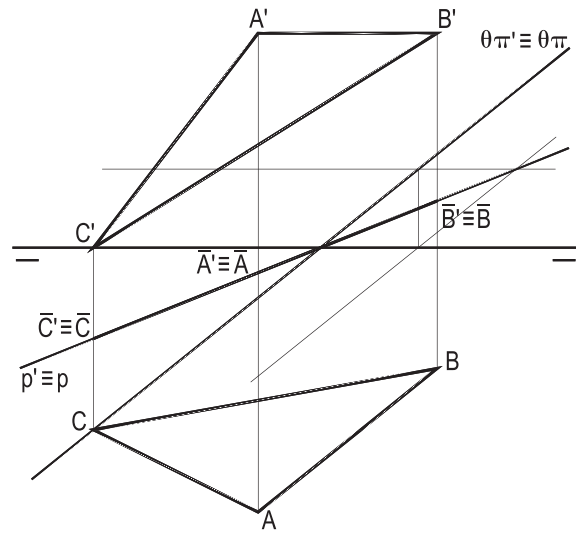


Figura 744

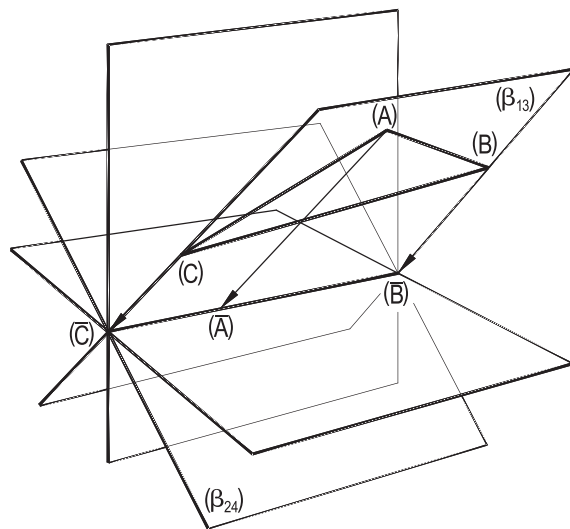


Figura 745

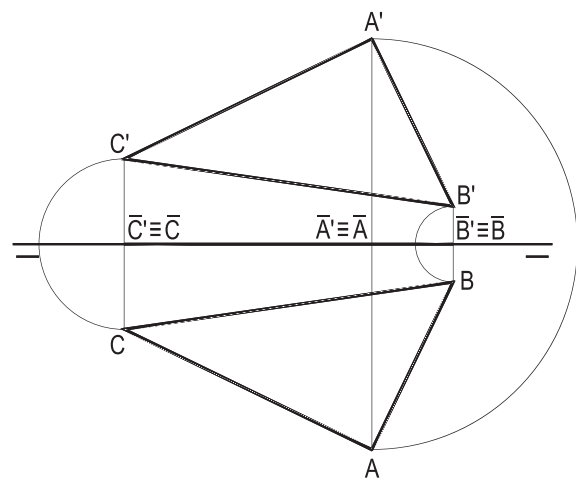


Figura 746



## 204 – Projeção ortogonal de poliedro sobre $(\beta_{24})$

Tal como com os polígonos, as projeções de poliedros sobre  $(\beta_{24})$  se fazem pelas projeções de seus vértices e/ou de suas arestas sobre esse bisetor.

Como nas projeções anteriormente vistas de poliedros, habitualmente são apresentados apenas os contornos de suas projeções, com indicação, quando for o caso, das projeções dos vértices interiores a esses contornos.

Seguem alguns exemplos:

1 – Pirâmide pentagonal irregular  $(J)-(A)(B)(C)(D)(E)$ , assente pela base num plano frontal, dada pelas projeções verticais de seus cinco vértices, sabendo que a aresta  $(J)(A)$  pertence a  $(\beta_{13})$ , que o vértice  $(J)$  tem abscissa nula e que o plano  $(J)(B)(E)$  é de topo.

Obtida a projeção  $J'$ , vêm  $J$  e  $JA$ , determinando o afastamento do plano frontal da base do sólido (Figura 747). Pelas posições dadas, todos os vértices da projeção do sólido, sobre  $(\beta_{24})$ , pertencem a seu contorno, a aresta  $(\bar{J})(\bar{A})$  na linha de terra.

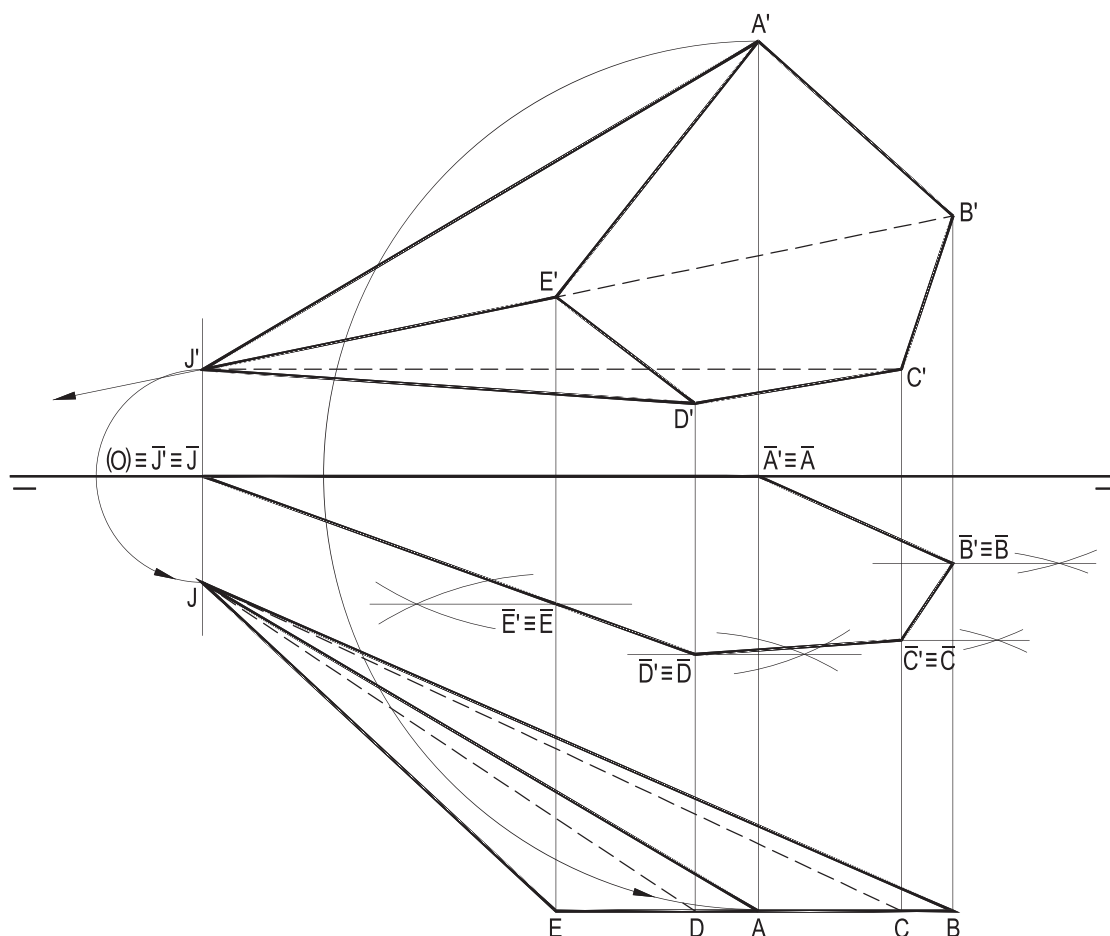


Figura 747

2 – Prisma triangular reto (A)(B)(C)–(R)(S)(T), com as bases em planos de topo, dadas as duas projeções da aresta básica (A)(B) e a projeção horizontal do vértice (C), sabendo que o vértice (R) tem cota nula.

As arestas laterais, por serem perpendiculares aos planos da base, têm que ser frontais, o que proporciona o vértice (R) e, então, com paralelas, as projeções do prisma (Figura 748). A projeção ortogonal sobre  $(\beta_{24})$  também se beneficia desses paralelismos, contando, para os dados, com o vértice  $\bar{B} \equiv \bar{B}'$  no interior do contorno do sólido.

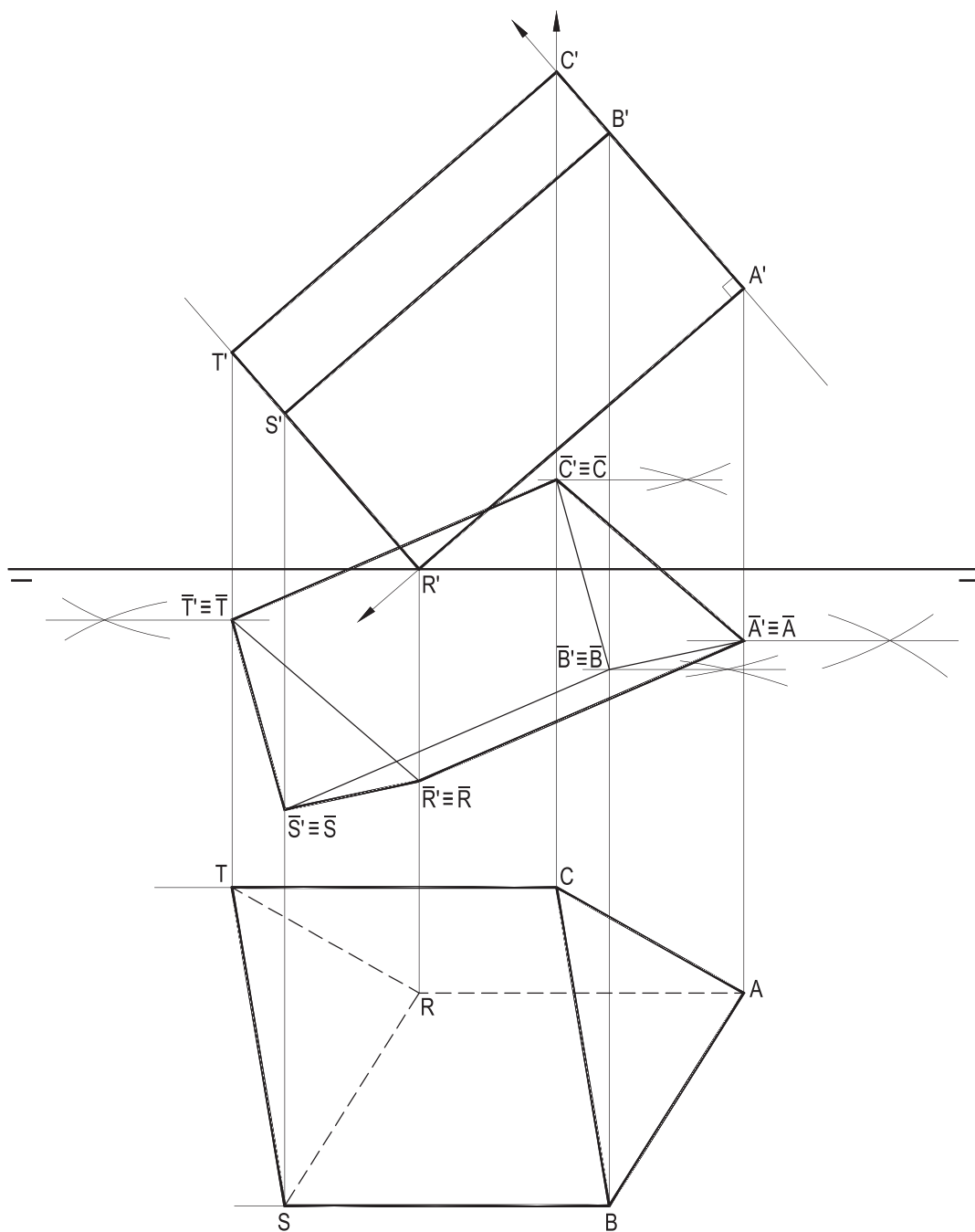


Figura 748

3 – Tetraedro regular (J)–(A)(B)(C) apoiado pela face (A)(B)(C) num plano vertical e situado inteiramente no primeiro diedro, sendo (C) o vértice de maior cota. Dadas as duas projeções da aresta (A)(B).

Rebatido o plano ( $\gamma$ ) da face (A)(B)(C) sobre ( $\pi'$ ), constrói-se sua V.G., obtendo-se a V.G. da altura  $h$  do sólido, o que permite determinar o vértice (J), na horizontal ( $p$ ) conduzida pelo centro (O) daquela face, perpendicularmente a seu plano ( $\gamma$ ) (Figura 749).

A projeção  $(\bar{J})$ – $(\bar{A})$ ( $\bar{B}$ )( $\bar{C}$ ) pedida, de simples construção, tem seu vértice ( $\bar{A}$ ) interior ao contorno da projeção do tetraedro sobre ( $\beta_{24}$ ).

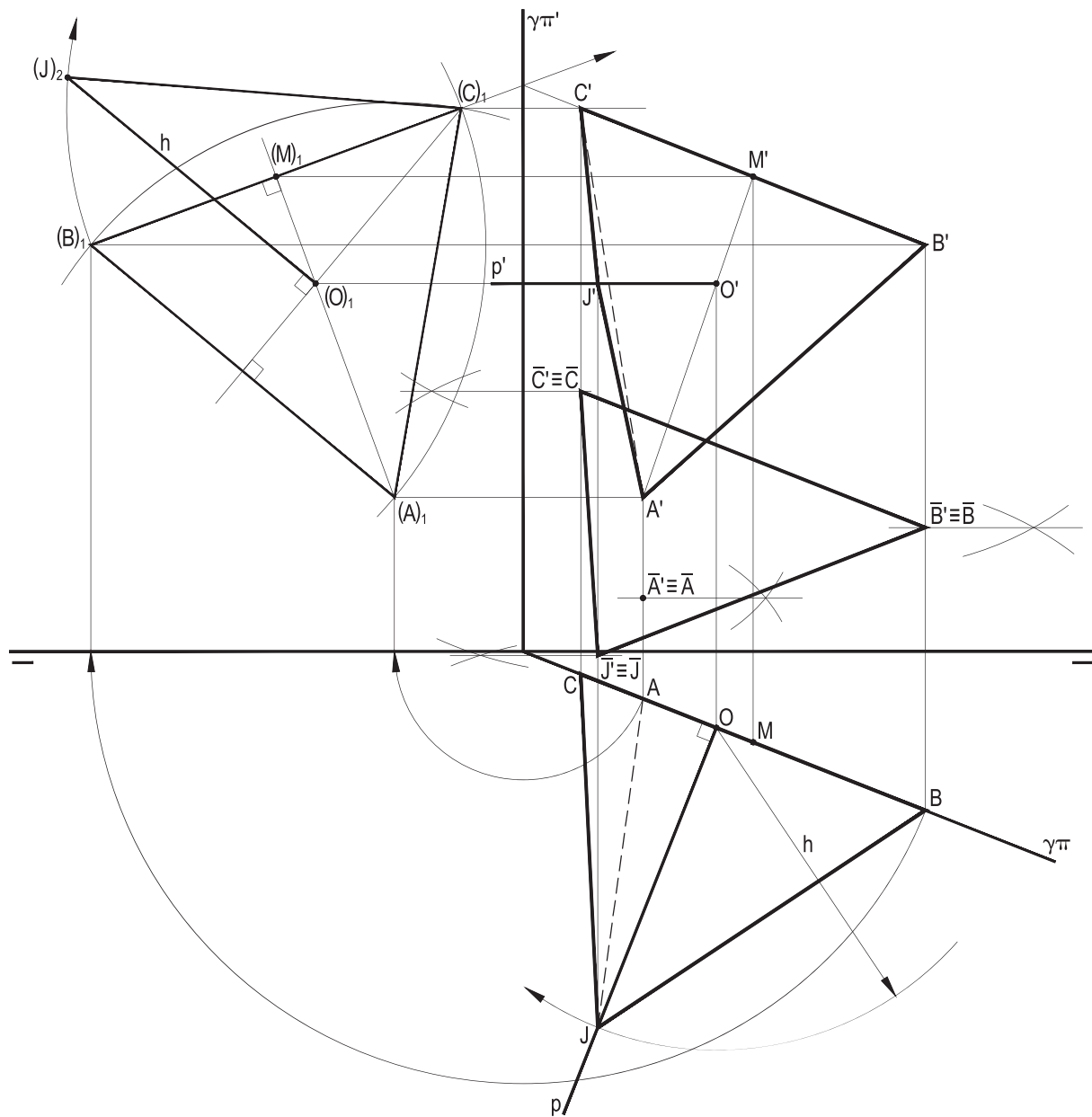


Figura 749

4 – Pirâmide quadrangular (J)–(A)(B)(C)(D), assente pela base no plano ( $\alpha$ ), dado pelos traços, sabendo que o vértice (J) coincide com a origem (O) das abscissas. Dadas as projeções horizontais dos quatro vértices da base, um paralelogramo.

Marcados os pontos (A), (B), (C) e (D) em ( $\alpha$ ), é pronta a construção das projeções da pirâmide, já que seu vértice (J) é conhecido (Figura 750).

Da projeção ortogonal sobre ( $\beta_{24}$ ), o vértice ( $\bar{D}$ ) resta interior ao contorno.

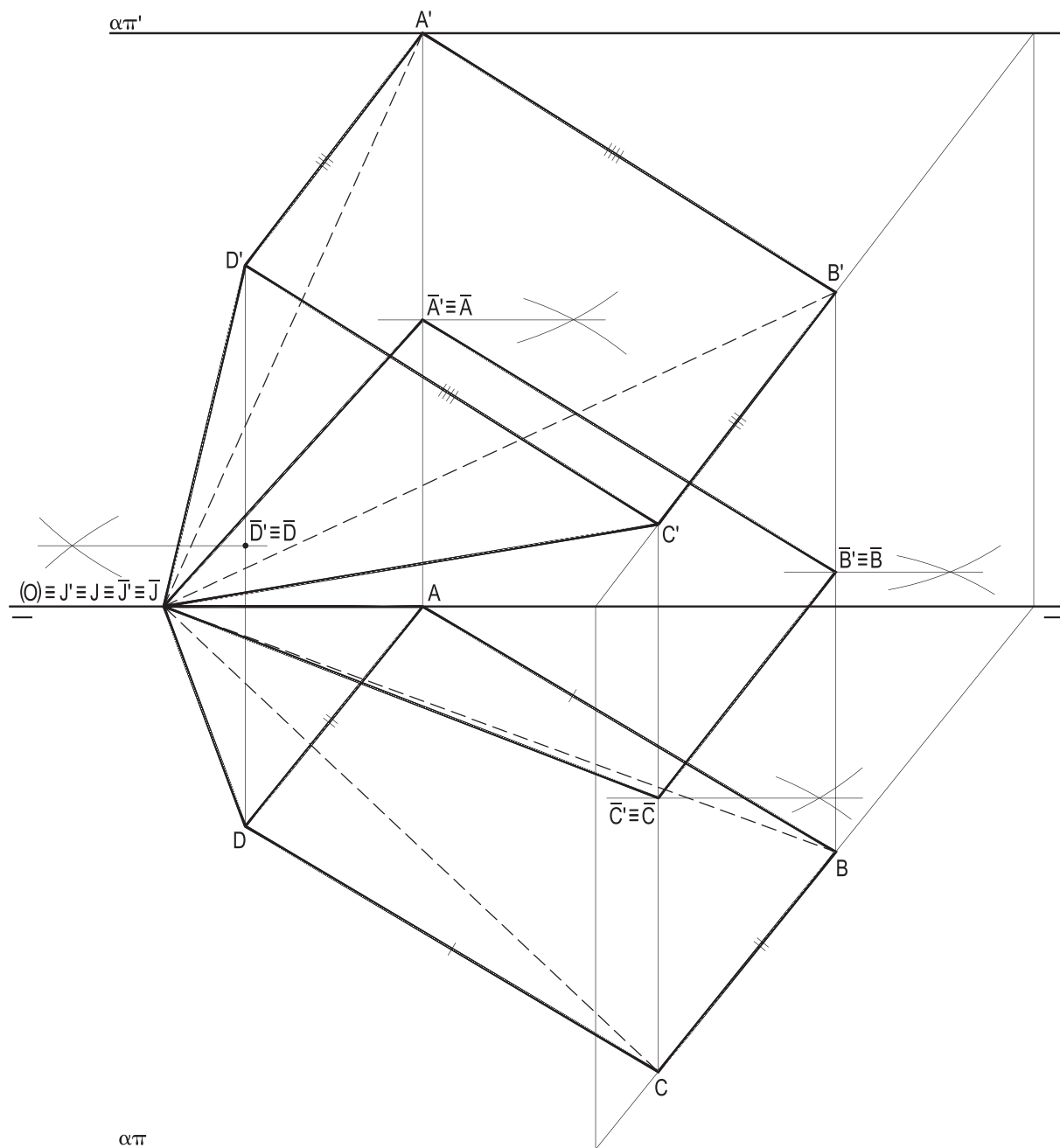


Figura 750

# CAPÍTULO XIV

## A SUPRESSÃO DA LINHA DE TERRA

### 205 – Os principais planos

Os principais planos da Geometria Descritiva são, naturalmente, os dois planos de projeção, o horizontal ( $\pi$ ) e o vertical ( $\pi'$ ), e o plano de perfil ( $\pi''$ ), origem das abscissas. Seguem, também com destacadas importâncias, os planos bissetores dos diedros formados pelos dois primeiros, o Bissetor Ímpar ( $\beta_{13}$ ) e o Bissetor Par ( $\beta_{24}$ ).

A linha de terra, presença tão habitual nas épuras, permitindo as marcações e as utilizações das cotas e dos afastamentos dos pontos envolvidos, reafirma as importâncias dos dois planos de projeção, ( $\pi$ ) e ( $\pi'$ ), indispensáveis nas determinações dos traços horizontais e verticais das retas e dos planos a utilizar. Também o Bissetor Ímpar depende, em épura, da existência da linha de terra, que demarca as simetrias das projeções dos pontos e das retas a ele pertencentes. Apenas o Bissetor Par prescinde da existência da linha de terra, já que os pontos e as retas a ele pertencentes, por terem, em épura, projeções coincidentes, não necessitam de tal referência, como indicado nas Figuras 751, 752 e 753, que apresentam épuras com e sem ( $\pi'\pi$ ).

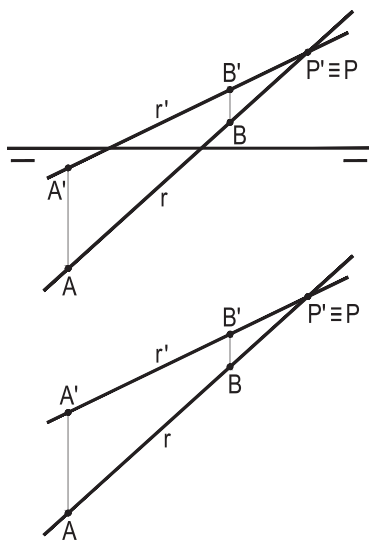
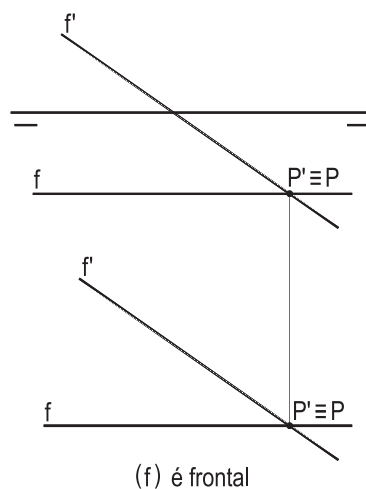


Figura 751



(f) é frontal

Figura 752

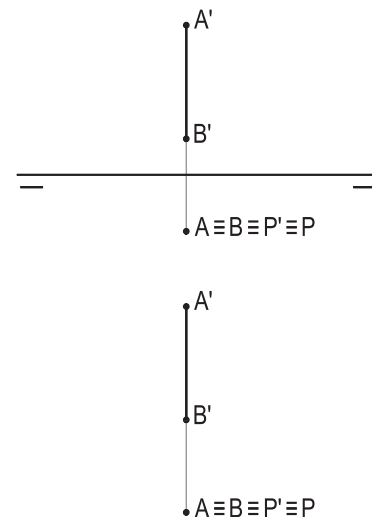


Figura 753

## 206 – Supressão da linha de terra

No presente capítulo, será comprovada e fartamente exemplificada a possibilidade de resolver enorme quantidade de problemas com épuras em que  $(\pi'\pi)$  é suprimida, respeitada sempre, é claro, a direção das linhas de chamada.

Em verdade, visto que as direções de todos os demais planos referenciais são obedecidas, tudo se passa como se, mantido fixo o Bissetor Par, os planos de projeção estivessem livres, atendendo apenas às suas naturais direções (Figura 754).

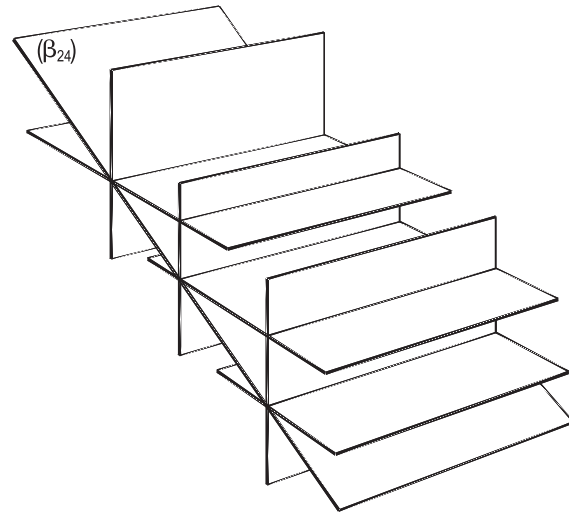


Figura 754

## 207 – Aplicações a pontos e retas

Os exemplos a seguir apresentados e comentados comprovam o acima adiantado, quanto à supressão da linha de terra:

1 – Para os três casos abaixo, pede-se traçar, pelo ponto (A), dado por suas projeções, a reta (t), paralela à reta (r), dada por suas projeções, ou pelas projeções de seus pontos (R) e (S).

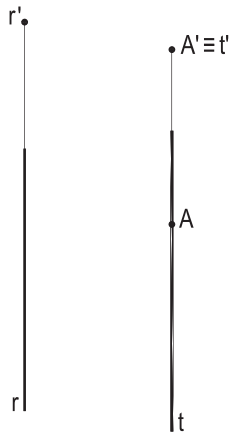


Figura 755

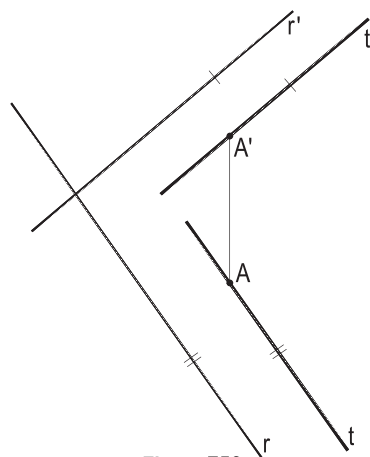


Figura 756

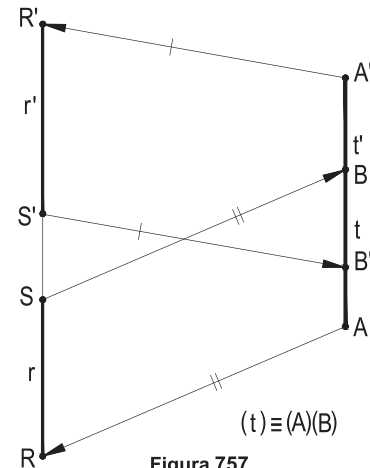
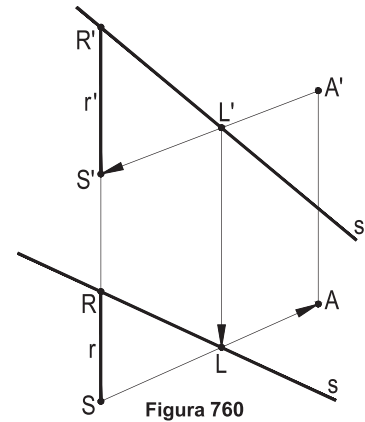
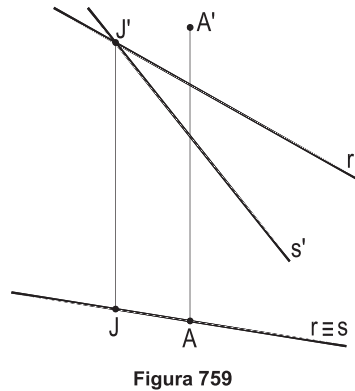
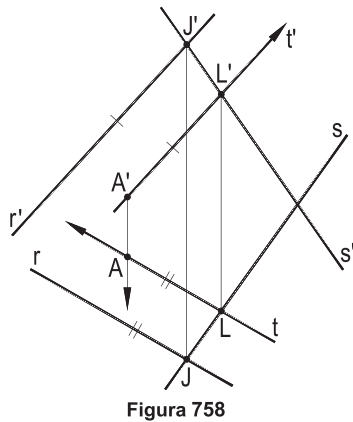


Figura 757

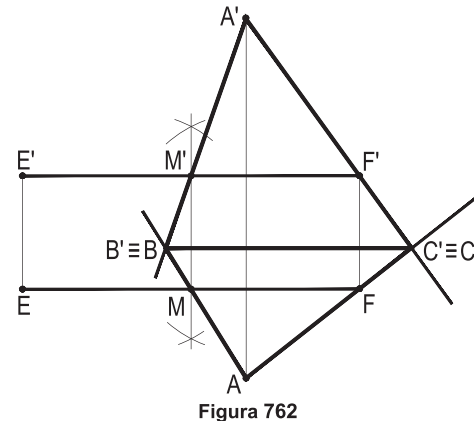
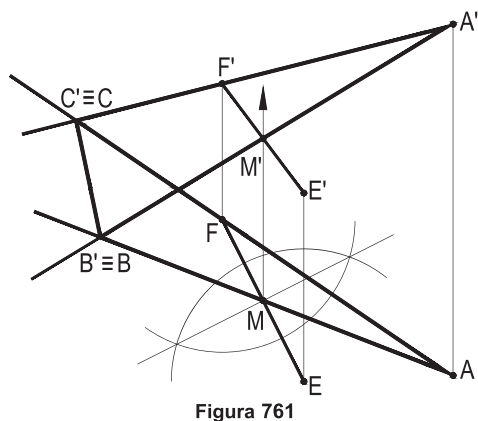
O primeiro exemplo é imediato, por ser de topo a reta dada (r), o que obriga que (t) também o seja (Figura 755); o segundo por ter (t) projeções paralelas às de mesmo nome de (r) (Figura 756) e, no terceiro, dada a reta de perfil (R)(S), por comodidade, com duas translações, foi construída a reta (A)(B), os segmentos (A)(B) e (R)(S), além de paralelos, iguais (Figura 757).

2 – Dadas, nos três casos abaixo, por suas projeções, as retas concorrentes (r) e (s) e, pela projeção vertical  $A'$ , o ponto (A), pertencente ao plano formado por (r) e (s), pede-se determinar sua projeção horizontal A.



No primeiro exemplo foi utilizada uma reta (t) concorrente com (s) e paralela a (r) (Figura 758), no segundo (Figura 759), a obtenção da projeção horizontal A é imediata, por ser vertical o plano das retas (r) e (s) dadas e, no terceiro, utilizou-se a reta (A)(S), concorrente com a dada (s) (Figura 760).

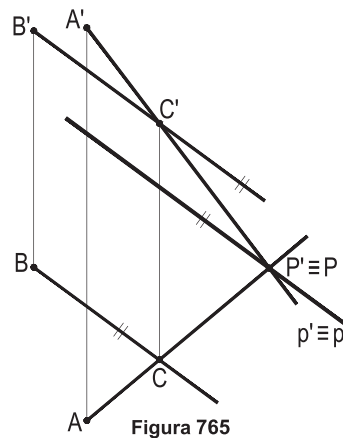
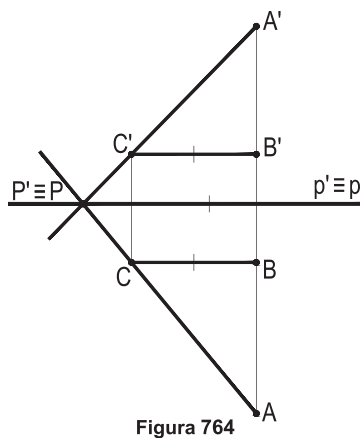
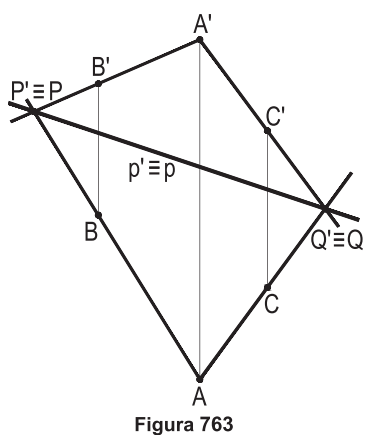
3 – Para os dois casos abaixo são dados, por suas projeções, os pontos (A), (E) e (F). Pede-se construir as projeções do triângulo (A)(B)(C), sabendo que (A)(B) concorre com (E)(F) em seu ponto médio, que (A)(C) contém o ponto (F) e que o lado (B)(C) pertence a  $(\beta_{24})$ .



Determinado, rigorosamente, o ponto (M), médio de (E)(F), obtém-se a reta (A)(M), que proporciona (B), sendo o vértice (C) imediato, traço da reta (A)(F) com  $(\beta_{24})$  (Figuras 761 e 762).

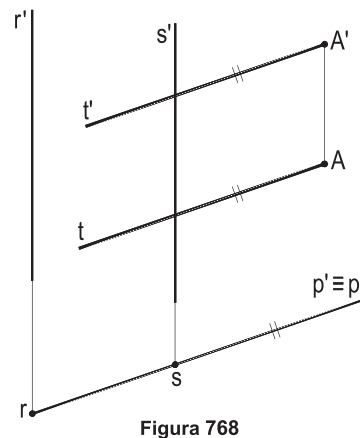
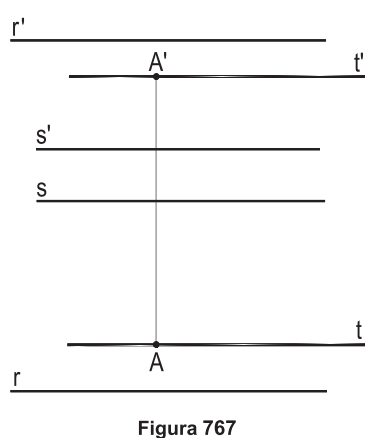
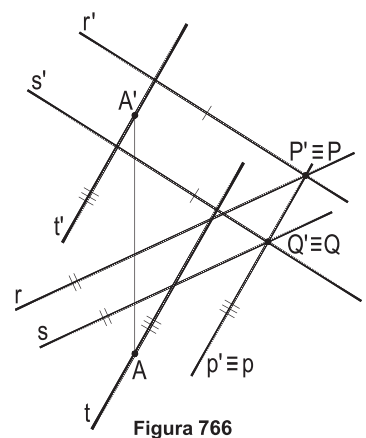
Observe-se que, no segundo exemplo, o lado (B)(C) tem que ser fronto-horizontal (Figura 762), já que o plano dos pontos dados (A), (E) e (F), contendo a fronto-horizontal (E)(F), tem que ser paralelo à linha de terra.

4 – Em todos os casos abaixo são dados, por suas projeções, os pontos (A), (B) e (C).  
 Pedese, para cada um deles, determinar as projeções da reta (p), traço do plano que eles  
 definem com  $(\beta_{24})$ .



No primeiro exemplo, os traços (P) e (Q) das retas (A)(B) e (A)(C) com  $(\beta_{24})$  proporcionam a reta (p) pedida (Figura 763), no segundo, por ser a reta (B)(C) fronto-horizontal, (p) também terá que ser (Figura 764) e, no terceiro, por ser a reta (B)(C) paralela a  $(\beta_{24})$  (Figura 765), é com sua direção que vem o traço (p) procurado, conduzido pelo traço (P) da reta (A)(C) com  $(\beta_{24})$ .

5 – Construir as projeções da reta (t), pertencente ao ponto (A), dado por suas projeções, e paralela a  $(\beta_{24})$  e ao plano das retas paralelas (r) e (s), também dadas por suas projeções.



Em todos os casos, a reta (t), procurada, tem que ser paralela à interseção (p) do plano dado com  $(\beta_{24})$ . Por isso, no primeiro e no terceiro caso, determinou-se essa reta (p), para conduzir, por (A), a paralela (t) a (p) (Figuras 766 e 768). No segundo, nem foi necessário obter a interseção do plano das retas dadas (r) e (s), com  $(\beta_{24})$ , por ter que ser ele paralelo a  $(\pi'\pi)$  e, então, (t) ter que ser fronto-horizontal (Figura 767).



6 – Construir, por duas retas suas, o plano ( $\alpha$ ), pertencente ao ponto (A), dado por suas projeções, e paralelo a ( $\beta_{24}$ ) e, pelo ponto (B), dado por suas projeções, o plano ( $\gamma$ ), paralelo a ( $\beta_{13}$ ).

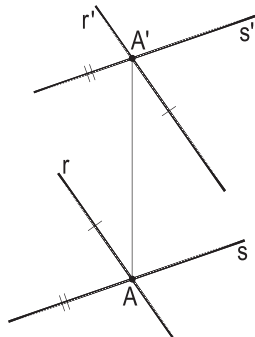


Figura 769

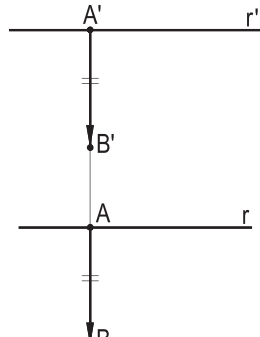


Figura 770

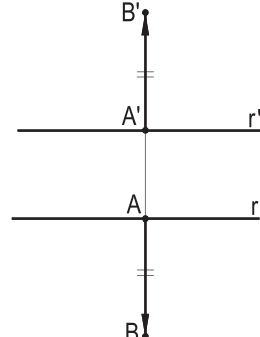


Figura 771

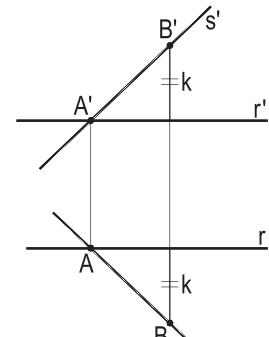


Figura 772

Cada plano pedido, paralelo a um dos bissetores, sendo paralelo à linha de terra, há de possuir retas fronto-horizontais, presentes nas Figuras 770, 771 e 772. As soluções para ( $\alpha$ ), paralelo a ( $\beta_{24}$ ), são apresentadas, assim, por uma fronto-horizontal e por uma reta (A)(B) perpendicular a ( $\beta_{13}$ ) (Figura 770), ou simplesmente, por duas retas quaisquer (r) e (s), ambas paralelas a ( $\beta_{24}$ ) (Figura 769). Para ( $\gamma$ ) paralelo a ( $\beta_{13}$ ), foi utilizada, além da fronto-horizontal (r), uma reta (B)(C), perpendicular a ( $\beta_{24}$ ) (Figura 771), ou uma reta qualquer (s), paralela a ( $\beta_{13}$ ) (Figura 772).

## 208 – Aplicações aos planos

1 – Construir, por duas retas suas, o plano ( $\alpha$ ), paralelo à linha de terra, inclinado de um ângulo dado  $\hat{\phi}$  em relação ao plano horizontal de projeção e pertencente ao ponto dado (A).

A apreciação de uma vista de perfil (Figura 773) mostra que há duas posições para o plano pedido, os catetos z e y dos triângulos retângulos ressaltados apresentando o ângulo  $\hat{\phi}$  do plano ( $\alpha$ ) com os planos horizontais, o que proporciona responder ao pedido: o plano ( $\alpha$ ) formado pela fronto-horizontal (r) e pelas retas de perfil (A)(B) das Figuras 774 e 775, para um valor AB arbitrado.

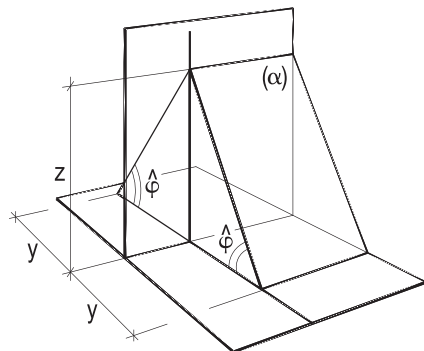


Figura 773

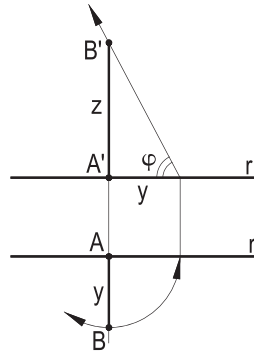


Figura 774

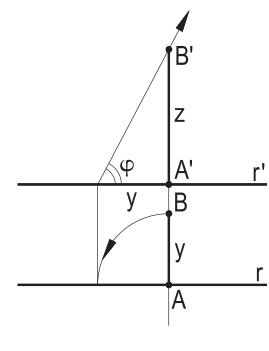
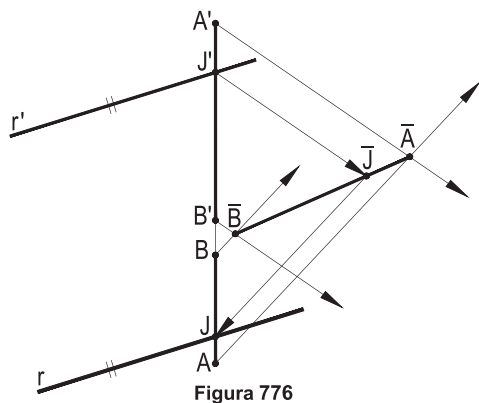


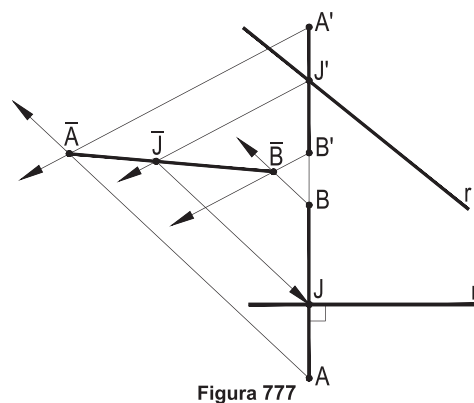
Figura 775

2 – Dadas, por suas projeções, a reta de perfil (A)(B), nos diversos casos abaixo, bem como a projeção vertical da reta (r), concorrente com (A)(B), pede-se, utilizando uma projeção cilíndrica sobre  $(\beta_{24})$ , construir a projeção horizontal de (r), obedecendo à condição imposta, caso a caso.

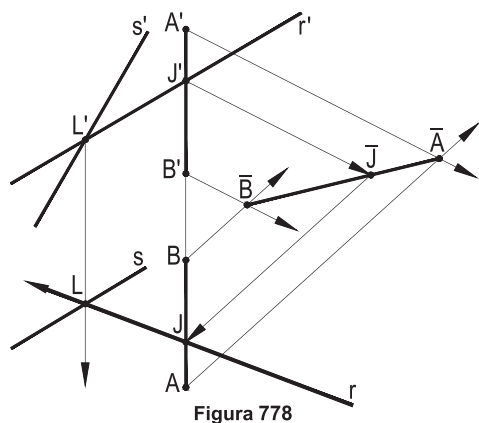
2.1 – (r) é paralela a  $(\beta_{24})$



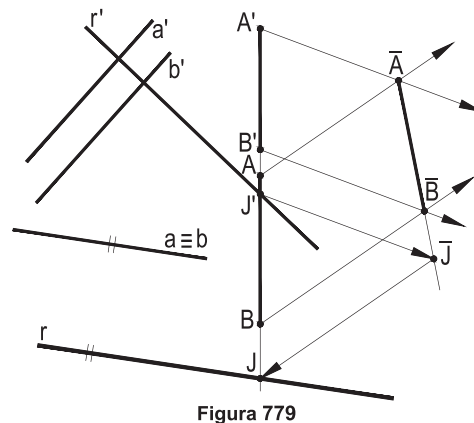
2.2 – (r) é frontal



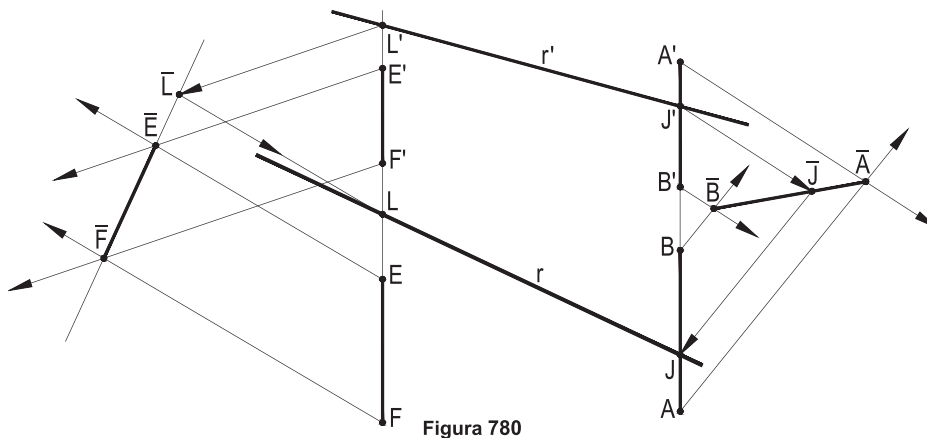
2.3 – (r) concorre com a reta (s), dada por suas projeções



2.4 – (r) é paralela ao plano das retas (a) e (b), dadas por suas projeções

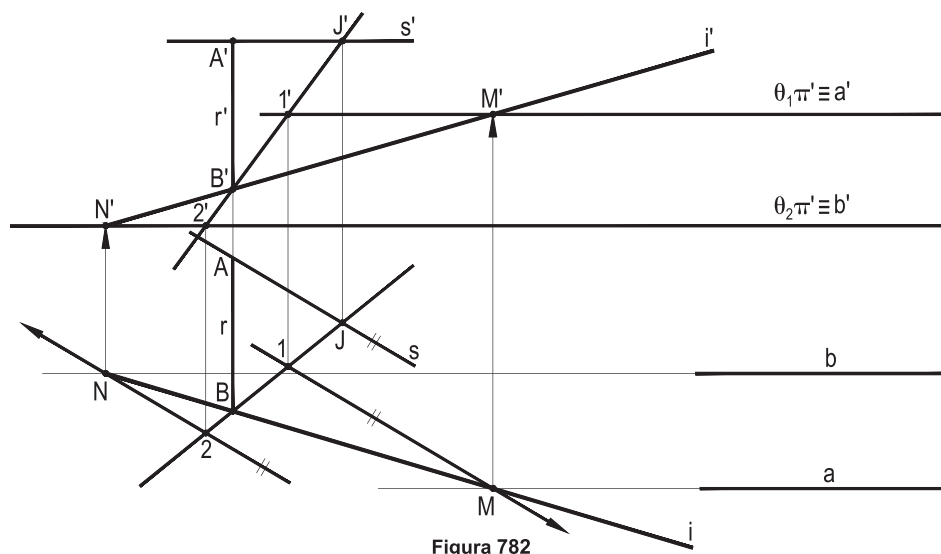
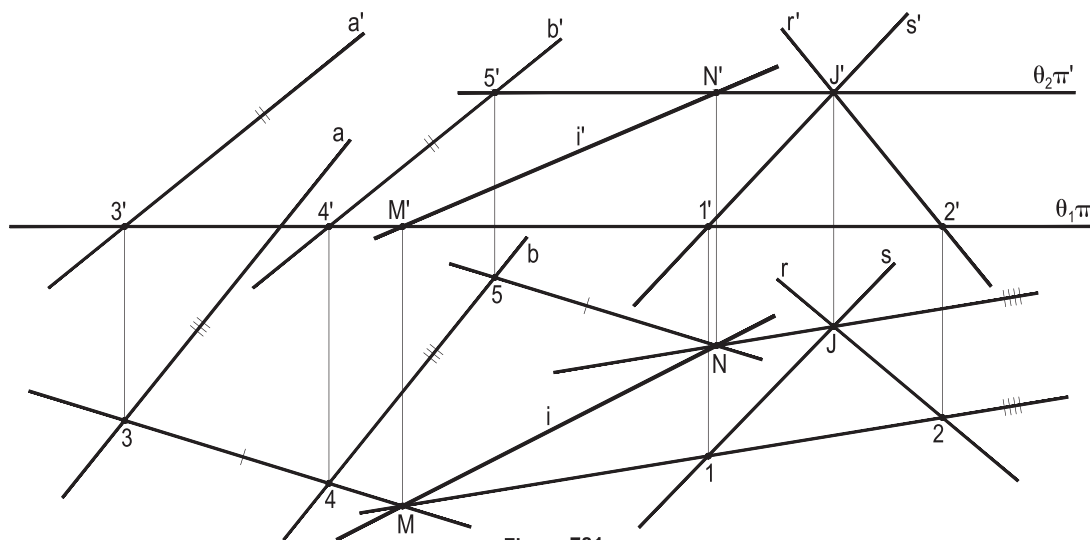


2.5 – (r) concorre, também, com a reta de perfil (E)(F), dada por suas projeções



Em todos os casos abordados foi utilizada uma projeção cilíndrica da reta dada (A)(B) sobre  $(\beta_{24})$ , segundo uma direção arbitrada, para marcar o ponto (J) de concorrência de (r) com (A)(B), sendo a segunda projeção de (r), simples de se obter em todos os casos. No último, foram utilizadas duas projeções cilíndricas sobre  $(\beta_{24})$ , para marcar os pontos (J), em (A)(B), e (L), em (E)(F), os quais definem a reta (r).

3 – Para todos os casos seguintes, determinar as projeções da reta (i), interseção dos planos dados, um pelas retas (r) e (s), o outro pelas retas (a) e (b), todas por suas projeções.



Nos dois exemplos acima foram utilizados dois planos horizontais  $(\theta)_1$  e  $(\theta)_2$ , que produziram interseções com cada plano dado, proporcionando os pontos (M) e (N), que definem a interseção (i) pedida (Figuras 781 e 782). Observe-se que, no segundo, aproveitou-se a direção horizontal da reta dada (s).

As construções ficam bem simplificadas quando ao menos um dos planos dados é projetante, por ser imediata, pelo menos uma das projeções da interseção (i) pedida.

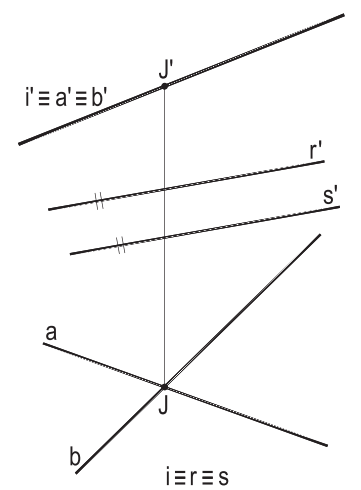


Figura 783

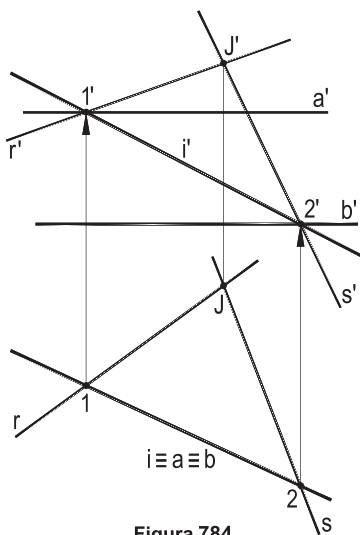


Figura 784

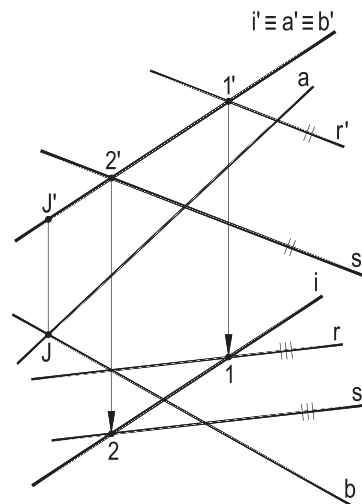


Figura 785

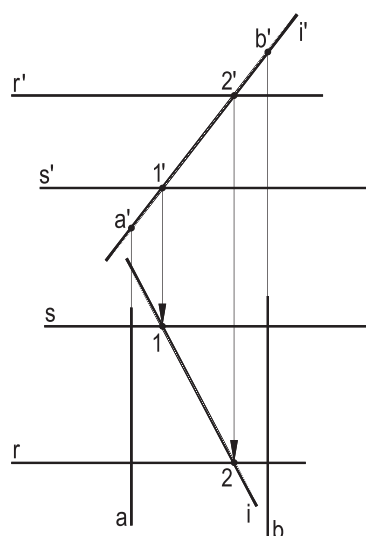


Figura 786

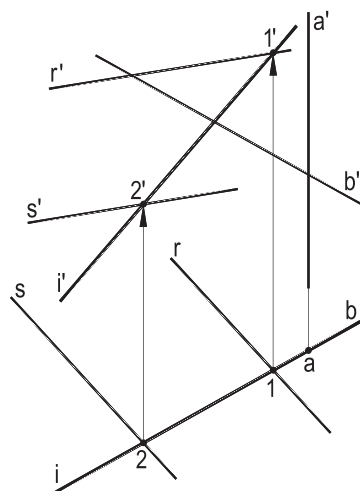


Figura 787

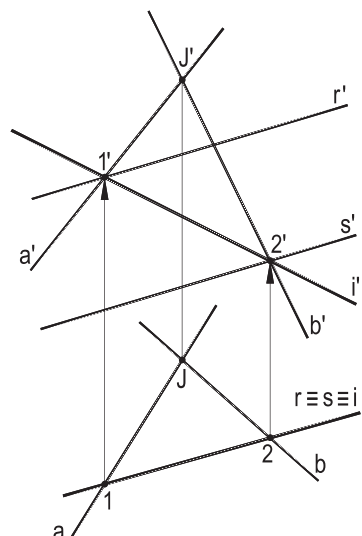


Figura 788

4 – Determinar as projeções do ponto (P), interseção da reta (r) com o plano formado pelas retas (a) e (b), todas dadas por suas projeções, nos diversos casos seguintes.

Imediato quando o plano dado é projetante (Figura 789) e ainda simples quando não, pela utilização de um plano projetante que contenha a reta (r), determinando sua interseção (s) com o plano dado e precisando, então, o ponto (P) pedido, comum a (r) e a (s) (Figuras 790 e 791).

A escolha do plano projetante contendo (r) pode ser tanto em relação a ( $\pi'$ ) (Figura 790) quanto em relação a ( $\pi$ ) (Figura 791).

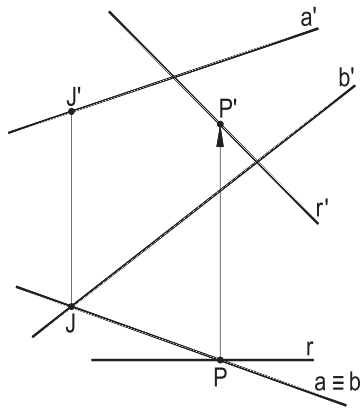


Figura 789

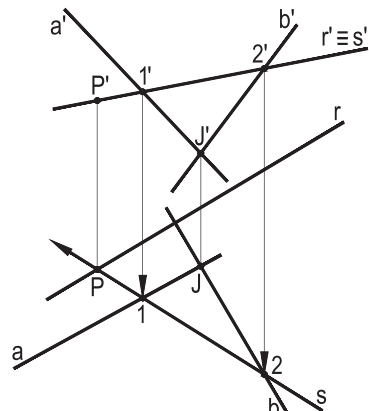


Figura 790

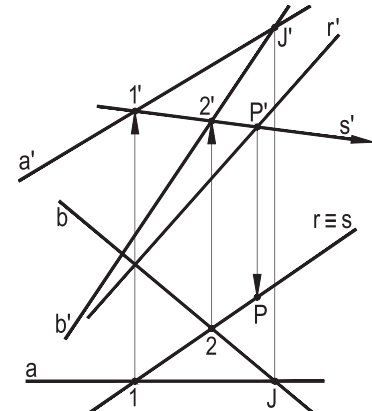


Figura 791

5 – Determinar a projeção vertical da reta ( $r$ ), dada por sua projeção horizontal, sabendo que ela pertence ao ponto ( $A$ ), dado por sua sua projeção vertical  $A'$ , e é paralela ao plano ( $\alpha$ ), dado pelas projeções de suas retas ( $a$ ) e ( $b$ ).

Quando o plano ( $\alpha$ ) é projetante (Figuras 792 e 793), a resolução é imediata, por se conhecer *a priori* a direção de  $r'$ ; quando não, deve-se construir uma reta ( $s$ ), de ( $\alpha$ ), com a projeção horizontal paralela (Figuras 794 e 795), ou mesmo coincidente, com a de ( $r$ ) (Figuras 796 e 797), pois ( $r$ ) há de ser paralela a ( $s$ ).

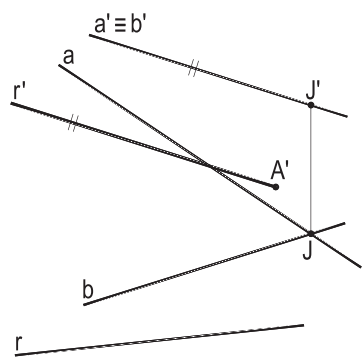


Figura 792

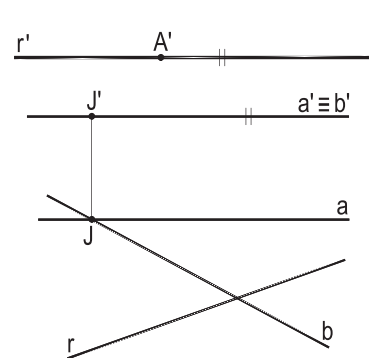


Figura 793

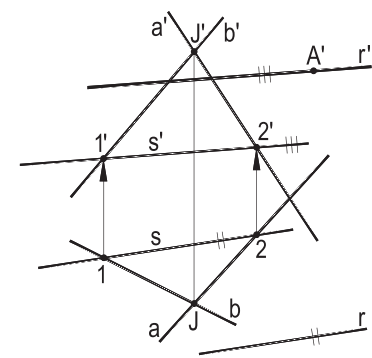


Figura 794

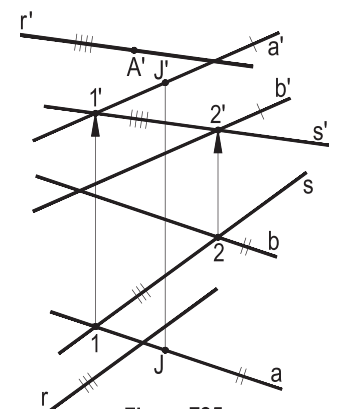


Figura 795

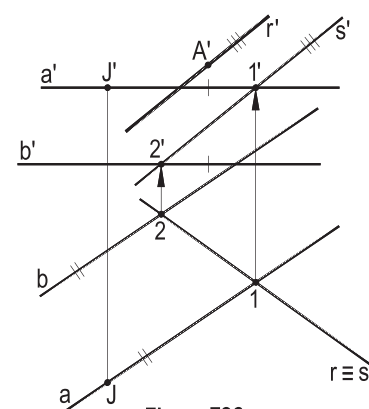


Figura 796

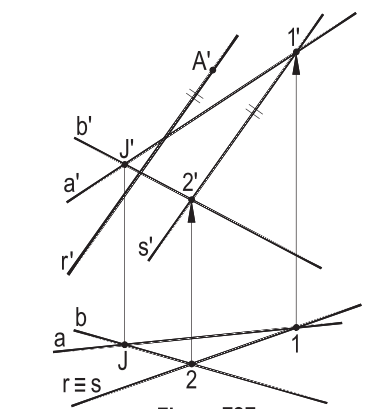


Figura 797

6 – Dados duas retas reversas (r) e (s) e um ponto (A), a elas exterior, todos por suas projeções, pede-se construir as projeções de reta (t), pertencente a (A) e concorrente com (r) e com (s).

Para conter (A) e concorrer com (r), a reta pedida (t) tem que pertencer ao plano ( $\alpha$ ) que (A) forma com (r) (Figura 798). E para concorrer com (s), estando nesse plano, tem que fazê-lo no ponto (P), traço de (s) em ( $\alpha$ ). Assim, os pontos (P) e (A) definem a reta (t) pedida (Figuras 798 e 799).

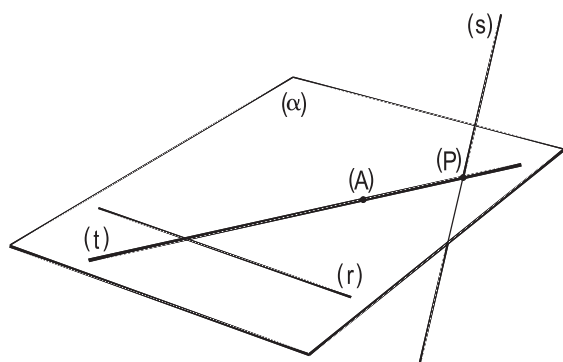


Figura 798

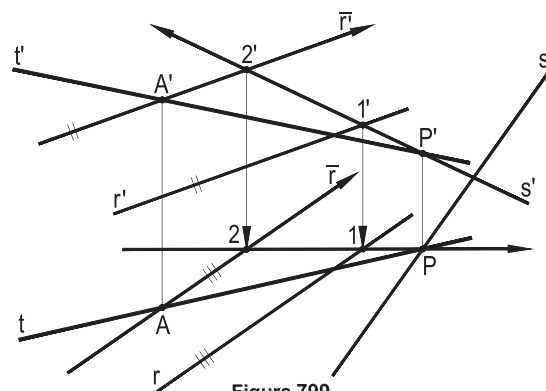


Figura 799

7 – Dadas três retas (r), (s) e (t), reversas duas a duas, todas por suas projeções, pede-se construir as projeções da reta (a), paralela a (t) e concorrente com (r) e (s). Dadas, ainda, as projeções de um ponto (J), de (r).

Trata-se de uma variante do problema anterior. De fato, para concorrer com (r) e ser paralela a (t), a reta pedida (a) deve pertencer ao plano ( $\alpha$ ), formado por (r) e por uma reta ( $\bar{t}$ ), paralela a (t). E para concorrer com (s), tem que passar pelo ponto (P), interseção de (s) com ( $\alpha$ ) (Figuras 800 e 801).

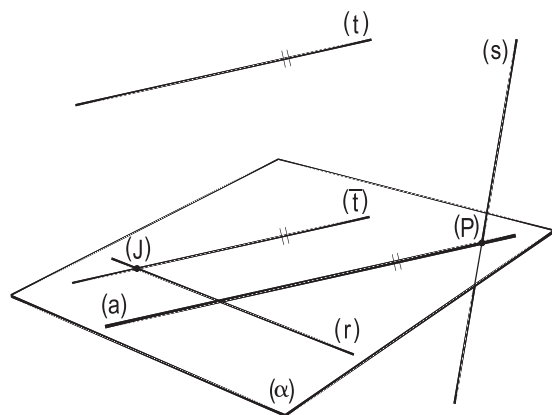


Figura 800

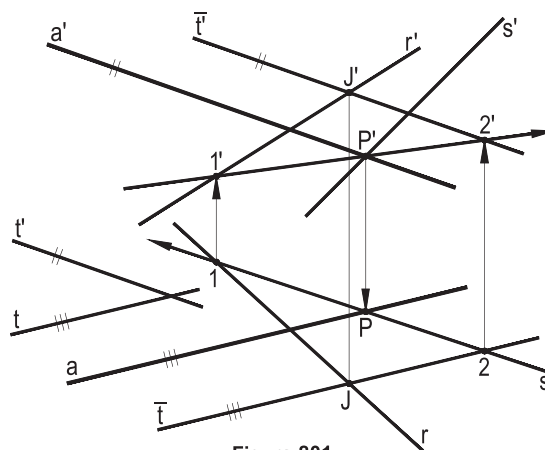
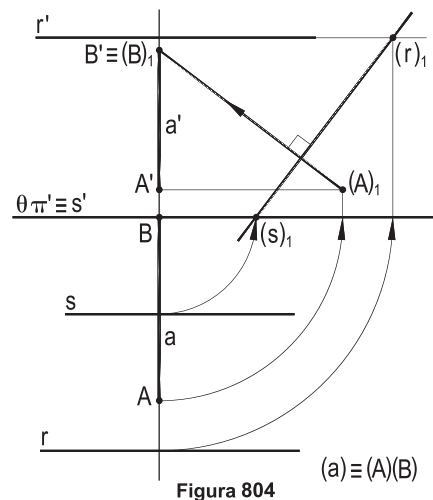
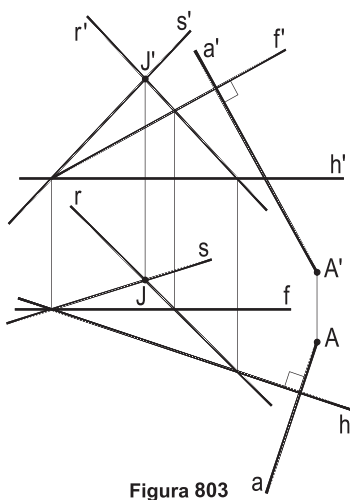
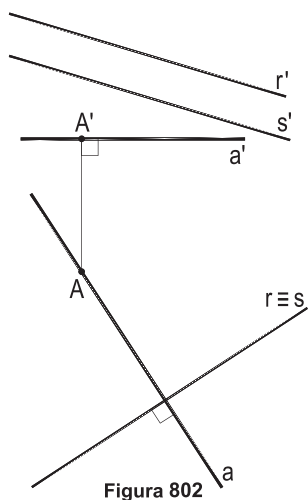


Figura 801

Observação: O ponto dado (J) teve o propósito de dar a direção das linhas de chamada.

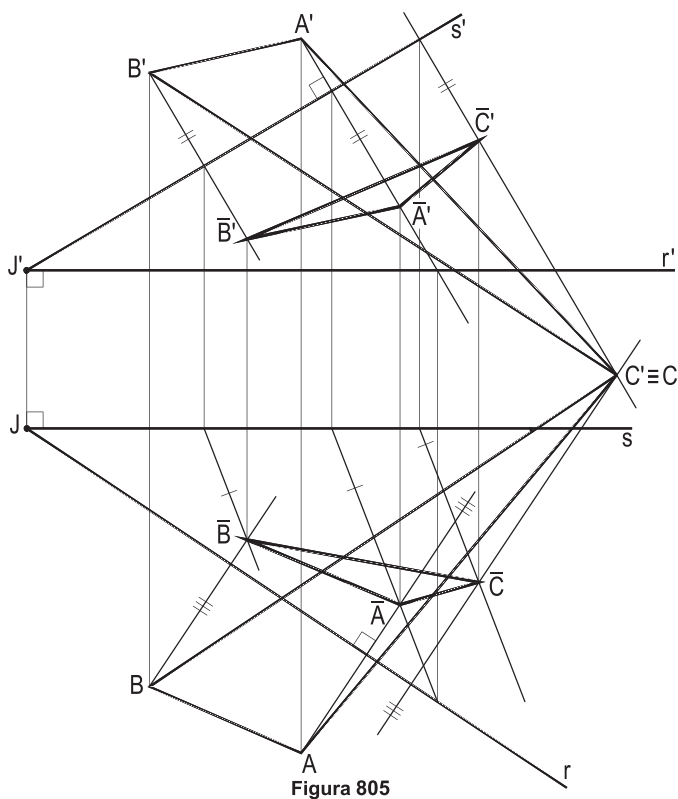
8 – Em todos os casos abaixo são dados, por suas projeções, o ponto (A) e as retas coplanares (r) e (s). Pede-se construir as projeções da reta (a), pertencente ao ponto (A) e perpendicular ao plano formado por (r) e (s).

No primeiro exemplo (Figura 802), é imediata a reta (a), por ser vertical o plano de (r) e (s), no segundo, é preciso construir duas principais (h) e (f) do plano de (r) e (s) (Figura 803) e, no terceiro, utilizar um plano horizontal ( $\theta$ ), que sirva de referencial e uma vista lateral, numa abscissa arbitrada (Figura 804).



9 – Dado, por suas projeções, o triângulo (A)(B)(C), pede-se construir as projeções mongeanas do triângulo  $(\bar{A})(\bar{B})(\bar{C})$ , projeção ortogonal do dado sobre o plano ( $\alpha$ ) formado pelas retas concorrentes (r) e (s), também dadas por suas projeções.

Simple a resolução, já que (r) e (s) são principais de ( $\alpha$ ), pelo traçado das perpendiculares por (A), (B) e (C) a ( $\alpha$ ) e pelas determinações de suas interseções com ( $\alpha$ ), que serão, respectivamente, os vértices  $(\bar{A})$ ,  $(\bar{B})$  e  $(\bar{C})$  do triângulo pedido (Figura 805).



10 – Dados, por suas projeções, o ponto (A), as retas concorrentes (r) e (s) e a reta (t), a elas reversas, pede-se construir as projeções da reta (a), pertencente ao ponto (A), ortogonal à reta (t) e paralela ao plano formado pelas retas (r) e (s).

Para ser ortogonal à reta (t), a reta (a), pedida, deve ser paralela a um plano, perpendicular a (t), formado por suas principais ( $\bar{h}$ ) e ( $\bar{f}$ ), pertencentes a um ponto arbitrado (P). E, para ser paralela ao plano das retas dadas, (a) deve ser paralela à interseção (M)(N) dos dois planos, o dado e aquele, das retas ( $\bar{h}$ ) e ( $\bar{f}$ ) (Figura 806), obtida com o auxílio dos planos horizontais ( $\theta_1$ ) e ( $\theta_2$ ).

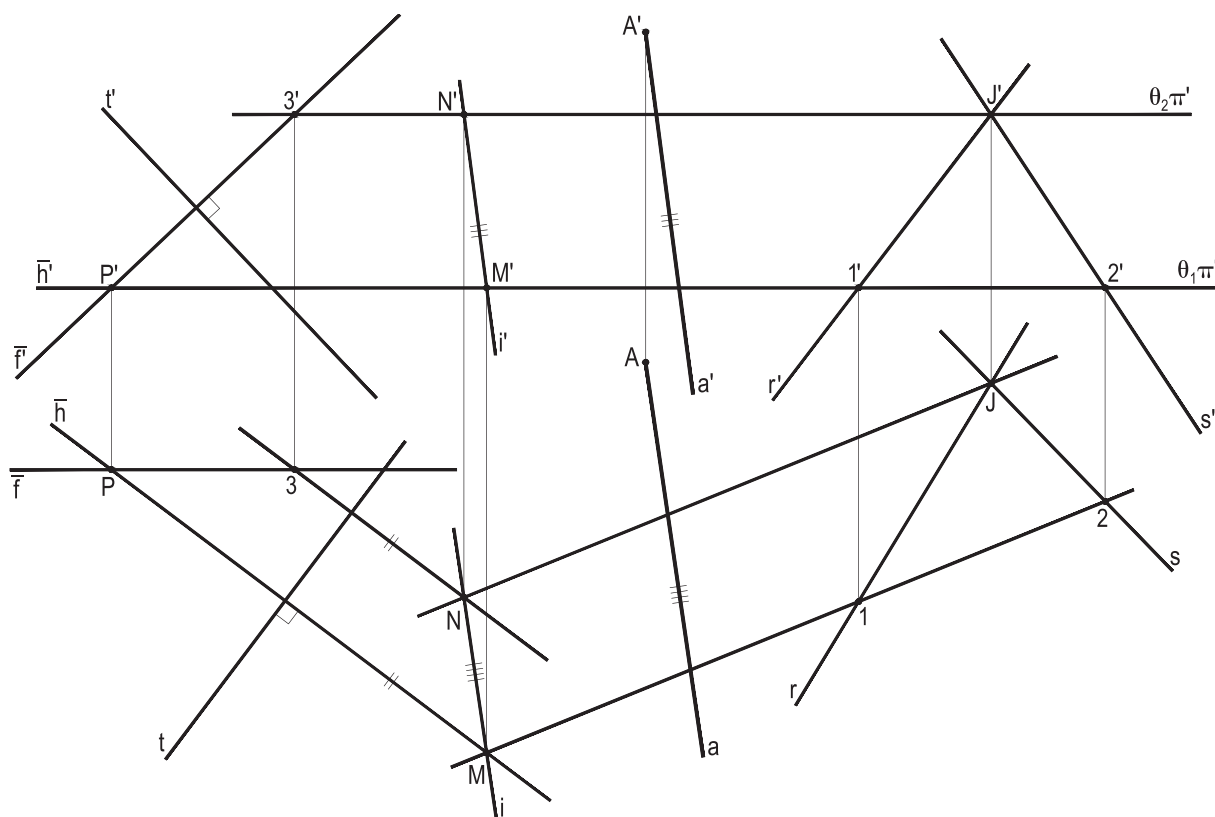


Figura 806

11 – Dadas, por suas principais (h) e (f), o plano ( $\alpha$ ) e, por suas projeções, o ponto (A) e a reta (r), além das projeções verticais dos pontos (B) e (C), pede-se construir as projeções do triângulo (A)(B)(C) pertencente ao plano ( $\gamma$ ), perpendicular a ( $\alpha$ ) e paralelo a (r).

O plano ( $\gamma$ ) há de possuir uma perpendicular (p) ao plano dado ( $\alpha$ ) e uma reta (s) paralela à reta dada (r). Assim, construído tal plano, basta marcar nele os pontos (B) e (C) para se obter as projeções do triângulo (A)(B)(C) pedido (Figura 807).

Foram utilizadas, para isso, as horizontais paralelas (1)(2), por B, e (C)(3).



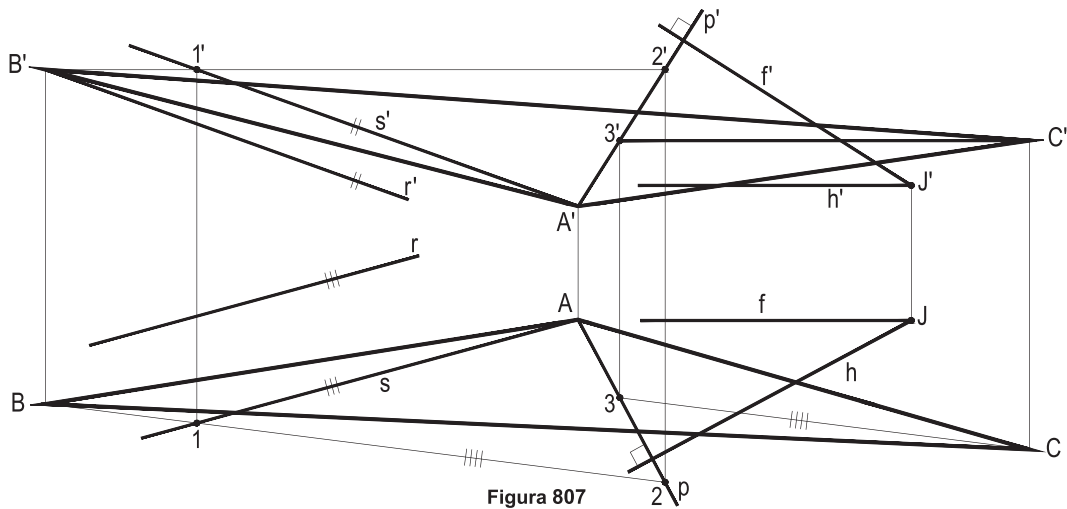


Figura 807

12 – Nos dois casos seguintes, são dados, por suas projeções, um ponto (A) e duas retas concorrentes (r) e (s). Pede-se apresentar, por duas retas, o plano ( $\alpha$ ), pertencente a (A), perpendicular ao plano formado por (r) e (s) e, na primeira hipótese, paralelo à linha de terra e, na segunda, contendo o ponto (B), também dado por suas projeções.

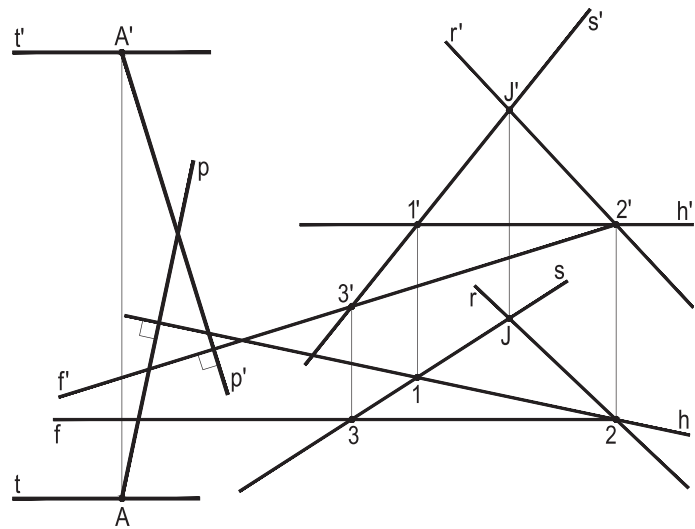


Figura 808

Em ambos os casos, a resolução passa pelo envio, pelo ponto (A), da perpendicular (p) ao plano das retas dadas (r) e (s), com o auxílio de duas principais (h) e (f) desse plano (Figuras 808 e 809).

No primeiro caso, o plano pedido ( $\alpha$ ) vem constituído por essa reta (p) e por uma segunda reta (t), uma fronto-horizontal (Figura 808), e, no segundo, por (p) e pela própria reta dada (A)(B) (Figura 809).

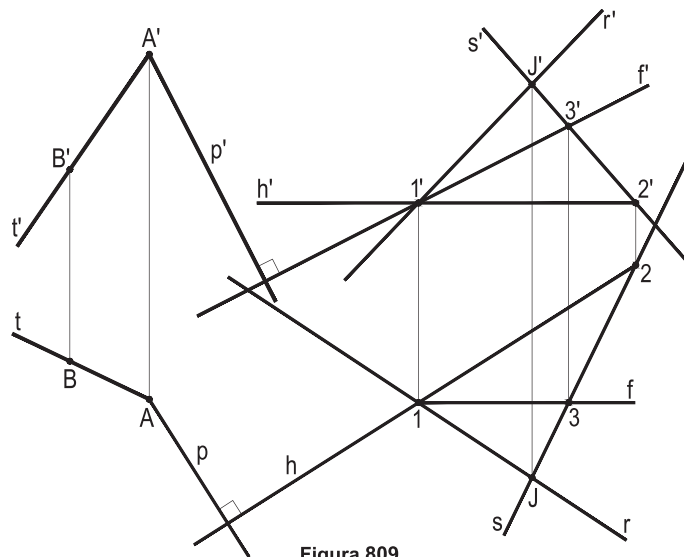


Figura 809

## 209 – Aplicações aos métodos descritivos

1 – Dados, por suas projeções, o ponto (A) e a reta vertical (v), pede-se girar (A) em torno de (v), até que (A) venha a pertencer ao plano das retas (r) e (s), dadas por suas projeções.

Imediatos os três primeiros casos (Figuras 810, 811 e 812), por ser projetante o plano dado. No quarto, foi utilizada uma reta auxiliar (P)(Q), formada por dois pontos arbitrados em (r) e em (s), proporcionando a fronto-horizontal (t), que resolve a questão (Figura 813) e, no último (Figura 814), a horizontal (h), com a mesma cota de (A).

Duas soluções, em todos os casos, para as posições dadas.

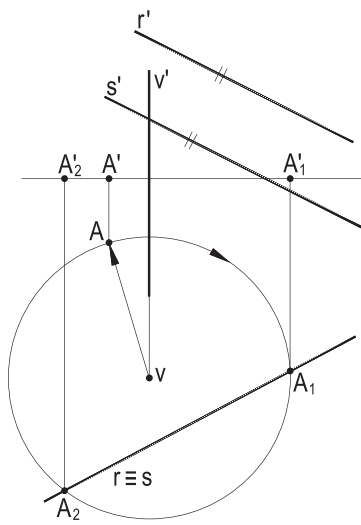


Figura 810

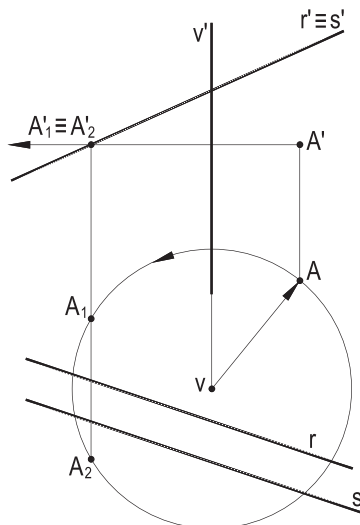


Figura 811

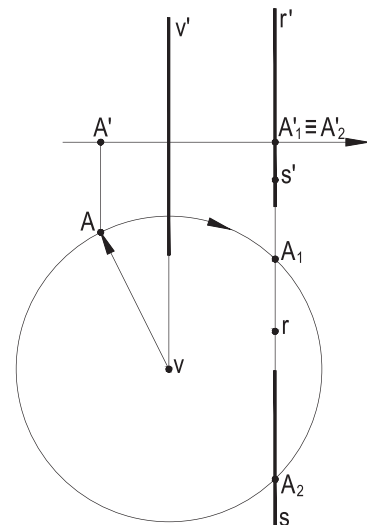


Figura 812

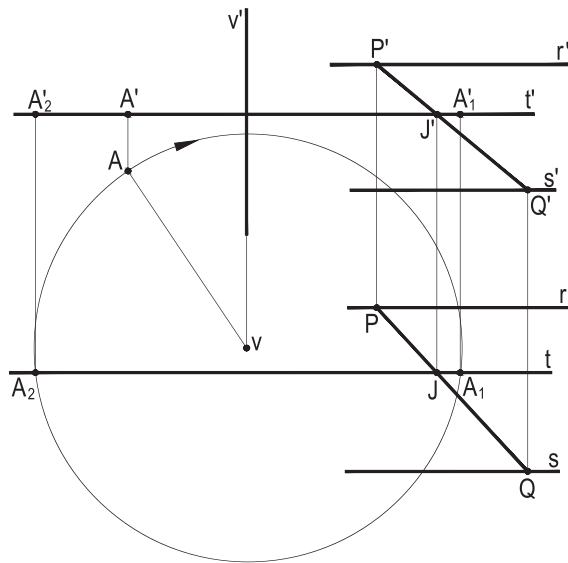


Figura 813

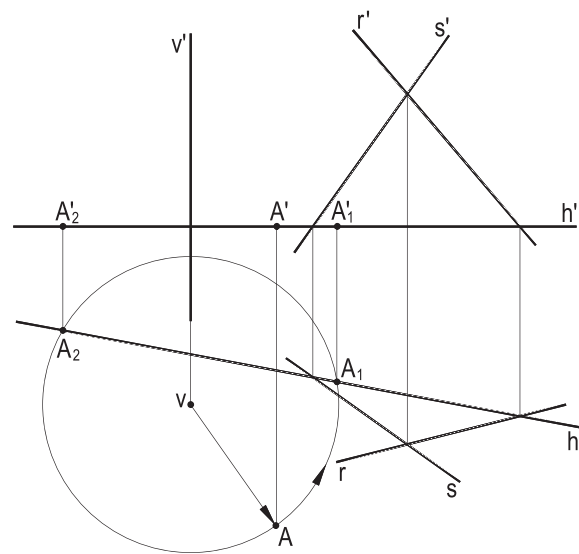


Figura 814

2 – Nos dois casos abaixo são dadas, por suas projeções, as retas (a) e (t) e as retas concorrentes (r) e (s), que definem o plano ( $\alpha$ ).

Pede-se girar (a) em torno de (t), até que ela venha a ficar paralela ao plano ( $\alpha$ ).

Como, em ambos os casos, (a) concorre com (t), no ponto (J), que permanece fixo durante a rotação em estudo, deve-se girar um outro ponto (A), arbitrado, de (a). O primeiro caso é simples, por ser projetante o plano ( $\alpha$ ) (Figura 815) e, no segundo, construído o plano ( $\alpha_1$ ), formado pelas retas ( $r_1$ ) e ( $s_1$ ), paralelas às dadas e conduzidas por (J), a rotação deve fazer o ponto (A) vir a pertencer a ( $\alpha_1$ ) (Figura 816).

Duas soluções em ambos os casos. Completadas ( $a_1$ ) e ( $a_2$ ), no primeiro e, no segundo, apenas uma, ( $a_1$ ), construída e a segunda indicada, pela projeção  $A_2$  (Figura 816).

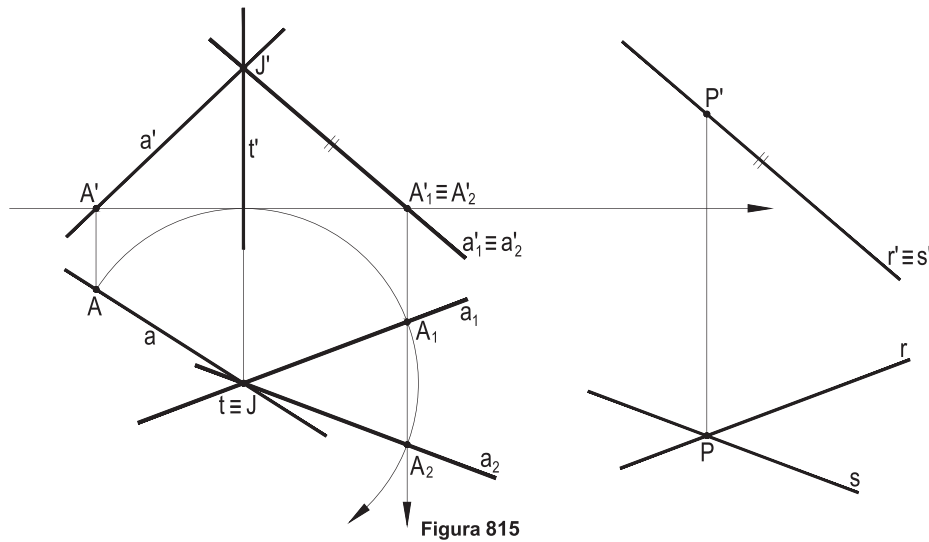


Figura 815

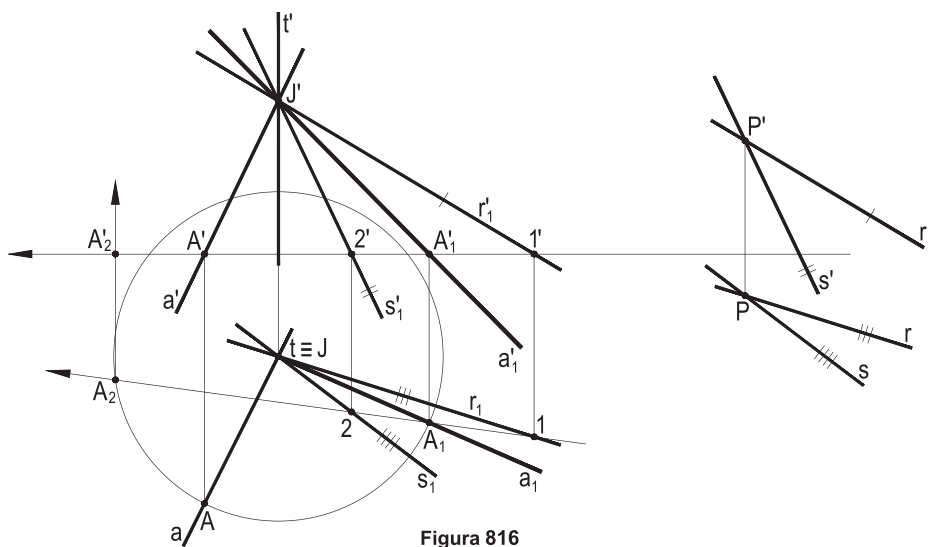
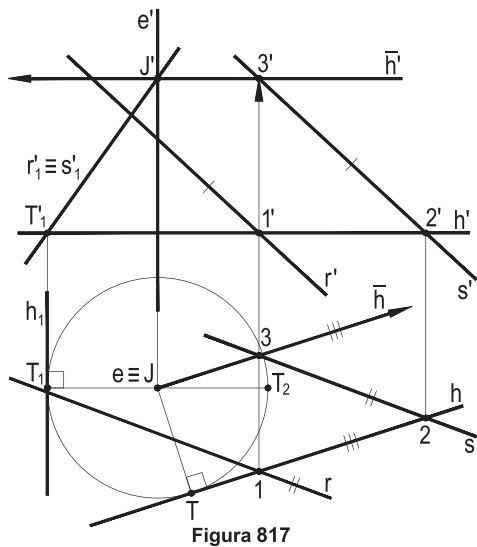


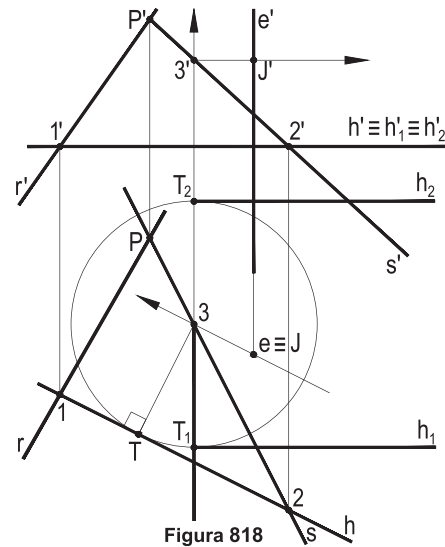
Figura 816

3 – Nos diversos casos abaixo são dadas, por suas projeções, as retas coplanares (r) e (s) e a reta (e), secante ao plano ( $\alpha$ ) das retas (r) e (s). Pede-se girar ( $\alpha$ ) em torno de (e), de modo a atender as condições dadas, caso a caso, em sua nova posição ( $\alpha_1$ ).

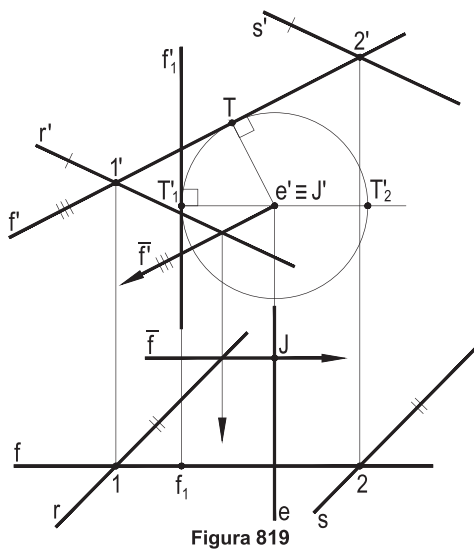
3.1 – ( $\alpha_1$ ) seja projetante



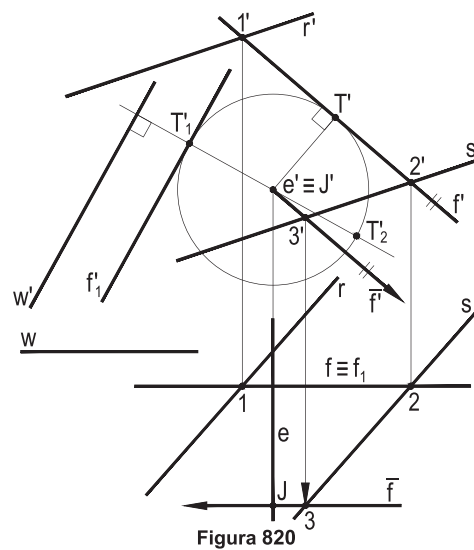
3.2 – ( $\alpha_1$ ) seja paralelo a ( $\pi' \pi$ )



3.3 – ( $\alpha_1$ ) seja vertical



3.4 – ( $\alpha_1$ ) seja paralelo à reta (w), dada



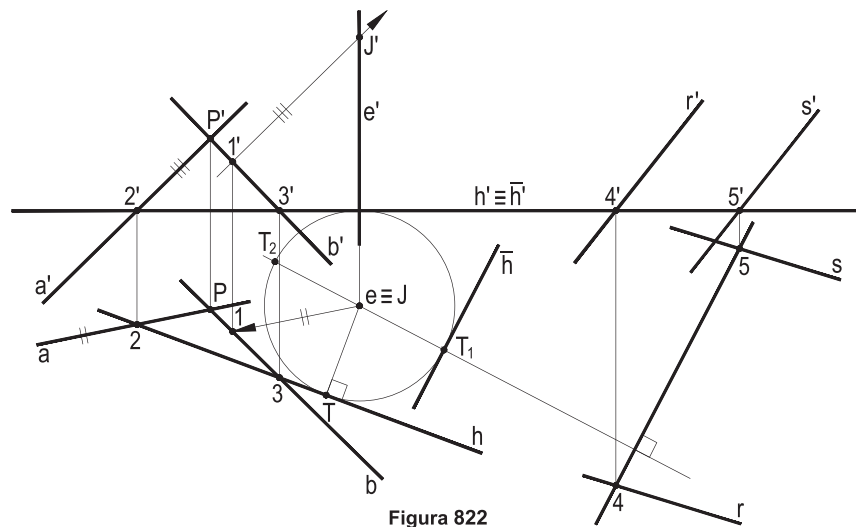
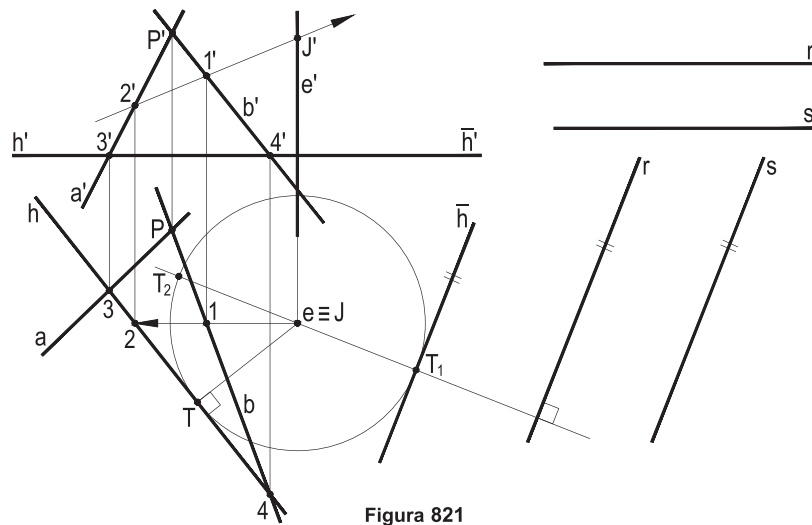
No primeiro exemplo (Figura 817), girou-se uma horizontal arbitrada (h) do plano dado até ficar de topo e, no segundo (Figura 818), até vir a ser fronto-horizontal. Nos terceiro e quarto casos, uma frontal (f) do plano dado foi girada até, respectivamente, vir a ser vertical (Figura 819) ou paralela à frontal dada (w) (Figura 820). A nova posição ( $\alpha_1$ ) do plano dado sempre contém o ponto fixo (J). O plano ( $\alpha_1$ ) é sempre o formado pelo traço (J) de (e) em ( $\alpha$ ) e pela reta girada, em sua nova posição. Em todos os casos, para os dados, há uma segunda solução, indicada pelo ponto ( $T_2$ ).

4 – Nos dois casos abaixo, pede-se girar o plano ( $\alpha$ ), formado pelas retas (a) e (b), dadas por suas projeções, em torno do eixo vertical (e), até que ( $\alpha$ ) venha a secionar o plano ( $\beta$ ), das retas (r) e (s), segundo uma reta horizontal. São dadas, também, as projeções de (e), (r) e (s).

Para secionar o plano ( $\beta$ ) segundo uma horizontal, em sua nova posição ( $\alpha_1$ ), o plano dado deve possuir horizontais paralelas a horizontais de ( $\beta$ ).

No primeiro caso (Figura 821), a resolução é simples, por serem (r) e (s) horizontais e, no segundo (Figura 822), é preciso marcar uma horizontal (t) em ( $\beta$ ) e girar uma horizontal de ( $\alpha$ ) de mesma cota que (h), até que ela fique paralela a (t).

Nos dois casos, ( $\alpha_1$ ) fica definido pelo ponto (J), traço de (e) em ( $\alpha$ ), e pela horizontal ( $\bar{h}$ ), paralela às horizontais de ( $\beta$ ), com duas soluções.



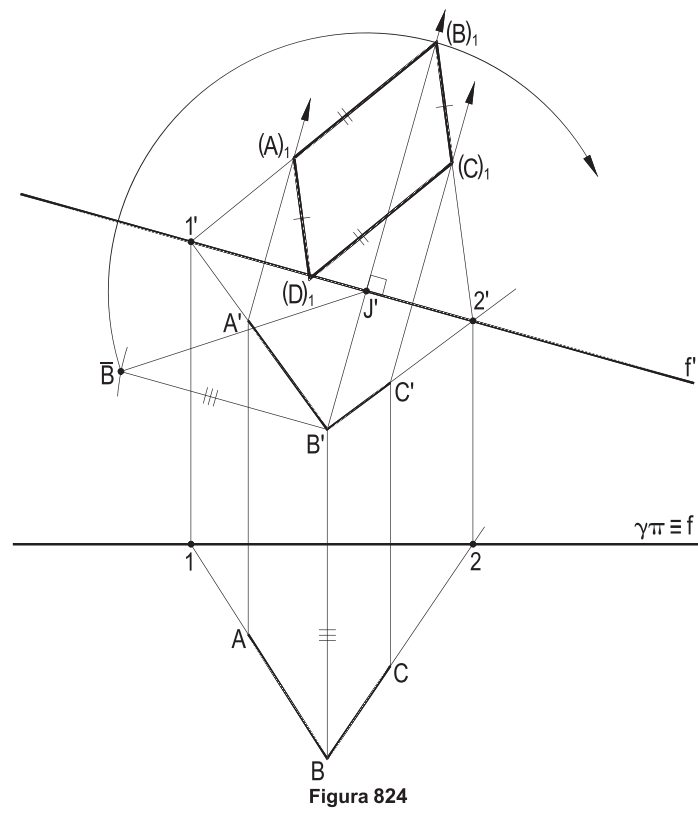
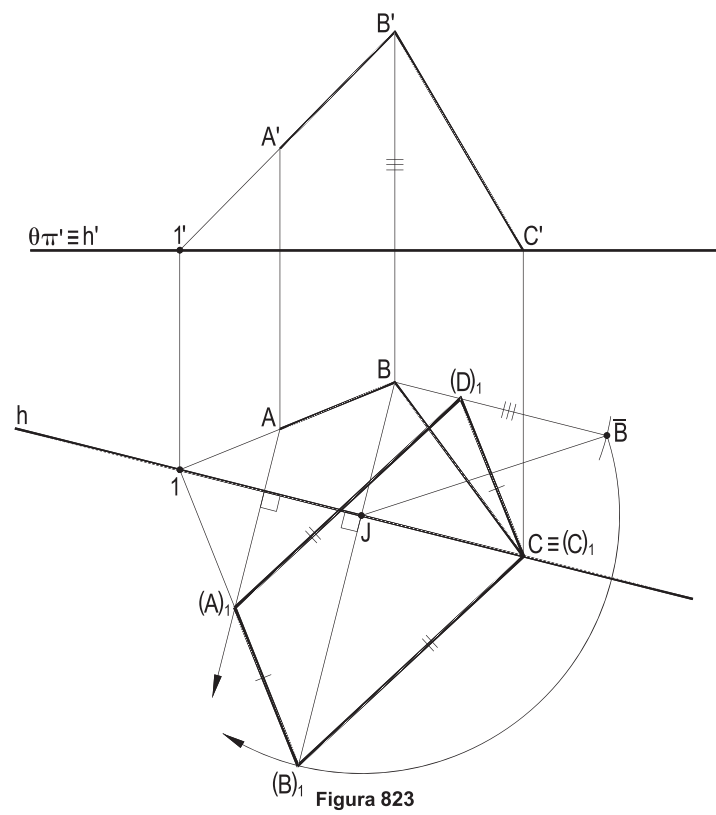
5 – Para os dois casos abaixo, pede-se construir a V.G. do paralelogramo (A)(B)(C)(D), dado pelas projeções dos vértices (A), (B) e (C).

Em ambos os casos, o rebatimento do plano do paralelogramo sobre um plano auxiliar resolve o problema.

Um plano horizontal ( $\theta$ ) (Figura 823) ou um plano frontal ( $\gamma$ ) (Figura 824), com a utilização dos triângulos de rebatimento  $B\bar{B}J$  (Figura 823) e  $B'\bar{B}'J'$  (Figura 824) para o vértice (B), proporcionam a V.G.  $(A)_1(B)_1(C)_1(D)_1$  pedida, obtida, mesmo sem ter sido necessário completar as projeções do paralelogramo (A)(B)(C)(D).

No primeiro exemplo, o plano horizontal auxiliar ( $\theta$ ) foi conduzido pelo vértice (C), de menor cota, aproveitando-se o ponto (1), traço da reta (A)(B) com  $\theta$  (Figura 823), e, no segundo, para deixar a V.G. com maior destaque, o plano auxiliar ( $\gamma$ ) foi escolhido mais distante dos três vértices dados (Figura 824).

Rebatidos os três vértices dados (A), (B) e (C), o quarto,  $(D)_1$ , foi obtido com paralelas, em ambos os casos, entregando a V.G.  $(A)_1(B)_1(C)_1(D)_1$  pedida (Figuras 823 e 824).



6 – Do triângulo equilátero (A)(B)(C) são dadas as projeções do vértice (A), a projeção horizontal J do traço (J) da reta suporte do lado (B)(C) com o plano horizontal que passa por (A) e a projeção horizontal B do vértice (B).

Pede-se construir a V.G. e as projeções do triângulo.

Utilizando-se o plano horizontal de (A) e, então, a charneira h, formada pelos pontos (A) e (J), o arco capaz de  $60^\circ$  para AJ e a perpendicular por B a h proporcionam, por corte, o rebatimento  $(B)_1$  do vértice (B) e, então, a V.G.  $(A)_1(B)_1(C)_1$  do triângulo, que é alçado com o auxílio do triângulo de rebatimento de (B), que dá a cota z de (B) em relação ao plano horizontal de (A) (Figura 825).

Há uma segunda solução, não incluída, correspondente à marcação da cota z no sentido oposto do utilizado.

7 – Determinar a V.G. do triângulo órtico do triângulo (A)(B)(C), dado por suas projeções.

O rebatimento do plano do triângulo (A)(B)(C), sobre o plano horizontal ( $\theta$ ), que passa por seu vértice (B), com o auxílio do triângulo de rebatimento do vértice (A), proporciona a V.G. do triângulo dado e, com os traçados de suas alturas, a V.G. de seu triângulo órtico  $(\bar{A})(\bar{B})(\bar{C})$ , formado pelos pés de suas três alturas (Figura 826).

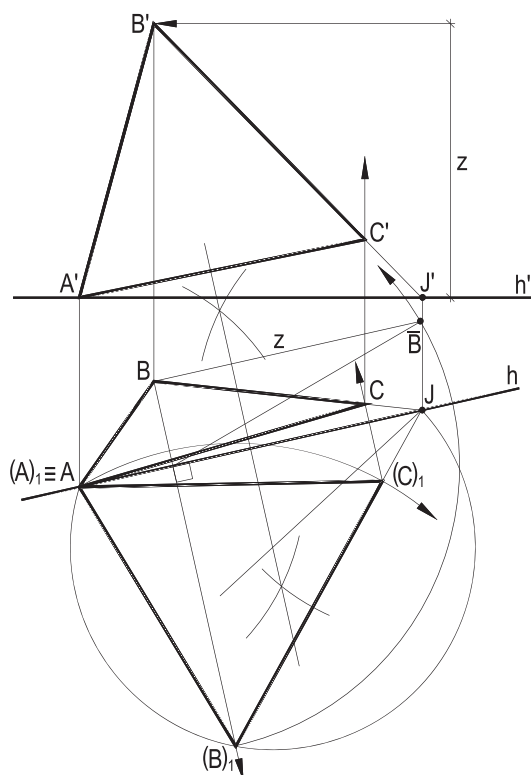


Figura 825

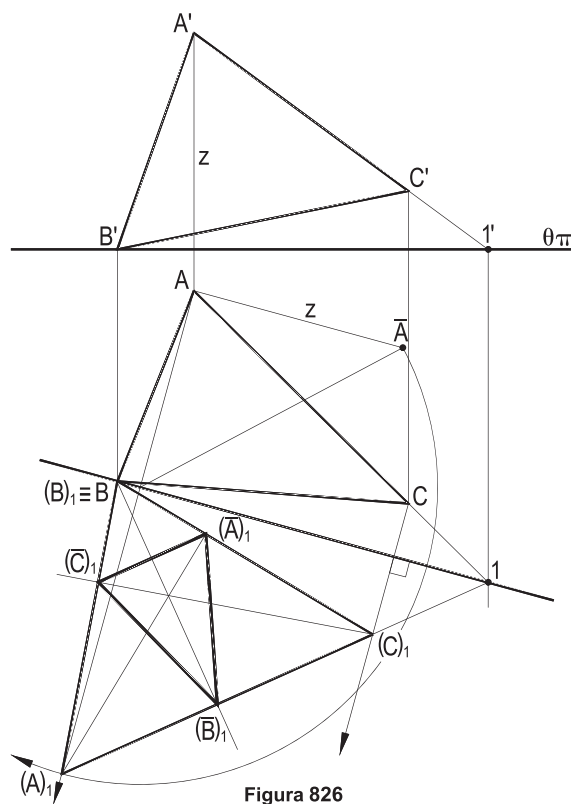


Figura 826

8 – Construir as projeções do pentágono (A)(B)(C)(D)(E), sabendo que seus vértices (A), (C), (D) e (E) formam um quadrado. São dadas as projeções do vértice (A) e do lado fronto-horizontal (B)(C).

Com auxílio do triângulo de rebatimento  $A\bar{A}J$ , consegue-se o rebatimento  $(A)_1$  do vértice (A) sobre o plano horizontal ( $\theta$ ) do lado (B)(C) e, com isso, construir, em V.G., o quadrado  $(A)_1(C)_1(D)_1(E)_1$  e, então, o pentágono pedido, que é alçado com a reta (A)(E) e com sua paralela (C)(D) (Figura 827).

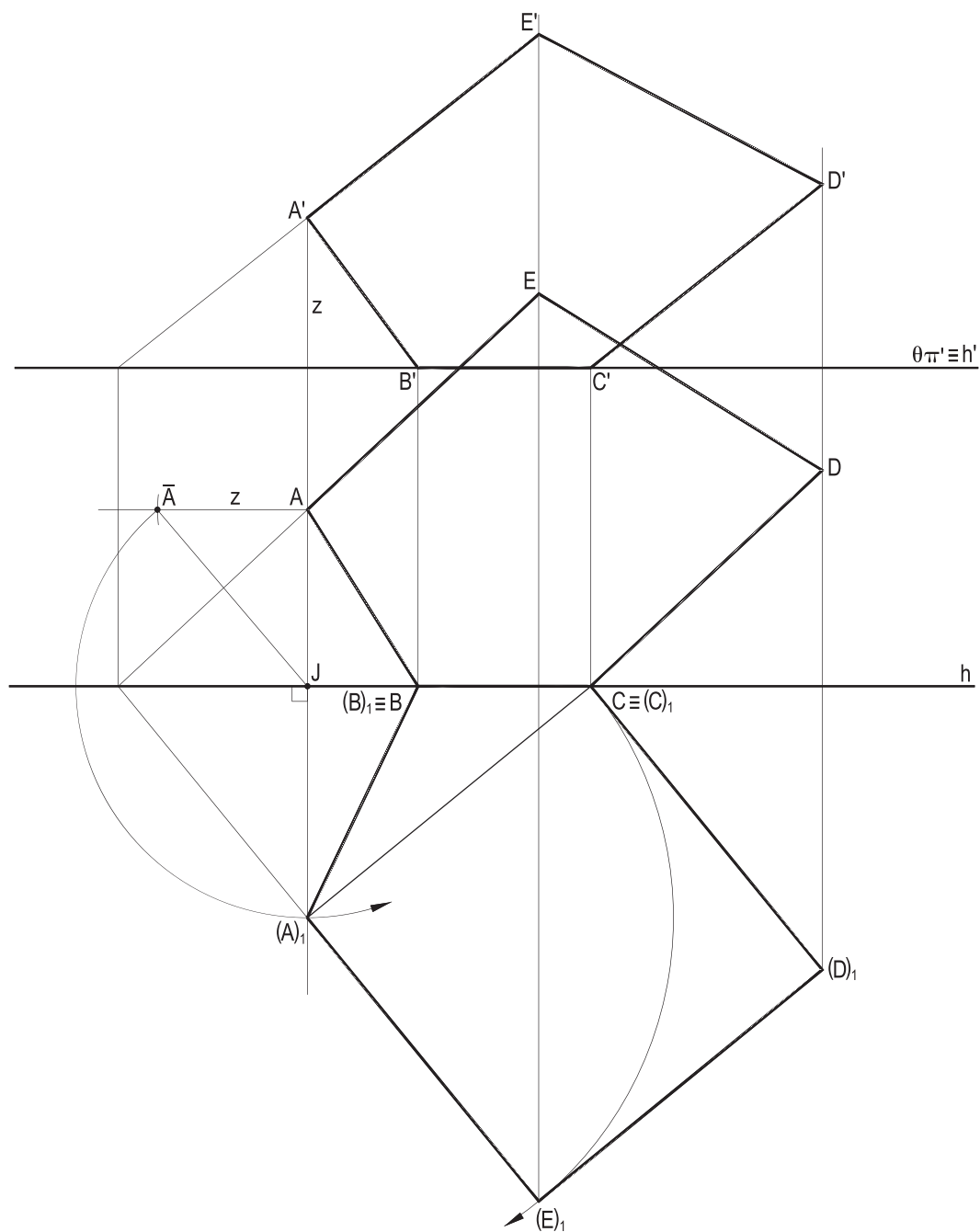


Figura 827



9 – Dados, por suas projeções, o ponto (A) e a reta (r), pede-se construir as projeções do triângulo equilátero (A)(B)(C), cujo lado (B)(C) pertença a (r), (B) à esquerda de (C).

Rebatido o plano do triângulo sobre um plano horizontal ( $\theta$ ), arbitrado, com o auxílio da paralela (s) a (r) e do triângulo de rebatimento  $\overline{AAJ}$ , consegue-se construir, em V.G., o triângulo equilátero  $(A)_1(B)_1(C)_1$ , facilmente alçado com a utilização daquelas paralelas (Figura 828).

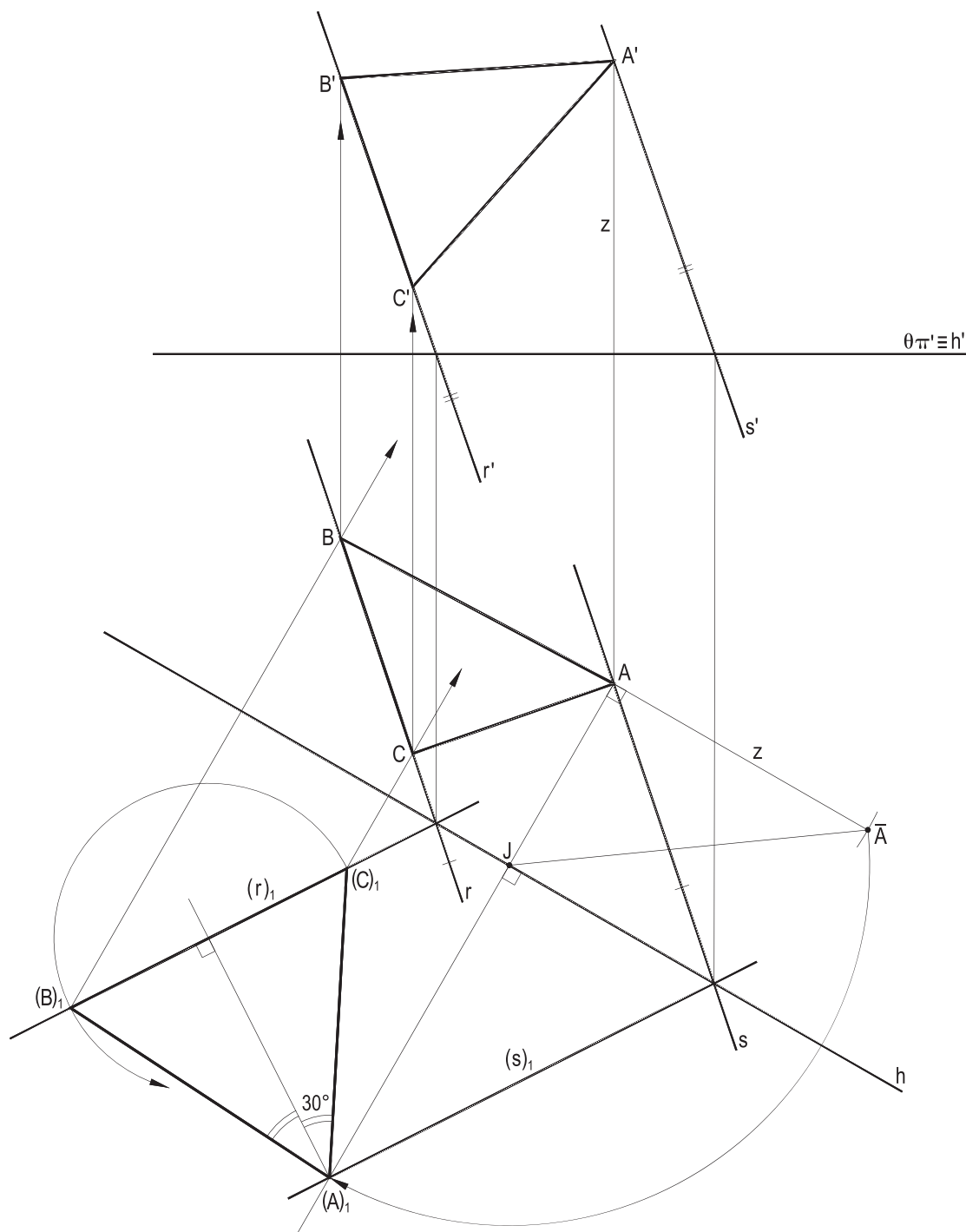


Figura 828

10 – Construir as projeções do hexágono regular (A)(B)(C)(D)(E)(F), de centro (O), sabendo que o lado (A)(B) pertence à reta (r), (A) à esquerda de (B).

São dadas as projeções da reta (r) e do ponto (O).

O procedimento mais simples para resolver a questão consiste em rebater o plano formado por (r) e (O), para operar a construção em V.G. do hexágono. No caso presente, tal rebatimento é efetuado sobre um plano horizontal ( $\theta$ ) arbitrado e o alçamento com o auxílio das paralelas (r), (s) e (t) (Figura 829).

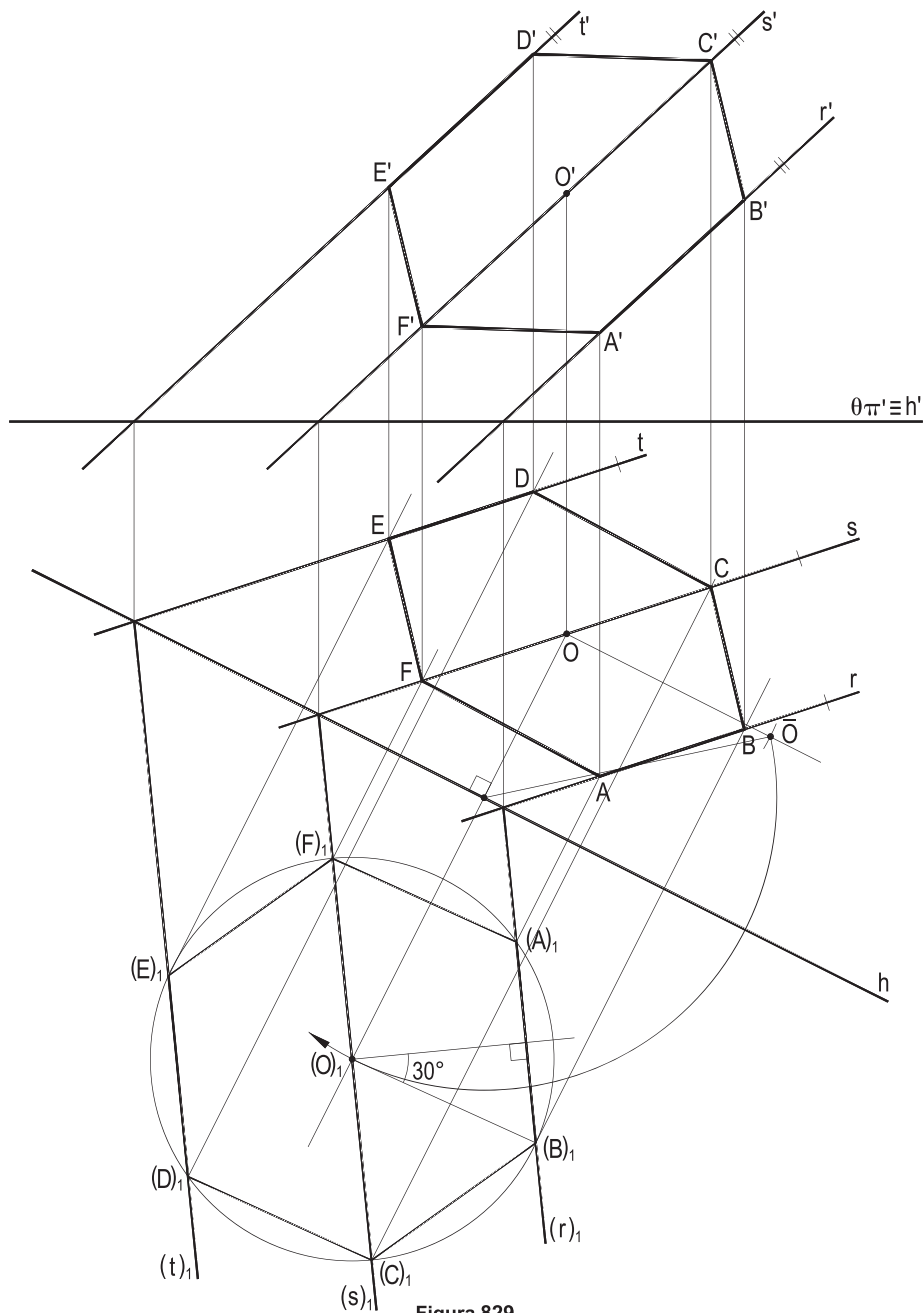


Figura 829

## 210 – Aplicações aos problemas métricos

1 – Para os diversos casos abaixo, em que são dadas as projeções de dois pontos (A) e (B), pede-se obter a V.G.  $d$  da distância entre eles.

Em ambos os casos, uma simples rotação em torno da vertical que contém (B) torna o segmento (A)(B) frontal, trazendo a V.G. pedida  $d$  em sua nova projeção vertical (Figuras 830 e 831).

2 – Para os diversos casos abaixo são dados, por suas projeções, o ponto (A) e a reta ( $r$ ).

Pede-se, em todos, determinar a V.G.  $d$  da distância de (A) a ( $r$ ).

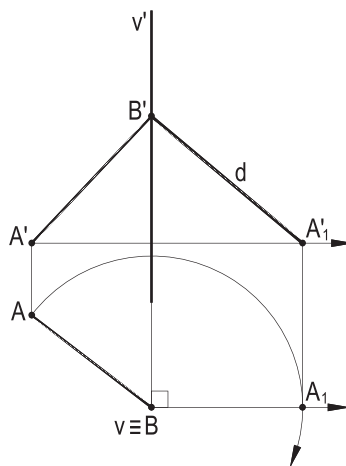


Figura 830

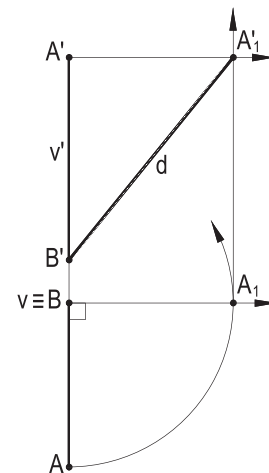


Figura 831

Quando a reta dada ( $r$ ) é vertical (Figura 832) ou de topo, a solução é imediata, por ser a perpendicular (A)(B) de (A) a ( $r$ ) horizontal ou frontal. Em todos os casos em que ( $r$ ) não seja uma reta qualquer, a perpendicular (A)(B) a ( $r$ ) é de pronta construção, recaindo-se nas situações anteriores (Figuras 833 e 834).

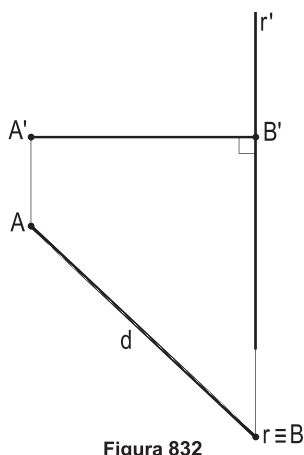


Figura 832

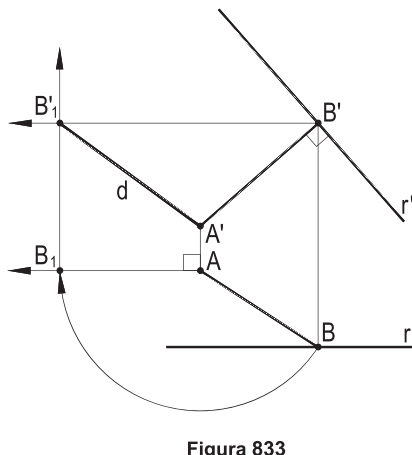


Figura 833

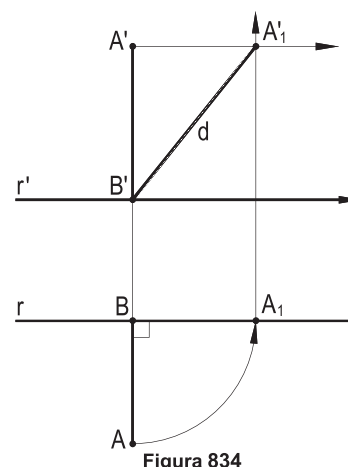


Figura 834

Quando, enfim, a reta dada ( $r$ ) é qualquer, para obter o ponto (B), pé da perpendicular de (A) a ( $r$ ), ou se constrói o plano ( $\gamma$ ), por (A) e perpendicular a ( $r$ ), para determinar o traço (B) de ( $\gamma$ ) com ( $r$ ) (Figura 835) e, então, a V.G.  $d$  pedida, ou, simplesmente, rebate-se o plano formado por (A) e ( $r$ ) sobre um plano horizontal ( $\theta$ ), arbitrado (Figura 836), obtendo-se, assim a V.G. da distância  $d$ .

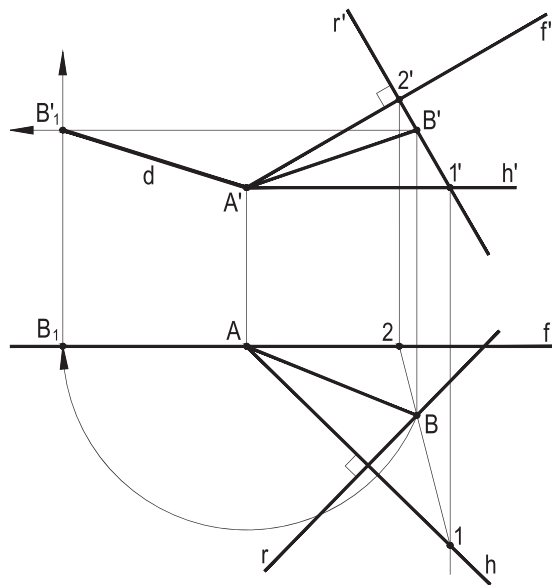


Figura 835

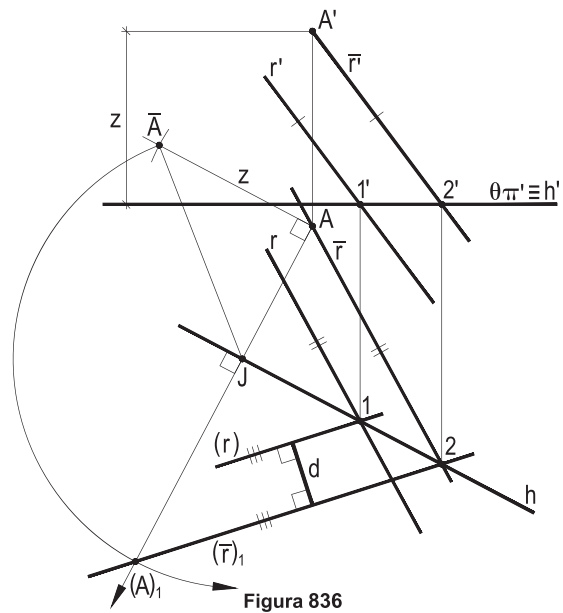


Figura 836

Observe-se que a determinação da V.G. da distância entre duas retas paralelas, dadas por suas projeções, recai sempre nos casos aqui estudados, bastando, para resolvê-los, escolher um ponto qualquer de uma das retas e buscar sua distância à segunda reta.

3 – Para os casos seguintes, pede-se determinar a V.G. da distância  $d$  do ponto  $(A)$  ao plano das retas  $(r)$  e  $(s)$ , todos dados por suas projeções.

Quando o plano das retas dadas é projetante (Figura 837), a solução é imediata, já que a perpendicular  $(A)(B)$  a ele tem que ser paralela ao plano de projeção ao qual o plano dado é perpendicular; em caso contrário, deve-se traçar a perpendicular por  $(A)$  ao plano das retas  $(r)$  e  $(s)$ , obter seu traço  $(B)$  com esse plano e buscar a V.G.  $d$  do segmento  $(A)(B)$  (Figura 838).

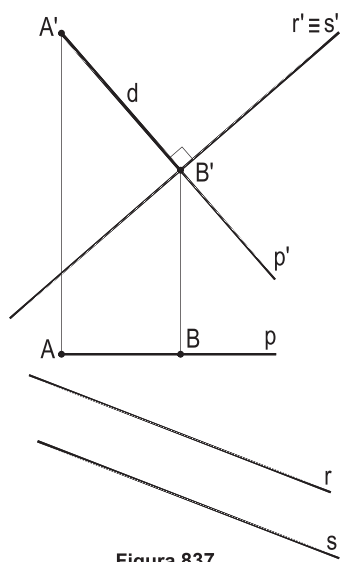


Figura 837

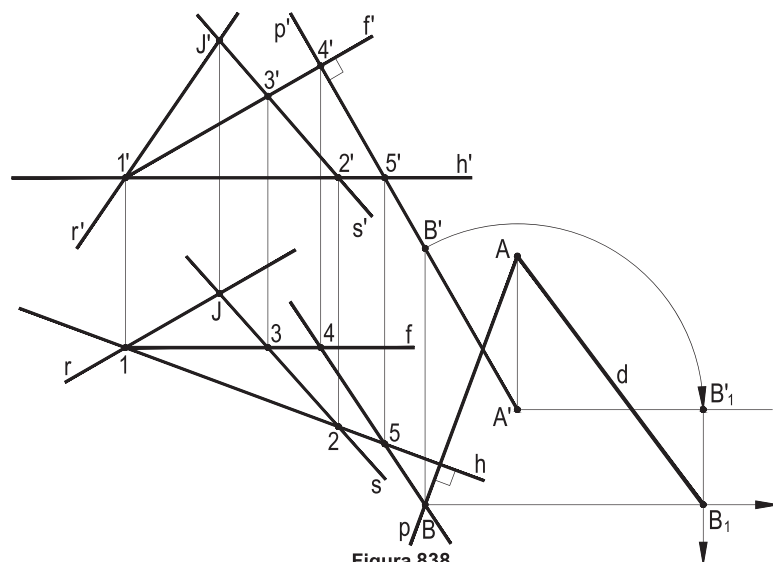


Figura 838

4 – Em todos os casos abaixo, são dados dois planos paralelos ( $\alpha$ ) e ( $\beta$ ), o primeiro pelas projeções de suas retas ( $r$ ) e ( $s$ ) e o segundo pertencente a um ponto ( $A$ ), também dado por suas projeções.

Pede-se determinar a V.G.  $d$  da distância entre ( $\alpha$ ) e ( $\beta$ ).

O problema é uma variante do anterior, visto que a distância de ( $A$ ) a ( $\alpha$ ) é a própria distância  $d$  procurada, recaindo-se, assim, nas construções antes apresentadas, nem sendo necessário construir o plano ( $\beta$ ). As Figuras 839, 840 e 841 são exemplos disso.

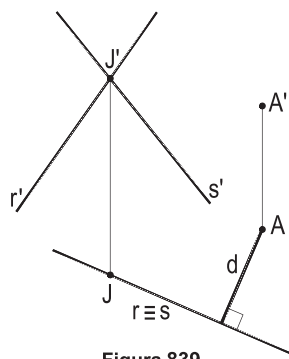


Figura 839

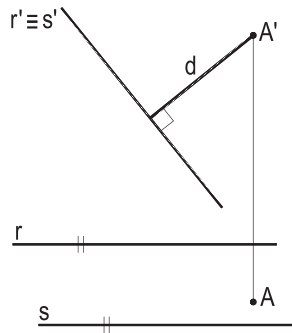


Figura 840

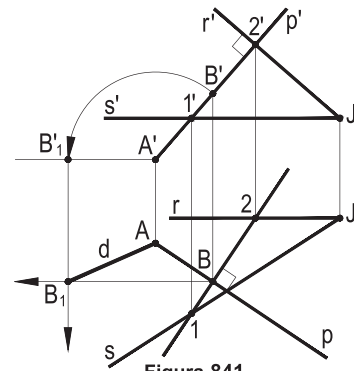


Figura 841

5 – Determinar a verdadeira grandeza da distância  $d$  entre duas retas reversas ( $r$ ) e ( $s$ ), dadas por suas projeções.

Sabe-se que a distância  $d$  entre duas retas reversas ( $r$ ) e ( $s$ ) é a própria distância existente entre o par de planos paralelos ( $\alpha$ ) e ( $\beta$ ) que contêm cada uma delas (Figura 842), ou, o que é o mesmo, a distância de um ponto ( $A$ ) qualquer de uma delas ao plano ( $\beta$ ) formado pela segunda e por uma paralela à primeira, mediante uma rotação (Figuras 842 e 843).

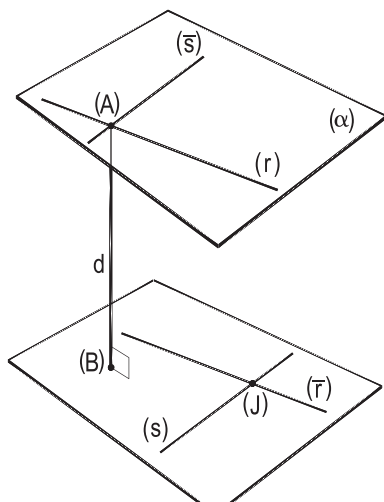


Figura 842

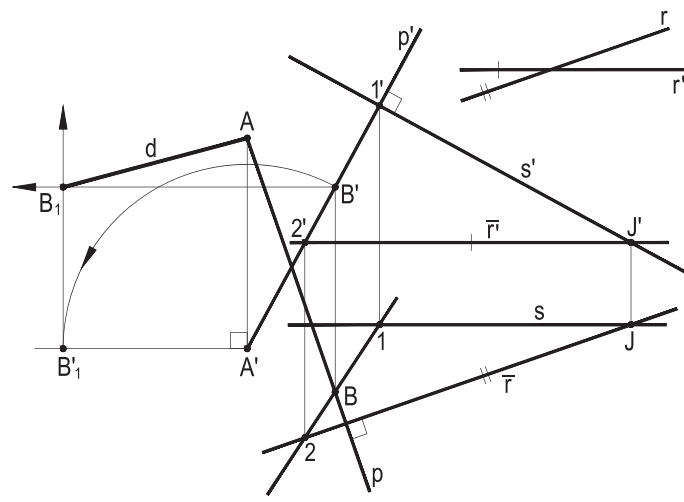


Figura 843

6 – Em todos os casos abaixo, pede-se determinar as verdadeiras grandezas dos ângulos  $\alpha$  e  $\beta$ , que a reta (A)(B), dada por suas projeções, forma, respectivamente, com  $(\pi)$  e com  $(\pi')$ .

Rotações que tornem (A)(B) frontal ou horizontal (Figuras 844 e 846) trazem os ângulos pedidos, enquanto que, no exemplo da reta de perfil (Figura 845), uma rotação basta, por terem que ser complementares os dois ângulos procurados.

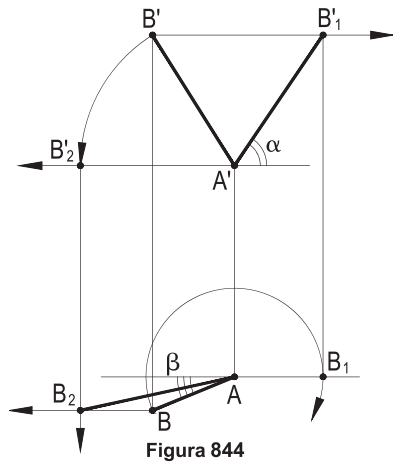


Figura 844

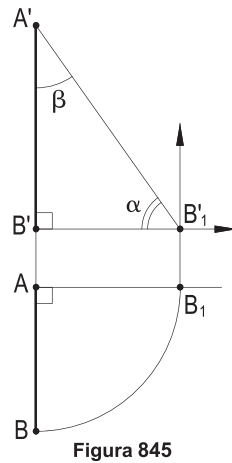


Figura 845

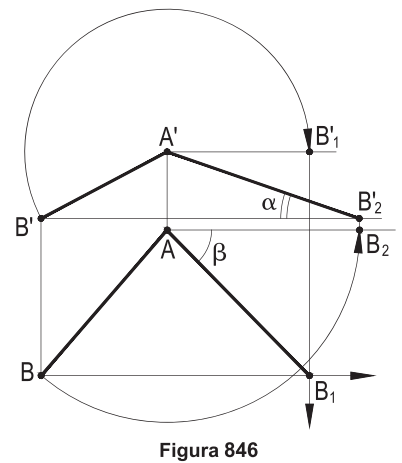


Figura 846

7 – Nos dois casos abaixo, um plano  $(\theta)$  é dado pelas projeções de duas retas concorrentes  $(r)$  e  $(s)$ . Pede-se determinar as verdadeiras grandezas dos ângulos  $\alpha$  e  $\beta$ , que  $(\theta)$  forma, respectivamente, com  $(\pi)$  e com  $(\pi')$ .

Uma rotação que leve uma horizontal  $(h)$ , arbitrada, de  $(\theta)$ , a ser de topo (Figura 847), faz  $(\theta)$  ser de topo e entrega a V.G. do ângulo  $\hat{\alpha}$ . E outra, que faça uma frontal  $(f)$  de  $(\theta)$  vir a ser vertical, proporciona a V.G. do ângulo  $\beta$ , que  $(\theta)$  forma com  $(\pi')$  (Figura 848).

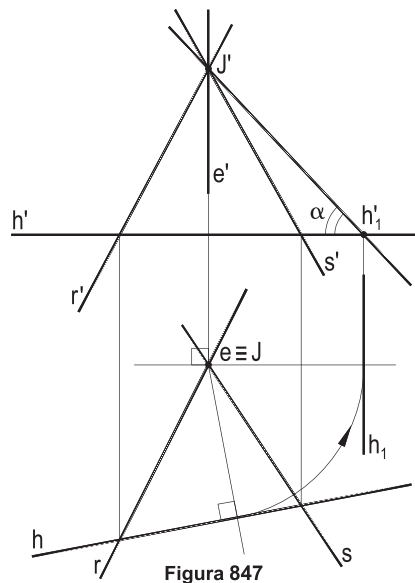


Figura 847

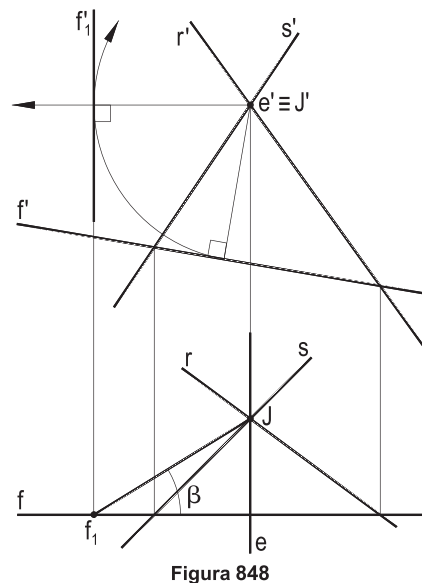
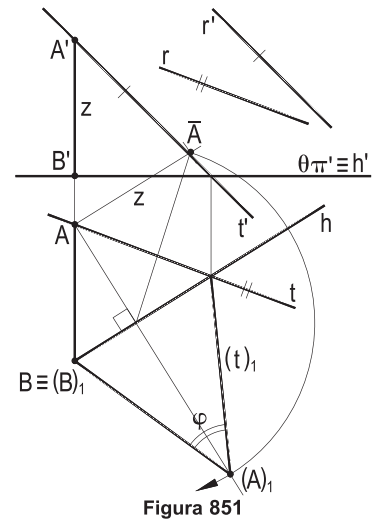
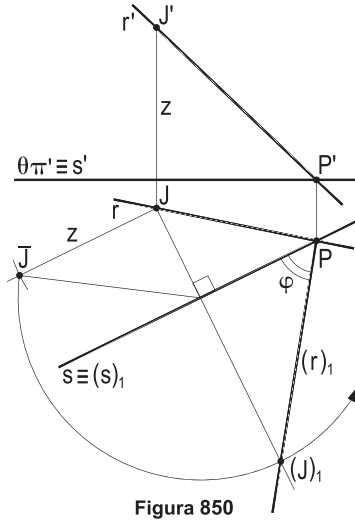
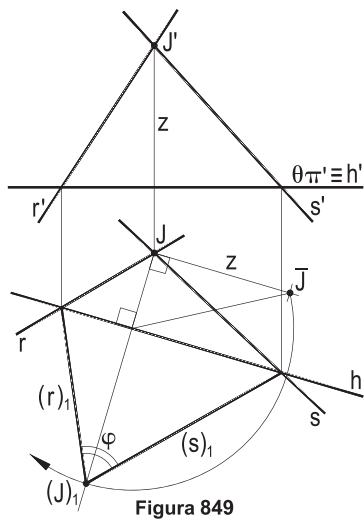


Figura 848

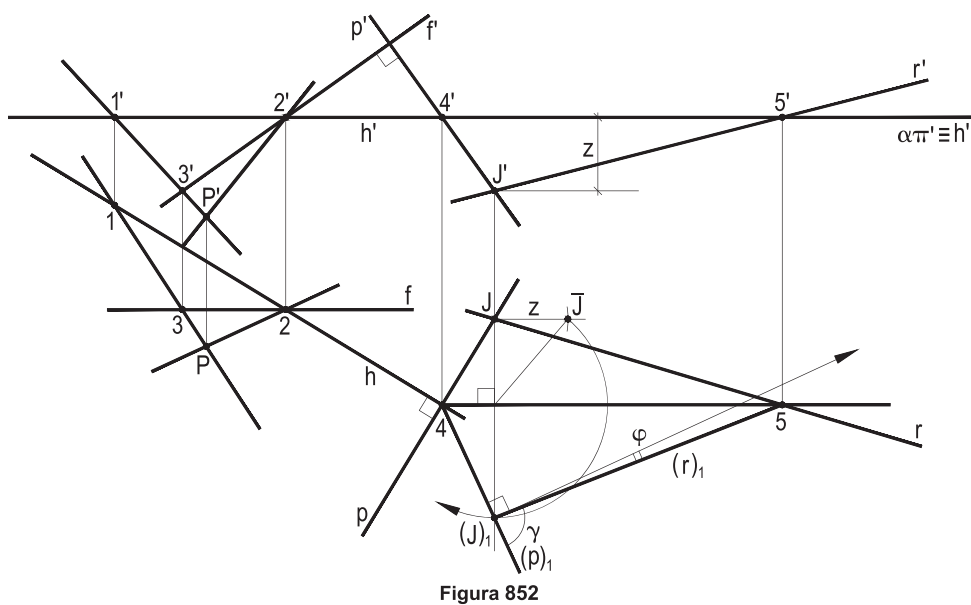
8 – Nos diversos casos abaixo, são dadas, por suas projeções, duas retas concorrentes (r) e (s) ou reversas (r) e (A)(B). Pede-se determinar a V.G. do ângulo  $\varphi$ , por elas formado.

É com o rebatimento do plano formado por (r) e por (s), sobre um plano ( $\theta$ ) auxiliar (Figuras 849 e 850), ou pelo plano formado por (A)(B) e por uma paralela (t) a (r), conduzida por (A) (Figura 851), que se obtém a V.G. do ângulo  $\varphi$ .



9 – Determinação da V.G. do ângulo  $\varphi$  que uma reta (r) forma com o plano ( $\theta$ ), definido por duas retas concorrentes (a) e (b), todas as três retas dadas por suas projeções.

Traçada a perpendicular (p) ao plano ( $\theta$ ), por um ponto (J) qualquer de (r), o rebatimento do plano formado por (r) e (p) sobre um plano auxiliar ( $\alpha$ ) traz a V.G. do ângulo  $\gamma$  dessas retas e seu complemento  $\varphi$  responde à questão (Figura 852) (*Geometria Descritiva*, número 138).



10 – Determinação da V.G. do ângulo  $\varphi$ , formado pelos planos  $(\alpha)$  e  $(\beta)$ , dados, respectivamente, pelas retas concorrentes  $(r)$  e  $(s)$  e pelas paralelas  $(a)$  e  $(b)$ .

Basta traçar, por um ponto  $(J)$  arbitrado, as perpendiculares  $(p)$  e  $(q)$  a cada um dos planos (Figura 853) e, rebatendo o plano formado por  $(p)$  e  $(q)$ , obter a V.G. procurada, já que o ângulo dessas retas repete o dos dois planos dados (*Geometria Descritiva*, número 140).

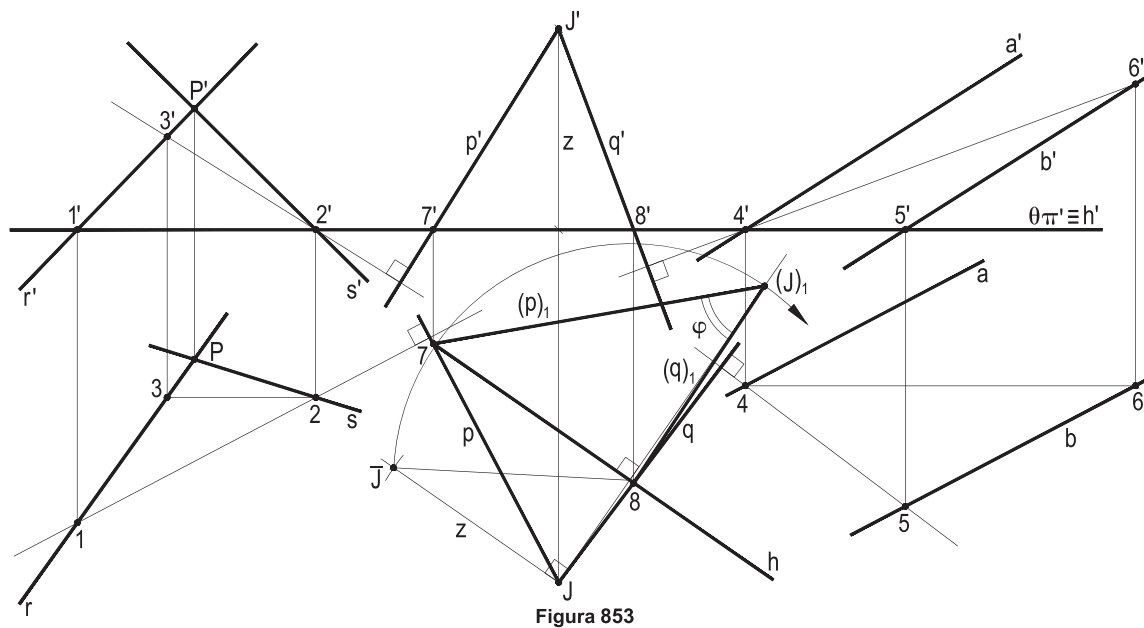


Figura 853

Quando, em situações particulares, os planos  $(\alpha)$  e  $(\beta)$  são dados por suas principais (Figura 854), a écura fica muito simplificada, por serem imediatos os traçados das perpendiculares  $(p)$  e  $(q)$  aos dois planos.

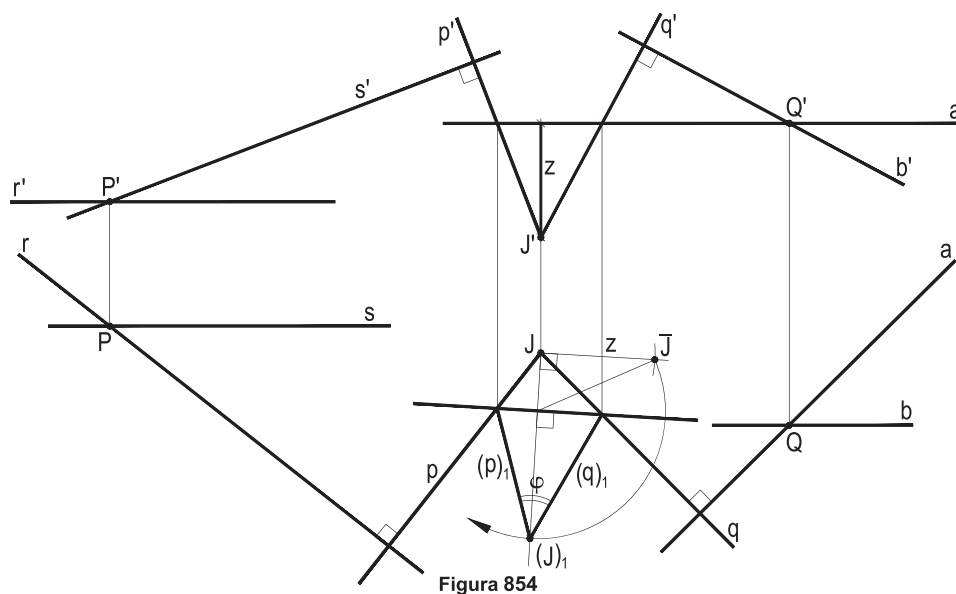


Figura 854







3 – Construir as projeções da seção que o plano das retas (r) e (s) produz no prisma (A)(B)(C)(D)–(R)(S)(T)(U), bem como a V.G. dessa seção.

São dadas as duas projeções do sólido e das retas (r) e (s).

Resolução: O plano vertical, no caso, das horizontais dadas (r) e (s), produz, por seção no prisma, o quadrilátero  $(\bar{A})(\bar{B})(\bar{C})(\bar{D})$  de imediata obtenção, por sua projeção horizontal, e seu rebatimento sobre o plano horizontal da reta (s) traz a V.G.  $\bar{A}'_1\bar{B}'_1\bar{C}'_1\bar{D}'_1$  pedida (Figura 857).

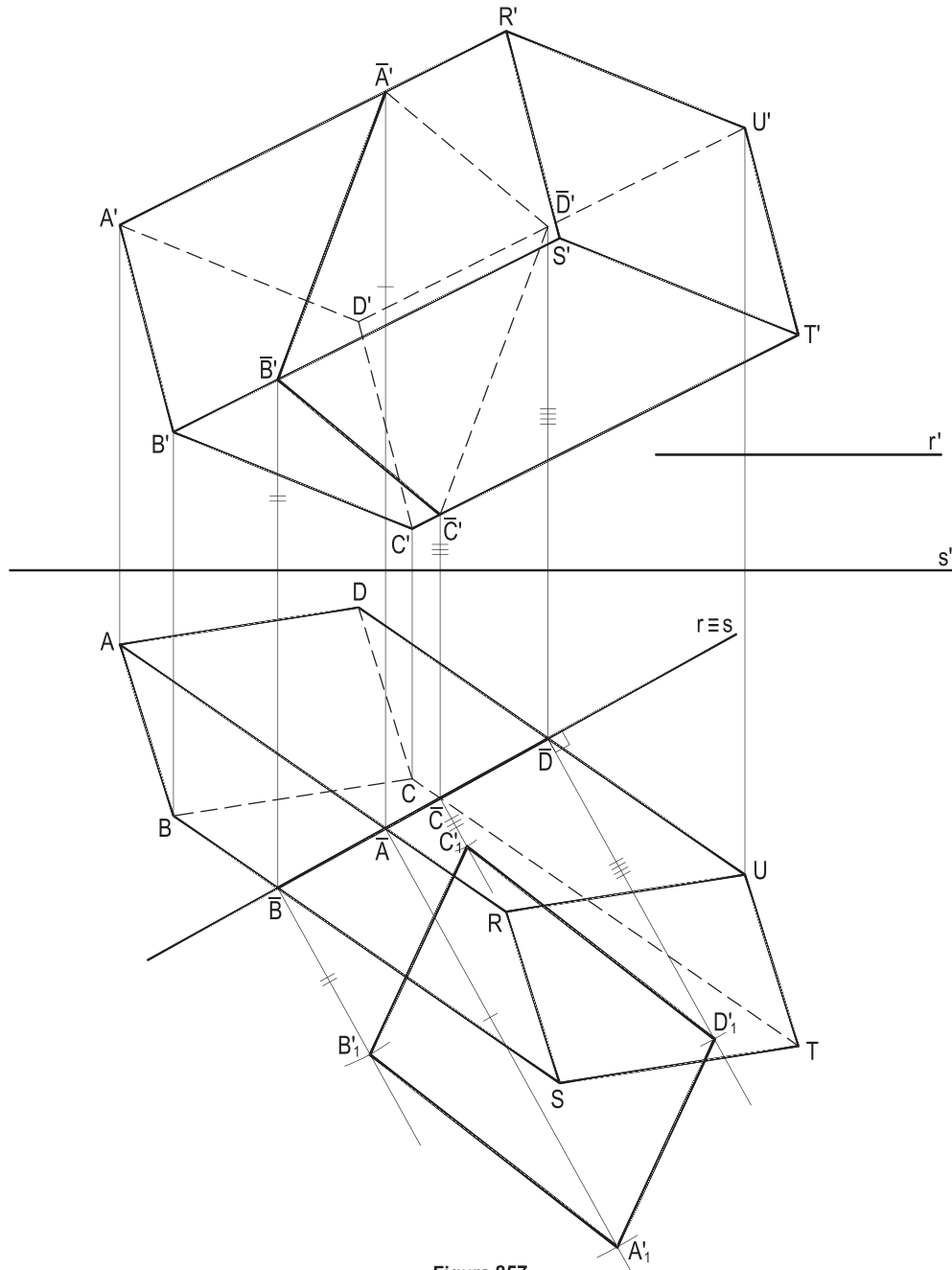


Figura 857

4 – O hexaedro (V)–(A)(B)(C)–(J) é formado por dois tetraedros regulares de vértices (V) e (J), com uma face (A)(B)(C) comum, que tem seu lado (B)(C) sobre a horizontal (h), (B) à esquerda de (C).

Sendo dadas as projeções de (A) e de (h), pede-se construir as projeções do hexaedro, deixando o vértice (J), em épura, com suas projeções mais próximas que as de (V).

Resolução: A construção da face (A)(B)(C) se faz pelo rebatimento de seu plano sobre o plano horizontal da reta (h), utilizando o triângulo de rebatimento  $A\bar{A}M$  e, obtido  $(A)_1$ , pelo envio de uma reta inclinada de  $30^\circ$  em relação à altura do triângulo (Figura 860).

Conhecida a V.G. da face, vale ver que a seção (V)(M)(A) que o plano mediador de (B)(C) produz no sólido é um triângulo isósceles, cujos lados iguais (M)(V) e (M)(A) são duas alturas de faces e cuja base (V)(A) iguala a aresta lateral do sólido (Figura 858).

Então, a partir do rebatimento  $(A)_1BC$  da face (A)(B)(C), em V.G., constrói-se o triângulo isósceles  $(A)_1M(\bar{O})_1$ , com os lados  $(M)(A)_1$  e  $M(\bar{O})_1$  iguais e a base  $(A)_1(\bar{O})_1$  igual à aresta do sólido, obtendo-se a V.G. H de sua altura (Figuras 859 e 860).

Assim, com auxílio da frontal (f) do plano da face (A)(B)(C), conduzida por (A), pode-se traçar a perpendicular (O)(P) a essa face que, levada, por uma rotação, à posição horizontal (O)(P<sub>1</sub>), aceita a marcação, em V.G., da altura H, o que proporciona o vértice (V) (Figura 860).

Enfim, o último vértice (J) do sólido se obtém por simetria de (V) em relação a (O).

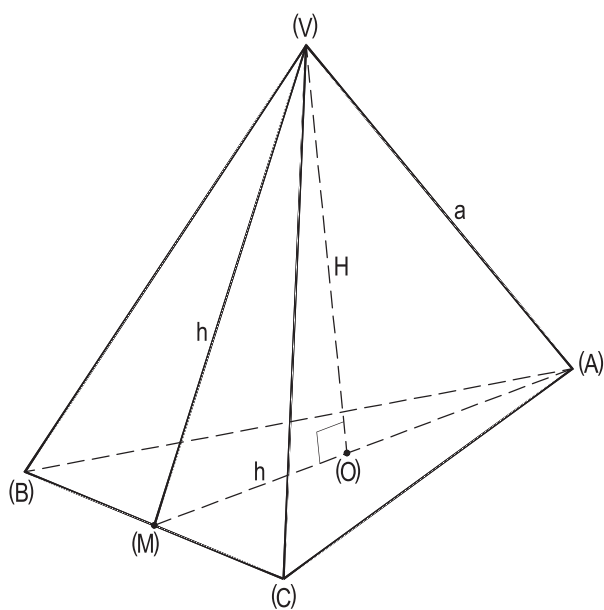


Figura 858

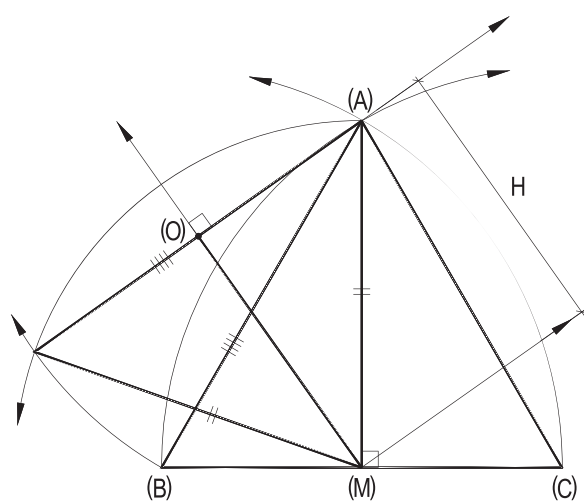
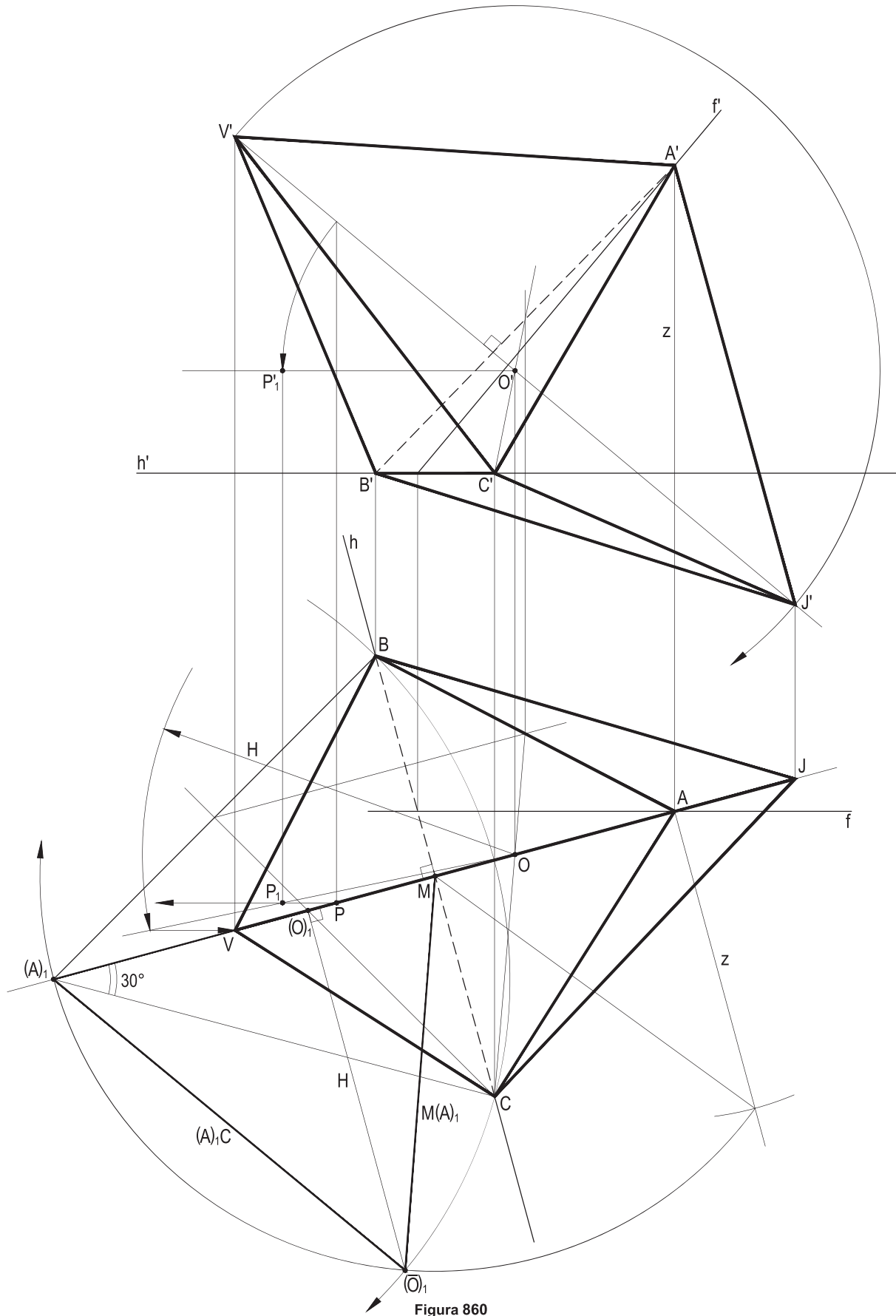


Figura 859



5 – O quadrilátero (A)(B)(C)(D), de perfil, dado por suas projeções, é uma seção reta numa superfície prismática fechada, que, seccionada pelos planos ( $\alpha$ ) e ( $\beta$ ), proporciona um tronco de prisma, com bases nesses planos, cujas projeções são pedidas.

( $\alpha$ ) e ( $\beta$ ) são dados, respectivamente, pelas projeções das retas (r) e (s) e das retas (p) e (q).

Resolução: Por ser de perfil a seção reta da superfície prismática, suas arestas (a), (b), (c) e (d) devem ser fronto-horizontais.

Assim, para determinar as bases do tronco de prisma pedido, basta obter as interseções de (a), (b), (c) e (d) com cada um dos dois planos dados, o que se faz, para o plano das concorrentes (r) e (s), com o auxílio das horizontais de cotas iguais às das arestas da superfície prismática e, ainda com maior facilidade, para o plano das paralelas (p) e (q), já que esse plano é de topo (Figura 861).

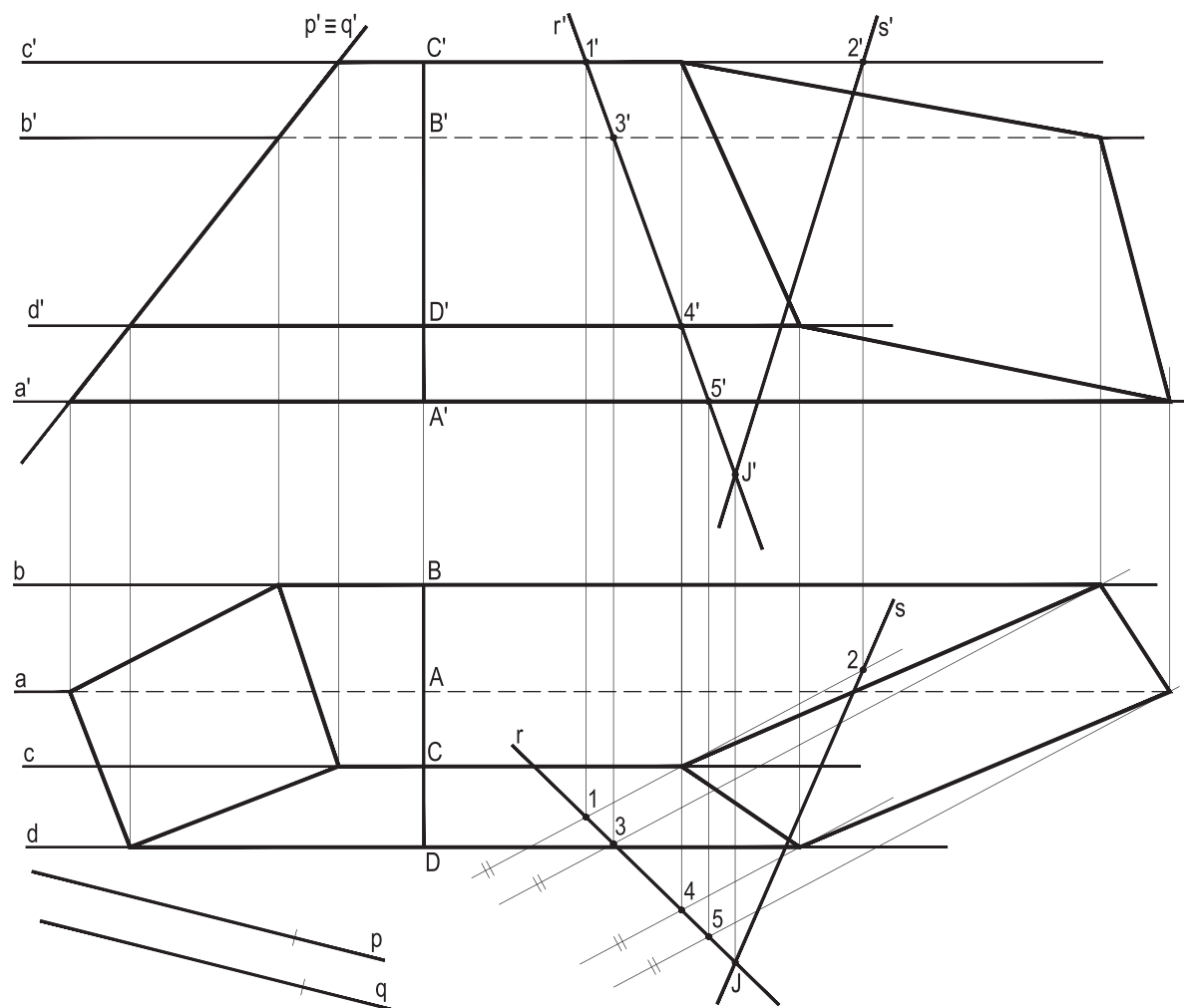


Figura 861

6 – A pirâmide irregular (V)–(A)(B)(C)(D) está assente por sua base quadrada (A)(B)(C)(D) num plano horizontal, de modo tal que, em épura, não se penetrem suas duas projeções. Sabendo que a aresta lateral (V)(A) é paralela a  $(\beta_{13})$  e, dadas as duas projeções do vértice (V) e a projeção horizontal da aresta básica (A)(B), pede-se construir as projeções do sólido e a seção nele produzida pelo plano  $(\alpha)$ , transparente, formado pelas frontais paralelas (r) e (s), dadas por suas projeções.

Resolução: A construção do quadrado base se faz em V.G., por pertencer ele a um plano horizontal e evitando que suas projeções se cortem (Figura 862). Sendo a aresta (V)(A) paralela a  $(\beta_{13})$ , são iguais as diferenças entre cotas e afastamentos de seus extremos, o que proporciona a projeção vertical  $A'$  e, então,  $B'$ ,  $C'$  e  $D'$ .

A construção da seção plana  $(\bar{A})(\bar{B})(\bar{C})(\bar{D})$  pedida se faz pelas interseções das arestas laterais da pirâmide com o plano das frontais (r) e (s) (Figura 862).

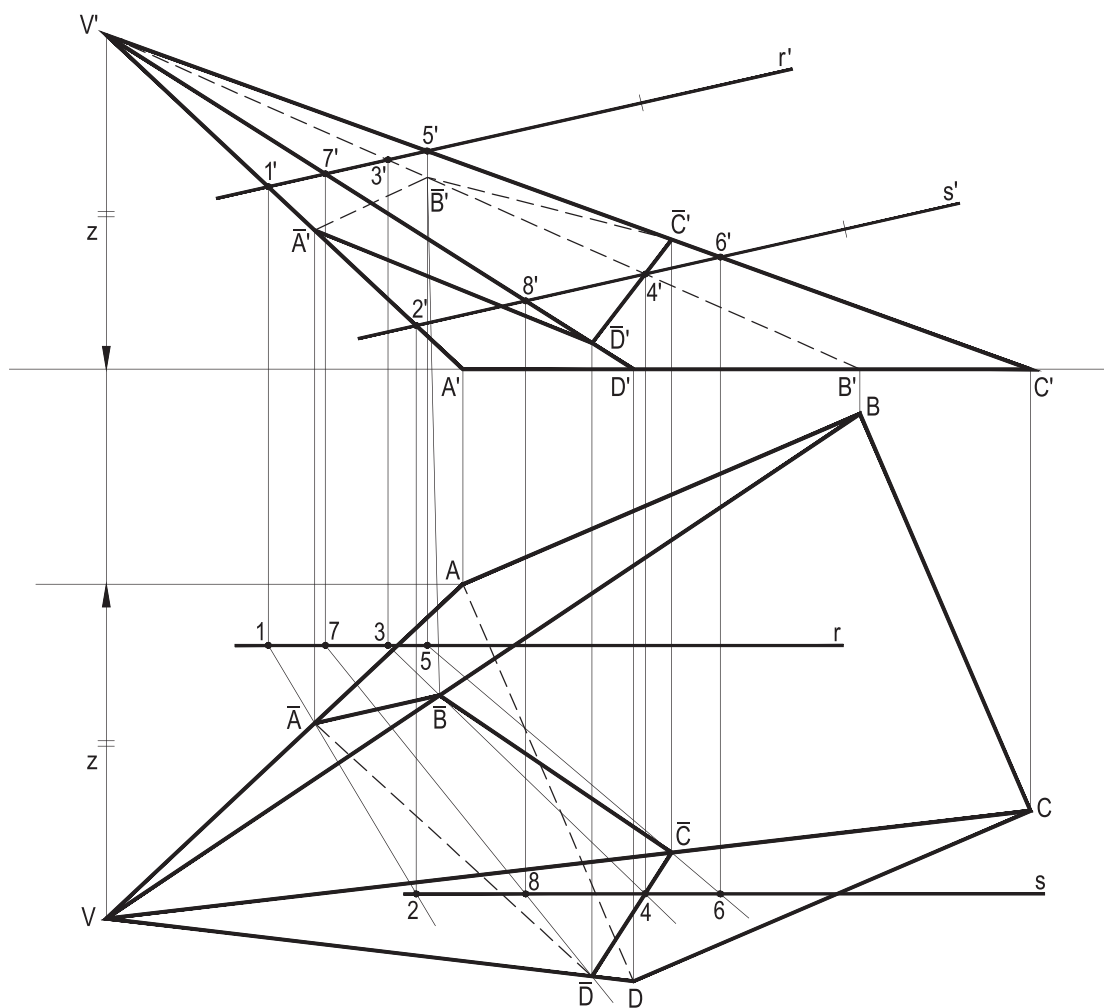


Figura 862

7 – Construir as projeções da pirâmide reta (V)–(A)(B)(C)(D), sabendo que suas arestas básicas (A)(B) e (C)(D) pertencem respectivamente às retas horizontais e paralelas (r) e (s) e que suas arestas laterais formam  $60^\circ$  com o plano da base, de modo tal que o vértice (A) fique à esquerda de (B).

São dadas as projeções do vértice (V) e das retas (r) e (s).

Resolução: Sendo reta a pirâmide (V)–(A)(B)(C)(D), sua base tem que ser inscritível num círculo, cujo centro há de ser o ponto (O), pé da altura (V)(O) da altura do sólido (*Geometria Espacial*, número 148) (Figura 863).

Assim, a construção se faz pelo traçado da perpendicular (p) de (V) ao plano das duas retas dadas (r) e (s) e pela obtenção de sua interseção (O) com esse plano.

Aproveitando que as retas (r) e (s) são horizontais, fica simples rebater seu plano sobre o plano horizontal ( $\theta$ ) de (s), de menor cota que (r), com auxílio do triângulo de rebatimento  $3\bar{3}1$  (Figura 864) e levar a esse rebatimento o ponto (O), para a determinação da V.G. da base da pirâmide.

Em seguida, obtido o valor  $OV_1$ , após uma rotação que leve o segmento (V)(O) à posição horizontal, que mede a distância de (V) ao plano da base da pirâmide, ou seja, da própria altura do sólido, consegue-se, com o triângulo retângulo  $OV_1J$ , com ângulos agudos  $60^\circ$  e  $30^\circ$ , o valor R do raio do círculo que há de circunscrever a base da pirâmide.

Então, no rebatimento, constrói-se o círculo de centro  $(O)_1$  e raio R, que corta os rebatimentos  $(r)_1$  e  $(s)_1$  das horizontais dadas, proporcionando os vértices da base da pirâmide, nominados de modo a que o ponto (A), em épura, fique à esquerda da (B), tal como imposto.

Os alçados são imediatos (Figura 864).

Observe-se que, pelos dados, a base (A)(B)(C)(D) da pirâmide é um trapézio isósceles.

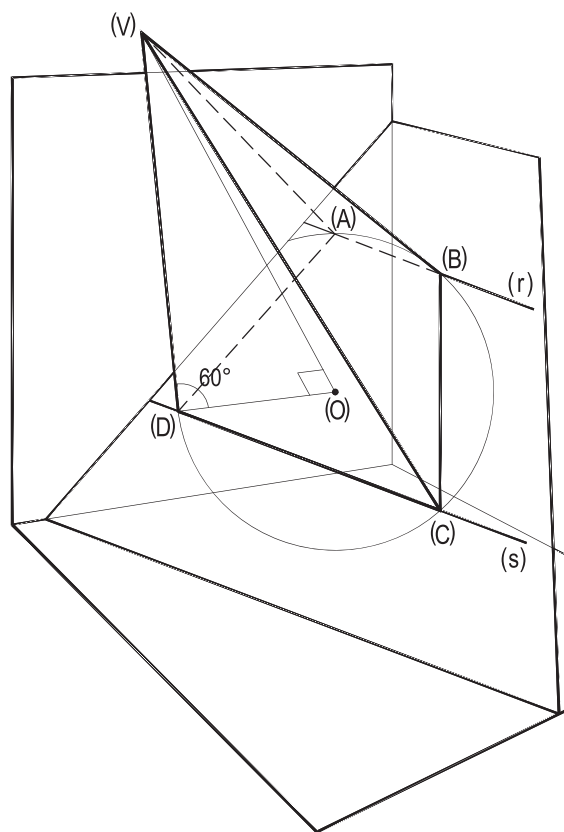


Figura 863



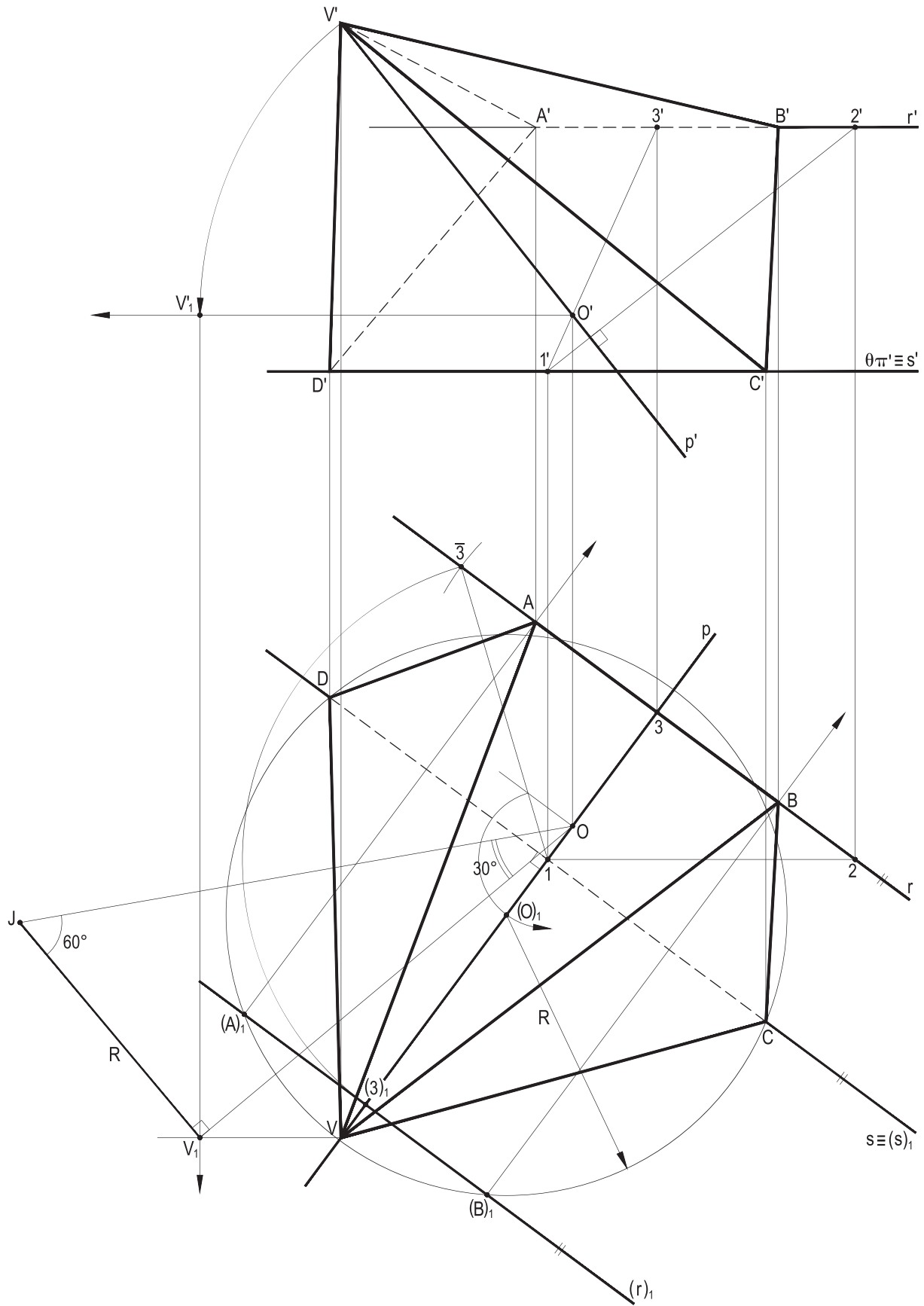


Figura 864

8 – Construir as projeções do ortoedro (A)(B)(C)(D)–(R)(S)(T)(U), assente pela face (A)(B)(C)(D) no plano formado pelas retas (r) e (s), dadas por suas projeções, a aresta (B)(C) em (s) e o vértice (D) em (r), dada, também, a projeção vertical do vértice (A) e sabendo que a cota do vértice (R), em relação à do vértice (A), mede o dobro da cota do ponto (J), comum a (r) e (s), em relação à do vértice (A).

Resolução: Para a construção, em V.G., da face (A)(B)(C)(D), efetua-se o rebatimento de seu plano, sobre o plano horizontal ( $\theta$ ) pertencente ao ponto (A), com auxílio do triângulo de rebatimento  $\bar{J}\bar{J}M$ , levando a esse rebatimento as duas retas dadas, para a construção, em V.G., do retângulo  $(A)_1(B)_1(C)_1(D)_1$  (Figura 865).

Alçada essa face e com o traçado da frontal (f) do plano dessa face, fica simples a construção das perpendiculares ao plano de (r) e (s), em busca de face (R)(S)(T)(U), o que se consegue pela duplicação da cota do ponto (J) em relação à do plano ( $\theta$ ), de (A), com o traçado do plano horizontal ( $\bar{\theta}$ ), que proporciona o vértice (R), na aresta conduzida por (A).

É, então, imediato completar as projeções do ortoedro com o uso de paralelas (Figura 865).

Para as visibilidades, são de valia os vértices (A), de menor cota, e (C), de menor afastamento.

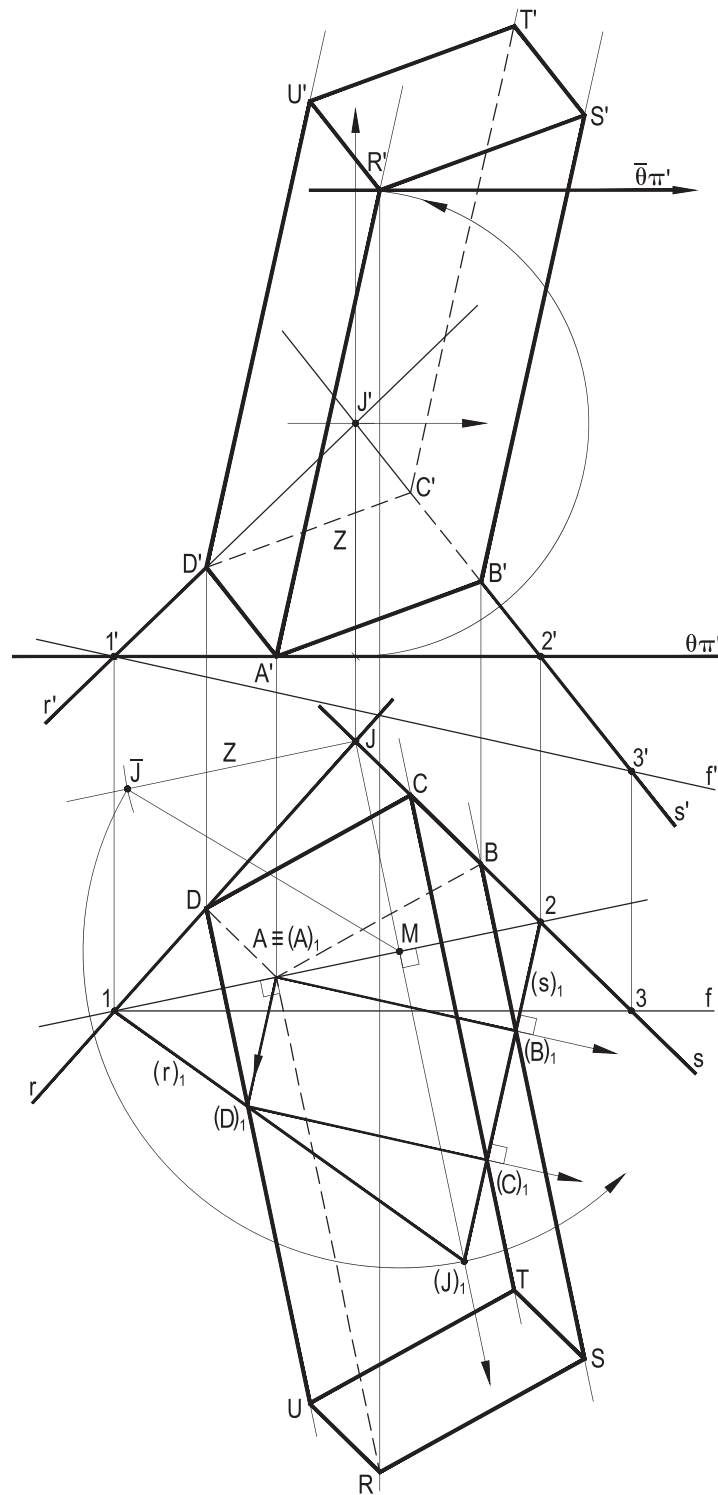
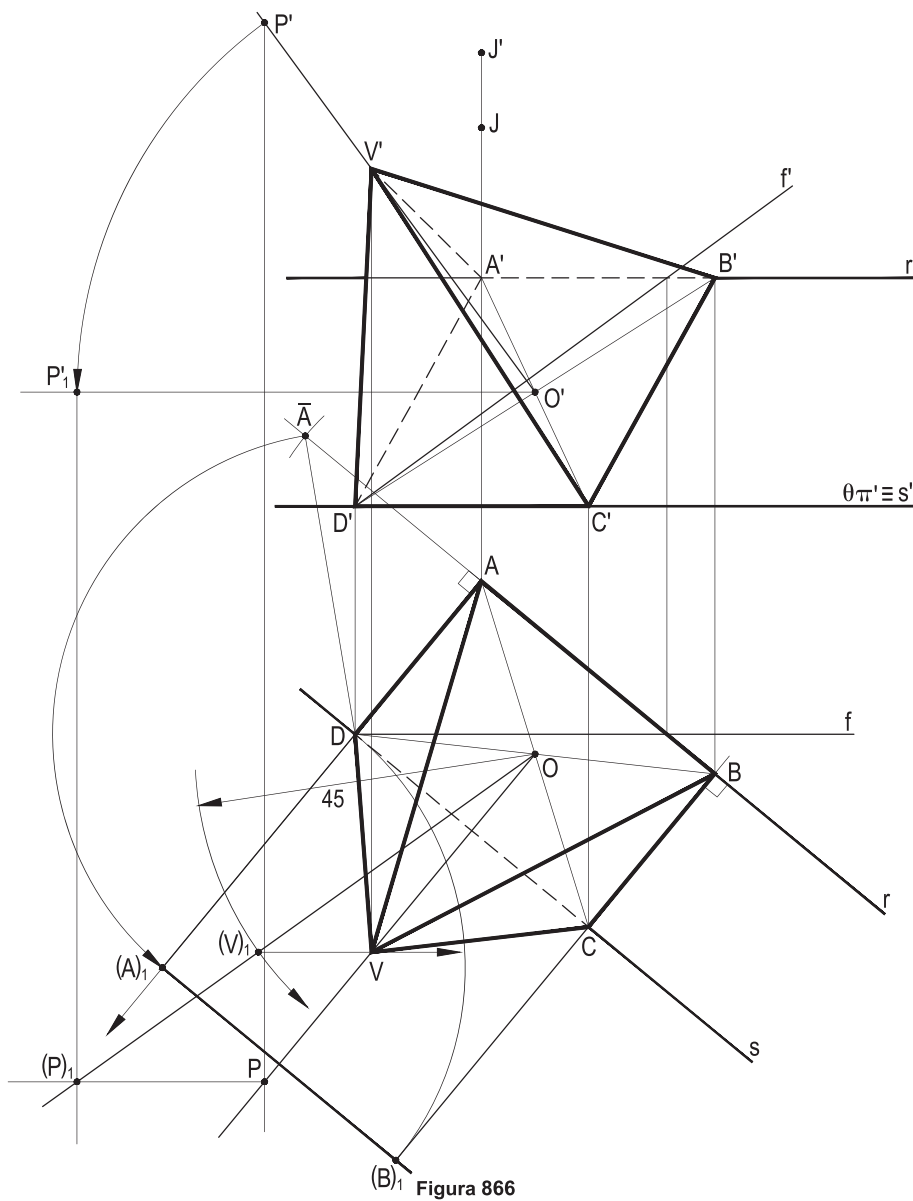


Figura 865

9 – Dados as horizontais (r) e (s) e o ponto (J), por suas projeções, pede-se construir as projeções da pirâmide regular (V)–(A)(B)(C)(D), que tem as arestas (A)(B) e (C)(D), respectivamente, em (r) e (s), sabendo que (J)(A) é uma reta de perfil, que a altura do sólido mede 45 mm e que, em épura, as duas projeções da pirâmide são exteriores uma a outra.

Resolução: Por serem horizontais duas arestas básicas, é imediata a construção da projeção horizontal ABCD, retangular.

O rebatimento do plano dessa base sobre o plano horizontal ( $\theta$ ), da horizontal (s), traz a V.G. de (A)(B)(C)(D) e, marcado seu centro (O), com o auxílio de sua frontal (f), fica simples traçar a perpendicular (O)(P) que, feita horizontal, mediante uma rotação, aceita a V.G. de sua altura (Figura 866).



10 – Construir as projeções de um octaedro regular (V)–(A)(B)(C)(D)–(S), conhecendo as projeções de sua diagonal (V)(S), sabendo que o vértice (A) pertence ao plano ( $\alpha$ ), transparente, definido pelas retas paralelas (p) e (q), também dadas por suas projeções.

Resolução: A seção diagonal quadrada (A)(B)(C)(D) do octaedro há de pertencer ao plano mediador da diagonal dada (V)(S) (*Geometria Espacial*, número 114.5), plano esse que se constrói com as principais (h) e (f), perpendiculares à diagonal dada (Figuras 867 e 868), por seu ponto médio (O).

Com uma rotação, que torna (O)(S) horizontal, obtém-se a V.G. OS<sub>1</sub> da semidiagonal (D/2) do octaedro e, para construir o quadrado (A)(B)(C)(D), convém aproveitar que o plano ( $\alpha$ ), dado pelas paralelas (p) e (q), é horizontal, rebatendo, sobre ele, o plano mediador antes construído, pela utilização do triângulo de rebatimento O $\bar{O}$ J, para a charneira  $h_1 \equiv (h_1)_1$ , que entrega o rebatimento (O)<sub>1</sub> do centro desse quadrado.

Com a circunferência de centro (O)<sub>1</sub> e raio (D/2), vem o vértice (A)<sub>1</sub>  $\equiv$  A sobre a charneira  $h_1 \equiv (h_1)_1$  (duas soluções, a segunda indicada pelo número 2, na Figura 868).

Mesmo não cabendo no espaço disponível a V.G. (A)<sub>1</sub>(B)<sub>1</sub>(C)<sub>1</sub>(D)<sub>1</sub> do quadrado (A)(B)(C)(D), consegue-se a posição do vértice (B)<sub>1</sub>, pela construção do quadrante (O)<sub>1</sub>(A)<sub>1</sub>(B)<sub>1</sub> (Figura 868).

Seu alçamento se faz por afinidade da reta (B)<sub>1</sub>(O)<sub>1</sub>, dando o ponto (L)<sub>1</sub> sobre a charneira e, então, a projeção horizontal B, na perpendicular de (B)<sub>1</sub> a  $h_1 \equiv (h_1)_1$ .

E não é necessário construir a V.G. da seção (A)(B)(C)(D) do octaedro, porque os vértices finais (C) e (D) podem ser determinados por simetrias, em relação ao centro (O) do sólido, dos vértices (A) e (B) já conhecidos e/ou pela utilização de paralelas, para os pares de arestas opostas.

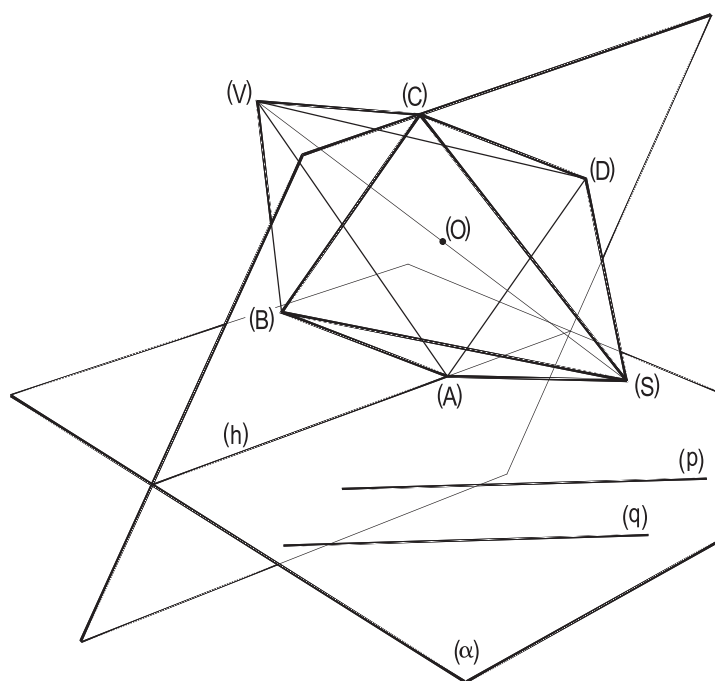


Figura 867

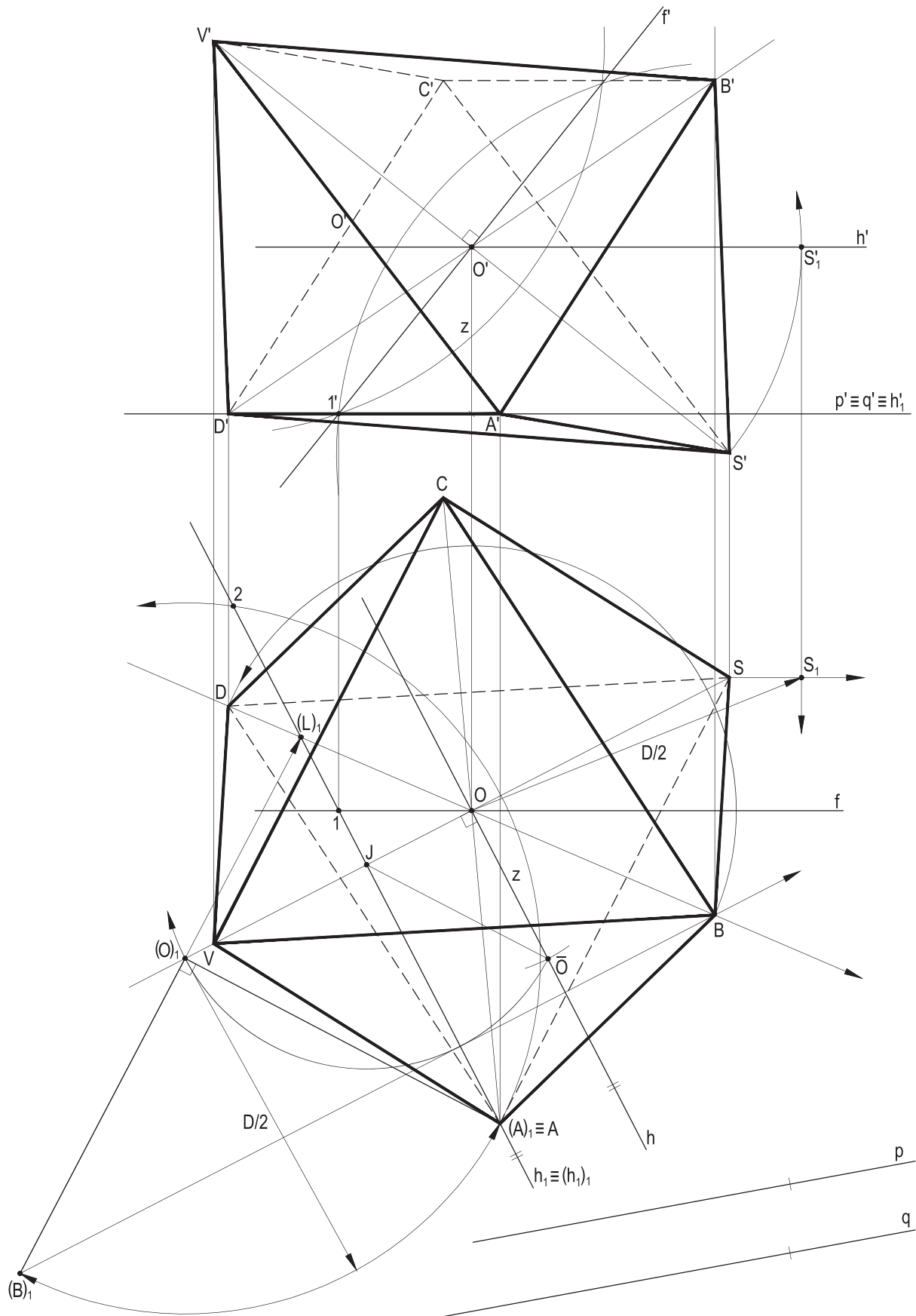


Figura 868



DADOS INTERNACIONAIS PARA  
CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO (CIP)

---

A447b

Almeida, Célio Pinto de, 1937-

O bissetor par :  $\beta_{24}$  / Célio Pinto de Almeida. – Rio de Janeiro :  
G. Ermakoff, 2023.

248 p. : il. ; 28 cm.

ISBN - 978-65-87730-05-9

1. Geometria Descritiva. I. Título.

---

CDD - 516.6

ROBERTA MARIA DE O. V. DA COSTA – BIBLIOTECÁRIA CRB7 N. 5587

Este livro foi composto na tipografia Minion pro em  
corpo 12,5/17,3, impresso em papel offset 90g/m<sup>2</sup>,  
na gráfica Santa Marta – São Paulo.