

# GEOMETRIA ESPACIAL



Célio Pinto de Almeida

# GEOMETRIA ESPACIAL

— 2ª Edição —

G.Ermakoff CASA EDITORIAL  
RIO DE JANEIRO | 2021

2ª edição – 2021

Geometria Espacial

Copyright © 2018 by Célio Pinto de Almeida

*Coordenação editorial:*

George Ermakoff

*Capa:*

Miriam Lerner e Marcelo Domingues

*Diagramação:*

Marcelo Domingues

*Desenhos:*

Roberto Ribeiro de Andrade e Michelle Bulhões

Imagem da capa:

Superfície parcial do dodecaedro convexo regular, destacando esfera interior.

Segunda edição

Tiragem: 1.000 exemplares – Distribuição gratuita

Este estudo dedico à minha família, à Sônia, ao Alexandre e ao Cristiano, sempre a meu lado, com o apoio imprescindível à sua execução.



## SEGUNDA EDIÇÃO

Tal como realizado com o livro *Geometria Plana*, incluí, nesta segunda edição, uma centena de problemas propostos e resolvidos, tratando de questões de posição entre os diversos entes geométricos, de conceituações, com novas leituras e de proposições métricas.

Tudo segue a mesma ordenação teórica, clássica, lógica e dedutiva desenvolvida na edição inicial e, sempre que necessário, com referências a seus itens, inclusive quanto às suas numerações sequenciais.

Creio que, com esse adendo, vou ao encontro do desejo do leitor de ver mais detalhados aspectos conceituais de relevância.





# LISTAGEM DE ASSUNTOS

A listagem abaixo apresenta, em cada capítulo, os principais assuntos, definições e teoremas, ao invés do habitual sumário de títulos, tais as quantidades de conceituações e demonstrações.

<b>Introdução</b>	Posições relativas entre uma reta e um plano .....	15
	Determinação do plano .....	15
	Posições relativas entre dois planos .....	16
	Posições relativas entre duas retas .....	16
<b>Capítulo I – Retas e planos paralelos</b>	Planos paralelos .....	19
	Ângulo de duas retas reversas .....	21
	Feixe de planos paralelos .....	22
<b>Capítulo II – Retas e planos perpendiculares</b>	Retas ortogonais .....	25
	Teorema das três perpendiculares .....	29
	Perpendicular comum a duas retas reversas .....	30
	Distância entre duas retas reversas .....	31
	Plano mediador .....	31
<b>Capítulo III – Ângulos diedros</b>	Diedro .....	33
	Planos perpendiculares .....	34
<b>Capítulo IV – Reta de máximo declive</b>	Teorema do ângulo reto .....	37
	Ângulo de reta com plano .....	38
	Reta de máximo declive .....	40
	Ângulo de dois planos oblíquos .....	42
	Área da projeção de uma figura .....	43
<b>Capítulo V – Bissetores</b>	Bissetor de um diedro .....	45
	Planos bissetores .....	48
	Equidistância a duas retas .....	49
	Retas igualmente inclinadas a duas outras .....	50
	Planos igualmente inclinados a duas retas .....	51
<b>Capítulo VI – Triedros</b>	Ângulo poliédrico .....	53
	Ângulos sólidos convexos e côncavos .....	53
	Triedros simétricos .....	54
	Triedros suplementares .....	54
	Triedros isósceles .....	55
	Triedros trirentângulos .....	55
	Soma dos ângulos faces .....	62
	Igualdade de triedros .....	64

<b>Capítulo VII – Poliedros convexos</b>	Poliedros convexos .....	65
	Teorema de Euler .....	66
	Soma dos ângulos internos das faces .....	68
	Soma dos ângulos externos das faces .....	68
	Número de diagonais .....	69
	Poliedros conjugados .....	71
	Poliedros regulares .....	71
	Poliedros convexos regulares .....	71
	Os cinco poliedros convexos regulares .....	72
<b>Capítulo VIII – Tetraedro regular</b>	Seções planas .....	77
	Esferas no tetraedro regular .....	81
	Projeções do tetraedro regular .....	82
	Relações métricas .....	84
	Área total .....	85
	Distância entre duas arestas opostas .....	85
	Raios das esferas .....	85
	Volume .....	86
	Tetraedro órtico .....	88
<b>Capítulo IX – Hexaedro regular</b>	Seções planas .....	89
	Centro do cubo .....	91
	Esferas no cubo .....	91
	Projeções do cubo .....	95
	Relações métricas .....	97
	Área total .....	97
	Distâncias entre duas arestas opostas .....	98
	Raios das esferas .....	98
	Volume .....	98
<b>Capítulo X – Octaedro regular</b>	Diagonais .....	99
	Centro do octaedro regular .....	100
	Esferas no octaedro regular .....	101
	Seções planas .....	102
	Projeções do octaedro regular .....	109
	Relações métricas .....	111
	Cálculo da diagonal .....	111
	Área total .....	111
	Distância entre duas faces opostas .....	111
	Distâncias entre duas arestas opostas .....	111
	Raios das esferas .....	112
	Volume .....	112
<b>Capítulo XI – Dodecaedro regular</b>	Elementos .....	113
	Propriedades .....	113
	Soma dos ângulos internos .....	113
	Soma dos ângulos externos .....	113
	Área total .....	114
	Volume .....	115

<b>Capítulo XII – Icosaedro regular</b>	Elementos .....	119
	Propriedades .....	119
	Soma dos ângulos internos .....	119
	Soma dos ângulos externos .....	119
	Área total .....	120
	Volume .....	120
<b>Capítulo XIII – Prismas</b>	Superfícies prismáticas .....	123
	Prismas .....	124
	Classificação dos prismas .....	125
	Paralelepípedos .....	125
	Paralelepípedo retângulo .....	125
	Propriedades .....	126
	Seções planas .....	127
	Centro do paralelepípedo .....	127
	Cálculo das diagonais .....	128
	Seções retas .....	128
	Equivalência de poliedros .....	129
	Unidade de volume .....	131
	Volume do paralelepípedo .....	131
	Volume do prisma .....	133
	Áreas laterais e totais .....	134
<b>Capítulo XIV – Pirâmides</b>	Superfícies piramidais .....	135
	Pirâmides .....	136
	Classificação das pirâmides .....	137
	Propriedades .....	137
	Apótema .....	138
	Áreas lateral e total .....	138
	Teorema de Cavalieri .....	141
	Volume .....	144
	Poliedros semelhantes .....	146
<b>Capítulo XV – Troncos de prismas</b>	Tronco de prisma .....	149
	Seções retas .....	150
	Volume .....	151
<b>Capítulo XVI – Troncos de pirâmides</b>	Primeira espécie .....	153
	Segunda espécie .....	154
	Troncos de pirâmides regulares .....	154
	Áreas lateral e total .....	155
	Volume .....	157
<b>Capítulo XVII – Superfícies</b>	Superfícies regradadas .....	161
	Diretriz e geratriz .....	161
	Famílias de superfícies .....	162
	Superfícies cilíndricas .....	162
	Superfícies cônicas .....	163

	Superfícies de revolução .....	164
	Paralelos .....	164
	Equador e círculo de gola .....	164
	Meridiano .....	164
	Superfície esférica .....	165
	Retas e planos tangentes a uma superfície .....	167
<b>Capítulo XVIII – Cilindros</b>		
	Classificação .....	169
	Áreas laterais e totais .....	170
	Volume do cilindro .....	171
	Seção elítica .....	171
	Troncos de cilindro .....	172
	Volume do tronco de revolução .....	174
	Áreas do tronco de revolução .....	174
<b>Capítulo XIX – Cones</b>		
	Classificação .....	175
	Desenvolvimento .....	176
	Áreas laterais e totais .....	177
	Volume do cone .....	177
	Troncos de cone .....	178
	Volumes dos troncos de cones de revolução .....	180
	Áreas dos troncos de cones de revolução .....	181
	Teorema de Dandelin .....	182
<b>Capítulo XX – Esfera</b>		
	Elementos .....	189
	Zona esférica .....	190
	Segmentos esféricos .....	190
	Calota esférica .....	190
	Fuso esférico .....	190
	Cunha esférica .....	190
	Planos e retas tangentes .....	191
	Posições relativas entre duas esferas .....	192
	Teorema de Arquimedes .....	194
	Área da esfera .....	195
	Área do fuso esférico .....	195
	Áreas da zona e da calota esférica .....	196
	Setor esférico .....	198
	Anel esférico .....	199
	Volume da esfera .....	203
	Volume da cunha esférica .....	204
	Volume do setor esférico .....	205
	Volume do anel esférico .....	205
	Volume do segmento esférico de duas bases .....	206
	Volume do segmento esférico de uma base .....	207
<b>Capítulo XXI – Problemas resolvidos</b>	.....	209

# ITENS DESTACADOS

A seguir, por ordem alfabética, vão listados os itens habitualmente mais procurados.

Anel esférico .....	199
Ângulo de duas retas reversas .....	21
Calota esférica .....	190
Cunha esférica .....	190
Distância entre duas retas reversas .....	31
Equador e círculo de gola de uma superfície de revolução .....	164
Equivalência de poliedros .....	129
Fuso esférico .....	190
Paralelepípedo retângulo .....	125
Perpendicular comum a duas retas reversas .....	30
Planos bissetores .....	48
Plano mediador .....	31
Poliedros conjugados .....	71
Poliedros regulares .....	71
Poliedros semelhantes .....	146
Reta de máximo declive .....	40
Retas ortogonais .....	25
Segmentos esféricos .....	190
Setor esférico .....	198
Superfícies regradadas .....	161
Teorema das três perpendiculares .....	29
Teorema de Arquimedes .....	194
Teorema de Cavalieri .....	141
Teorema de Dandelin .....	182
Teorema de Euler .....	66
Teorema do ângulo reto .....	37
Tetraedro órtico .....	88
Triedros trirretângulos .....	55
Zona esférica .....	190



# INTRODUÇÃO

## 1 – Posições relativas entre uma reta e um plano

Uma reta pode, ou não, pertencer a um plano. Quando não pertence, pode ter um ou nenhum ponto em comum com o plano.

Assim, são três as posições que uma reta pode ocupar em relação a um plano:

- a. pertencente ao plano – todos os pontos da reta pertencem ao plano;
- b. secante ao plano – apenas um ponto da reta pertence ao plano;
- c. paralela ao plano – nenhum ponto da reta pertence ao plano.

## 2 – Axioma

Por três pontos não colineares passa, sempre, um plano.

## 3 – Determinação do plano

Um plano fica determinado:

- a. por três pontos não colineares;
- b. por uma reta e um ponto exteriores;
- c. por duas retas concorrentes;
- d. por duas retas paralelas.

Em verdade, as três últimas condições reduzem-se facilmente à primeira. Daí suas validades.

Aliás, todas as quatro são mutuamente transformáveis por meio de operações simples.

Assim, por exemplo, dar um plano por três pontos (A), (B) e (C) não colineares é o mesmo que defini-lo, por exemplo, por duas retas concorrentes (A)(B) e (A)(C), e vice-versa.

#### **4 – Posições relativas entre dois planos**

Dois planos distintos podem ou não se cortar, sendo, então, respectivamente denominados secantes ou paralelos.

Quando dois planos são secantes, sua interseção é uma reta. De fato, todos os pontos comuns aos dois planos devem ser colineares, pois, se três quaisquer deles não o fossem, os dois planos seriam obrigados a coincidir (número 3.a).

#### **5 – Posições relativas entre duas retas**

Dois retas podem, ou não, pertencer a um mesmo plano, sendo, então, respectivamente denominadas coplanares e reversas (ou revesas ou não coplanares).

E como as coplanares podem ser concorrentes ou paralelas, conclui-se que duas retas podem ser:

- a. concorrentes;
- b. paralelas;
- c. reversas.



# CAPÍTULO I

## RETAS E PLANOS PARALELOS

### 6 – Teorema

Quando uma reta é paralela a uma reta de um plano, ela é paralela ou pertencente ao plano.

Demonstração: Consideremos a reta  $(r)$ , por hipótese, paralela a uma reta  $(s)$  do plano  $(\alpha)$  (Figura 1).

As retas  $(r)$  e  $(s)$  definem, então, um plano  $(\beta)$  (número 3.d) que corta  $(\alpha)$ , segundo  $(s)$ . E como  $(r)$  não tem ponto em comum com  $(s)$ , também não tem com  $(\alpha)$ , isto é, é paralela a  $(\alpha)$ .

Em caso particular,  $(\beta)$  poderia coincidir com  $(\alpha)$ . Porque  $(r)$ , sendo paralela a uma reta  $(s)$  de  $(\alpha)$ , poderia pertencer a  $(\alpha)$  (Figura 2).

Então, quando uma reta é paralela a uma reta de um plano, ela é paralela ou pertencente ao plano, como se queria demonstrar.

### 7 – Corolário

Se uma reta  $(r)$  é paralela a um plano  $(\alpha)$ , todo plano pertencente a  $(r)$  e secante a  $(\alpha)$  corta  $(\alpha)$  segundo uma reta paralela a  $(r)$ .

De fato, consideremos uma reta  $(r)$  e um plano  $(\alpha)$ , paralelos, e um plano  $(\beta)$  que pertença a  $(r)$  e que corte  $(\alpha)$ , segundo uma reta  $(s)$  (Figura 1).

Porque, por hipótese, se  $(r)$  não tem ponto comum com  $(\alpha)$ , também não terá ponto comum com  $(s)$ . Assim, as retas  $(r)$  e  $(s)$ , sendo coplanares, sem ponto comum, serão paralelas.

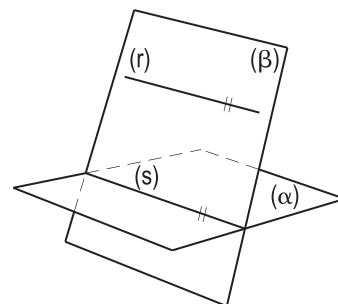


Figura 1

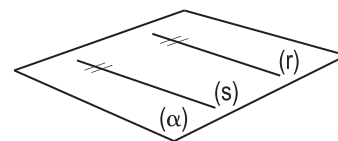


Figura 2

## 8 – Teorema

Dados uma reta  $(r)$  e um plano  $(\alpha)$  paralelos, toda reta paralela a  $(r)$ , traçada por um ponto de  $(\alpha)$ , pertence a  $(\alpha)$ .

Demonstração: Consideremos, além da reta  $(r)$  e do plano  $(\alpha)$ , paralelos, um ponto  $(A)$  pertencente a  $(\alpha)$  e tracemos, por  $(A)$ , a reta  $(s)$  paralela a  $(r)$  (Figura 3). Queremos provar que  $(s)$  pertence a  $(\alpha)$ .

A reta  $(r)$  e o ponto  $(A)$  definem um plano  $(\beta)$  (número 3.b), o qual deve (número 7) cortar  $(\alpha)$  segundo uma reta paralela a  $(r)$ . E como, por  $(A)$ , só se pode traçar uma reta paralela a  $(r)$  (Postulado de Euclides – *Geometria Plana*, número 51), a interseção dos dois planos deve ser aquela reta  $(s)$ , inicialmente traçada.

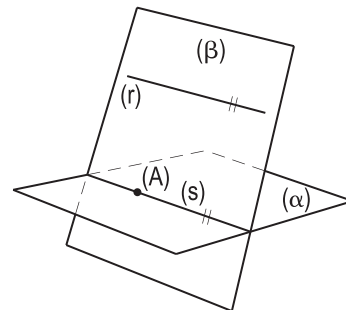


Figura 3

Assim, dados uma reta  $(r)$  e um plano  $(\alpha)$  paralelos, toda reta paralela àquela e traçada por um ponto desse plano pertence a ele.

## 9 – Teorema

Quando dois planos secantes são paralelos a uma reta, sua interseção é paralela àquela reta.

Demonstração: Sejam  $(\alpha)$  e  $(\beta)$  dois planos secantes, paralelos à reta  $(r)$ , e  $(A)$  um ponto pertencente aos dois.

Tracemos, por  $(A)$ , a reta  $(s)$  paralela a  $(r)$  (Figura 4).

Esta reta  $(s)$ , devendo (número 8) pertencer tanto a  $(\alpha)$  quanto a  $(\beta)$ , será a própria interseção dos dois planos.

Então, quando dois planos secantes são paralelos a uma reta, sua interseção é paralela àquela reta, como se queria provar.

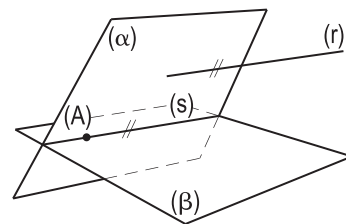


Figura 4

## 10 – Corolários

1. Se, por duas retas paralelas  $(a)$  e  $(b)$ , traçarmos dois planos secantes  $(\alpha)$  e  $(\beta)$  (Figura 5), sua interseção  $(s)$  será paralela àquelas retas. Porque os dois planos serão paralelos a uma reta  $(r)$  paralela às retas  $(a)$  e  $(b)$ .
2. Toda reta  $(r)$  paralela a dois planos secantes  $(\alpha)$  e  $(\beta)$  (Figura 5) é paralela à interseção  $(s)$  desses dois planos.

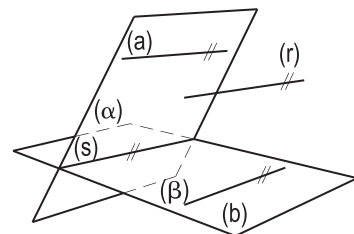


Figura 5

## 11 – Planos paralelos

Sabe-se que, por definição, dois planos são paralelos quando não possuem ponto comum. Daí concluímos que:

1. se dois planos são paralelos, cada um deles é paralelo a todas as retas do outro;
2. reciprocamente, se um plano é paralelo a todas as retas de outro plano, ele é paralelo ao outro plano;
3. se um plano  $(\alpha)$  é paralelo a duas retas concorrentes  $(r)$  e  $(s)$  de um outro plano  $(\beta)$ ,  $(\alpha)$  é paralelo a  $(\beta)$  (Figura 6);
4. enfim, a condição necessária e suficiente para que dois planos sejam paralelos é que um deles possua duas retas concorrentes, ambas paralelas ao outro plano.

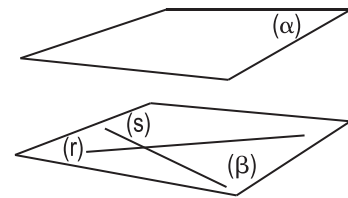


Figura 6

## 12 – Teorema

O lugar geométrico das retas paralelas a um plano, traçadas por um ponto exterior, é o plano paralelo àquele e pertencente ao ponto considerado.

Demonstração: Consideremos o plano  $(\alpha)$  e o plano  $(\alpha_1)$ , paralelo a  $(\alpha)$  e pertencente ao ponto  $(A)$ , exterior a  $(\alpha)$  (Figura 7).

Todas as retas  $(r)$  que passam por  $(A)$  e pertencem a  $(\alpha_1)$  são paralelas a  $(\alpha)$  (número 11.1).

Ao contrário, toda reta  $(s)$  pertencente a  $(A)$ , mas não a  $(\alpha_1)$ , não pode ser paralela a  $(\alpha)$ . De fato, se uma reta  $(s)$ , assim traçada, fosse paralela a  $(\alpha)$ , ela e  $(r)$  definiriam um plano  $(\beta)$  distinto de  $(\alpha_1)$  (Figura 7) pertencente a  $(A)$  e paralelo a  $(\alpha)$ , o que seria absurdo.

Assim, todas as paralelas a  $(\alpha)$ , traçadas por  $(A)$ , pertencem a  $(\alpha_1)$ .

Então, o lugar geométrico das retas paralelas a um plano, traçadas por um ponto exterior, é o plano paralelo àquele e pertencente ao ponto considerado.

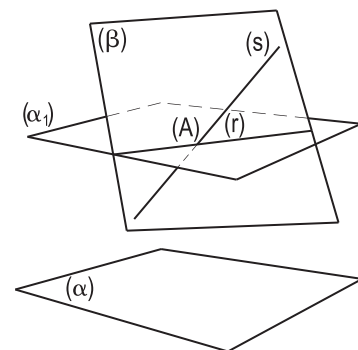


Figura 7

### 13 – Teorema

Quando um plano corta um feixe de planos paralelos, ele o faz segundo retas paralelas.

Demonstração: Seja  $(\alpha)$  o plano secante ao feixe de planos paralelos  $(\beta_1), (\beta_2), (\beta_3)$ , etc.

As interseções de  $(\alpha)$  com os diversos planos do feixe são retas coplanares que não admitem ponto comum (Figura 8).

Logo, são paralelas, como se queria provar.

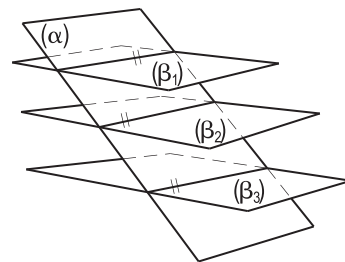


Figura 8

### 14 – Teorema

Por duas retas reversas sempre se pode traçar um par – e apenas um – de planos paralelos.

Demonstração: Consideremos duas retas reversas  $(r)$  e  $(s)$  e tracemos, por um ponto  $(A)$  qualquer de  $(r)$ ,  $(s_1)$  paralela a  $(s)$  e, por um ponto  $(B)$  qualquer de  $(s)$ ,  $(r_1)$  paralela a  $(r)$  (Figura 9).

Os dois planos  $(\alpha)$  e  $(\beta)$ , assim formados, são paralelos (número 11.3). E são únicos porque a variação da posição de  $(A)$  sobre  $(r)$  – ou de  $(B)$  sobre  $(s)$  – faz apenas mudar a posição de  $(s_1)$  – ou de  $(r_1)$  –, mas não a retira do plano  $(\alpha)$  – ou de  $(\beta)$  –, não modificando, pois, as posições dos dois planos obtidos (Figura 9).

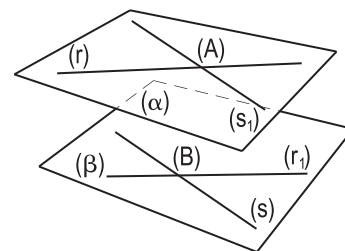


Figura 9

Assim, por duas reversas...

### 15 – Escólios

1. Dadas duas retas reversas  $(r)$  e  $(s)$ , para construir, por  $(r)$ , o plano – único – paralelo a  $(s)$ , basta traçar, por um ponto  $(A)$  qualquer de  $(r)$ , a reta  $(s_1)$  paralela a  $(s)$ .

As retas  $(r)$  e  $(s_1)$  definem o plano (Figura 10).

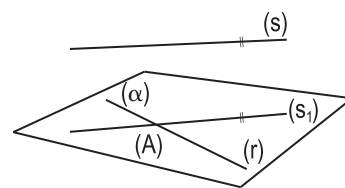


Figura 10

2. Dadas duas retas reversas  $(r)$  e  $(s)$  e um ponto genérico  $(A)$ , exterior a elas, para construir, por  $(A)$ , o plano, único, paralelo a  $(r)$  e a  $(s)$ , basta traçar, por  $(A)$ , as retas  $(r_1)$  e  $(s_1)$ , respectivamente paralelas a  $(r)$  e a  $(s)$  (Figura 11).

As retas  $(r_1)$  e  $(s_1)$  definem o plano.

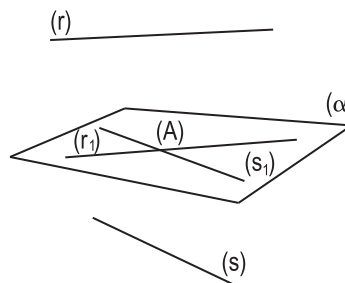


Figura 11

## 16 – Ângulo de duas retas reversas

Por definição, ângulo de duas retas reversas ( $r$ ) e ( $s$ ) é o ângulo formado por duas paralelas ( $r_1$ ) e ( $s_1$ ) a elas, traçadas por um ponto (A) qualquer (Figura 12).

É claro que o valor  $\hat{\alpha}$  do ângulo de duas reversas ( $r$ ) e ( $s$ ) independe do ponto (A) escolhido. De fato, a variação da posição desse ponto faz apenas transladar as retas auxiliares ( $r_1$ ) e ( $s_1$ ), mas não muda o valor de  $\hat{\alpha}$ , pois, assim, formaríamos outro ângulo com lados paralelos aos do primeiro.

Então, para obter o ângulo  $\hat{\alpha}$  de duas reversas ( $r$ ) e ( $s$ ), basta traçar, por um ponto (A), de uma delas, a paralela à outra (Figura 13).  $\hat{\alpha}$  será, então, o ângulo formado pelas duas concorrentes assim obtidas.

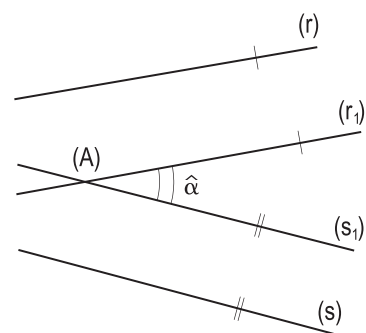


Figura 12

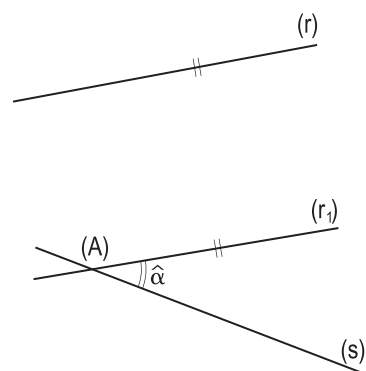


Figura 13

## 17 – Teorema

Segmentos de reta paralelos compreendidos entre dois planos paralelos são iguais.

Demonstração: Basta ver que as retas paralelas, tomadas duas a duas, formam planos que cortam os planos paralelos segundo retas respectivamente paralelas (número 13).

Assim, como paralelas entre paralelas (*Geometria Plana*, número 58), os segmentos (A)(B), (C)(D), (E)(F), etc., considerados, são iguais (Figura 14).

Então, segmentos de reta paralelos compreendidos entre dois planos paralelos são iguais, como se queria demonstrar.

## 18 – Corolário

Segmentos de reta paralelos, compreendidos entre uma reta ( $r$ ) e um plano ( $\alpha$ ) paralelos, são iguais (Figura 15).

Porque todos, pertencendo a um plano ( $\beta$ ) secante a ( $\alpha$ ), serão, enfim, segmentos paralelos entre retas paralelas (Figura 15).

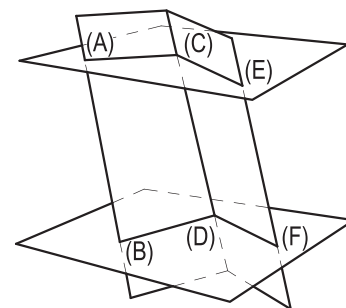


Figura 14

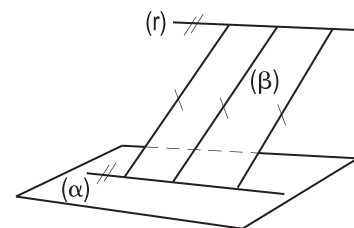


Figura 15

## 19 – Teorema

Um feixe de planos paralelos determina, sobre duas transversais quaisquer, segmentos respectivamente proporcionais.

Demonstração: Consideremos um feixe de planos paralelos e duas retas reversas (r) e (s) secantes aos planos do feixe.

Sejam  $\overline{(A)(B)}$ ,  $\overline{(B)(C)}$ , etc. e  $\overline{(R)(S)}$ ,  $\overline{(S)(T)}$ , etc. os segmentos determinados sobre as retas pelos planos (Figura 16).

Tracemos, por (A), a reta (s<sub>1</sub>), paralela a (s), a qual forma, com (r), um plano (α) que corta os planos do feixe, segundo retas paralelas (número 13).

As secantes (r) e (s<sub>1</sub>) ao feixe de retas paralelas assim formado (Figura 16) permitem (*Geometria Plana*, número 157) escrever:

$$\frac{\overline{(A)(B)}}{\overline{(A)(M)}} = \frac{\overline{(B)(C)}}{\overline{(M)(N)}} = \dots \quad (1)$$

Mas como  $\overline{(A)(M)}$ ,  $\overline{(M)(N)}$ , etc. são respectivamente iguais a  $\overline{(R)(S)}$ ,  $\overline{(S)(T)}$ , etc. (número 17), a relação (1) fornece:

$$\frac{\overline{(A)(B)}}{\overline{(R)(S)}} = \frac{\overline{(B)(C)}}{\overline{(S)(T)}} = \dots$$

Então, um feixe de planos paralelos...

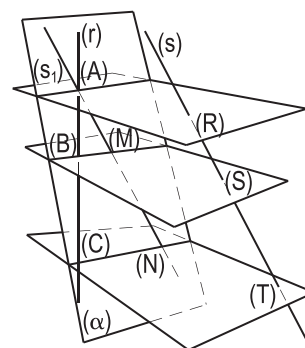


Figura 16

## 20 – Corolários

1. Quando dois pontos (A) e (B) descrevem dois planos paralelos (α) e (β), o lugar geométrico dos pontos (J) pertencentes à reta (A)(B) e que dividem o segmento  $\overline{(A)(B)}$

numa razão constante  $\frac{\overline{(J)(A)}}{\overline{(J)(B)}}$  é:

- a. um plano (γ) paralelo a (α) e a (β) e situado entre eles, se tal razão é negativa (Figura 17);
- b. um plano (δ) paralelo a (α) e a (β), mas não situado entre eles, se tal razão é positiva (Figura 18).

2. Quando dois pontos (A) e (B) descrevem, respectivamente, uma reta (r) e um plano (α), paralelos, o lugar geométrico dos pontos (J) pertencentes à reta (A)(B) e que dividem

o segmento  $\overline{(A)(B)}$  numa razão  $\frac{\overline{(J)(A)}}{\overline{(J)(B)}}$  constante é:

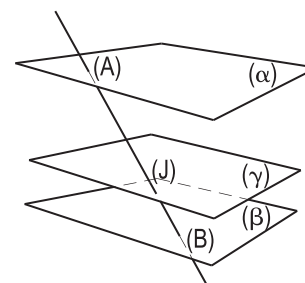


Figura 17

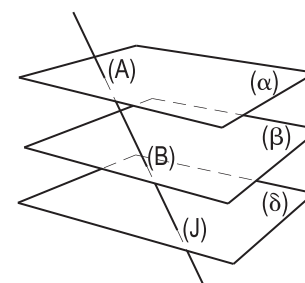


Figura 18

- a. um plano ( $\gamma$ ) paralelo a ( $\alpha$ ), situado entre ( $r$ ) e ( $\alpha$ ), se tal razão é negativa (Figura 19);
- b. um plano ( $\delta$ ) paralelo a ( $\alpha$ ), mas não situado entre ( $r$ ) e ( $\alpha$ ), se tal razão é positiva (Figura 20).

3. Dados um ponto (A) e um plano ( $\alpha$ ), exteriores, se um ponto (B) descreve ( $\alpha$ ), o lugar geométrico dos pontos (J) pertencentes à reta (A)(B) e que dividem o segmento  $\overline{(A)(B)}$  numa razão  $\frac{(J)(A)}{(J)(B)}$  constante é:

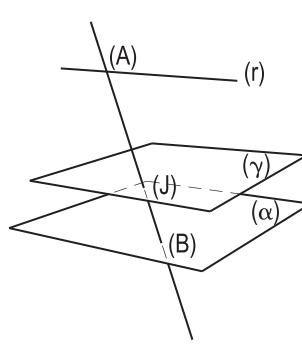


Figura 19

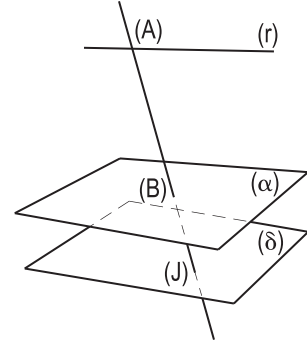


Figura 20

- a. um plano ( $\gamma$ ) paralelo a ( $\alpha$ ), situado entre (A) e ( $\alpha$ ), se tal razão é negativa (Figura 21);
- b. um plano ( $\delta$ ) paralelo a ( $\alpha$ ), mas não situado entre (A) e ( $\alpha$ ), se tal razão é positiva (Figura 22).

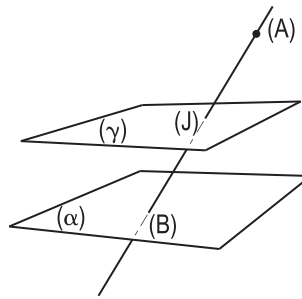


Figura 21

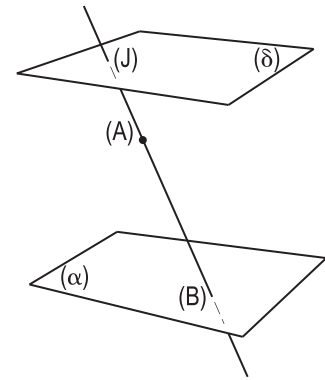


Figura 22

4. Quando dois pontos (A) e (B) descrevem duas retas reversas ( $r$ ) e ( $s$ ), o lugar geométrico dos pontos (J) pertencentes à reta (A)(B) e que dividem o segmento  $\overline{(A)(B)}$  numa razão constante é:

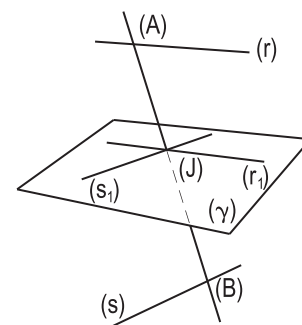


Figura 23

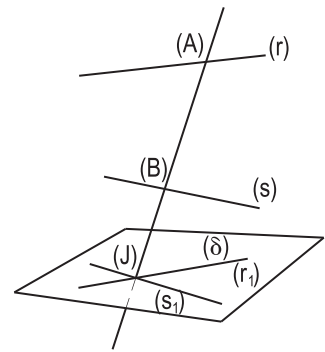


Figura 24

- a. um plano ( $\gamma$ ) paralelo às reversas ( $r$ ) e ( $s$ ) e situado entre elas, se tal razão é negativa (Figura 23);
- b. um plano ( $\delta$ ) paralelo às reversas ( $r$ ) e ( $s$ ), mas não situado entre elas, se tal razão é positiva (Figura 24).

5. O lugar geométrico dos pontos médios (M) dos segmentos  $\overline{(A)(B)}$  que se apoiam pelos extremos em duas retas reversas (r) e (s) é um plano ( $\gamma$ ) paralelo a estas retas, situado entre elas, a distâncias iguais das duas (Figura 25). Tal plano é denominado plano equidistante das reversas (r) e (s).

De fato, já se sabe (número 20.4) que o lugar geométrico procurado é um plano ( $\gamma$ ) paralelo às duas retas reversas e, naturalmente, situado entre elas.

E, como, para qualquer ponto (M), médio de um segmento  $\overline{(A)(B)}$  apoiado pelos extremos nas duas reversas (Figura 25), os triângulos retângulos (M)(A)(A') e (M)(B)(B') formados com as perpendiculares (A)(A') e (B)(B') ao plano ( $\gamma$ ) são iguais (*Geometria Plana*, número 37), este plano é equidistante de (r) e de (s).

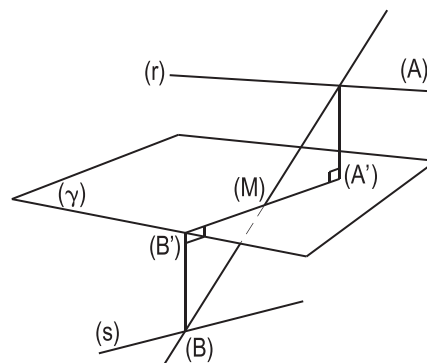


Figura 25

Aliás, a determinação do plano ( $\gamma$ ), equidistante de duas retas reversas (r) e (s), dadas, é imediata: arbitra-se um ponto (A) sobre (r) e um ponto (B) sobre (s), encontra-se o ponto médio (M) do segmento  $\overline{(A)(B)}$  e traça-se, por (M), as retas ( $r_1$ ) e ( $s_1$ ), respectivamente paralelas a (r) e a (s).

As retas ( $r_1$ ) e ( $s_1$ ), assim obtidas, definem o plano ( $\gamma$ ) procurado, tal como indicado na Figura 26.

6. Por simples associação do corolário anterior com cada um dos três primeiros elencados neste item 20, é claro que o lugar geométrico dos pontos (M) – médios dos segmentos  $\overline{(A)(B)}$ , cujos extremos descrevem dois planos paralelos ( $\alpha$ ) e ( $\beta$ ) (Figura 26), ou uma reta (r), paralela e exterior a um plano ( $\beta$ ) e o próprio ( $\beta$ ) (Figura 26), ou até, quando fixado o extremo (A), se faz (B) descrever o plano ( $\beta$ ) (Figura 26) – é o plano ( $\gamma$ ), paralelo a ( $\beta$ ) e equidistante deste plano e de ( $\alpha$ ), ou de (r), ou de (A), respectivamente.

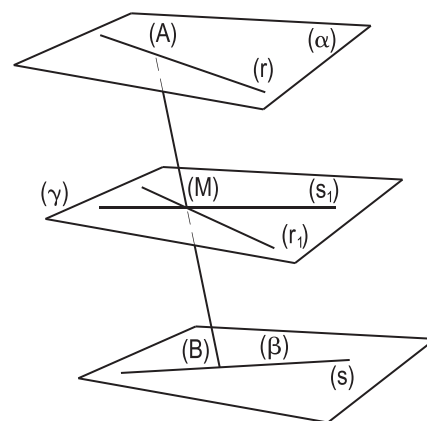


Figura 26



# CAPÍTULO II

## RETAS E PLANOS PERPENDICULARES

### 21 – Definições

Por definição, duas retas são ortogonais quando são reversas e o ângulo por elas formado é reto.

Assim, se duas retas  $(r)$  e  $(s)$  são ortogonais, as paralelas  $(r_1)$  e  $(s_1)$ , a elas traçadas por um ponto qualquer  $(J)$ , são perpendiculares entre si (Figura 27).

Por definição, uma reta é perpendicular a um plano quando é perpendicular a todas as retas do plano que passam por seu pé. Diz-se, então, que o plano é perpendicular à reta e que a reta e o plano são perpendiculares entre si (Figura 28).

Da própria definição conclui-se que, quando uma reta é perpendicular a um plano, ela é ortogonal às retas do plano que não passam pelo seu pé (Figura 29).

Quando uma reta corta um plano, mas não lhe é perpendicular, diz-se que a reta é oblíqua ao plano, ou que o plano é oblíquo à reta, ou que o plano e a reta são oblíquos.

Assim, uma reta pode pertencer a um plano, ser paralela, perpendicular ou oblíqua a ele.

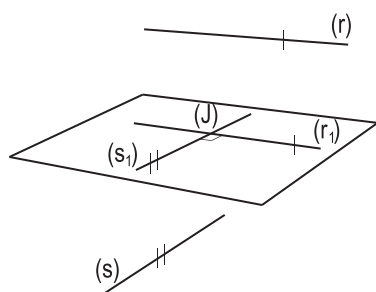


Figura 27

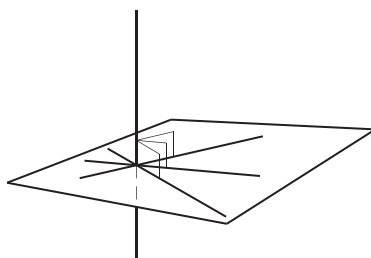


Figura 28

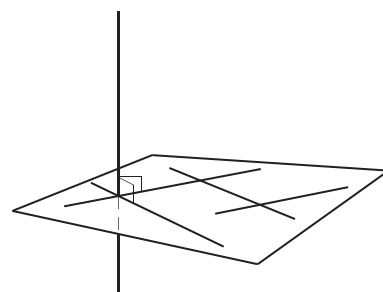


Figura 29

## 22 – Teorema

Para que uma reta seja perpendicular a um plano é suficiente que ela seja perpendicular a duas retas do plano.

Demonstração: Consideremos a reta (p) perpendicular às retas (r) e (s) do plano ( $\alpha$ ) e provemos que (p) é perpendicular a ( $\alpha$ ).

Para tanto, é preciso provar que (p) é perpendicular a todas as demais retas de ( $\alpha$ ) que passam pelo traço (O) de (p) em ( $\alpha$ ).

Consideremos, então, uma reta genérica (t) de ( $\alpha$ ) contendo (O) (Figura 30) e demonstremos que (p) é perpendicular a (t).

Sejam (A) e (B) dois pontos de (p), simétricos em relação a (O), e uma reta qualquer de ( $\alpha$ ) que corte (r), (s) e (t), respectivamente nos pontos (X), (Y) e (Z).

Porque (r) e (s) são mediatrizes do segmento  $\overline{(A)(B)}$  (Figura 30), podemos escrever:

$$\overline{(X)(A)} = \overline{(X)(B)} \text{ e } \overline{(Y)(A)} = \overline{(Y)(B)}$$

Assim, os triângulos (A)(X)(Y) e (B)(X)(Y) são iguais, por terem seus lados respectivamente iguais. E, em consequência, suas cevianas  $\overline{(A)(Z)}$  e  $\overline{(B)(Z)}$  são iguais. Logo, o triângulo (Z)(A)(B) é isósceles e, portanto, sua mediana (O)(Z), relativa à base, é também altura, ou seja, (p) e (t) são perpendiculares.

E, com raciocínio análogo, provaríamos que (p) é perpendicular às demais retas de ( $\alpha$ ) que passam por (O) e, portanto, perpendicular a ( $\alpha$ ).

Então, para que uma reta seja perpendicular a um plano é suficiente que ela seja perpendicular a duas retas do plano.

## 23 – Corolários

1. Para que uma reta seja perpendicular a um plano é suficiente que ela seja ortogonal a duas retas do plano não paralelas entre si (Figura 31).

Porque, assim sendo, ela é, necessariamente, perpendicular às paralelas àquelas duas retas traçadas pelo seu pé no plano.

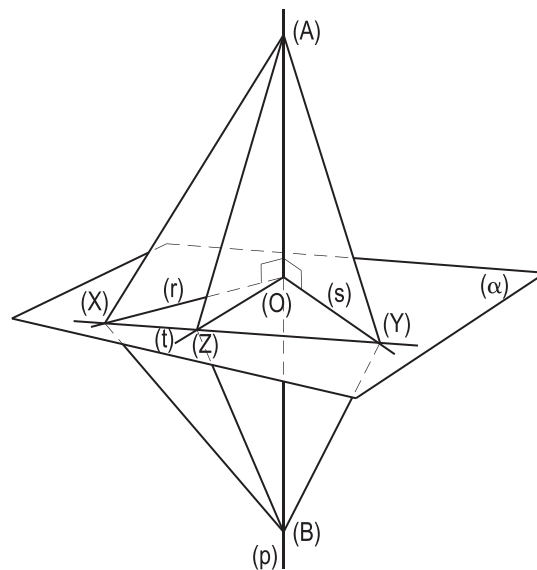


Figura 30

- De um modo geral, a condição suficiente para que uma reta (p) seja perpendicular a um plano ( $\alpha$ ) é que (p) seja perpendicular ou ortogonal a uma reta (r) e a uma reta (s), não paralelas entre si, pertencentes ou paralelas a ( $\alpha$ ).
- Dados uma reta (p) e um ponto (A), pertencente a (p), o lugar geométrico das retas pertencentes a (A) e perpendiculares a (p) é o plano ( $\alpha$ ), pertencente a (A) e perpendicular a (p) (Figura 32).
- Dados uma reta (p) e um ponto (A), exteriores, o lugar geométrico das retas pertencentes a (A) e ortogonais a (p) é o plano ( $\alpha$ ), pertencente a (A) e perpendicular a (p), exceto a reta (A)(J) formada pelo ponto (A) e pelo traço (J) de (p) em ( $\alpha$ ), pois esta é perpendicular a (p) (Figura 33).

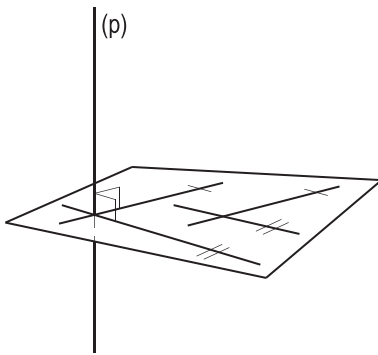


Figura 31

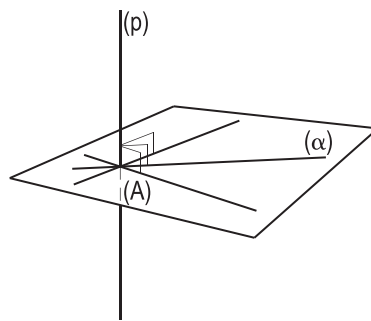


Figura 32

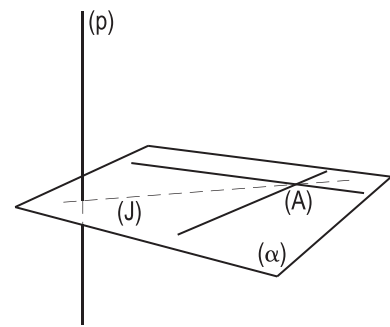


Figura 33

## 24 – Teorema

Quando se traça, por um ponto exterior a um plano, a perpendicular e várias oblíquas ao plano, limitando-as a seus traços com o plano:

- a perpendicular é menor que qualquer oblíqua;
- oblíquas que se afastam igualmente do pé da perpendicular são iguais;
- oblíquas que se afastam desigualmente do pé da perpendicular são desiguais e a que mais se afasta é a maior.

Demonstração: Consideremos (Figura 34) o plano ( $\alpha$ ) e o ponto (A), exteriores, e tracemos a perpendicular  $\overline{(A)(M)}$  e uma oblíqua genérica  $\overline{(A)(B)}$  ao plano. Unamos (M) a (B) e observemos que  $\overline{(A)(M)}$ , sendo perpendicular a ( $\alpha$ ), será também perpendicular a  $\overline{(M)(B)}$ . E como  $\overline{(A)(B)}$  é oblíqua a esta reta, temos (*Geometria Plana*, número 40.1):

$$\overline{(A)(M)} < \overline{(A)(B)}$$

E como a oblíqua  $\overline{(A)(B)}$  é genérica, conclui-se que a perpendicular  $\overline{(A)(M)}$  é menor que qualquer oblíqua a ( $\alpha$ ), ficando, pois, demonstrada a primeira parte do teorema.

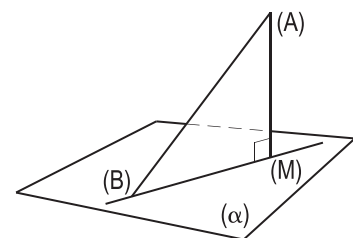


Figura 34

Voltemos a considerar  $(A)$  e  $(\alpha)$  e, tracemos, por  $(A)$ , as oblíquas  $\overline{(A)(B)}$ ,  $\overline{(A)(C)}$ ,  $\overline{(A)(D)}$ , etc., igualmente afastadas do pé da perpendicular  $\overline{(A)(M)}$ , isto é, tais que  $\overline{(M)(B)} = \overline{(M)(C)} = \overline{(M)(D)} = \dots$  (Figura 35).

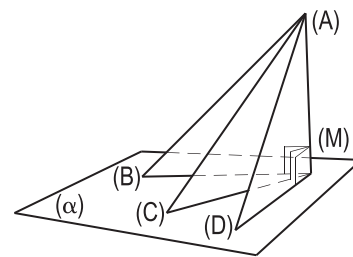


Figura 35

Assim, os triângulos retângulos  $(A)(M)(B)$ ,  $(A)(M)(C)$ ,  $(A)(M)(D)$ , etc. serão todos iguais.

Logo,  $\overline{(A)(B)} = \overline{(A)(C)} = \overline{(A)(D)} = \dots$ ,

relação que demonstra a segunda parte do teorema.

Consideremos, finalmente, pelo ponto  $(A)$  – exterior a  $(\alpha)$  –, as oblíquas  $\overline{(A)(B)}$  e  $\overline{(A)(D)}$  a  $(\alpha)$ , desigualmente afastadas do pé da perpendicular  $\overline{(A)(M)}$  a  $(\alpha)$ , e tais que  $\overline{(M)(D)} > \overline{(M)(B)}$  e marquemos, sobre  $\overline{(M)(D)}$ , o ponto  $(J)$ , tal que  $\overline{(M)(J)} = \overline{(M)(B)}$  (Figura 36).

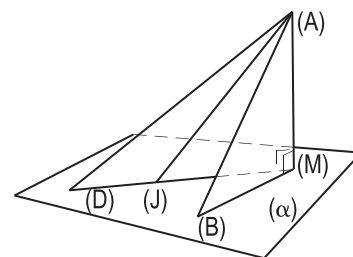


Figura 36

Do que se provou na segunda parte deste teorema, concluímos que:

$$\overline{(A)(J)} = \overline{(A)(B)} \quad (1)$$

Mas como  $\overline{(M)(D)} > \overline{(M)(J)}$  (*Geometria Plana*, número 40.3), temos:

$$\overline{(A)(D)} > \overline{(A)(J)} \quad (2)$$

As relações (1) e (2) fornecem:  $\overline{(A)(D)} > \overline{(A)(B)}$ , o que demonstra a terceira parte do teorema.

Então, quando se traça...

## 25 – Observação

As recíprocas são verdadeiras, tendo demonstrações semelhantes à do teorema direto.

## 26 – Definições

Distância de um ponto a um plano é o valor do segmento de perpendicular do ponto ao plano, limitado entre o ponto e o plano.

Distância entre dois planos paralelos é o valor do segmento de perpendicular a eles, compreendido entre eles.

Distância entre uma reta e um plano, paralelos, é o valor do segmento de perpendicular ao plano, limitado entre a reta e o plano.

É claro que a distância de um plano (ou de uma reta) a um plano paralelo pode ser medida pela distância de um ponto qualquer do plano (ou da reta) ao plano paralelo.

## 27 – Teorema

Dados um plano e um ponto a ele exterior, o lugar geométrico dos pontos pertencentes ao plano e que distam um valor constante do ponto exterior é um círculo.

Demonstração: Sejam um plano  $(\alpha)$  e um ponto  $(A)$ , distante  $d$  de  $(\alpha)$ , e determinemos o lugar geométrico dos pontos pertencentes a  $(\alpha)$  e distantes de  $(A)$  de um valor constante  $k$ , naturalmente maior que  $d$ .

Para tanto, consideremos as oblíquas  $\overline{(A)(B)} = k$  ao plano (Figura 37). Tais oblíquas, sendo iguais, devem se afastar igualmente do pé  $(M)$  da perpendicular de  $(A)$  ao plano (número 25). Assim, o lugar geométrico dos pontos  $(B)$ , pés daquelas oblíquas iguais, é um círculo pertencente a  $(\alpha)$ , tendo por centro a projeção ortogonal  $(M)$  de  $(A)$  sobre  $(\alpha)$  e raio igual ao segundo cateto de um triângulo retângulo, cujo primeiro cateto vale  $d$  e cuja hipotenusa vale  $k$  (Figura 37).

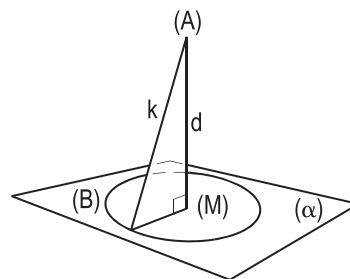


Figura 37

Então, dados um plano e um ponto a ele exterior, o lugar geométrico dos pontos pertencentes ao plano e que distam um valor constante do ponto exterior é um círculo.

## 28 – Observação

Para que exista o lugar geométrico dos pontos  $(B)$  pertencentes a  $(\alpha)$  e distantes  $k$  de  $(A)$  (Figura 37) é necessário e suficiente que  $k > d$ .

De fato, se  $k = d$ , apenas o ponto  $(M)$ , projeção de  $(A)$  sobre  $(\alpha)$ , atende à propriedade imposta e se  $k < d$ , não há qualquer ponto de  $(\alpha)$  que obedeça à condição.

## 29 – Teorema das três perpendiculares

Se do pé de uma reta perpendicular a um plano se traça a perpendicular a uma reta dada do plano (e não concorrente com a primeira), toda reta formada pelo ponto comum às duas últimas e por um ponto qualquer da primeira é perpendicular à reta dada do plano.

Demonstração: Admitamos dados um plano  $(\alpha)$ , uma reta  $(r)$  perpendicular a  $(\alpha)$  e uma reta  $(s)$ , de  $(\alpha)$ , não pertencente ao ponto  $(O)$ , traço de  $(r)$  em  $(\alpha)$ , e tracemos  $(O)(M)$  perpendicular a  $(s)$  (Figura 38).

Queremos provar que a reta formada pelo ponto  $(M)$  e por um ponto  $(A)$  qualquer de  $(r)$  é perpendicular à reta  $(s)$ . Para tanto, tomemos, sobre  $(s)$ , os pontos  $(B)$  e  $(C)$ , simétricos em relação a  $(M)$ , e unamo-los a  $(A)$  e a  $(O)$  (Figura 38).

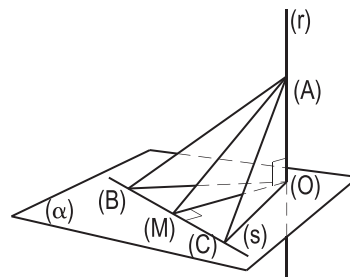


Figura 38

Porque  $(O)(M)$  é a mediatriz de  $\overline{(B)(C)}$ , os segmentos  $\overline{(O)(B)}$  e  $\overline{(O)(C)}$  são iguais e, conseqüentemente, serão iguais as oblíquas  $\overline{(A)(B)}$  e  $\overline{(A)(C)}$  ao plano (número 24.2).

Assim, o triângulo  $(A)(B)(C)$  será isósceles e, então, sua mediana  $(A)(M)$ , relativa à base  $(B)(C)$ , será também altura. Isto é,  $(A)(M)$  será perpendicular à reta  $(s)$  (Figura 38).

Então, se do pé de uma reta perpendicular...

### 30 – Recíprocas

1. Se, de um ponto qualquer de uma reta perpendicular a um plano se traça a perpendicular a uma reta do plano (não concorrente com a primeira), a reta formada pelos pés das duas perpendiculares é perpendicular à reta do plano.
2. Se, de um ponto exterior a um plano se traça uma perpendicular a uma reta qualquer do plano e pelo pé dessa perpendicular se traça – no plano – a perpendicular àquela reta do plano, a perpendicular traçada do ponto exterior a esta última reta é também perpendicular ao plano.

As demonstrações dessas recíprocas são semelhantes à do teorema direto.

### 31 – Perpendicular comum a duas retas reversas

Dadas duas retas reversas, existe sempre uma, e somente uma, perpendicular a elas, denominada perpendicular comum às reversas dadas.

Consideremos duas retas reversas  $(r)$  e  $(s)$  e tracemos, por um ponto  $(E)$  qualquer de  $(s)$ , a reta  $(r_1)$  paralela a  $(r)$ , obtendo-se o plano  $(\alpha)$  das retas  $(s)$  e  $(r_1)$  (Figura 39).

Por um ponto  $(F)$  qualquer de  $(r)$ , construímos a perpendicular a  $(\alpha)$  e determinemos sua interseção  $(G)$  com  $(\alpha)$ . Por  $(G)$ , tracemos nova paralela a  $(r)$ , a qual corta  $(s)$  segundo o ponto  $(B)$  e, finalmente, por  $(B)$ , construímos a reta  $(p)$ , paralela a  $(F)(G)$ , que encontra  $(r)$  em  $(A)$ . A reta  $(A)(B)$  (Figura 39) é a perpendicular comum procurada.

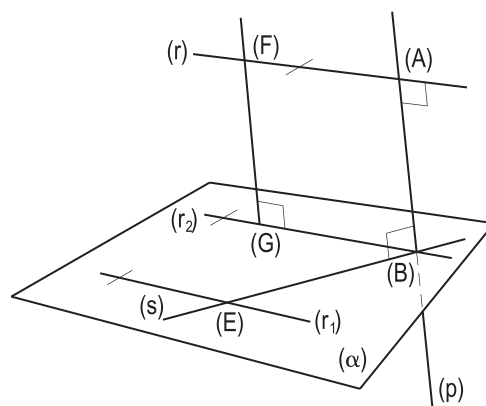


Figura 39

De fato, porque a reta  $(F)(G)$  foi traçada perpendicularmente a  $(\alpha)$ ,  $(F)(G)$  é ortogonal a  $(s)$ . E é perpendicular a  $(r)$ , porque  $(r)$  e  $(\alpha)$  são, por construção, paralelos (Figura 39). E como  $(p)$  é paralela a  $(F)(G)$  e concorrente com  $(r)$  e com  $(s)$ ,  $(p)$  é mesmo perpendicular às reversas  $(r)$  e  $(s)$ . E mais: a perpendicular comum  $(p)$  é única, uma vez que é único o ponto  $(B)$ , obtido pela construção acima descrita (Figura 39).

### 32 – Distância entre duas retas reversas

Dentre todos os segmentos que se apoiam pelos extremos em duas retas reversas (r) e (s), o menor é o perpendicular comum  $\overline{(A)(B)}$  àquelas reversas (Figura 40).

De fato, consideremos os pontos (C) e (F), arbitrariamente escolhidos sobre (s) e (r), bem como a paralela  $(r_1)$  a (r), traçada por (B) (Figura 40) e observemos que os triângulos retângulos (A)(B)(C) e (F)(G)(C) permitem escrever:

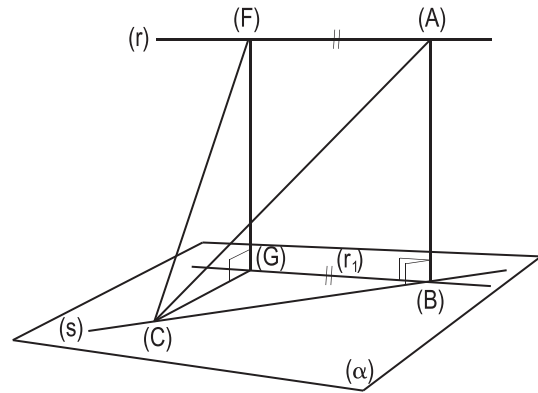


Figura 40

$$\overline{(A)(B)} < \overline{(A)(C)} \quad (1)$$

$$\overline{(F)(G)} < \overline{(C)(F)} \quad (2)$$

$$\text{Mas, como paralelas entre paralelas, } \overline{(F)(G)} = \overline{(A)(B)} \quad (3)$$

$$\text{As relações (2) e (3) fornecem: } \overline{(A)(B)} < \overline{(C)(F)} \quad (4)$$

As relações (1) e (4) provam que  $\overline{(A)(B)}$  é mesmo o menor segmento que se pode apoiar em (r) e (s).

O valor do segmento  $\overline{(A)(B)}$  é, então, denominado distância entre as reversas (r) e (s). Assim, distância entre duas retas reversas é o valor do segmento da perpendicular comum às duas reversas, limitado entre elas.

### 33 – Plano mediador

Plano mediador de um segmento de reta é o plano que contém o ponto médio do segmento e que lhe é perpendicular.

Porque o plano mediador  $(\alpha)$  de um segmento  $\overline{(A)(B)}$  é o lugar geométrico das mediatrizes de  $\overline{(A)(B)}$  (número 23.3), conclui-se que  $(\alpha)$  é também o lugar geométrico dos pontos equidistantes de (A) e de (B) (Figura 41).

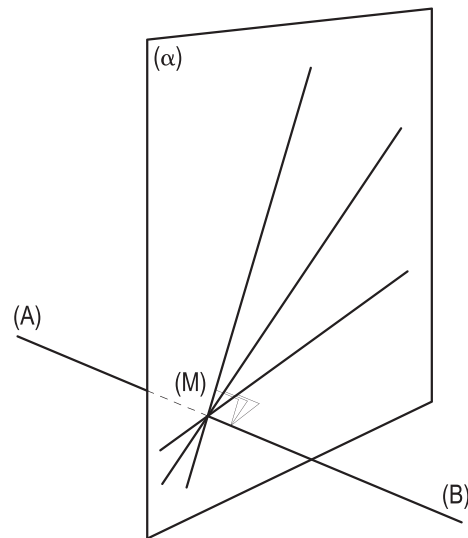


Figura 41

### 34 – Aplicações

1. O lugar geométrico dos pontos equidistantes dos vértices de um triângulo (A)(B)(C) é a reta (r) perpendicular ao plano do triângulo e pertencente ao seu circuncentro (Figura 42). De fato, (r) é a reta comum aos planos mediadores dos lados do triângulo (A)(B)(C).
2. Assim, o lugar geométrico dos centros de todas as superfícies esféricas que passam por três pontos não colineares (A), (B) e (C) é a reta (r) perpendicular ao plano (A)(B)(C) e pertencente ao circuncentro do triângulo (A)(B)(C) (Figura 42).
3. Dados quatro pontos (A), (B), (C) e (D), não coplanares, existe um ponto, e um só, equidistante dos dados. De fato, o ponto procurado (O) deve pertencer a (r), perpendicular ao plano do triângulo (A)(B)(C), traçada pelo seu circuncentro, para equidistar de (A), de (B) e de (C), e ao plano ( $\alpha$ ), mediador de (A)(D), para equidistar de (A) e de (D), sendo, pois, a interseção de (r) com ( $\alpha$ ) (Figura 43).

O ponto (O) é único por pertencer, necessariamente, aos planos mediadores de todos os segmentos que podem ser formados com os quatro pontos dados, tomados dois a dois, visto que, das equidistâncias assumidas, pode-se anotar:  $\overline{(O)(A)} = \overline{(O)(B)} = \overline{(O)(C)} = \overline{(O)(D)}$ .

Ele é, como adiante se verá (número 183.4), o centro da superfície esférica pertencente aos quatro pontos dados.

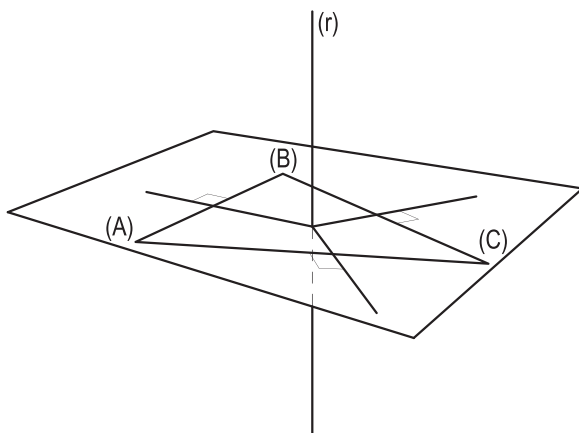


Figura 42

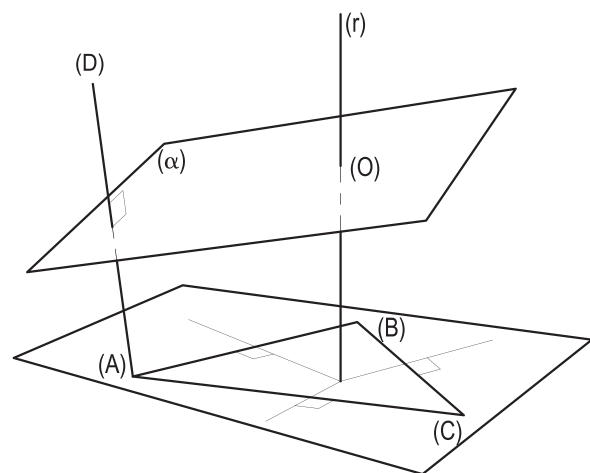


Figura 43



# CAPÍTULO III

## ÂNGULOS DIEDROS

### 35 – Definições

Ângulo diedro, ou simplesmente diedro, é a figura formada por dois semiplanos limitados pela mesma reta, isto é, possuindo a mesma reta origem.

Os semiplanos são denominados faces e a reta, comum a eles, aresta do diedro (Figura 44).

Ângulo plano ou ângulo retilíneo de um diedro é o ângulo formado por duas semirretas, traçadas por um ponto qualquer da aresta, perpendiculares à aresta e pertencentes, cada uma, a cada uma das faces do diedro (Figura 45).

### 36 – Observações

1. Todo diedro possui uma infinidade de ângulos planos, todos iguais entre si, como ângulos de lados respectivamente paralelos (Figura 46). Daí podermos concluir que o valor do ângulo plano depende apenas do diedro a que pertence ou, o que é o mesmo, que um diedro pode ser medido pelo valor de seu ângulo plano. Assim, quando se diz que um diedro tem tantos graus, tal afirmação significa que esses tantos graus correspondem ao valor de seu ângulo plano.

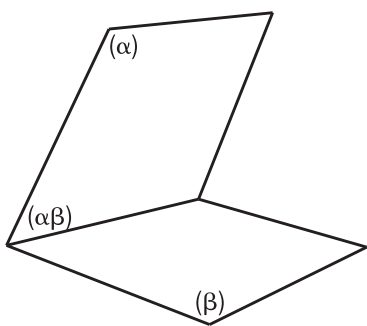


Figura 44

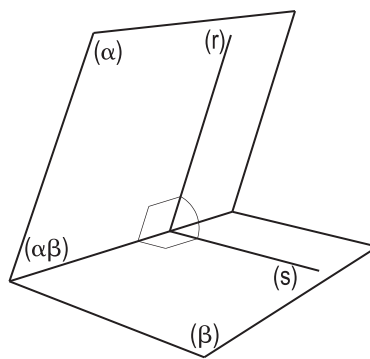


Figura 45

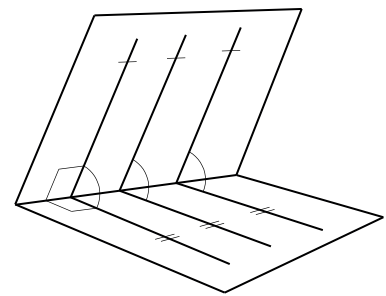


Figura 46

2. Para obter um ângulo plano de um diedro, basta seccionar o diedro por um plano perpendicular à sua aresta, pois as interseções deste plano com as faces do diedro serão os lados do ângulo plano (Figura 47).
3. Se de um ponto (J) interior a um diedro (Figura 48), baixarmos as perpendiculares às faces do diedro, o ângulo formado por essas semirretas será o suplemento do ângulo plano do diedro (*Geometria Plana*, número 63.2).

Assim, para medir o ângulo plano de um diedro, ou seja, para medir o diedro, basta baixar, de um ponto (J) qualquer interior a ele, as perpendiculares às suas faces, pois o ângulo procurado será o suplemento do ângulo formado por essas perpendiculares (Figura 48).

### 37 – Definições

Dois diedros são adjacentes quando possuem a aresta e uma face comum, estando esta face situada entre as não comuns (Figura 49).

Dois diedros são opostos pela aresta quando as faces de um são os prolongamentos das faces do outro (Figura 50).

Por definição, dois planos são perpendiculares quando formam dois diedros adjacentes iguais. Os diedros assim formados são denominados diedros retos (Figura 51).

Um diedro é agudo ou obtuso conforme, respectivamente, seja menor ou maior que o diedro reto.

Dois diedros são ditos complementares, suplementares ou replementares conforme, respectivamente, sua soma seja igual a um, dois ou quatro diedros retos. Cada um dos diedros é, então, respectivamente denominado complemento, suplemento e replemento do outro.

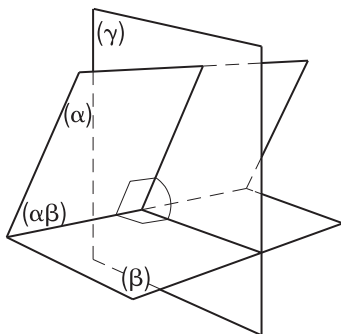


Figura 47

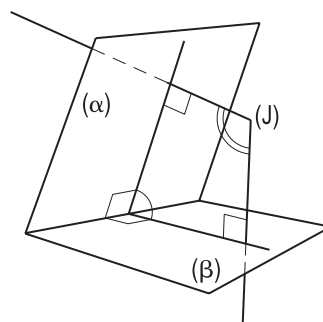


Figura 48

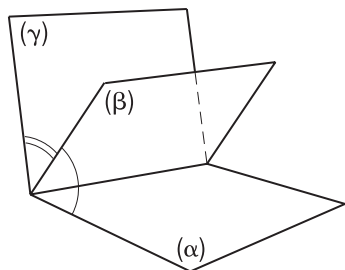


Figura 49

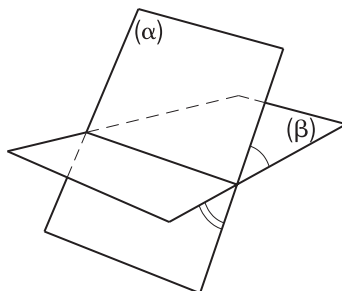


Figura 50

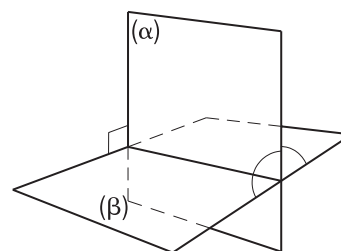


Figura 51

### 38 – Propriedades

1. Diedros agudos têm ângulos planos agudos.
2. Diedros obtusos têm ângulos planos obtusos.
3. Dois diedros complementares, suplementares ou replementares têm ângulos planos, respectivamente, complementares, suplementares ou replementares.
4. Quando as faces não comuns de dois diedros adjacentes formam um plano, os diedros são suplementares (Figura 52).
5. A soma de todos os diedros consecutivos, de mesma aresta, situados num dos semiespaços formados por um plano que contém a aresta comum é igual a dois diedros retos (Figura 53).
6. A soma de todos os diedros consecutivos formados por semiplanos distintos que possuem a mesma reta origem é igual a quatro diedros retos (Figura 54).

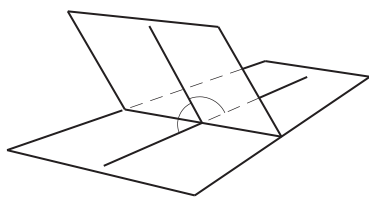


Figura 52

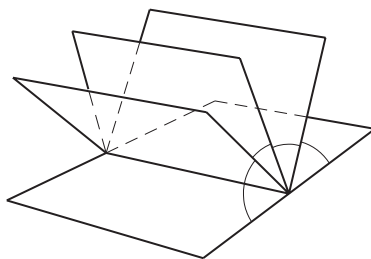


Figura 53

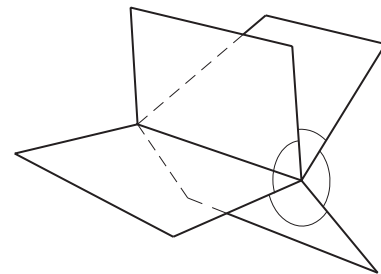


Figura 54

### 39 – Teorema

Quando dois planos são perpendiculares, toda reta pertencente a um deles e perpendicular à interseção dos dois planos é perpendicular ao outro plano.

Demonstração: Consideremos os planos perpendiculares  $(\alpha)$  e  $(\beta)$  e a reta  $(r)$  pertencente a  $(\alpha)$  e perpendicular à interseção  $(\alpha \beta)$  dos dois planos (Figura 55).

Queremos provar que  $(r)$  é perpendicular a  $(\beta)$ .

Para isso, tracemos, pelo ponto em que  $(r)$  corta  $(\beta)$ , a reta  $(s)$  pertencente a  $(\beta)$  e perpendicular à interseção  $(\alpha \beta)$  dos dois planos (Figura 55).

Assim,  $(r)$  e  $(s)$  constituirão um ângulo plano de um dos diedros retos formados por  $(\alpha)$  e  $(\beta)$  e, por isso (número 37), serão perpendiculares. Mas, então,  $(r)$  será perpendicular a duas retas de  $(\beta)$  –  $(s)$  e  $(\alpha \beta)$  –, logo (número 22) será perpendicular a  $(\beta)$ .

Então, quando dois planos...

## 40 – Teorema

Para que um plano seja perpendicular a um outro é suficiente que ele pertença a uma reta perpendicular a este outro plano.

Demonstração: Consideremos uma reta  $(r)$  e um plano  $(\beta)$ , perpendiculares, bem como um plano  $(\alpha)$  pertencente a  $(r)$  (Figura 55) e tracemos, pelo traço de  $(r)$  em  $(\beta)$ , a reta  $(s)$  perpendicular à interseção  $(\alpha \beta)$  dos dois planos.

Como, por hipótese,  $(r)$  é perpendicular a  $(\beta)$ ,  $(r)$  será perpendicular a  $(\alpha \beta)$  e a  $(s)$ . E, assim, o ângulo plano de um dos diedros formados por  $(\alpha)$  e  $(\beta)$ , cujos lados são  $(r)$  e  $(s)$ , será reto. E, por isso,  $(\alpha)$  será perpendicular a  $(\beta)$ .

Então, para que um plano...

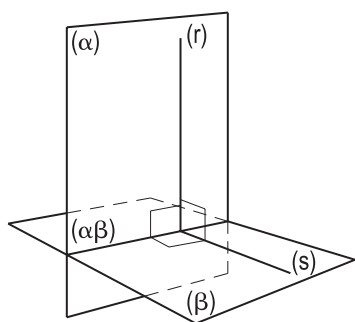


Figura 55

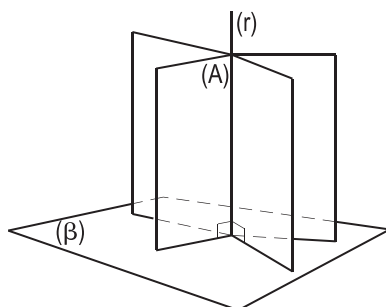


Figura 56

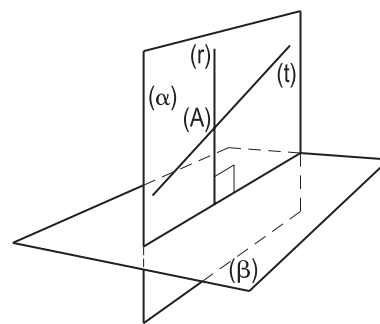


Figura 57

## 41 – Corolários

1. Por um ponto dado  $(A)$  pode-se construir uma infinidade de planos perpendiculares a um plano dado  $(\beta)$ . Todos os que contêm a reta  $(r)$  pertencente a  $(A)$  e perpendicular a  $(\beta)$  (Figura 56).
2. Por uma reta dada  $(r)$ , perpendicular a um plano dado  $(\beta)$ , pode-se construir uma infinidade de planos perpendiculares a  $(\beta)$ . Todos os que pertencem a  $(r)$  (Figura 56).
3. Por uma reta dada  $(t)$ , não perpendicular a um plano dado  $(\beta)$ , é sempre possível traçar um – e apenas um – plano  $(\alpha)$  perpendicular a  $(\beta)$ : o formado por  $(t)$  e pela perpendicular  $(r)$  a  $(\beta)$  traçada por um ponto  $(A)$  qualquer de  $(t)$  (Figura 57).

A reta  $(t)$ , não perpendicular a  $(\beta)$ , pode ser oblíqua a  $(\beta)$ , como apresentado na Figura 57, ou paralela a  $(\beta)$ , o que não altera a conclusão acima encontrada.

# CAPÍTULO IV

## RETA DE MÁXIMO DECLIVE

### 42 – Teorema do ângulo reto

Quando um ângulo reto tem um lado paralelo (ou pertencente) e o outro não perpendicular a um plano, sua projeção ortogonal sobre este plano é outro ângulo reto.

Demonstração: Consideremos o ângulo reto  $(A)(\hat{O})(B)$  a ser projetado ortogonalmente sobre o plano  $(\alpha)$  e admitamos que o lado  $(O)(A)$  seja paralelo e o lado  $(O)(B)$  oblíquo a  $(\alpha)$  (Figura 58).

Da própria hipótese decorre que a projeção  $OA$  do lado  $(O)(A)$  sobre  $(\alpha)$  é paralela a este lado  $(O)(A)$ .

Assim, o plano  $(\beta)$ , pertencente a  $(O)$  e perpendicular a  $(O)(A)$  – ao qual pertence o lado  $(O)(B)$  (número 23.3) –, é também perpendicular a  $OA$  e, conseqüentemente, perpendicular a  $(\alpha)$  (número 40), sendo, então, o próprio plano projetante de  $(O)(B)$  (Figura 58).

Por isso, a projeção  $OB$  do lado  $(O)(B)$  sobre  $(\alpha)$  pertencerá à interseção dos planos  $(\alpha)$  e  $(\beta)$ .

E como  $OA$  é perpendicular a  $(\beta)$ , concluímos que  $OA$  é perpendicular a  $OB$  (número 21), ou seja, que o ângulo  $A\hat{O}B$ , projeção ortogonal do ângulo reto  $(A)(\hat{O})(B)$  considerado, sobre  $(\alpha)$ , é reto também.

Como, finalmente, nada se alteraria, na demonstração, se  $(O)(A)$  pertencesse (ao invés de ser paralelo) a  $(\alpha)$ , fica provado que, quando um ângulo reto tem um lado paralelo (ou pertencente) e o outro lado não perpendicular a um plano, sua projeção ortogonal sobre este plano é outro ângulo reto.

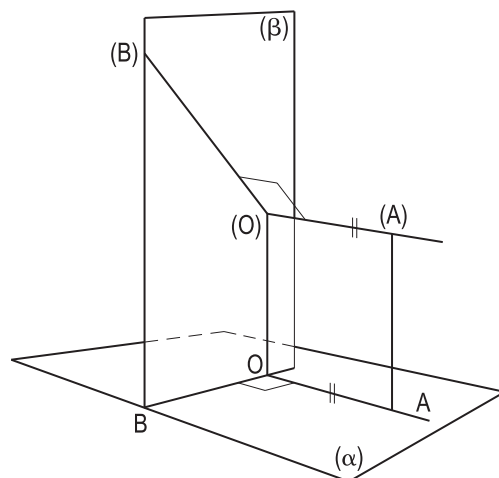


Figura 58

### 43 – Observações

1. Quando um dos lados – como  $(O)(B)$ , na Figura 59 – é perpendicular ao plano  $(\alpha)$ , o outro,  $(O)(A)$ , é necessariamente paralelo (ou pertencente) a  $(\alpha)$ , mas a projeção do ângulo sobre  $(\alpha)$  reduz-se a uma semirreta (Figura 59), uma vez que a projeção do lado  $(O)(B)$  sobre  $(\alpha)$  é apenas um ponto.
2. Reunindo o teorema do ângulo reto e a observação anterior, concluímos que a condição necessária e suficiente para que um ângulo reto se projete ortogonalmente sobre um plano segundo outro ângulo reto é que um de seus lados seja paralelo (Figura 58) – ou pertencente (Figura 60) – ao plano e que o outro lado não seja perpendicular ao plano.

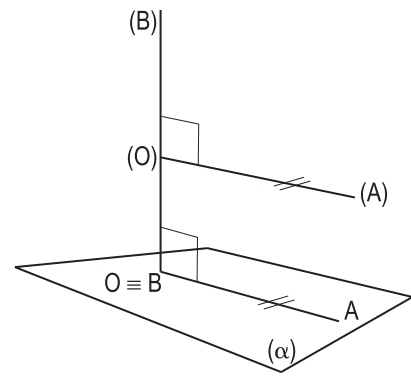


Figura 59

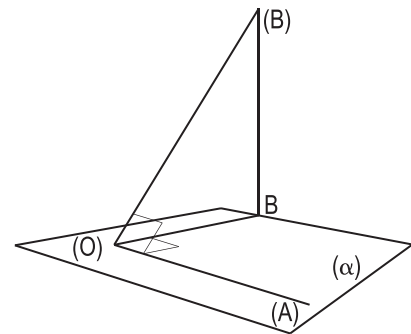


Figura 60

### 44 – Ângulo de reta com plano

Por definição, dados um plano  $(\alpha)$  e uma reta  $(r)$  oblíqua a  $(\alpha)$ , o ângulo que  $(r)$  forma com  $(\alpha)$  é o ângulo que  $(r)$  forma com sua projeção ortogonal sobre  $(\alpha)$  –  $\hat{x}$  na Figura 61.

Da própria definição decorre que o ângulo  $\hat{y}$  que  $(r)$  forma com uma reta perpendicular a  $(\alpha)$  é o complemento do ângulo  $\hat{x}$  que  $(r)$  forma com  $(\alpha)$  (Figura 61).

Assim, para obter o ângulo que uma reta  $(r)$  forma com um plano oblíquo a ela, basta traçar por um ponto  $(J)$  qualquer de  $(r)$  a reta  $(p)$ , perpendicular a  $(\alpha)$  (Figura 62), e medir o ângulo  $\hat{y}$  entre  $(r)$  e  $(p)$ . O ângulo  $\hat{x}$ , procurado, será o complemento de  $\hat{y}$ .

Quando a reta é perpendicular ao plano, o ângulo que ela forma com o plano é reto.

Quando, enfim, a reta é paralela ao plano, ela forma um ângulo nulo com ele.

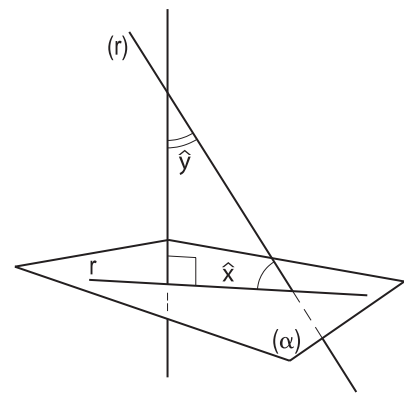


Figura 61

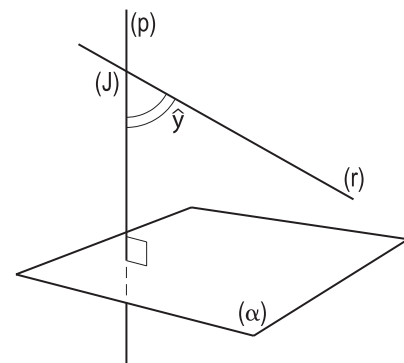


Figura 62

## 45 – Teorema

Quando uma reta é oblíqua a um plano, o ângulo que ela forma com o plano é menor que o ângulo que ela forma com uma reta genérica do plano.

Demonstração: Consideremos um plano  $(\alpha)$ , uma reta  $(r)$  oblíqua a ele, a projeção  $r$  de  $(r)$  sobre  $(\alpha)$  e uma reta genérica  $(s)$  pertencente a  $(\alpha)$  e estudemos os ângulos  $\hat{x}$  e  $\hat{y}$  que  $(r)$  forma com  $(\alpha)$  e com  $(s)$ , respectivamente.

Para tanto, tracemos, pelo ponto  $(O)$  em que  $(r)$  corta  $(\alpha)$ , a reta  $(s_1)$  paralela a  $(s)$  – e, então, pertencente a  $(\alpha)$  – e arbitremos um ponto  $(A)$  sobre  $(r)$ , marcando, sobre  $(s_1)$ , um segmento  $(O)(C)$  igual à projeção  $(O)(B)$  de  $(O)(A)$  sobre o plano  $(\alpha)$  (Figura 63).

Os triângulos  $(O)(A)(B)$  e  $(O)(A)(C)$  têm dois lados respectivamente iguais –  $(O)(A)$  comum e  $(O)(B) = (O)(C)$  – e os terceiros  $(A)(B)$  e  $(A)(C)$  diferentes. Assim, ao menor destes lados –  $(A)(B)$  (número 24.1) – se opõe o menor dos terceiros ângulos dos dois triângulos (*Geometria Plana*, número 44).

$$\text{Logo, } \hat{x} < \hat{y}$$

Como a reta  $(s)$  é genérica, tal relação demonstra o teorema.

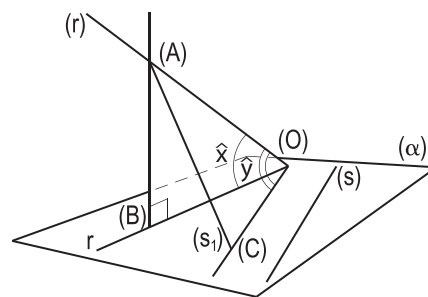


Figura 63

## 46 – Teorema

Dados dois planos não paralelos  $(\alpha)$  e  $(\beta)$ , a reta pertencente a  $(\alpha)$  e perpendicular à interseção dos dois planos forma com  $(\beta)$  um ângulo maior que o ângulo que uma reta genérica de  $(\alpha)$  forma com  $(\beta)$ .

Demonstração: Consideremos dois planos oblíquos  $(\alpha)$  e  $(\beta)$  e duas retas  $(A)(E)$  e  $(A)(F)$  de  $(\alpha)$ , a primeira perpendicular e a segunda oblíqua à interseção  $(\alpha \beta)$  dos dois planos (Figura 64).

Projetemos as retas  $(A)(E)$  e  $(A)(F)$  sobre  $(\beta)$ , obtendo, respectivamente, as retas  $(B)(E)$  e  $(B)(F)$  (Figura 64).

Sejam  $\hat{x}$  e  $\hat{y}$  os ângulos que estas retas formam, respectivamente, com  $(\beta)$ , ou seja, com suas respectivas projeções sobre  $(\beta)$ . Queremos provar que  $\hat{x}$  é maior que  $\hat{y}$ .

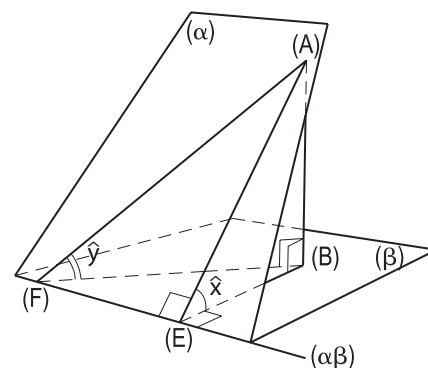


Figura 64

Para tanto, consideremos os triângulos retângulos (A)(B)(E) e (A)(B)(F) que têm o cateto (A)(B) comum (Figura 64).

Pelo teorema do ângulo reto (número 42), sabemos que, se (A)(E) é perpendicular à interseção  $(\alpha \beta)$  dos dois planos considerados, sua projeção (B)(E) sobre  $(\beta)$  também é perpendicular a essa interseção.

Por isso, concluímos (*Geometria Plana*, número 40.1) que  $\overline{(B)(E)} < \overline{(B)(F)}$  (Figura 64).

Assim, se efetuarmos a rotação do triângulo (A)(B)(E) em torno do cateto  $\overline{(A)(B)}$ , até que ele venha a pertencer ao plano do triângulo (A)(B)(F), o ponto  $(E_1)$ , resultante da rotação de (E), ficará situado entre os pontos (B) e (F). Então o triângulo (A)(F)( $E_1$ ), agora formado (Figura 65), fornece:

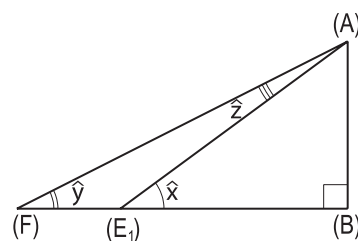


Figura 65

$$\hat{x} = \hat{y} + \hat{z} \quad \therefore \quad \hat{x} > \hat{y}$$

Se, finalmente,  $(\alpha)$  e  $(\beta)$  fossem perpendiculares, seria imediato concluir que  $\hat{x} > \hat{y}$ , pois  $\hat{x}$  seria um ângulo reto e  $\hat{y}$  agudo (Figura 66).

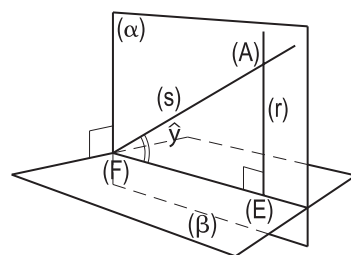


Figura 66

Então, dados dois planos não paralelos...

## 47 – Reta de máximo declive

Por definição, reta de máximo declive de um plano  $(\alpha)$  em relação a outro plano  $(\beta)$  é a reta de  $(\alpha)$  que forma, com  $(\beta)$ , o maior ângulo possível. É também, comumente, chamada reta de maior declive de  $(\alpha)$  em relação a  $(\beta)$ .

Do que se provou acima (número 46), pode-se, então, concluir que:

1. a reta (A)(E) de máximo declive de um plano  $(\alpha)$  em relação a outro plano  $(\beta)$  é perpendicular à interseção  $(\alpha \beta)$  dos dois planos (Figuras 64 e 66);
2. quando os planos  $(\alpha)$  e  $(\beta)$  são oblíquos (Figura 64), a projeção da reta de máximo declive de  $(\alpha)$  em relação a  $(\beta)$ , sobre  $(\beta)$ , é também perpendicular à interseção  $(\alpha \beta)$  dos dois planos, sendo, assim, reciprocamente, de máximo declive de  $(\beta)$  em relação a  $(\alpha)$ ;
3. quando os dois planos  $(\alpha)$  e  $(\beta)$  são perpendiculares (Figura 66), a reta (A)(E) de máximo declive de  $(\alpha)$  em relação a  $(\beta)$  é perpendicular a  $(\beta)$ , sendo, então, ainda, perpendicular à interseção dos dois planos.



## 48 – Observações

1. Quando dois planos  $(\alpha)$  e  $(\beta)$  são paralelos, não existe, evidentemente, reta de máximo declive de um em relação ao outro.
2. Em verdade, dados dois planos não paralelos  $(\alpha)$  e  $(\beta)$ , existe uma infinidade de retas de máximo declive de  $(\alpha)$  em relação a  $(\beta)$ , naturalmente todas paralelas entre si (Figura 67).

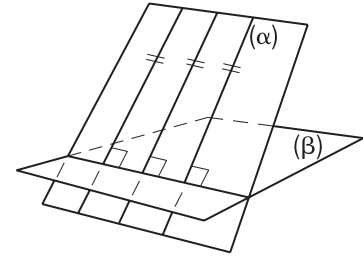


Figura 67

Única é, portanto, a direção de maior declive de  $(\alpha)$  em relação a  $(\beta)$ .

## 49 – Teorema

Um plano  $(\alpha)$  fica precisamente determinado quando são dados um plano  $(\beta)$  e uma reta  $(r)$  oblíqua a  $(\beta)$  e se sabe que  $(r)$  é uma reta de máximo declive de  $(\alpha)$  em relação a  $(\beta)$ .

Demonstração: Admitamos dados um plano  $(\beta)$  e uma reta  $(r)$  – oblíqua a  $(\beta)$  –, por hipótese de máximo declive de um certo plano  $(\alpha)$ , em relação ao plano dado  $(\beta)$ , e procuremos precisar a posição de  $(\alpha)$ .

Já sabemos (número 47.1) que a interseção do plano procurado  $(\alpha)$  com o dado  $(\beta)$  deve ser perpendicular a  $(r)$ . E como aquela interseção deve pertencer ao traço  $(O)$  de  $(r)$  em  $(\beta)$ , ela deve pertencer ao plano  $(\gamma)$ , perpendicular a  $(r)$  e pertencente a  $(O)$  (número 23.3).

Como esse plano  $(\gamma)$  é único e necessariamente oblíquo a  $(\beta)$ , sua interseção  $(s)$  com  $(\beta)$  é única (Figura 68).

A reta  $(s)$ , assim obtida, por pertencer a  $(\beta)$  e por ser perpendicular a  $(r)$ , é a interseção do plano  $(\alpha)$  procurado com  $(\beta)$ .

Assim,  $(\alpha)$  será o plano – único – formado por  $(r)$  e  $(s)$  (Figura 68).

Então, um plano  $(\alpha)$  fica...

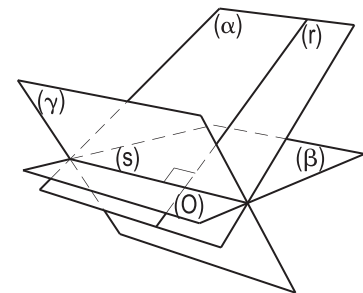


Figura 68

## 50 – Observações

1. Quando são dados um plano  $(\beta)$  e uma reta  $(r)$ , perpendicular a  $(\beta)$ ,  $(r)$  é de máximo declive, em relação a  $(\beta)$ , de todos os planos que a contêm.

De fato, basta considerar um plano  $(\alpha)$  qualquer dentre todos que pertencem à reta  $(r)$  e observar que, sendo  $(r)$  perpendicular a  $(\beta)$ , será forçosamente perpendicular à interseção  $(\alpha\beta)$  de  $(\alpha)$  com  $(\beta)$  (Figura 69).

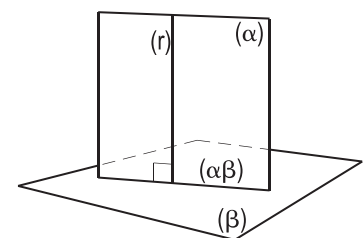


Figura 69

2. Quando são dados um plano ( $\beta$ ) e uma reta ( $r$ ), paralela a ( $\beta$ ), sabe-se (número 7) que todos os planos pertencentes a ( $r$ ) e secantes a ( $\beta$ ) cortam ( $\beta$ ) segundo retas paralelas a ( $r$ ) (Figura 70).

Assim, a reta dada ( $r$ ) não pode ser de máximo declive, em relação a ( $\beta$ ), de nenhum dos planos que a contém.

3. Então, para se definir um – e um só – plano ( $\alpha$ ), por uma reta ( $r$ ) de máximo declive de ( $\alpha$ ) em relação a um plano dado ( $\beta$ ), é necessário e suficiente que ( $r$ ) seja oblíqua a ( $\beta$ ).

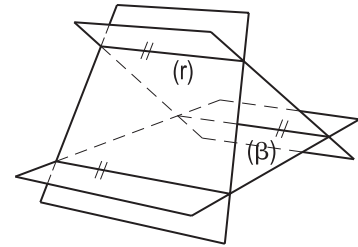


Figura 70

### 51 – Ângulo de dois planos oblíquos

Por definição, ângulo de dois planos oblíquos é o ângulo retilíneo de um dos diedros agudos formados pelos dois planos (Figura 71).

É claro, então, que o ângulo  $\hat{x}$  formado por dois planos oblíquos ( $\alpha$ ) e ( $\beta$ ) é o menor ângulo formado entre duas retas ( $r$ ) e ( $s$ ), respectivamente, de máximo declive de ( $\alpha$ ) em relação a ( $\beta$ ) e de ( $\beta$ ) em relação a ( $\alpha$ ) (Figura 71).

Para obter o ângulo  $\hat{x}$  formado por dois planos oblíquos ( $\alpha$ ) e ( $\beta$ ), basta traçar, por um ponto qualquer ( $J$ ), as perpendiculares ( $a$ ) e ( $b$ ) a cada um dos dois planos, pois  $\hat{x}$  será o menor ângulo formado por essas duas retas (Figura 72).

De fato, porque ( $a$ ) e ( $b$ ) definem um plano ( $\gamma$ ) perpendicular aos dois dados, ( $\gamma$ ) corta aqueles planos segundo as retas ( $r$ ) e ( $s$ ), respectivamente, de máximo declive de ( $\alpha$ ) em relação a ( $\beta$ ) e de ( $\beta$ ) em relação a ( $\alpha$ ). E os ângulos formados pelas retas ( $a$ ) e ( $b$ ) e pelas retas ( $r$ ) e ( $s$ ) são iguais, como agudos de lados respectivamente perpendiculares (*Geometria Plana*, número 63.1) (Figura 73).

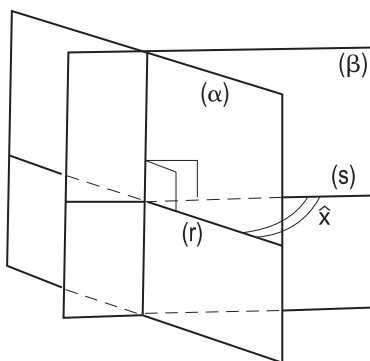


Figura 71

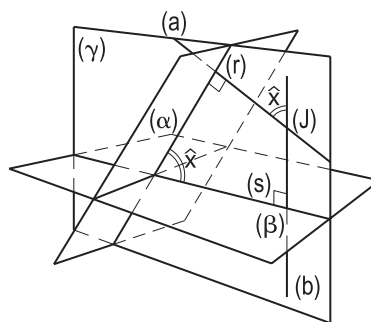


Figura 72

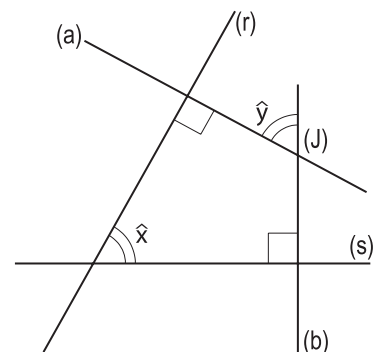


Figura 73

## 52 – Observações

Quando dois planos são perpendiculares, o ângulo por eles formado é reto.

Quando, enfim, eles são paralelos, o ângulo por eles formado é nulo.

## 53 – Teorema

A área da projeção ortogonal de uma figura pertencente a um plano ( $\gamma$ ), sobre um plano ( $\pi$ ), é igual ao produto da área daquela figura pelo cosseno do ângulo  $\hat{\alpha}$  que ( $\gamma$ ) forma com ( $\pi$ ).

Demonstração: Consideremos, inicialmente, um triângulo (A)(B)(C), de área (S), pertencente a um plano ( $\gamma$ ) e tendo seu lado (B)(C) paralelo ao plano ( $\pi$ ) e calculemos, em função de (S) e do ângulo  $\hat{\alpha}$  que ( $\gamma$ ) forma com ( $\pi$ ), a área S da projeção ortogonal ABC do triângulo (A)(B)(C) sobre ( $\pi$ ).

Para tanto, observemos que o lado (B)(C), por ser, por hipótese, paralelo a ( $\pi$ ), se projeta em verdadeira grandeza sobre ( $\pi$ ) e consideremos a altura (A)(H) do triângulo (A)(B)(C), que é de máximo declive de ( $\gamma$ ) em relação a ( $\pi$ ) (Figura 74) e que, por isso, se projeta sobre ( $\pi$ ), segundo a altura AH do triângulo ABC.

Para as áreas (S) e S em questão, pode-se, então, escrever:

$$S = \frac{\overline{BC} \cdot \overline{AH}}{2} \text{ e } (S) = \frac{\overline{(B)(C)} \cdot \overline{(A)(H)}}{2}$$

$$\text{Logo, } \frac{S}{(S)} = \frac{\overline{BC}}{\overline{(B)(C)}} \cdot \frac{\overline{AH}}{\overline{(A)(H)}} = \frac{\overline{AH}}{\overline{(A)(H)}} \quad (1)$$

E, ao considerarmos, por (H), a paralela (H)(J) a HA, o triângulo (A)(H)(J) (Figura 75) fornece:

$$\frac{\overline{(J)(H)}}{\overline{(A)(H)}} = \cos \alpha \quad \therefore \quad \frac{\overline{AH}}{\overline{(A)(H)}} = \cos \alpha \quad (2)$$

As relações (1) e (2) dão:

$$\frac{S}{(S)} = \cos \alpha \quad \therefore \quad \boxed{S = (S) \cos \alpha}$$

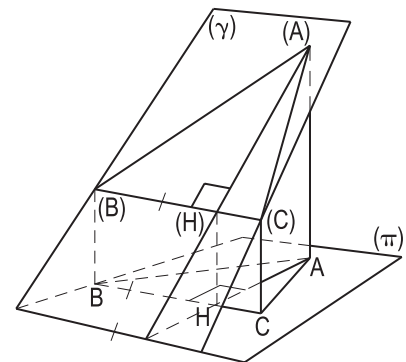


Figura 74

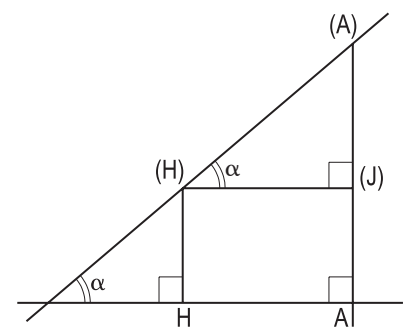


Figura 75

Consideremos, agora, um triângulo qualquer (A)(B)(C) pertencente ao plano ( $\gamma$ ), oblíquo a ( $\pi$ ), tendo todos os lados oblíquos a ( $\pi$ ) e relacionemos sua área (S), a área S de sua projeção ortogonal ABC sobre ( $\pi$ ) e o ângulo  $\hat{\alpha}$  formado pelos dois planos. Para tanto, tracemos por (B) a paralela a ( $\pi$ ), que encontra o prolongamento de (A)(C) no ponto (J) (Figura 76), e projetemos (J) em ( $\pi$ ), obtendo J.

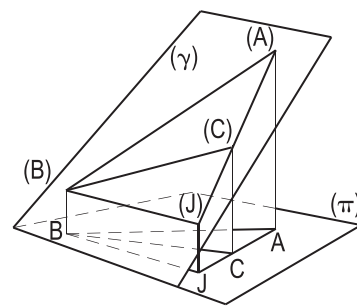


Figura 76

Designando por ( $S_1$ ) a área do triângulo (B)(C)(J) e por  $S_1$  a área da projeção ortogonal BCJ desse triângulo sobre ( $\pi$ ), do que acima já foi demonstrado, podemos escrever:

$$S + S_1 = [(S) + (S_1)] \cos \alpha \quad \therefore \quad S + S_1 = (S) \cos \alpha + (S_1) \cos \alpha \quad (1)$$

$$\text{e, para os triângulos BJC e (B)(J)(C): } S_1 = (S_1) \cos \alpha \quad (2)$$

Subtraindo, membro a membro, a relação (2) de (1), vem:

$$\boxed{S = (S) \cos \alpha}$$

Generalizando, consideremos um polígono qualquer de área (S), pertencente a um plano ( $\gamma$ ) que forme um ângulo  $\hat{\alpha}$  com ( $\pi$ ), e calculemos a área S da projeção ortogonal do polígono sobre ( $\pi$ ) (Figura 77).

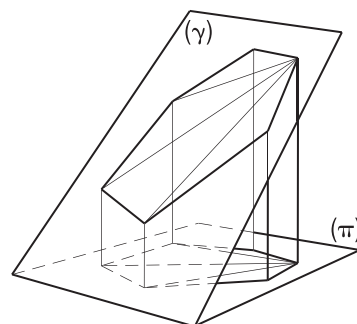


Figura 77

Decompondo, por meio de diagonais, o polígono pertencente a ( $\gamma$ ) em triângulos de áreas ( $S_1$ ), ( $S_2$ ), etc. e projetando-os sobre ( $\pi$ ), obtendo outros tantos triângulos de áreas  $S_1$ ,  $S_2$ , etc., respectivamente, podemos, pelo que já foi provado, escrever:

$$S_1 = (S_1) \cos \alpha$$

$$S_2 = (S_2) \cos \alpha$$

$$S_3 = (S_3) \cos \alpha$$

.....

Somando, membro a membro, as relações acima, temos:

$$\boxed{S = (S) \cos \alpha}$$

Finalmente, a relação permanece válida para figuras planas quaisquer, porque elas podem ser, sempre, consideradas como posições limites ocupadas por polígonos nelas inscritos, quando crescem indefinidamente seus gêneros (Figura 78).

Então, a área da projeção ortogonal...

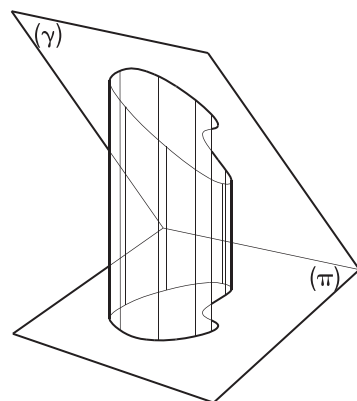


Figura 78

# CAPÍTULO V

## BISSETORES

### 54 – Bissetor de um diedro

Por definição, bissetor de um diedro é o semi-plano interior ao diedro que, tendo para reta origem a aresta do diedro, forma ângulos iguais com as duas faces, isto é, que divide o diedro em outros dois, iguais entre si (Figura 79).

Dados dois planos secantes  $(\alpha)$  e  $(\gamma)$ , os bissetores dos diedros opostos pela aresta, assim formados, são, dois a dois, coplanares. E os bissetores de dois diedros adjacentes, dos quatro formados, são perpendiculares (Figura 80).

De fato, se seccionarmos todos os planos por um outro  $(\theta)$ , perpendicular à interseção de  $(\alpha)$  e  $(\gamma)$ , obteremos os retilíneos dos diversos diedros formados por  $(\alpha)$  e  $(\gamma)$  e suas bissetrizes  $(a_1)$ ,  $(a_2)$ ,  $(b_1)$  e  $(b_2)$  (Figura 80), as quais, sabemos, são, duas a duas, colineares (*Geometria Plana*, número 17) e, duas a duas, perpendiculares (*Geometria Plana*, número 12.3).

Assim, dados dois planos não paralelos  $(\alpha)$  e  $(\gamma)$ , existem dois planos  $(\beta_1)$  e  $(\beta_2)$  que contêm a interseção de  $(\alpha)$  e  $(\gamma)$  e que formam ângulos iguais com  $(\alpha)$  e  $(\gamma)$  (Figura 81).

Estes planos  $(\beta_1)$  e  $(\beta_2)$ , necessariamente perpendiculares entre si, são denominados bissetores de  $(\alpha)$  e  $(\gamma)$ .

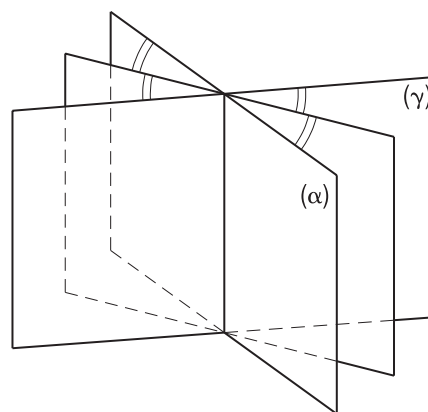


Figura 79

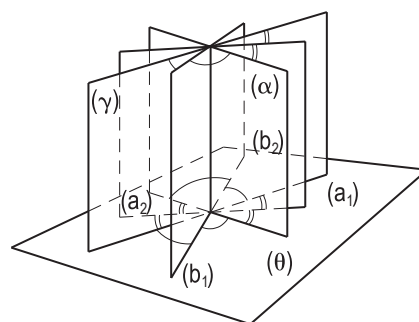


Figura 80

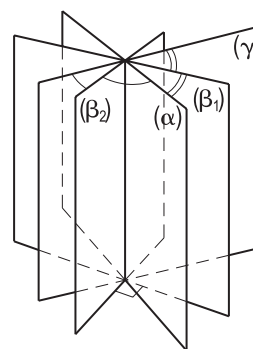


Figura 81

## 55 – Propriedades

1. O bissetor de um diedro é o lugar geométrico das bissetrizes dos ângulos planos do diedro.

De fato, basta ver que todo plano  $(\theta)$ , perpendicular à aresta do diedro, corta o bissetor segundo a bissetriz do ângulo plano assim determinado (Figura 82).

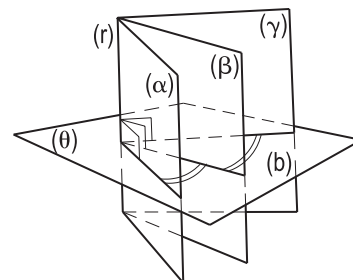


Figura 82

2. O bissetor de um diedro fica determinado pela aresta  $(r)$  do diedro e pela bissetriz  $(b)$  de um de seus ângulos planos (Figura 82).

3. O bissetor de um diedro é o lugar geométrico dos pontos interiores ao diedro e equidistantes de suas faces.

Porque o bissetor é o lugar geométrico das bissetrizes dos ângulos planos dos diedros (número 55.1).

4. Assim, o lugar geométrico dos pontos equidistantes de dois planos não paralelos  $(\alpha)$  e  $(\gamma)$  é o par de planos bissetores  $(\beta_1)$  e  $(\beta_2)$  de seus diedros (Figura 81).

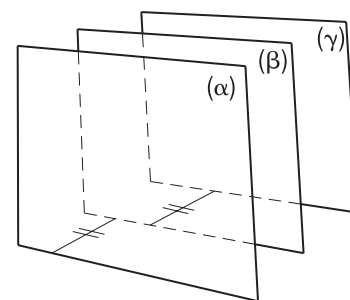


Figura 83

5. Se, em caso particular, os planos  $(\alpha)$  e  $(\gamma)$  são paralelos, o lugar geométrico dos pontos deles equidistantes é um terceiro plano  $(\beta)$  paralelo a eles e deles equidistante (Figura 83).

## 56 – Teorema

Toda reta pertencente ou paralela a um dos bissetores dos diedros determinados por dois planos não paralelos forma ângulos iguais com os dois planos.

Demonstração: Consideremos o bissetor  $(\beta)$  de um dos diedros formados pelos planos não paralelos  $(\alpha)$  e  $(\gamma)$  e duas retas genéricas  $(r)$  e  $(s)$ , paralelas entre si, a primeira pertencendo a  $(\beta)$  (Figura 84) e a segunda a ele paralela.

Para estudar os ângulos  $\hat{x}$  e  $\hat{y}$  que  $(r)$  – ou  $(s)$  – forma com  $(\alpha)$  e  $(\gamma)$ , projetemos ortogonalmente  $(r)$  sobre  $(\alpha)$  e sobre  $(\gamma)$  e observemos que os triângulos retângulos  $(A)(M)(B)$  e  $(A)(N)(B)$  são iguais porque têm os catetos  $(A)(M)$  e  $(A)(N)$  iguais (número 55.4) e a hipotenusa  $(A)(B)$  comum (Figura 84).

Assim, os ângulos  $\hat{x}$  e  $\hat{y}$  que uma reta  $(r)$  qualquer pertencente ao bissetor  $(\beta)$  forma com os planos  $(\alpha)$  e  $(\gamma)$  são iguais. O que também ocorrerá com as retas  $(s)$  paralelas a  $(\beta)$ .

Então, toda reta pertencente ou paralela...

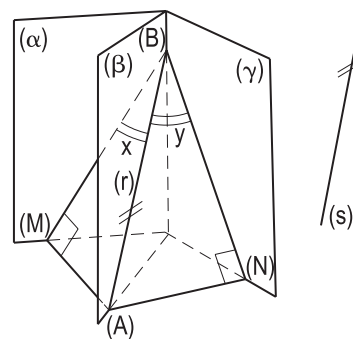


Figura 84

## 57 – Recíproca

Toda reta que forma ângulos iguais com dois planos não paralelos pertence ou é paralela a um dos bissetores dos diedros formados pelos dois planos.

Demonstração: Consideremos dois planos não paralelos  $(\alpha)$  e  $(\gamma)$  e duas retas genéricas  $(r)$  e  $(s)$ , paralelas entre si, a primeira concorrente e a segunda reversa à interseção dos dois planos, que formem ângulos iguais  $\hat{x}$  e  $\hat{y}$  com  $(\alpha)$  e  $(\gamma)$  (Figura 85).

Sendo  $(A)$  um ponto qualquer de  $(r)$  e  $(M)$  e  $(N)$  suas projeções ortogonais sobre  $(\alpha)$  e  $(\gamma)$ , os triângulos retângulos  $(A)(M)(B)$  e  $(A)(N)(B)$ , tendo a hipotenusa  $(A)(B)$  comum e um par  $(\hat{x}$  e  $\hat{y})$  de ângulos iguais (Figura 85), são iguais. E, assim, seus catetos  $(A)(M)$  e  $(A)(N)$  são iguais, isto é,  $(A)$  equidista de  $(\alpha)$  e de  $(\gamma)$ , devendo, pois (número 55.4), pertencer ao bissetor  $(\beta)$  de um dos diedros formados por  $(\alpha)$  e  $(\gamma)$ , o que garante a pertinência de  $(r)$  a  $(\beta)$ .

E a reta  $(s)$ , sendo, por hipótese, paralela a  $(r)$  e reversa à interseção de  $(\alpha)$  e  $(\gamma)$ , tem de ser paralela ao bissetor  $(\beta)$  (Figura 85).

Então, toda reta que forma...

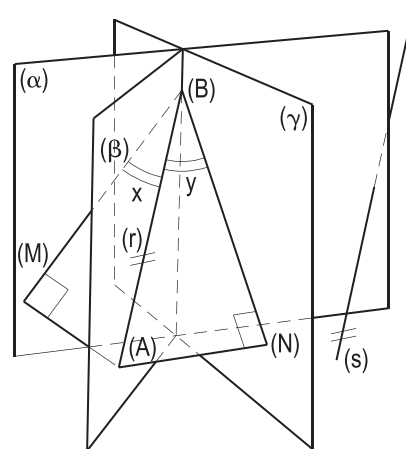


Figura 85

## 58 – Escólio

A condição necessária e suficiente para que uma reta forme ângulos iguais com dois planos não paralelos é que ela pertença, ou seja paralela, a um dos bissetores dos diedros determinados pelos dois planos.

## 59 – Teorema

Uma reta e um plano perpendiculares formam com um plano genérico ângulos complementares.

Demonstração: Consideremos uma reta  $(r)$  e um plano  $(\alpha)$ , perpendiculares entre si, além de um plano  $(\gamma)$ , oblíquo a  $(\alpha)$ , e estudemos os ângulos  $\hat{x}$  e  $\hat{y}$  que  $(r)$  e  $(\alpha)$  formam, respectivamente, com  $(\gamma)$ .

Para tanto, observemos que, porque  $(r)$  é ortogonal à reta  $(\alpha \gamma)$  (número 21),  $(r)$  pertence a um plano  $(\theta)$  perpendicular à reta  $(\alpha \gamma)$  (número 23.4) (Figura 86). E que este plano  $(\theta)$  corta o diedro agudo formado por  $(\alpha)$  e  $(\gamma)$  segundo os lados  $(s)$  e  $(t)$  de um retilíneo  $\hat{y}$  desse diedro.

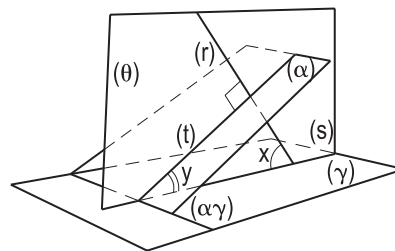


Figura 86

Como, finalmente,  $(s)$  é a projeção ortogonal de  $(r)$  sobre  $(\gamma)$ , o triângulo retângulo formado pelas retas  $(r)$ ,  $(s)$  e  $(t)$  (Figura 86) permite escrever:  $\hat{x} + \hat{y} = 90^\circ$ .

Então, uma reta e um plano perpendiculares...

## 60 – Teorema

A condição necessária e suficiente para que um plano forme ângulos iguais com dois planos não paralelos dados é que ele seja perpendicular a pelo menos um dos bissetores dos diedros determinados pelos dois planos dados.

Demonstração: Admitamos dados dois planos não paralelos  $(\alpha)$  e  $(\gamma)$  e estudemos um plano  $(\theta)$ , igualmente inclinado em relação àqueles dois.

Para tanto, consideremos uma reta  $(r)$  perpendicular a  $(\theta)$  e observemos que os ângulos que  $(r)$  forma com  $(\alpha)$  e  $(\gamma)$  são os complementos dos que  $(\theta)$  forma respectivamente com  $(\alpha)$  e  $(\gamma)$  (número 59).

Assim, para que  $(\theta)$  forme ângulos iguais com  $(\alpha)$  e  $(\gamma)$ , é necessário e suficiente que  $(r)$  forme ângulos iguais com  $(\alpha)$  e  $(\gamma)$ , isto é (número 58), que  $(r)$  pertença, ou seja paralela, ao bissetor  $(\beta)$  de um dos diedros formados por  $(\alpha)$  e  $(\gamma)$ . E como  $(\theta)$  é perpendicular a  $(r)$ ,  $(\theta)$  deve ser, ele próprio, perpendicular a esse bissetor  $(\beta)$  (Figura 87).

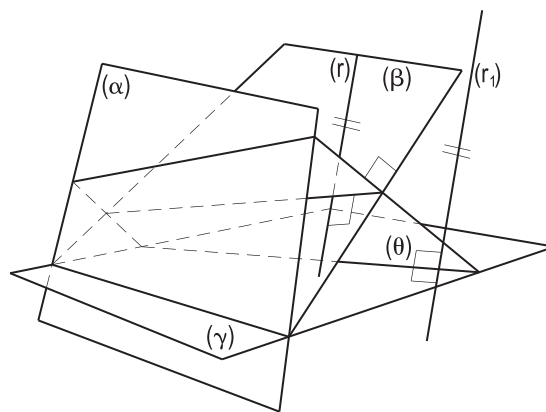


Figura 87

Então, a condição necessária e suficiente...

## 61 – Planos bissetores

Dadas duas retas concorrentes  $(r)$  e  $(s)$ , os dois planos  $(\beta_1)$  e  $(\beta_2)$  pertencentes a cada uma das bissetrizes dos ângulos formados por aquelas retas e perpendiculares ao plano por elas definido são denominados bissetores dos ângulos formados por  $(r)$  e  $(s)$  (Figura 88).

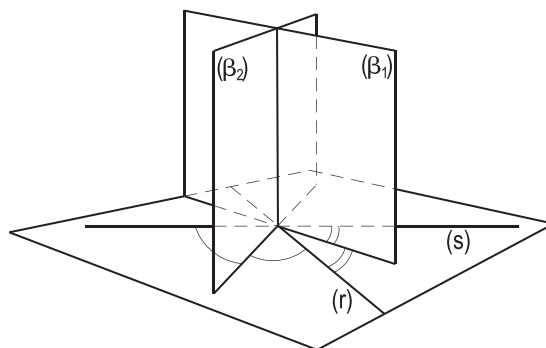


Figura 88



## 62 – Propriedades

1. Os bissetores dos ângulos de duas retas concorrentes  $(r)$  e  $(s)$  ficam definidos pelas bissetrizes  $(b_1)$  e  $(b_2)$  dos ângulos dessas retas e pela perpendicular  $(p)$  ao plano formado por  $(r)$  e  $(s)$ , traçada pelo ponto comum a essas duas retas (Figura 89).
2. Os dois bissetores são perpendiculares entre si. Porque as bissetrizes  $(b_1)$  e  $(b_2)$  são perpendiculares (*Geometria Plana*, número 12.3) e, então, os diversos diedros formados pelos bissetores são retos (Figura 89).

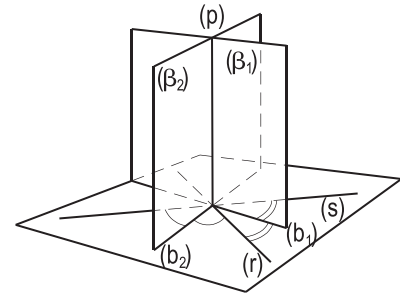


Figura 89

## 63 – Teorema

O lugar geométrico dos pontos equidistantes de duas retas concorrentes é constituído pelo par de planos bissetores dos ângulos formados pelas retas.

Demonstração: Consideremos o bissetor  $(\beta)$  de um dos ângulos formados por duas retas concorrentes  $(r)$  e  $(s)$  e um ponto genérico  $(A)$  pertencente a  $(\beta)$  (Figura 90).

Porque  $(\beta)$  é perpendicular ao plano  $(\pi)$  formado por  $(r)$  e  $(s)$ , o ponto  $(J)$ , projeção ortogonal de  $(A)$  sobre  $(\pi)$ , é necessariamente pertencente ao traço de  $(\beta)$  em  $(\pi)$ , isto é (número 62.1), à bissetriz  $(b)$  de um dos ângulos formados por  $(r)$  e  $(s)$  (Figura 90).

Consideremos ainda as perpendiculares  $(J)(M)$  e  $(J)(N)$  a  $(r)$  e a  $(s)$  e observemos que  $(A)(M)$  será perpendicular a  $(r)$  e que  $(A)(N)$  será perpendicular a  $(s)$  (número 29). E que os triângulos retângulos  $(A)(J)(M)$  e  $(A)(J)(N)$  (Figura 90), tendo um cateto  $(A)(J)$  comum e dois outros  $(J)(M)$  e  $(J)(N)$  iguais, são iguais (*Geometria Plana*, número 37).

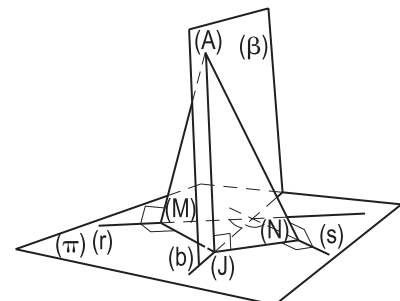


Figura 90

Assim, o ponto  $(A)$ , tomado arbitrariamente sobre o bissetor  $(\beta)$ , equidista das retas  $(r)$  e  $(s)$ .

E se, ao contrário, o ponto  $(A)$ , em estudo, não pertencesse a um dos bissetores, sua projeção ortogonal  $(J)$  sobre o plano das retas  $(r)$  e  $(s)$  não pertenceria a quaisquer das bissetrizes dos ângulos formados por essas retas. E assim  $(J)$  – e consequentemente  $(A)$  – ficariam a distâncias diferentes de  $(r)$  e de  $(s)$ .

Então, o lugar geométrico dos pontos...

## 64 – Teorema

Toda reta pertencente ou paralela a um dos bissetores dos ângulos formados por duas retas concorrentes forma ângulos iguais com as duas concorrentes.

Demonstração: Consideremos o bissetor  $(\beta)$  de um dos ângulos formados por duas retas concorrentes  $(r)$  e  $(s)$  e uma reta  $(t)$  pertencente a  $(\beta)$  e ao ponto  $(O)$  comum a  $(r)$  e a  $(s)$  e tracemos, por um ponto  $(A)$  qualquer de  $(t)$ , as perpendiculares  $(A)(M)$  e  $(A)(N)$  a  $(r)$  e a  $(s)$ , respectivamente (Figura 91).

Porque  $\overline{(A)(M)} = \overline{(A)(N)}$  (número 63), os triângulos retângulos  $(A)(O)(M)$  e  $(A)(O)(N)$  são iguais (Figura 91). E, em consequência, os ângulos  $\hat{x}$  e  $\hat{y}$  que a reta considerada  $(t)$  forma com  $(r)$  e com  $(s)$  são iguais.

Se, enfim, considerarmos uma reta não pertencente, mas paralela a  $(\beta)$ , também ela formará ângulos iguais com  $(r)$  e com  $(s)$ , porque existirá, forçosamente, em  $(\beta)$ , uma reta  $(t)$  paralela a ela, igualmente inclinada em relação às duas correntes consideradas.

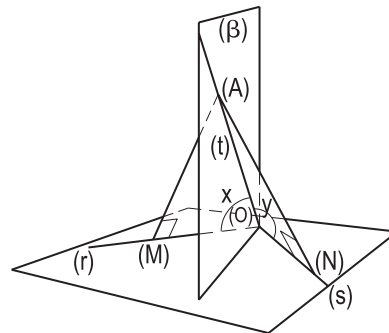


Figura 91

Então, toda reta pertencente ou paralela...

## 65 – Recíproca

Toda reta que forma ângulos iguais com duas retas concorrentes pertence ou é paralela a um dos bissetores dos ângulos formados pelas concorrentes.

Demonstração: Consideremos duas retas concorrentes  $(r)$  e  $(s)$  e duas retas genéricas  $(t)$  e  $(w)$ , paralelas entre si, igualmente inclinadas em relação a  $(r)$  e a  $(s)$ , a primeira pertencendo ao ponto  $(O)$  comum a  $(r)$  e a  $(s)$ , a segunda reversa a  $(r)$  e a  $(s)$  (Figura 92).

Tracemos, por um ponto  $(A)$  qualquer de  $(t)$ , as perpendiculares  $(A)(M)$  a  $(r)$  e  $(A)(N)$  a  $(s)$  (Figura 92) e observemos que os triângulos retângulos  $(A)(O)(M)$  e  $(A)(O)(N)$ , assim formados, são iguais, por terem a hipotenusa  $(O)(A)$  comum e um par de ângulos iguais. E que, então,  $(A)$  equidistará de  $(r)$  e de  $(s)$ , devendo (número 63), pois, pertencer ao bissetor  $(\beta)$  de um dos ângulos formados por  $(r)$  e  $(s)$ .

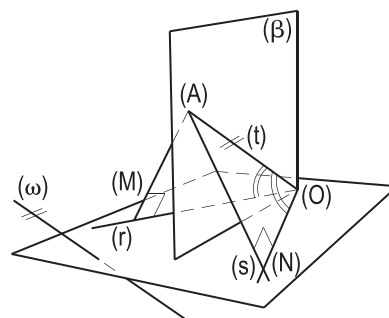


Figura 92

Assim,  $(t)$  pertencerá a  $(\beta)$ . E  $(w)$ , sendo paralela a  $(t)$ , mas reversa em relação a  $(r)$  e  $(s)$ , será paralela ou, eventualmente, pertencente a  $(\beta)$ .

Então, toda reta que forma ângulos iguais...

## 66 – Escólios

1. A condição necessária e suficiente para que uma reta forme ângulos iguais com duas retas concorrentes é que ela pertença, ou seja paralela, a um dos bissetores dos ângulos formados pelas concorrentes.
2. A condição necessária e suficiente para que uma reta forme ângulos iguais com duas retas reversas é que ela pertença, ou seja paralela, a um dos bissetores dos ângulos formados por duas retas concorrentes, respectivamente, paralelas àquelas reversas.

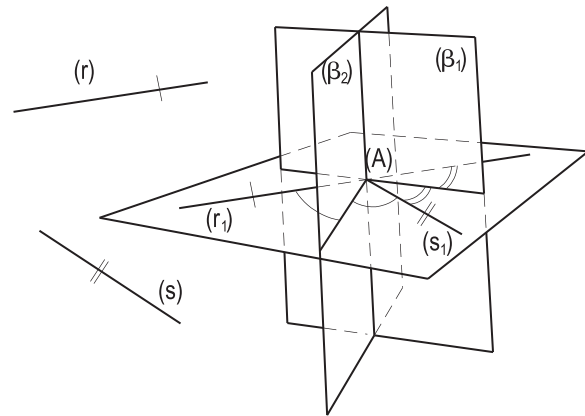


Figura 93

3. Dadas duas retas reversas  $(r)$  e  $(s)$  e um ponto  $(A)$  a elas exterior, o lugar geométrico das retas pertencentes a  $(A)$  e igualmente inclinadas em relação a  $(r)$  e a  $(s)$  é constituído pelo par de planos bissetores –  $(\beta_1)$  e  $(\beta_2)$  – dos ângulos formados pelas retas  $(r_1)$  e  $(s_1)$  pertencentes a  $(A)$  e, respectivamente, paralelas a  $(r)$  e a  $(s)$  (Figura 93).

## 67 – Teorema

Todo plano paralelo ou pertencente à bissetriz de um dos ângulos formados por duas retas concorrentes inclina-se igualmente em relação às duas retas.

Demonstração: Consideremos duas retas concorrentes  $(r)$  e  $(s)$  e um plano  $(\alpha)$  paralelo à bissetriz  $(b_1)$  de um dos ângulos formados por  $(r)$  e  $(s)$ .

Estudemos os ângulos  $\hat{x}$  e  $\hat{y}$  que estas retas formam com  $(\alpha)$ . Para tanto, observemos que o triângulo  $(J)(A)(B)$  é isósceles e que o ângulo reto (*Geometria Plana*, número 12.3) formado pelas bissetrizes  $(b_1)$  e  $(b_2)$  projeta-se reto sobre  $(\alpha)$ , por ter um lado paralelo e o outro oblíquo a esse plano (número 42). E que, então, o triângulo  $(L)(A)(B)$  (Figura 94), projeção ortogonal, sobre  $(\alpha)$ , do triângulo  $(J)(A)(B)$  é também isósceles.

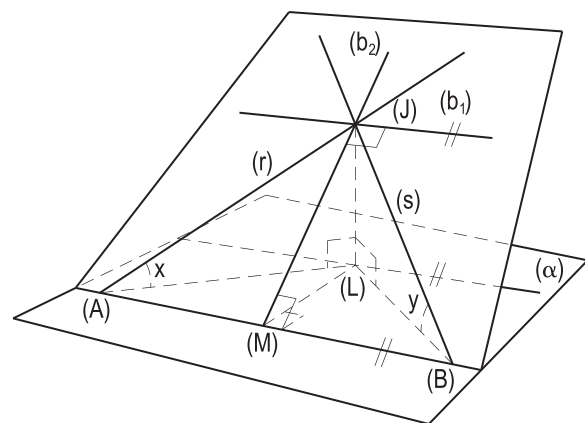


Figura 94

Assim, são iguais os triângulos retângulos  $(J)(L)(A)$  e  $(J)(L)(B)$  e, em consequência, são iguais os ângulos  $\hat{x}$  e  $\hat{y}$  que  $(r)$  e  $(s)$  formam com  $(\alpha)$  (Figura 94).

E tal igualdade persistiria, evidentemente, se  $(\alpha)$ , por translação, viesse a pertencer à bissetriz  $(b_1)$  considerada.

Então, todo plano paralelo ou pertencente à bissetriz de um dos ângulos formados por duas retas concorrentes inclina-se igualmente em relação às duas retas, como se queria demonstrar.

## 68 – Recíproca

Todo plano que se inclina igualmente em relação a duas retas concorrentes é paralelo ou pertencente a uma das bissetrizes dos ângulos formados pelas duas retas.

Demonstração: Consideremos duas retas concorrentes  $(r)$  e  $(s)$  e um plano  $(\alpha)$  que forme com elas ângulos iguais  $\hat{x}$  e  $\hat{y}$  (Figura 94).

Os triângulos retângulos  $(J)(L)(A)$  e  $(J)(L)(B)$ , tendo um cateto comum  $(J)(L)$  e um par de ângulos iguais –  $\hat{x}$  e  $\hat{y}$  –, serão iguais, acarretando que o triângulo  $(J)(A)(B)$  seja isósceles (Figura 94).

Assim, a bissetriz interna  $(b_2)$ , relativa ao vértice  $(J)$ , será perpendicular à base  $(A)(B)$  e, conseqüentemente, a bissetriz externa  $(b_1)$  será paralela à base  $(A)(B)$  e, então, paralela a  $(\alpha)$ .

E, naturalmente em posição particular, se  $(\alpha)$  pertencesse ao ponto  $(J)$ , comum às retas  $(r)$  e  $(s)$ , e formasse ângulos iguais com estas retas, seria, ao invés de paralelo, pertencente a uma das bissetrizes dos ângulos formados por  $(r)$  e  $(s)$ .

Então, todo plano que se inclina igualmente em relação a duas retas concorrentes é paralelo ou pertencente a uma das bissetrizes dos ângulos formados pelas duas retas.

## 69 – Escólios

1. A condição necessária e suficiente para que um plano forme ângulos iguais com duas retas concorrentes é que ele pertença ou seja paralelo a uma das bissetrizes dos ângulos formados pelas duas retas.
2. A condição necessária e suficiente para que um plano forme ângulos iguais com duas retas reversas é que ele pertença ou seja paralelo a uma das bissetrizes do ângulo formado por duas retas concorrentes, respectivamente, paralelas àquelas duas reversas, traçadas por um ponto qualquer.

Porque os ângulos iguais formados com essas concorrentes são iguais àqueles formados com suas paralelas às retas reversas dadas.

# CAPÍTULO VI

## TRIEDROS

### 70 – Definições

Ângulo poliédrico ou ângulo sólido é a figura formada por três ou mais planos que, limitados às suas interseções consecutivas, possuem um único ponto comum.

O ponto comum, os planos componentes e suas interseções consecutivas denominam-se, respectivamente, vértice, faces e arestas do ângulo sólido.

Num ângulo poliédrico de  $n$  arestas há a considerar os  $n$  ângulos formados pelos pares de arestas consecutivas, denominados ângulos faces, e os  $n$  ângulos diedros formados pelos pares de faces consecutivas, denominados diedros do ângulo sólido.

Um ângulo poliédrico é dito convexo ou côncavo (ou não convexo), conforme respectivamente a seção nele produzida por um plano que corte todas as suas arestas seja um polígono convexo (Figura 95) ou côncavo (Figura 96).

Assim, se um ângulo poliédrico é convexo, toda reta que o corta o faz segundo dois pontos; se o ângulo poliédrico é côncavo, existem retas que o cortam em mais de dois pontos.

Além disso, quando um ângulo poliédrico é convexo, os planos de todas as suas faces não o atravessam; se ele é não convexo, há pelo menos duas faces cujos planos o atravessam: aquelas que formam uma reentrância do ângulo poliédrico.

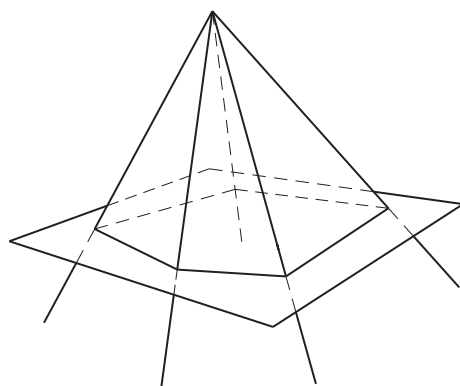


Figura 95

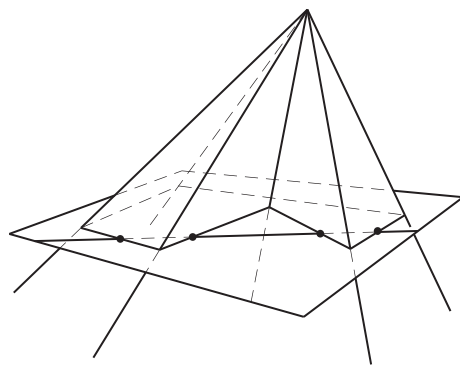


Figura 96

## 71 – Triedros

Triedro é o ângulo sólido de três arestas.

Porque todos os planos secantes que atingem as três arestas produzem seções triangulares, todo triedro é necessariamente convexo.

Um triedro de vértice (J) e arestas (J)(A), (J)(B) e (J)(C) (Figura 97) é comumente simbolizado por (J)–(A)(B)(C) ou, simplesmente, por triedro (J). Seus três ângulos faces são simbolizados por letras minúsculas iguais às das arestas opostas e os retilíneos de seus três diedros por letras maiúsculas iguais às das arestas correspondentes.

Assim são os ângulos faces  $a$ ,  $b$  e  $c$  e os ângulos retilíneos  $A$ ,  $B$  e  $C$  do triedro (J)–(A)(B)(C) da Figura 97.

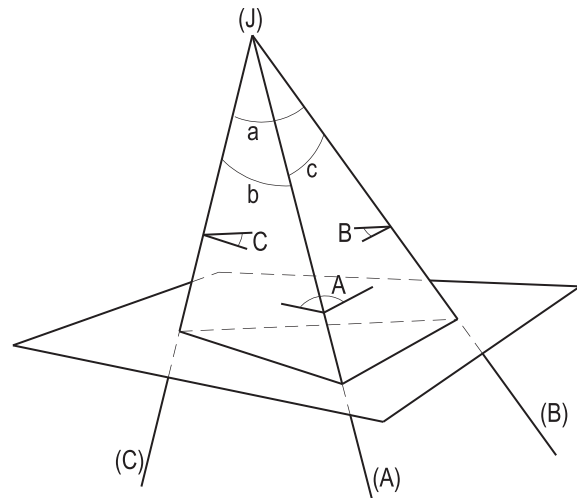


Figura 97

## 72 – Triedros simétricos

Dois triedros são simétricos quando as arestas de um são os prolongamentos, além do vértice, das arestas do outro (Figura 98).

Dois triedros simétricos possuem ângulos faces respectivamente iguais por serem opostos pelo vértice e diedros respectivamente iguais por serem opostos pela aresta, tal como indicado na Figura 98.

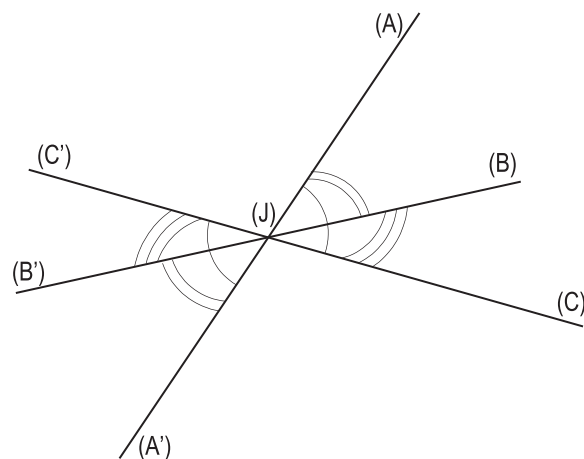


Figura 98

## 73 – Triedros suplementares

Por definição, dois triedros são suplementares quando os ângulos faces de cada um deles são iguais aos suplementos dos diedros do outro. Assim, dois triedros (J)–(A)(B)(C) e (J')–(A')(B')(C') são suplementares quando existem as relações:

$$\begin{aligned} a + A' &= 2r & a' + A &= 2r \\ b + B' &= 2r & b' + B &= 2r \\ c + C' &= 2r & c' + C &= 2r \end{aligned}$$

## 74 – Triedros isósceles

Por definição, um triedro é isósceles quando possui dois ângulos faces iguais.

Decorre da própria definição que todo triedro isósceles possui, também, dois diedros iguais. De fato, basta ver que os planos das duas faces iguais são simétricos em relação ao plano bissetor do terceiro ângulo face (Figura 99).

O triedro simétrico de um triedro isósceles é também isósceles e igual ao primeiro (Figura 100).

O triedro suplementar de um triedro isósceles é também isósceles, mas não necessariamente igual ao primeiro.

## 75 – Triedros trirretângulos

Triedro trirretângulo é o que possui os três ângulos faces retos, isto é, o que tem arestas perpendiculares duas a duas (Figura 101).

E, porque cada par de arestas define, neste caso, o retilíneo de um dos diedros do triedro, conclui-se que os três diedros do triedro são retos, isto é, que os planos de suas faces são perpendiculares dois a dois.

É claro, ainda, que tanto o triedro simétrico quanto os suplementares de um triedro trirretângulo são também trirretângulos. E que todos os triedros trirretângulos são iguais.

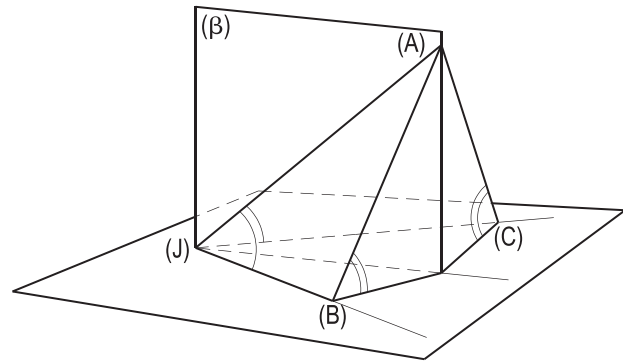


Figura 99

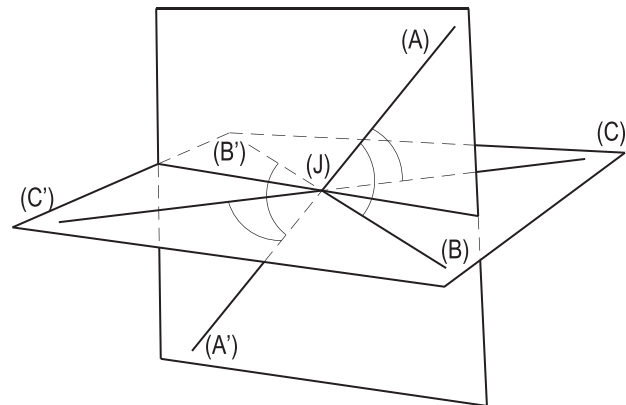


Figura 100

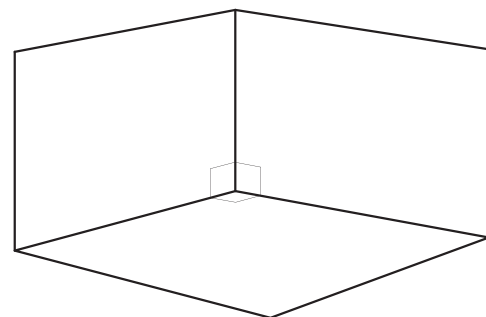


Figura 101

## 76 – Teorema

A projeção ortogonal do vértice de um triedro trirretângulo sobre um plano genérico que corte suas três arestas coincide com o ortocentro do triângulo, seção produzida pelo plano no triedro.

Demonstração: Consideremos o triedro trirretângulo (J) e o plano  $(\alpha)$ , genérico, que corta suas três arestas segundo os pontos (A), (B) e (C), e projetemos ortogonalmente (J) sobre  $(\alpha)$ , obtendo o ponto (H) (Figura 102).

As retas (J)(A) e (J)(H), respectivamente perpendiculares aos planos (J)(B)(C) e  $(\alpha)$ , são ortogonais à interseção (B)(C) destes planos (número 21). Assim, o plano (J)(A)(H) formado por essas duas retas é perpendicular a (B)(C) (número 23.2). Por isso, (A)(H) é perpendicular a (B)(C) (número 21).

Fica, então, provado que a aresta (J)(A) do triedro se projeta sobre  $(\alpha)$  segundo uma das alturas do triângulo (A)(B)(C) – a relativa ao vértice (A). E como tal propriedade é, evidentemente, válida para as demais arestas, conclui-se que o ponto (H), projeção ortogonal do vértice (J), sobre  $(\alpha)$ , é o ponto comum às três alturas do triângulo (A)(B)(C).

Então, a projeção ortogonal...

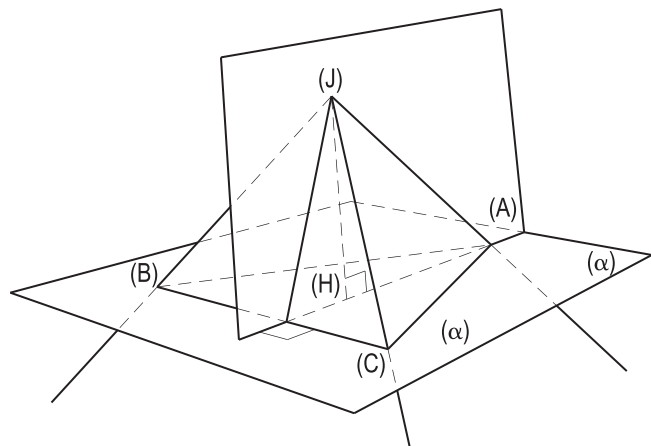


Figura 102

## 77 – Teorema

O inverso do quadrado da distância do vértice de um triedro trirretângulo a um plano secante qualquer é igual à soma dos inversos dos quadrados dos segmentos limitados sobre as arestas do triedro, entre o vértice e esse plano.

Demonstração: Consideremos um triedro trirretângulo (J) e um plano  $(\theta)$ , genérico, que corte suas três arestas.

Sejam, respectivamente, os pontos (A), (B) e (C) aqueles em que o plano  $(\theta)$  corta essas três arestas.

Tracemos a perpendicular (J)(H) a  $(\theta)$  (Figura 103).



Designemos os segmentos (J)(A), (J)(B) e (J)(C) que ( $\theta$ ) limita nas arestas do triedro, respectivamente, por  $x$ ,  $y$  e  $z$  e por  $d$  a distância (J)(H) do vértice do triedro ao plano secante (Figura 103) e observemos que a altura (A)(R) do triângulo (A)(B)(C) se projeta sobre o plano (J)(B)(C) segundo a altura (J)(R) do triângulo (J)(B)(C) (número 42).

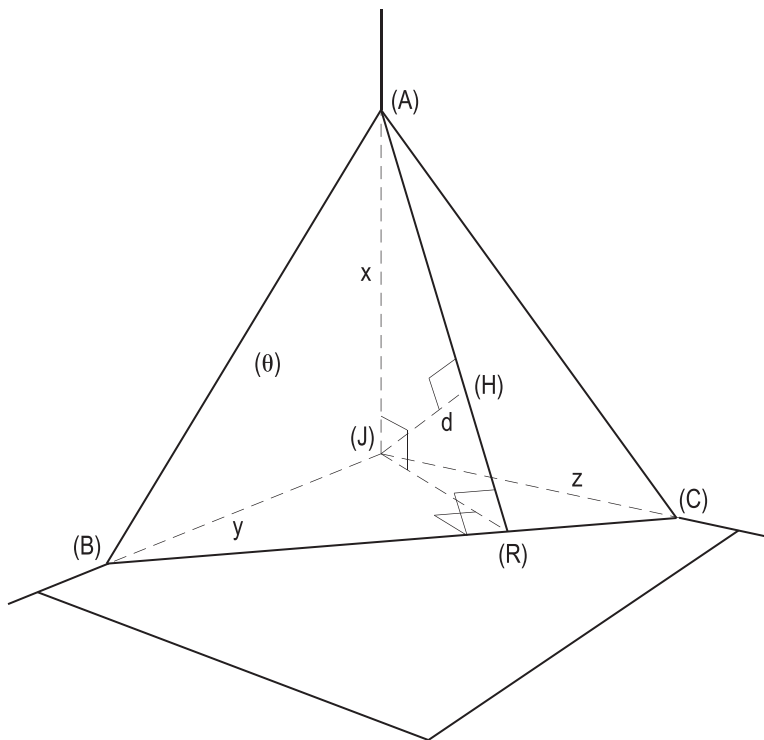


Figura 103

Queremos operar com os inversos dos quadrados das distâncias  $d$ ,  $x$ ,  $y$  e  $z$ .

O triângulo (J)(A)(R), retângulo em (J) (Figura 103), fornece (*Geometria Plana*, números 198.5 e 199.5):

$$\frac{1}{(J)(H)^2} = \frac{1}{(J)(A)^2} + \frac{1}{(J)(R)^2} \quad \therefore \quad \frac{1}{d^2} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(J)(R)^2} \quad (1)$$

Da mesma forma, o triângulo (J)(B)(C), também retângulo em (J), dá:

$$\frac{1}{(J)(R)^2} = \frac{1}{(J)(B)^2} + \frac{1}{(J)(C)^2} \quad \therefore \quad \frac{1}{(J)(R)^2} = \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} \quad (2)$$

Substituindo (2) em (1), vem:

$$\boxed{\frac{1}{d^2} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2}}$$

Então, o inverso do quadrado da distância do vértice de um triedro trirretângulo a um plano secante é igual à soma dos inversos dos quadrados dos segmentos limitados sobre as arestas do triedro, entre o vértice e o plano, como se queria demonstrar.

## 78 – Teorema

O quadrado da área de uma figura pertencente a um plano secante a um triedro trirretângulo é igual à soma dos quadrados das áreas das projeções ortogonais daquela figura sobre as faces do triedro.

Demonstração: Consideremos um plano  $(\theta)$  secante a um triedro trirretângulo  $(J)$  e uma figura genérica de área  $(S)$  pertencente a  $(\theta)$ .

Designemos por  $S_1, S_2$  e  $S_3$  as áreas das projeções ortogonais dessa figura, respectivamente, sobre os planos das faces  $(J)(B)(C)$ ,  $(J)(A)(C)$  e  $(J)(A)(B)$  e por  $\alpha, \beta$  e  $\gamma$  os ângulos que o plano  $(\theta)$  forma respectivamente com as faces  $(J)(B)(C)$ ,  $(J)(A)(C)$  e  $(J)(A)(B)$ .

Observe-se (Figura 104) que os triângulos retângulos  $(J)(A)(A_1)$  e  $(J)(H)(A)$  são retângulos, em  $(J)$  e em  $(H)$ , respectivamente, o que implica na igualdade dos ângulos  $(A)(\hat{A}_1)(J) = \alpha$  e  $(A)(\hat{J})(H) = \alpha_1$ , como agudo com lados perpendiculares aos daquele.

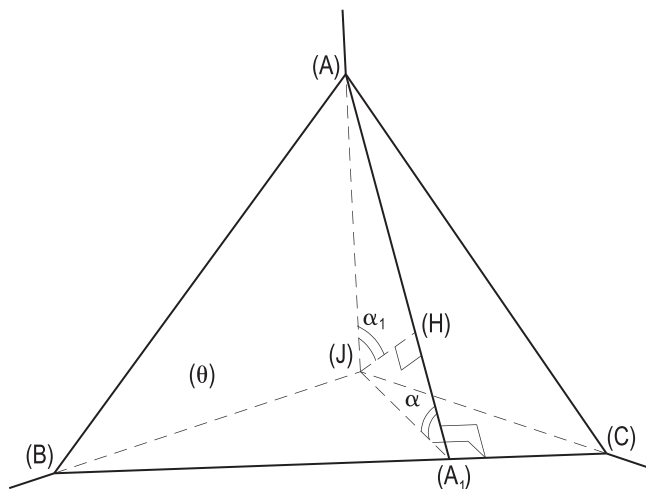


Figura 104

O triângulo retângulo  $(J)(H)(A)$  (Figura 104) fornece:  $\cos \alpha_1 = \cos \alpha = \frac{(J)(H)}{(J)(A)}$

Analogamente, chegaríamos a:  $\cos \beta = \frac{(J)(H)}{(J)(B)}$  e  $\cos \gamma = \frac{(J)(H)}{(J)(C)}$

Sobre as áreas das projeções da figura considerada, podemos (número 53) escrever:

$$S_1 = (S) \cos \alpha \quad \therefore \quad S_1^2 = (S)^2 \cos^2 \alpha$$

$$S_2 = (S) \cos \beta \quad \therefore \quad S_2^2 = (S)^2 \cos^2 \beta$$

$$S_3 = (S) \cos \gamma \quad \therefore \quad S_3^2 = (S)^2 \cos^2 \gamma$$

Somando, membro a membro,  $S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 = (S)^2 (\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma)$

$$\therefore \quad S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 = (S)^2 \left[ \frac{(J)(H)^2}{(J)(A)^2} + \frac{(J)(H)^2}{(J)(B)^2} + \frac{(J)(H)^2}{(J)(C)^2} \right]$$

$$\therefore S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 = (S)^2 \cdot \overline{(J)(H)}^2 \left[ \frac{1}{\overline{(J)(A)}^2} + \frac{1}{\overline{(J)(B)}^2} + \frac{1}{\overline{(J)(C)}^2} \right]$$

Mas, como (número 77),  $\frac{1}{\overline{(J)(A)}^2} + \frac{1}{\overline{(J)(B)}^2} + \frac{1}{\overline{(J)(C)}^2} = \frac{1}{\overline{(J)(H)}^2}$

temos:  $S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 = (S)^2 \cdot \overline{(J)(H)}^2 \cdot \frac{1}{\overline{(J)(H)}^2} \quad \therefore \boxed{(S)^2 = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2}$

Então, o quadrado da área de uma figura...

## 79 – Teorema

As perpendiculares baixadas de um ponto interior a um triedro às suas faces definem um outro triedro, suplementar do primeiro.

Demonstração: Consideremos um triedro qualquer (J)–(A)(B)(C), um ponto (S) a ele interior e o triedro (S)–(A')(B')(C') formado pelas perpendiculares traçadas de (S) às faces do primeiro triedro (Figura 105).

Porque (S)(B') e (S)(C') são perpendiculares às faces (J)(A)(C) e (J)(A)(B), o ângulo face a' do triedro (S) é igual ao suplemento do diedro A do triedro (J), isto é:

$$a' + A = 2r \quad (1)$$

E, analogamente:  $b' + B = 2r \quad (2)$

$$c' + C = 2r \quad (3)$$

E, porque cada aresta do triedro (J) é ortogonal a duas arestas do triedro (S) (Figura 105), conclui-se que as arestas do triedro (J) são respectivamente perpendiculares às faces do triedro (S). Assim, admitindo dado o triedro (S) e construído o triedro (J), com o mesmo raciocínio acima utilizado, chegaríamos a:

$$a + A' = 2r \quad (4)$$

$$b + B' = 2r \quad (5)$$

$$c + C' = 2r \quad (6)$$

As relações (1), (2), (3), (4), (5) e (6) demonstram (número 73) o teorema.

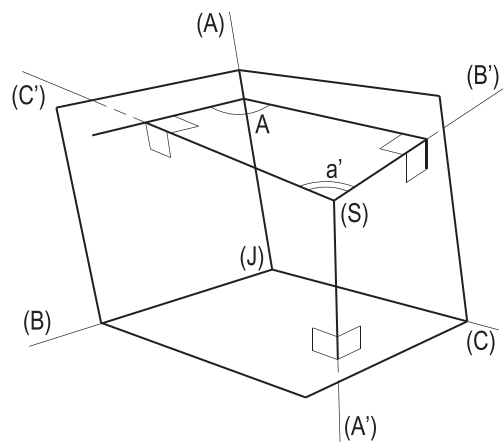


Figura 105

## 80 – Teorema

Em todo triedro, cada ângulo face está compreendido entre a soma e a diferença dos outros dois.

Demonstração: Consideremos um triedro qualquer  $(J) - (A)(B)(C)$  e admitamos que  $a$  seja o maior e  $c$  o menor de seus ângulos faces.

Tracemos, no interior do ângulo face  $(B)(J)(C)$ , a semirreta  $(J)(X)$ , tal que  $(C)(\hat{J})(X) = b$  e marquemos, sobre  $(J)(A)$  e  $(J)(X)$ , os pontos  $(M)$  e  $(N)$ , tais que  $\overline{(J)(M)} = \overline{(J)(N)}$  (Figura 106).

Tomemos, ainda, um ponto  $(E)$  qualquer de  $(J)(C)$  e unamo-lo a  $(M)$  e a  $(N)$ , obtendo  $(F)$  em  $(J)(B)$  (Figura 106).

Os triângulos  $(J)(E)(M)$  e  $(J)(E)(N)$ , tendo um par de lados iguais –  $(J)(M)$  e  $(J)(N)$  –, um lado comum  $(J)(E)$  e o ângulo compreendido –  $b$  – igual, são iguais, permitindo escrever:

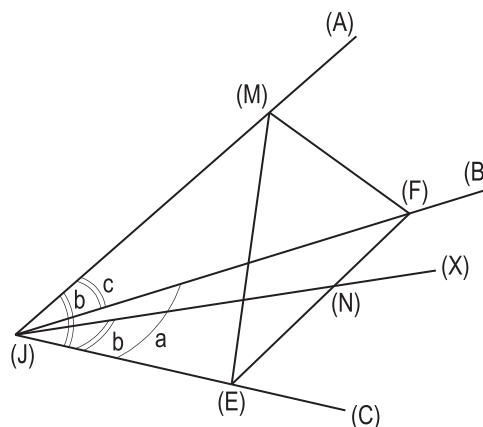


Figura 106

$$\overline{(E)(M)} = \overline{(E)(N)} \quad (1)$$

O triângulo  $(E)(M)(F)$  fornece (*Geometria Plana*, número 36):

$$\overline{(F)(M)} > \overline{(E)(F)} - \overline{(E)(M)} \quad (2)$$

Substituindo (2) em (1), vem:

$$\overline{(F)(M)} > \overline{(E)(F)} - \overline{(E)(N)}$$

Ou seja,

$$\overline{(F)(M)} > \overline{(N)(F)} \quad (3)$$

Consideremos, agora, os triângulos  $(J)(N)(F)$  e  $(J)(F)(M)$  (Figura 106) e observemos que, porque eles possuem um lado comum  $(J)(F)$ , um par de lados iguais –  $(J)(N)$  e  $(J)(M)$  – e os terceiros lados diferentes, os ângulos opostos aos lados diferentes são desiguais, sendo maior o que se opõe ao maior destes lados (*Geometria Plana*, número 44).

Assim, a relação (3) garante que  $c > a - b \quad \therefore \quad a < b + c$ .

Ora, se o menor dos ângulos faces –  $c$  – é maior que a diferença entre os outros dois e se o maior dos ângulos faces –  $a$  – é menor que a soma dos outros dois, estas propriedades são válidas, por mais forte razão, para os demais ângulos faces do triedro.

Então, em todo triedro, cada ângulo face é menor que a soma e maior que a diferença dos outros dois, conforme se queria provar.

## 81 – Corolário

Em todo ângulo poliédrico convexo, cada ângulo face é menor que a soma dos demais.

Demonstração: Consideremos um ângulo sólido convexo genérico (J) – (A)(B)(C) ... (M)(N), com um número  $n$  qualquer de arestas e designemos por  $a, b, c, \dots, m, n$  seus ângulos faces, admitindo que  $a$  seja o maior deles.

Consideremos, ainda, os planos que a aresta (J)(A) forma com as arestas (J)(C), (J)(D), ... e (J)(M), os quais dividem o ângulo sólido em triedros consecutivos (J) – (A)(B)(C), (J)–(A)(C)(D), (J)–(A)(D)(E), ... e (J)–(A)(M)(N) (Figura 107).

Designemos por  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$  e  $\theta$  os ângulos  $(A)(\hat{J})(C)$ ,  $(A)(\hat{J})(D)$ ,  $(A)(\hat{J})(E)$ , ... e  $(A)(\hat{J})(M)$ , respectivamente (Figura 107).

Para os diversos triedros consecutivos formados podemos (número 80) escrever:

$$a < b + \alpha$$

$$\alpha < c + \beta$$

$$\beta < d + \gamma$$

$$\gamma < \dots\dots\dots$$

$$\dots\dots\dots + \theta$$

$$\theta < m + n$$

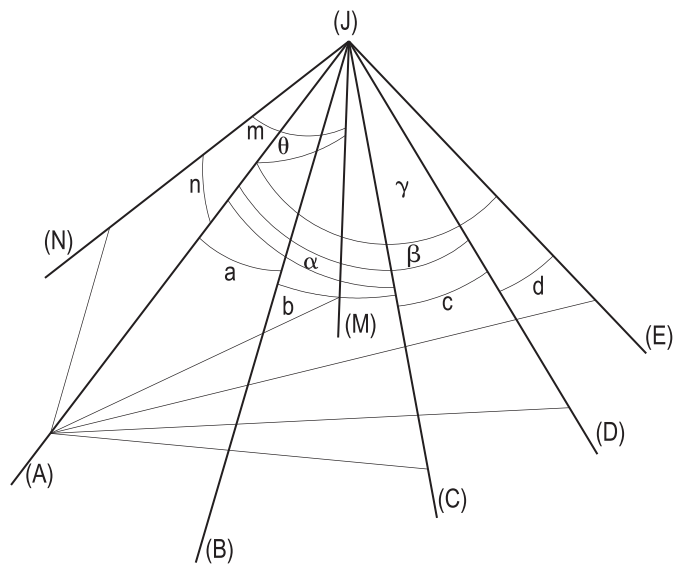


Figura 107

Somando, membro a membro, as relações acima e simplificando, vem:

$$a < b + c + \dots + m + n$$

E se  $a$ , embora sendo o maior ângulo das faces, é menor que a soma dos demais, por mais forte razão, a propriedade valerá para os demais ângulos faces.

Então, em todo ângulo poliédrico convexo, independentemente de quantas faces tenha, cada ângulo face é menor que a soma dos demais, como se queria demonstrar.

## 82 – Teorema

Em todo ângulo poliédrico convexo a soma dos ângulos faces é menor que quatro retos.

Demonstração: Consideremos um ângulo sólido convexo genérico (J), com um número n qualquer de arestas, e um plano ( $\pi$ ) qualquer que corte todas as suas arestas.

Designemos por a, b, c, d, etc. os ângulos faces do ângulo sólido; por x, y, z, etc. os ângulos internos do polígono convexo segundo o qual ( $\pi$ ) corta (J) e por  $\alpha, \beta, \gamma, \varphi, \lambda, \rho$ , etc., os ângulos que as diversas arestas do ângulo sólido formam com os pares de lados do polígono seção concorrentes com elas (Figura 108). Para os diversos triângulos formados pelo vértice (J) e pelos lados do polígono seção, temos (*Geometria Plana*, número 64):

$$a + \beta + \gamma = 2r$$

$$b + \varphi + \lambda = 2r$$

$$c + \rho + \theta = 2r$$

.....

$$\therefore S_f + S = n \cdot 2r \quad (1)$$

Onde  $S_f$  representa a soma dos ângulos faces do ângulo sólido e S a soma dos ângulos que as arestas do ângulo sólido formam com os lados do polígono seção que concorrem com elas (Figura 108).

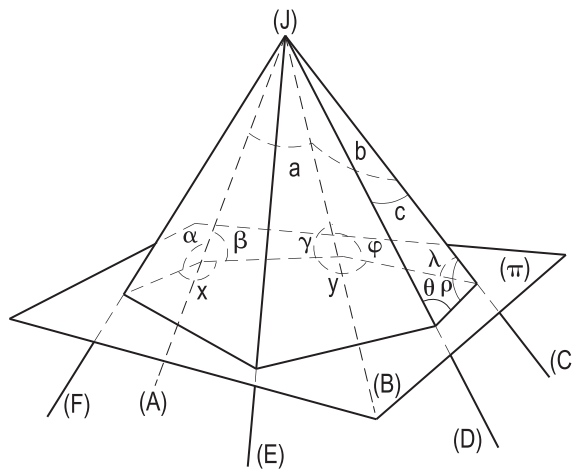


Figura 108

Designando por  $S_i$  a soma dos ângulos internos x, y, z, etc. do polígono seção e observando os triedros formados em cada um dos vértices do polígono seção, podemos (número 81) escrever:

$$x < \alpha + \beta$$

$$y < \gamma + \varphi$$

$$z < \lambda + \rho$$

.....

$$\text{Somando, membro a membro, vem: } S_i < S \quad (2)$$

$$\text{A relação (1) se escreve: } S = n \cdot 2r - S_f$$

$$\text{E, assim, a relação (2) fica: } S_i < n \cdot 2r - S_f \quad \therefore S_f < n \cdot 2r - S_i \quad (3)$$

Mas como (*Geometria Plana*, número 66)  $S_i = (n - 2) \cdot 2r$ , a relação (3) dá:

$$S_f < n \cdot 2r - (n - 2) \cdot 2r \quad \therefore S_f < n \cdot 2r - n \cdot 2r + 4r \quad \therefore \boxed{S_f < 4r}$$

Conforme se queria demonstrar.

### 83 – Corolário

A soma dos ângulos faces de um triedro é menor que quatro retos.

Porque todo triedro é um ângulo poliédrico convexo (número 71).

### 84 – Observação

É possível – e fácil – provar diretamente que a soma dos ângulos faces de um triedro é menor que quatro retos.

De fato, sejam  $a$ ,  $b$  e  $c$  os ângulos faces de um triedro qualquer  $(J)-(A)(B)(C)$  e prolonguemos sua aresta  $(J)(A)$ , além do vértice, formando o triedro  $(J)-(A')(B)(C)$ , adjacente ao primeiro (Figura 109).

Os ângulos faces deste novo triedro serão, então,  $a$ ,  $(2r - b)$  e  $(2r - c)$ , para os quais vale (número 80) escrever:

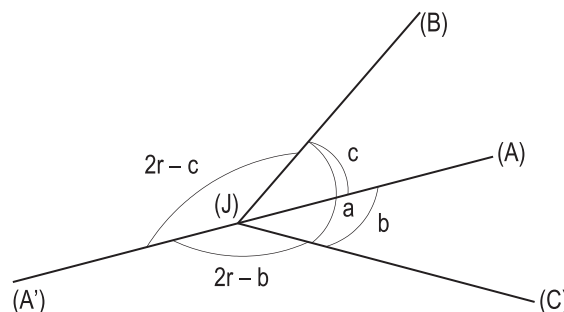


Figura 109

$$a < (2r - b) + (2r - c) \quad \therefore \quad a < 4r - b - c \quad \therefore \quad \boxed{a + b + c < 4r}$$

### 85 – Relações entre os ângulos faces de um triedro

Dos teoremas já demonstrados concluímos que, dados três ângulos  $a$ ,  $b$  e  $c$  ( $a > b > c$ ), para que eles possam ser os ângulos faces de um triedro é necessário e suficiente que atendam às condições:

$$\boxed{a + b + c < 4r}$$

$$\boxed{a < b + c}$$

$$\boxed{c > a - b}$$

### 86 – Teorema

Em todo triedro:

1. a soma dos diedros está compreendida entre dois e seis retos;
2. cada diedro, aumentado de dois retos, é maior que a soma dos outros dois.

Demonstração: Consideremos um triedro qualquer (J), de diedros A, B, C, e admitamos ser A o menor dos três.

Consideremos ainda o triedro (J'), suplementar de (J), com ângulos faces a', b' e c'.

Sabemos (número 73), então, que:  $A + a' = 2r$

$$B + b' = 2r$$

$$\underline{C + c' = 2r}$$

Somando, membro a membro, vem:  $A + B + C + a' + b' + c' = 6r$

$$\therefore A + B + C = 6r - (a' + b' + c') \quad (1)$$

Como (número 83) a soma  $(a' + b' + c')$  dos ângulos faces do triedro (J') é menor que quatro retos e, naturalmente, maior que zero, a relação (1) fornece:

$$6r - 4r < A + B + C < 6r - 0r \quad \therefore \quad \boxed{2r < A + B + C < 6r}$$

relação que prova a primeira parte do teorema.

Voltemos a considerar o triedro (J'), para o qual podemos (número 80) escrever:

$$a' < b' + c' \quad \therefore \quad 2r - A < (2r - B) + (2r - C)$$

$$\therefore -A < 2r - B - C \quad \therefore -A - 2r < -B - C \quad \therefore \quad \boxed{A + 2r > B + C}$$

E como, por hipótese, A é o menor dos três diedros, a propriedade acima provada vale, por mais forte razão, para os demais diedros do triedro.

Fica, assim, demonstrada a segunda parte do teorema.

## 87 – Igualdade de triedros

São iguais dois triedros que possuam:

1. um ângulo face igual compreendido entre dois diedros respectivamente iguais e igualmente dispostos;
2. um diedro igual compreendido entre dois ângulos faces respectivamente iguais e igualmente dispostos;
3. os três ângulos faces respectivamente iguais e igualmente dispostos;
4. os três diedros respectivamente iguais e igualmente dispostos.



# CAPÍTULO VII

## POLIEDROS CONVEXOS

### 88 – Definições

Poliedro é a figura formada por quatro ou mais polígonos planos, não situados num mesmo plano, e tais que um lado de um seja também lado de outro (Figura 110). Estes polígonos são denominados faces do poliedro e seus lados e vértices são respectivamente as arestas e os vértices do poliedro.

Diagonal de um poliedro é todo segmento formado por dois vértices não pertencentes a uma única face – como (A)(T), na Figura 110. Planos diagonais de um poliedro são todos os planos formados por três vértices não situados numa só face – como  $(\alpha)$  e  $(\beta)$ , na Figura 110. Assim, todo plano diagonal de um poliedro é secante a ele, pertencendo a pelo menos três de seus vértices.

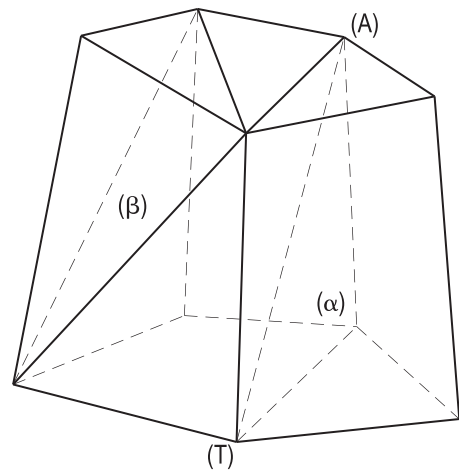


Figura 110

Sempre que um plano corta um poliedro, produz-se um polígono cujos lados são as interseções do plano considerado com as faces do poliedro que ele corta e cujos vértices são as interseções daquele plano com as arestas atingidas. O polígono obtido denomina-se, então, seção plana no poliedro.

### 89 – Poliedros convexos

Um poliedro é convexo quando os planos de todas as suas faces não o atravessam, isto é, quando ele se situa inteiramente num dos semiespaços formados pelo plano de uma qualquer de suas faces.

Quando ocorre o contrário, isto é, quando o plano de alguma das faces do poliedro atravessa o sólido, ele é denominado não convexo ou côncavo. Assim, para que um poliedro seja não convexo é necessário e suficiente que pelo menos um de seus diedros seja reentrante, ou seja, maior que dois retos.

Da própria definição de poliedro convexo decorre que:

1. Todas as faces de um poliedro convexo são polígonos convexos.

Porque se houvesse polígono face não convexo, haveria obrigatoriamente diedro reentrante e, então, algum plano face cortaria o poliedro.

2. Quando um poliedro é convexo, todas as seções planas nele produzidas são polígonos convexos; quando o poliedro é não convexo, ele admite seções planas côncavas.

De fato, a inexistência de diedro reentrante nos poliedros convexos garante que todas as seções planas nele produzidas sejam polígonos convexos (Figura 111). E, ao contrário, todos os planos que cortam a aresta de um diedro reentrante de um poliedro não convexo produzem seções planas não convexas (Figura 112).

3. Toda reta secante a um poliedro convexo possui dois pontos em comum com a superfície do poliedro (Figura 111); quando o poliedro é não convexo, uma reta pode ter mais de dois pontos comuns com sua superfície (Figura 112).

Basta ver que os traços da reta considerada na superfície do poliedro são os pontos que ela tem em comum com os lados do polígono seção produzido no poliedro por um dos planos que a contém.

## 90 – Classificação

Quanto ao número de faces que possui, um poliedro pode ser um tetraedro, um pentaedro, um hexaedro, um heptaedro, um octaedro, etc., conforme tenha respectivamente quatro, cinco, seis, sete, oito, etc., faces.

## 91 – Teorema de Euler

Em todo poliedro convexo, o número de arestas aumentado de duas unidades é igual à soma dos números de faces e de vértices.

Demonstração: Em toda linha poligonal aberta em que não são consideradas a origem e a extremidade, a diferença entre os números de lados e de vértices, tomados nesta ordem, é igual a um.

De fato, basta ver que a linha poligonal assim considerada pode ser obtida a partir do polígono formado pela união de seus extremos, pela supressão desses extremos e do lado que os une (Figura 113).

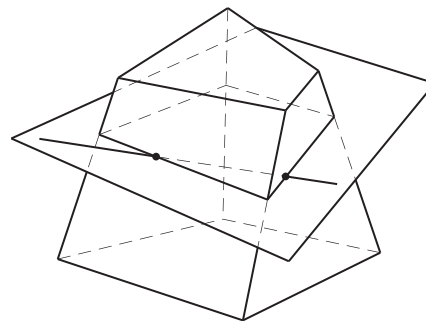


Figura 111

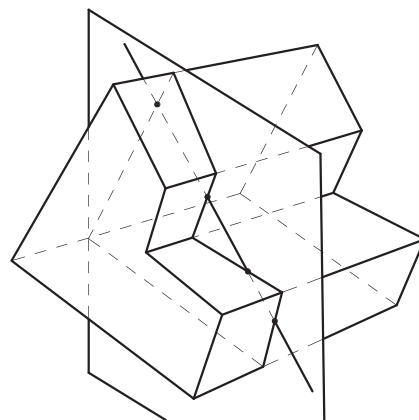


Figura 112

E, designando por  $n$  o gênero do polígono e por  $A$  e  $V$  os números de lados e de vértices considerados na linha poligonal aberta primitiva, podemos escrever:  $A = n - 1$  e  $V = n - 2$

$$\therefore A - V = (n - 1) - (n - 2) = n - 1 - n + 2 \quad \therefore A - V = 1$$

Passemos a considerar um poliedro convexo qualquer. Para formá-lo, tomaremos um polígono  $P_1$  e a seguir um outro  $P_2$  que tenha um lado em comum com o primeiro, e a seguir um terceiro polígono  $P_3$  que tenha ao menos um lado em comum com um dos primeiros e assim por diante, isto é, sempre considerando um novo polígono que tenha pelo menos um lado comum com algum dos anteriores, até completar o poliedro.

Sejam  $A_1$  e  $V_1$  os números de arestas e vértices da primeira face  $P_1$  e consideremos, nas faces seguintes  $P_2, P_3, P_4$ , etc., os números  $A_2$  e  $V_2, A_3$  e  $V_3, A_4$  e  $V_4$ , etc. de arestas e vértices pertencentes a cada uma destas faces e que não tenham sido contados em faces anteriores. Assim fazendo, ao concluir as contagens de arestas e vértices, na última face do poliedro, teremos considerado todas as suas arestas e todos os seus vértices, sem que tenhamos efetuado, nas contagens, qualquer repetição.

A primeira face  $P_1$ , por ser um polígono, possui números iguais  $A_1$  e  $V_1$ , de arestas e de vértices. Em todas as faces seguintes, exceto a última, para evitar as repetições de contagens, estaremos considerando linhas poligonais abertas sem extremos e, então, as diferenças  $(A_2 - V_2), (A_3 - V_3), (A_4 - V_4)$ , etc. entre os números de lados e de vértices serão sempre iguais a um. Na última face,  $P_F$ , finalmente, todas as arestas e todos vértices, por pertencerem obrigatoriamente a faces anteriormente consideradas, já terão sido contados, sendo pois nulos os números  $A_F$  e  $V_F$  de arestas e vértices novos dados por esta face ao poliedro. Assim:

$$\begin{array}{lclcl} P_1 & \rightarrow & A_1 - V_1 & = & 0 \\ P_2 & \rightarrow & A_2 - V_2 & = & 1 \\ P_3 & \rightarrow & A_3 - V_3 & = & 1 \\ \dots & & & & \\ P_{F-1} & \rightarrow & A_{F-1} - V_{F-1} & = & 1 \\ P_F & \rightarrow & A_F - V_F & = & 0 \end{array}$$

Designando por  $A$  e  $V$  os números de arestas e de vértices do poliedro e somando, membro a membro, as  $F$  relações acima apresentadas temos:

$$A - V = 0 + 1 + 1 + \dots + 1 + 0 = F - 2 \quad \therefore \boxed{A + 2 = F + V}$$

Fica, assim, demonstrado o teorema de Euler.

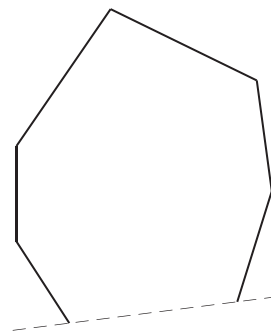


Figura 113

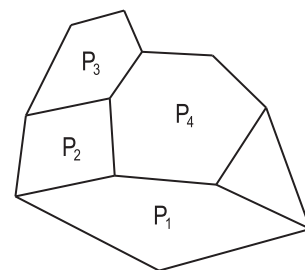


Figura 114

## 92 – Soma dos ângulos internos das faces

Consideremos um poliedro convexo genérico de  $A$  arestas,  $F$  faces e  $V$  vértices e calculemos a soma  $S_i$  dos ângulos internos de todas as suas faces. Para tanto, designemos por  $n_1, n_2, n_3, \dots, n_F$  os gêneros de cada uma de suas faces e anotemos os valores  $S_1, S_2, S_3, \dots, S_F$  das somas dos ângulos internos de cada uma das faces.

Porque todas são polígonos convexos, podemos (*Geometria Plana*, número 66) escrever:

$$S_1 = (n_1 - 2) 2r$$

$$S_2 = (n_2 - 2) 2r$$

$$S_3 = (n_3 - 2) 2r$$

.....

$$S_F = (n_F - 2) 2r$$

Somando, membro a membro, vem: 
$$S_i = (n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_F - 2F) 2r \quad (1)$$

Mas a soma  $(n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_F)$  dos gêneros de todas as faces é igual ao dobro do número de arestas do poliedro, pois, ao contar, separadamente, as arestas de cada face, estaremos considerando duas vezes cada uma delas, uma vez que cada aresta pertence necessariamente a duas faces do poliedro. Assim, a relação (1) dá:

$$S_i = (2A - 2F) 2r \quad \therefore \quad S_i = 2(A - F) 2r \quad \therefore \quad \boxed{S_i = (A - F) 4r}$$

E, para expressar a soma  $S_i$  dos ângulos internos de todas as faces do poliedro, em função do número  $V$  de vértices, observemos que o teorema de Euler (número 91) fornece:

$$A + 2 = F + V \quad \therefore \quad A - F = V - 2 \quad \therefore \quad \boxed{S_i = (V - 2) 4r}$$

## 93 – Soma dos ângulos externos das faces

Consideremos um poliedro convexo qualquer, com  $F$  faces, e observemos que, porque todas as suas faces são polígonos convexos (número 89.1), a soma dos ângulos externos de cada face é igual a  $4r$  (*Geometria Plana*, número 67).

Assim, para a soma  $S_e$  dos ângulos externos de todas as  $F$  faces, temos:

$$\boxed{S_e = F \cdot 4r}$$

Ou seja, a soma dos ângulos externos das faces de um poliedro convexo é função exclusiva de seu gênero, isto é, da quantidade de faces que possui.

## 94 – Número de diagonais

Consideremos um poliedro convexo qualquer de  $V$  vértices,  $A$  arestas e  $F$  faces e calculemos o número  $D$  de diagonais que ele possui.

Para tanto, observemos que o número de combinações  $C_V^2$  dos  $V$  vértices, tomados dois a dois, dá o total de segmentos provenientes das uniões dos pares de vértices do poliedro. Tais segmentos são as  $A$  arestas, as  $D$  diagonais do poliedro e todas as diagonais faciais, isto é, as diagonais de todos os polígonos faces.

Assim, designando por  $S_{df}$  a soma dos números das diagonais de todas as faces do poliedro, podemos escrever:

$$C_V^2 = A + D + S_{df} \quad \therefore \quad \boxed{D = C_V^2 - A - S_{df}}$$

Ou ainda:  $\boxed{D = \frac{V(V-1)}{2} - A - S_{df}}$

Naturalmente, as relações instituídas permitirão calcular o número  $D$  de diagonais de um poliedro, desde que se saiba – ou se possa determinar – quais são os gêneros de todas as suas faces, pois só assim será possível obter o valor da parcela  $S_{df}$ .

## 95 – Estudo dos poliedros convexos a partir dos gêneros de suas faces

Consideremos um poliedro convexo qualquer de  $A$  arestas,  $V$  vértices e  $F$  faces e designemos por  $F_3, F_4, F_5, \dots, F_n$  os números de faces de gêneros 3, 4, 5, ...  $n$ , respectivamente, que ele possui.

$$\text{Resulta, imediatamente, que: } F_3 + F_4 + F_5 + \dots + F_n = F \quad (1)$$

Separaremos as faces do poliedro e consideremos individualmente os conjuntos formados pelas  $F_3$  faces triangulares, pelas  $F_4$  faces quadrangulares, pelas  $F_5$  faces pentagonais, etc. Os números de arestas existentes nestes conjuntos de faces destacadas são respectivamente iguais a  $3F_3, 4F_4, 5F_5$ , etc.

E porque cada aresta do poliedro pertence necessariamente a duas faces, ao fim da contagem das arestas existentes em todas as faces, consideradas separadamente, teremos obtido um total de arestas igual ao dobro do que possui o poliedro.

$$\text{Assim, podemos escrever: } 3F_3 + 4F_4 + 5F_5 + \dots + nF_n = 2A \quad (2)$$

As relações (1) e (2) aqui estabelecidas e a do teorema de Euler (número 91) permitem organizar um sistema, mediante o qual é possível calcular os números de faces, arestas e vértices de um poliedro convexo, desde que sejam conhecidas as quantidades de faces de cada gênero. Tal sistema é o seguinte:

$$\begin{aligned} F_3 + F_4 + F_5 + \dots + F_n &= F \\ 3F_3 + 4F_4 + 5F_5 + \dots + nF_n &= 2A \\ A + 2 &= F + V \end{aligned}$$

## 96 – Estudo dos poliedros convexos a partir dos números de arestas que concorrem em seus vértices

Consideremos um poliedro convexo de  $A$  arestas,  $F$  faces e  $V$  vértices e designemos por  $V_3, V_4, V_5, \dots, V_n$  os números de vértices nos quais concorrem respectivamente 3, 4, 5, ...,  $n$  arestas do poliedro.

Resulta, imediatamente, que:  $V_3 + V_4 + V_5 + \dots + V_n = V$  (1)

Como a cada vértice do grupo  $V_3$  chegam três arestas, ao total  $V_3$  desses vértices correspondem  $3V_3$  arestas. Analogamente, aos  $V_4$  vértices do poliedro correspondem  $4V_4$  arestas, aos  $V_5, 5V_5$  arestas, etc.

E como cada aresta chega a dois vértices do poliedro, após considerar todos os vértices, teremos contado duas vezes cada aresta.

Podemos, então, escrever:  $3V_3 + 4V_4 + 5V_5 + \dots + nV_n = 2A$  (2)

As relações (1) e (2) aqui estabelecidas e a do teorema de Euler (número 91) permitem organizar um sistema, mediante o qual é possível calcular os números de vértices, arestas e faces de um poliedro convexo, desde que sejam conhecidos os números de arestas que concorrem em cada vértice.

Tal sistema é o seguinte:

$$\begin{aligned} V_3 + V_4 + V_5 + \dots + V_n &= V \\ 3V_3 + 4V_4 + 5V_5 + \dots + nV_n &= 2A \\ A + 2 &= F + V \end{aligned}$$

## 97 – Poliedros conjugados

Por definição, dois poliedros são conjugados quando os números de faces de cada um deles são iguais aos de vértices do outro.

Decorre, imediatamente, que os números de arestas de dois poliedros conjugados são iguais. De fato, sendo  $A$ ,  $F$  e  $V$  os números de arestas, faces e vértices de um poliedro e  $A'$ ,  $F'$  e  $V'$  os números de arestas, faces e vértices do poliedro conjugado do primeiro, a própria definição e o teorema de Euler permitem escrever:

$$F = V' \text{ e } V = F'$$

$$\therefore F + V = F' + V' \quad \therefore A + 2 = A' + 2 \quad \therefore \boxed{A = A'}$$

## 98 – Poliedros regulares

Por definição, um poliedro é regular quando todas as suas faces são polígonos regulares iguais e todos os seus ângulos sólidos são iguais, isto é, quando em todos os seus vértices concorrem números iguais de arestas.

## 99 – Poliedros convexos regulares

Para um estudo geral dos poliedros convexos regulares, designemos por  $n$  o gênero de suas faces e por  $p$  o número de arestas que concorrem em cada vértice. Os sistemas anteriormente instituídos (números 95 e 96) para os poliedros convexos fornecem:

$$\left. \begin{array}{l} F_n = F \\ nF_n = 2A \end{array} \right\} \therefore nF = 2A \quad \left. \begin{array}{l} V_p = V \\ pV_p = 2A \end{array} \right\} \therefore pV = 2A \quad \therefore \boxed{nF = pV = 2A}$$

Para obter, em função de  $n$  e de  $p$ , os valores possíveis de  $F$ ,  $V$  e  $A$ , resolvamos o sistema formado com a relação acima instituída e com a do teorema de Euler (número 91). Teremos:

$$nF = pV \quad \therefore V = \frac{nF}{p} \quad (1)$$

$$nF = 2A \quad \therefore A = \frac{nF}{2} \quad (2)$$

$$A + 2 = F + V \quad (3)$$

Substituindo (1) e (2) em (3), vem:

$$\frac{nF}{2} + 2 = F + \frac{nF}{p} \quad \therefore npF + 4p = 2pF + 2nF$$

$$\begin{array}{ll} \therefore (2p + 2n - np) F = 4p & \therefore \boxed{F = \frac{4p}{2p + 2n - np}} \\ \therefore V = \frac{n}{p} \cdot \frac{4p}{2p + 2n - np} & \therefore \boxed{V = \frac{4n}{2p + 2n - np}} \\ \therefore A = \frac{n}{2} \cdot \frac{4p}{2p + 2n - np} & \therefore \boxed{A = \frac{2np}{2p + 2n - np}} \end{array}$$

Com essas três últimas relações poderemos detalhar todos os poliedros convexos regulares possíveis de existir, como faremos em seguida.

### 100 – Teorema

Só pode haver cinco espécies distintas de poliedros convexos regulares.

Demonstração: Pela própria definição, para formar poliedros regulares devemos reunir, em cada vértice, quantidades iguais de polígonos regulares iguais. E como se deseja obter poliedros convexos regulares, em cada vértice ficará formado um ângulo poliédrico convexo. Ora, porque a soma dos ângulos faces de um ângulo poliédrico convexo é necessariamente menor que  $360^\circ$  (número 82), a associação quantitativa dos polígonos faces do poliedro, em cada vértice, é limitada. Investiguemos, então, os casos possíveis:

1. Com faces triangulares regulares só podem ser formadas três espécies distintas de poliedros convexos regulares: reunindo os triângulos três a três, quatro a quatro ou cinco a cinco em cada vértice.

De fato, porque os ângulos internos dos triângulos equiláteros valem  $60^\circ$ , temos:

- 3 .  $60^\circ < 360^\circ$  – possível
- 4 .  $60^\circ < 360^\circ$  – possível
- 5 .  $60^\circ < 360^\circ$  – possível
- 6 .  $60^\circ = 360^\circ$  – impossível
- 7 .  $60^\circ > 360^\circ$  – impossível      etc.

2. Com faces quadradas só pode ser formada uma espécie de poliedros convexos regulares: reunindo os quadrados três a três em cada vértice.

De fato, porque os ângulos internos dos quadrados valem  $90^\circ$ , temos:

- 3 .  $90^\circ < 360^\circ$  – possível
- 4 .  $90^\circ = 360^\circ$  – impossível
- 5 .  $90^\circ > 360^\circ$  – impossível      etc.



3. Com faces pentagonais convexas regulares só pode ser formada uma espécie de poliedros convexas regulares: reunindo os pentágonos três a três em cada vértice.

De fato, porque os ângulos internos dos pentágonos convexas regulares valem  $108^\circ$  (*Geometria Plana*, número 291), temos:

$$3 \cdot 108^\circ < 360^\circ - \text{possível}$$

$$4 \cdot 108^\circ > 360^\circ - \text{impossível} \quad \text{etc.}$$

4. Com faces convexas regulares de gêneros maiores que cinco é impossível formar qualquer espécie de poliedros convexas regulares.

De fato, porque os ângulos internos dos hexágonos regulares valem  $120^\circ$ , ao reuni-los três a três em cada vértice, já igualamos os  $360^\circ$ , sendo, pois, impossível formar, com eles, qualquer poliedro convexo regular. E como os ângulos internos dos polígonos convexas regulares crescem com o aumento de seus gêneros, será impossível formar qualquer espécie de poliedro convexo regular pela reunião de polígonos de gêneros superiores a seis.

Conclui-se, então, que só podem existir cinco espécies distintas de poliedros convexas regulares, três com faces triangulares, uma com faces quadradas e uma última com faces pentagonais.

### 101 – Observação

O teorema acima estudado poderia ser demonstrado diretamente a partir das relações instituídas (número 99) para os poliedros convexas regulares.

De fato, designando por  $n$  o gênero da face do poliedro e por  $p$  o número de arestas que concorrem em cada vértice, sendo  $n$  e  $p$  necessariamente positivos (pois  $n \geq 3$  e  $p \geq 3$ ), para que  $F$ ,  $A$  e  $V$  sejam positivos é necessário e suficiente que o denominador  $(2p + 2n - np)$  comum às três relações também o seja.

Assim:

$$2n + 2p - np > 0 \quad \therefore \quad 2n + p(2 - n) > 0 \quad \therefore \quad 2n > p(n - 2)$$

$$\therefore \quad \frac{2n}{n - 2} > p \quad (1)$$

E como  $p \geq 3$ , temos:

$$\frac{2n}{n - 2} \geq 3 \quad \therefore \quad 2n \geq 3(n - 2) \quad \therefore \quad 2n \geq 3n - 6$$

$$\therefore \quad n \leq 6 \quad (2)$$

Mas como  $n \geq 3$ , conclui-se, da relação (2), que só há quatro valores teoricamente possíveis para  $n$ : 3, 4, 5 e 6.

Substituindo cada um desses valores de  $n$  na relação (1), obtemos:

1. Para  $n = 3$ :

$$\frac{2n}{n-2} > p \quad \therefore \quad \frac{2 \cdot 3}{3-2} > p \quad \therefore \quad p < 6 \quad \therefore \quad \begin{cases} p = 3 \\ p = 4 \\ p = 5 \end{cases}$$

2. Para  $n = 4$ :

$$\frac{2n}{n-2} > p \quad \therefore \quad \frac{2 \cdot 4}{4-2} > p \quad \therefore \quad p < 4 \quad \therefore \quad p = 3$$

3. Para  $n = 5$ :

$$\frac{2n}{n-2} > p \quad \therefore \quad \frac{2 \cdot 5}{5-2} > p \quad \therefore \quad p < \frac{10}{3} \quad \therefore \quad p = 3$$

4. Para  $n = 6$ :

$$\frac{2n}{n-2} > p \quad \therefore \quad \frac{2 \cdot 6}{6-2} > p \quad \therefore \quad p < \frac{12}{4} \quad \therefore \quad p < 3, \text{ o que é impossível.}$$

Conclui-se, então, que só podem existir cinco espécies distintas de poliedros convexos regulares, correspondendo cada espécie a cada um dos seguintes pares de valores de  $n$  e de  $p$ :

$n$	3	3	3	4	5
$p$	3	4	5	3	3

## 102 – Cálculo dos elementos dos poliedros convexos regulares

Estabelecidos que estão os gêneros ( $n = 3$ ,  $n = 4$  e  $n = 5$ ) das faces e os números de arestas ( $p = 3$ ,  $p = 4$  e  $p = 5$ ) concorrentes em cada vértice, calculemos, para cada uma das cinco espécies de poliedros convexos regulares, os números de faces, vértices, arestas e diagonais.

Para tanto, basta substituir cada um dos cinco pares possíveis de valores de  $n$  e de  $p$  (número 101) nas relações instituídas para os números de faces, vértices, arestas e diagonais dos poliedros regulares (números 99 e 94). Assim:

1. Para  $n = 3$  e  $p = 3$ :

$$F = \frac{4p}{2p + 2n - np} = \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 - 3 \cdot 3} = 4$$

O poliedro é, pois, o tetraedro regular (Figura 115).

$$nF = pV = 2A \quad \therefore \quad 12 = 3V = 2A \quad \therefore \quad V = 4 \text{ e } A = 6$$

$$D = C_V^2 - A - S_{df} = \frac{4 \cdot 3}{2} - 6 - 0 \quad \therefore \quad D = 0$$

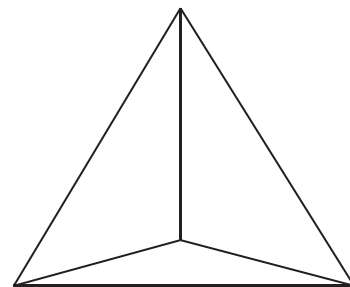


Figura 115

2. Para  $n = 3$  e  $p = 4$ :

$$F = \frac{4p}{2p + 2n - np} = \frac{4 \cdot 4}{2 \cdot 4 + 2 \cdot 3 - 3 \cdot 4} = 8$$

O poliedro é, pois, o octaedro regular (Figura 116).

$$nF = pV = 2A \quad \therefore 24 = 4V = 2A$$

$$\therefore V = 6 \text{ e } A = 12$$

$$D = C_V^2 - A - S_{df} = \frac{6 \cdot 5}{2} - 12 - 0 \quad \therefore D = 3$$

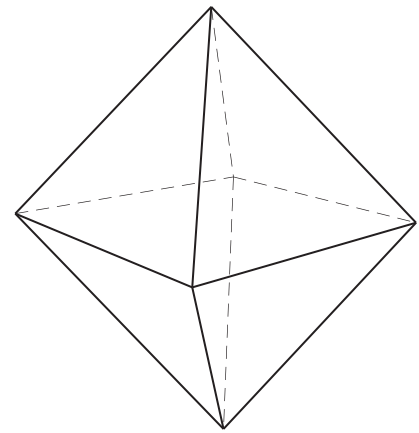


Figura 116

3. Para  $n = 3$  e  $p = 5$ :

$$F = \frac{4p}{2p + 2n - np} = \frac{4 \cdot 5}{2 \cdot 5 + 2 \cdot 3 - 3 \cdot 5} = 20$$

O poliedro é, pois, o icosaedro regular (Figura 117).

$$nF = pV = 2A \quad \therefore 60 = 5V = 2A$$

$$\therefore V = 12 \text{ e } A = 30$$

$$D = C_V^2 - A - S_{df} = \frac{12 \cdot 11}{2} - 30 - 0 \quad \therefore D = 36$$

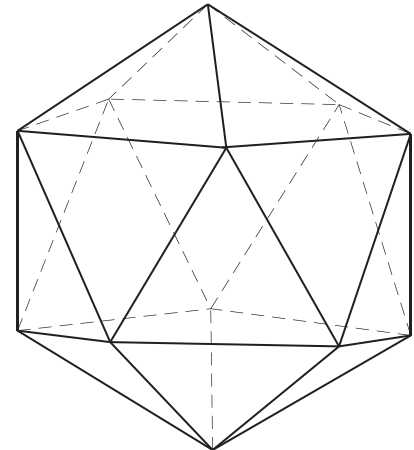


Figura 117

4. Para  $n = 4$  e  $p = 3$ :

$$F = \frac{4p}{2p + 2n - np} = \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 3 + 2 \cdot 4 - 4 \cdot 3} = 6$$

O poliedro é, pois, o hexaedro regular (Figura 118).

$$nF = pV = 2A \quad \therefore 24 = 3V = 2A$$

$$\therefore V = 8 \text{ e } A = 12$$

Como as faces são quadradas, cada uma possui duas diagonais. Assim, para o cálculo do número de diagonais, temos:

$$S_{df} = 2F = 12$$

$$D = C_V^2 - A - S_{df} = \frac{8 \cdot 7}{2} - 12 - 12 \quad \therefore D = 4$$

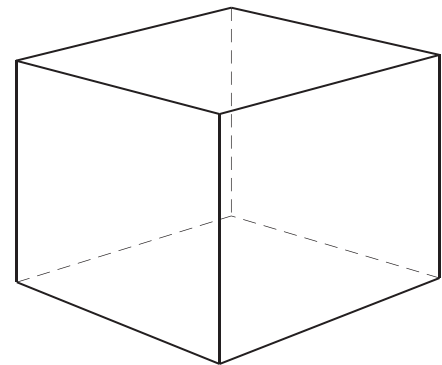


Figura 118

5. Para  $n = 5$  e  $p = 3$ :

$$F = \frac{4p}{2p + 2n - np} = \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 3 + 2 \cdot 5 - 5 \cdot 3} = 12$$

O poliedro é, pois, o dodecaedro regular (Figura 119).

$$nF = pV = 2A \quad \therefore \quad 60 = 3V = 2A \quad \therefore \quad V = 20 \text{ e } A = 30$$

Como as faces são pentágonos, cada uma possui cinco diagonais (*Geometria Plana*, número 24). Assim, para o cálculo do número de diagonais, temos:

$$S_{d_f} = 5F = 60$$

$$D = C_V^2 - A - S_{d_f} = \frac{20 \cdot 19}{2} - 30 - 60 \quad \therefore \quad D = 100$$

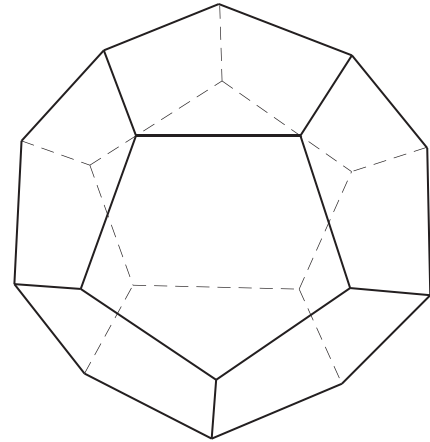


Figura 119

6. Resumo:

n	p	F	V	A	D	POLIEDRO
3	3	4	4	6	0	Tetraedro regular
3	4	8	6	12	3	Octaedro regular
3	5	20	12	30	36	Icosaedro regular
4	3	6	8	12	4	Hexaedro regular
5	3	12	20	30	100	Dodecaedro regular

### 103 – Observações

Pela simples consulta ao quadro resumo dos números de faces, vértices e arestas dos poliedros convexos regulares (número 102.6) acima, e do que se viu sobre poliedros conjugados (número 97), nota-se que:

1. dois tetraedros regulares são conjugados;
2. o octaedro e o hexaedro regulares são conjugados;
3. o icosaedro e o dodecaedro regulares são conjugados;
4. para um par qualquer de poliedros convexos regulares conjugados, os valores de  $n$  e de  $p$  se permutam.

# CAPÍTULO VIII

## TETRAEDRO REGULAR

### 104 – Tetraedro regular

É o poliedro formado por quatro faces triangulares equiláteras iguais, reunidas três a três em cada vértice. Possui seis arestas e quatro vértices e não tem diagonais (número 102.1).

### 105 – Propriedades

1. Todo plano paralelo a uma face produz, por seção, um triângulo equilátero.

Porque a seção é homotética da face que lhe é paralela, em relação ao vértice não pertencente a essa face (Figuras 120 e 121).

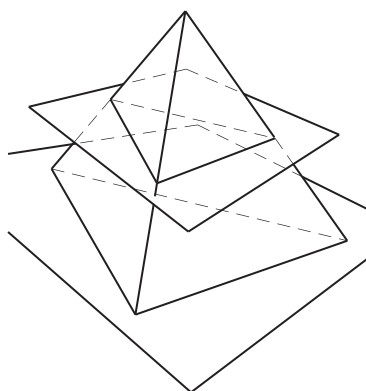


Figura 120

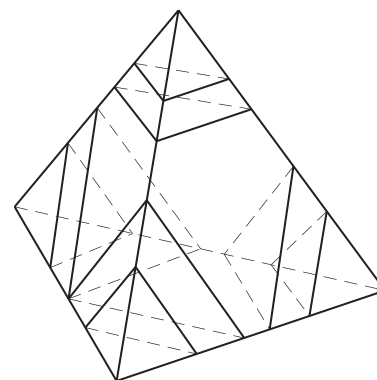


Figura 121

2. Todos os planos secantes pertencentes a uma aresta seccionam o tetraedro segundo triângulos isósceles.

Basta ver que, para um plano ( $\alpha$ ) genérico, pertencente à aresta (B)(C), os lados (R)(B) e (R)(C) da seção são cevianas iguais das faces (J)(A)(B) e (J)(A)(C). (Figuras 122 e 123).

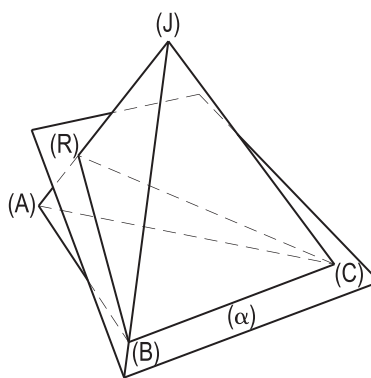


Figura 122

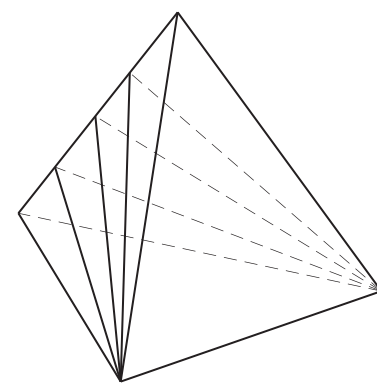


Figura 123

3. A seção produzida pelo plano formado por uma aresta e pelo ponto médio da aresta oposta é um triângulo isósceles, cujo ângulo oposto à base é o retilíneo do diedro do tetraedro.

De fato, sendo (M) o ponto médio da aresta (J)(A), o plano ( $\gamma$ ) definido por (M) e pela aresta (B)(C) corta as faces (J)(A)(B) e (J)(A)(C) segundo as medianas (B)(M) e (C)(M) dessas faces (Figura 124). E como essas medianas são também alturas (*Geometria Plana*, número 48.2), o ângulo interno (M) do triângulo isósceles (B)(M)(C) seção é o retilíneo do diedro do tetraedro regular (número 35).

E porque (B)(M) e (C)(M) são duas mediatrizes da aresta (J)(A), o plano ( $\gamma$ ), por elas definido (Figura 124), é o mediador da aresta (J)(A) (número 33).

4. O plano mediador de uma aresta contém a aresta oposta.
5. Duas arestas opostas de um tetraedro regular são ortogonais.
6. A reta formada pelos pontos médios de duas arestas opostas é a perpendicular comum a essas duas arestas.

Porque a reta (p) formada pelos pontos médios das arestas opostas (J)(A) e (B)(C), pertencendo ao plano mediador de (J)(A), é perpendicular a esta aresta e, sendo a mediana relativa à base do triângulo isósceles seção (B)(M)(C), é perpendicular à aresta (B)(C) (Figura 125), base desse triângulo.

Dentre todos os triângulos isósceles produzidos num tetraedro regular (J)-(A)(B)(C) pelos planos pertencentes a uma aresta (B)(C), aquele - (B)(M)(C) - que pertence ao plano mediador da aresta oposta (J)(A) é o de perímetro e áreas mínimos. De fato, basta ver que as alturas (B)(M) e (C)(M) das faces (J)(A)(B) e (J)(A)(C) são as cevianas mínimas dessas faces e que a altura (M)(N) é o menor segmento que se pode apoiar entre as arestas opostas (J)(A) e (B)(C) (Figura 126).

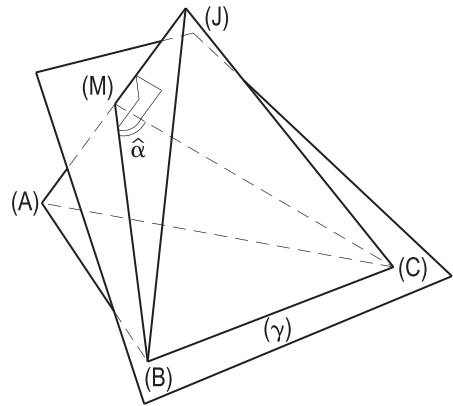


Figura 124

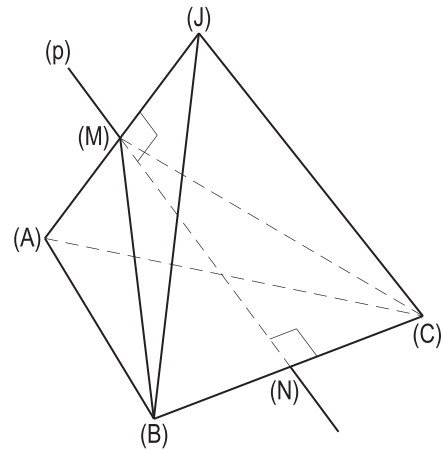


Figura 125

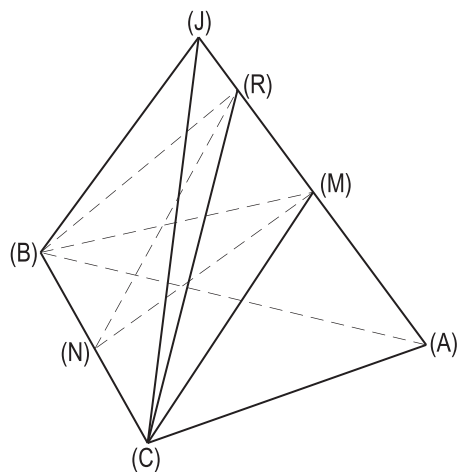


Figura 126

7. Os planos perpendiculares a uma aresta seccionam o tetraedro segundo triângulos isósceles.

Porque as seções assim produzidas são homotéticas, em relação a um dos vértices do sólido, do triângulo isósceles determinado pelo plano mediador da aresta considerada (Figura 127).

8. Todos os planos paralelos a duas arestas opostas produzem seções retangulares de perímetros iguais ao dobro da aresta do sólido.

De fato, todos os planos paralelos às arestas opostas (J)(A) e (B)(C) cortam as faces do sólido segundo retas respectivamente paralelas àquelas duas arestas (Figura 128). E porque (J)(A) e (B)(C) são ortogonais, todos os paralelogramos seções (R)(S)(T)(U), assim obtidos, são retângulos.

E como os triângulos (J)(R)(S) e (C)(S)(T) são equiláteros, temos:

$$(R)(S) = (J)(S)$$

$$(S)(T) = (S)(C)$$

Logo:  $(R)(S) + (S)(T) = (J)(S) + (S)(C)$

$$\therefore (R)(S) + (S)(T) = (J)(C)$$

Assim, quando o plano paralelo a duas arestas opostas do tetraedro se desloca, as seções retangulares produzidas mudam de forma, mas conservam constante o valor de seu perímetro, igual ao dobro da aresta do sólido. E, durante esse movimento, o centro do retângulo seção se desloca sobre a perpendicular comum (M)(N) às arestas (J)(A) e (B)(C) consideradas (Figura 129).

Porque os extremos (M) e (N) da perpendicular comum às arestas opostas (J)(A) e (B)(C), equidistando dos quatro vértices de cada um dos retângulos considerados (Figura 129), formam o eixo (M)(N), comum, de todos aqueles retângulos.

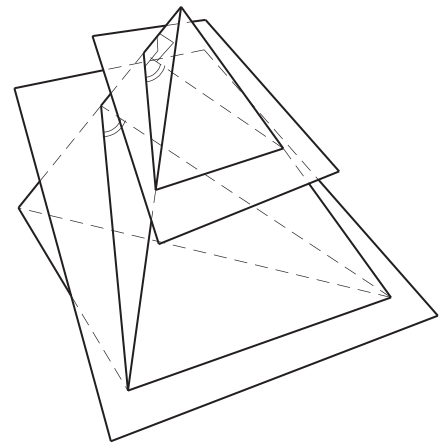


Figura 127

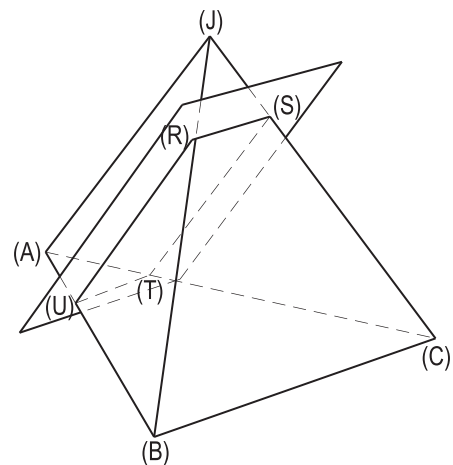


Figura 128

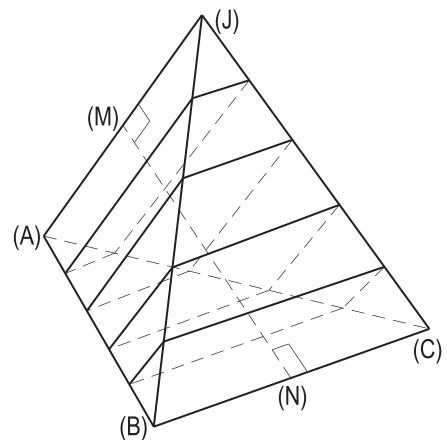


Figura 129

9. O plano equidistante de duas arestas opostas produz, por seção, um quadrado de lado igual à metade da aresta do tetraedro.

Porque o plano, sendo equidistante de duas arestas opostas, corta ao meio as outras quatro. E, assim, o retângulo seção é equilátero. Isto é, é um quadrado, de lado igual à metade da aresta do sólido (Figura 130).

E como o plano do quadrado equidista das arestas opostas  $(J)(A)$  e  $(B)(C)$ , o centro  $(O)$  do quadrado é o ponto médio da perpendicular comum  $(M)(N)$  àquelas duas arestas (Figura 130).

10. As perpendiculares comuns aos três pares de arestas opostas cortam-se mutuamente ao meio e são perpendiculares duas a duas.

Porque o tetraedro possui três pares de arestas opostas, há três seções quadradas, todas iguais, tendo, aos pares, uma diagonal comum (Figura 131).

Assim, as três perpendiculares comuns aos pares de arestas opostas do tetraedro (isto é, as diagonais dos três quadrados seções), que, como adiante será provado (número 114), sendo as três diagonais do octaedro regular inscrito no tetraedro considerado, são iguais e perpendiculares duas a duas, cortando-se mutuamente ao meio, segundo o ponto  $(O)$ , centro comum dos três quadrados.

11. As três perpendiculares comuns aos pares de arestas opostas e as quatro alturas do sólido concorrem num único ponto.

Porque as perpendiculares comuns aos pares de arestas opostas do tetraedro regular são mediatrizes dessas arestas, conclui-se que o ponto  $(O)$  (Figura 132) comum a elas é o ponto equidistante dos quatro vértices do sólido.

E porque cada altura do tetraedro é o lugar dos pontos equidistantes dos vértices da face a que corresponde (número 34.1), as quatro alturas têm de passar por aquele ponto  $(O)$ .

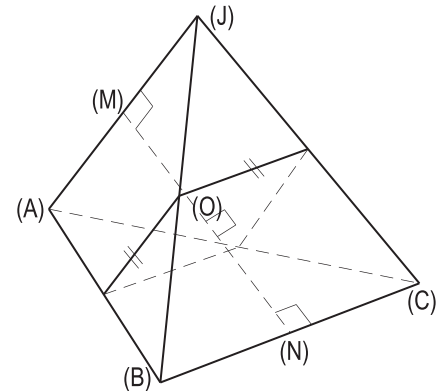


Figura 130

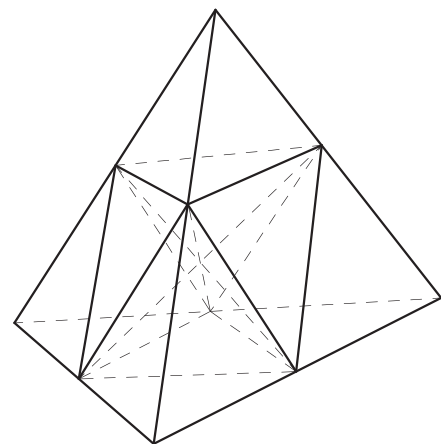


Figura 131

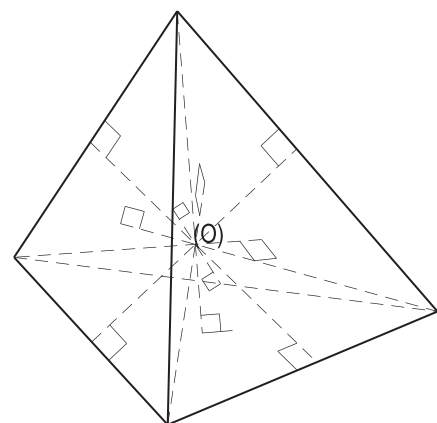


Figura 132



O ponto (O) (Figura 132) comum às alturas e às perpendiculares comuns, denomina-se centro do sólido, além de equidistar dos vértices, equidista também das faces do tetraedro, uma vez que cada plano mediador de uma aresta é o bissetor do diedro oposto a essa aresta. E, assim, (O) é o ponto comum aos bissetores de todos os diedros do tetraedro.

E mais, o centro (O) do sólido é também equidistante de todas as suas arestas, pois que a distância de (O) a cada aresta se mede pela metade do valor da distância entre os pares de arestas opostas de tetraedro.

12. A esfera circunscrita, a esfera inscrita e a esfera tangente às arestas de um tetraedro regular são concêntricas, sendo o centro comum o próprio centro do sólido.

De fato, como a superfície da esfera circunscrita ao tetraedro regular tem de pertencer aos seus quatro vértices (Figura 133), seu centro, tendo que equidistar desses vértices, há de ser (número 105.11) o centro do sólido.

Da mesma forma, porque a esfera inscrita num tetraedro regular, tangenciando suas quatro faces, tem que ter seu centro equidistando dessas faces (Figura 134), é tal que seu centro só pode ser o centro do tetraedro.

E, enfim, para ser tangente a todas as seis arestas do tetraedro regular, uma esfera (Figura 135) tem que ter seu centro equidistando de todas essas arestas, devendo, então, ser o próprio centro do sólido. O cálculo do raio dessa esfera vai detalhado adiante (número 106.5).

Cumprе notar que os pontos de contato da esfera inscrita com as faces são os pés das alturas do sólido (os centros das faces) e que a esfera tangente às arestas é secante às faces do tetraedro, cortando cada uma dessas faces segundo o círculo nela inscrito (Figura 135), produzindo, por isso, calotas iguais que extrapolam os planos dessas faces.

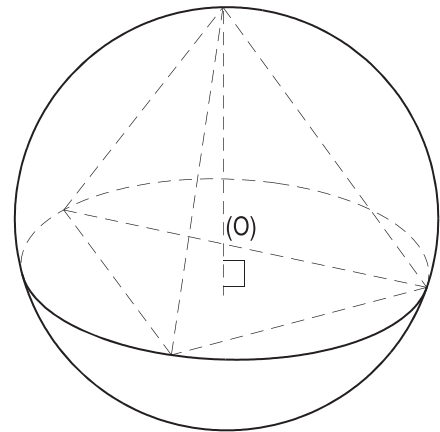


Figura 133

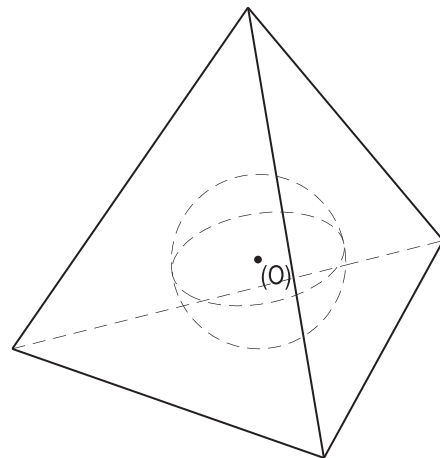


Figura 134

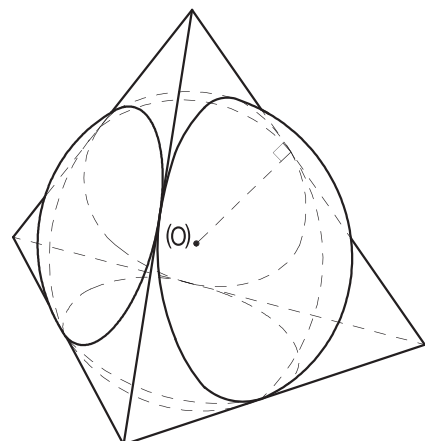


Figura 135

13. Os planos paralelos apenas a uma aresta cortam o tetraedro segundo trapézios isósceles ou segundo triângulos isósceles.

Consideremos dois planos  $(\alpha)$  e  $(\beta)$  paralelos apenas à aresta  $(B)(C)$  do tetraedro regular  $(J)-(A)(B)(C)$ , o primeiro secante às duas faces  $(A)(B)(C)$  e  $(J)(B)(C)$  que determinam a aresta  $(B)(C)$  (Figura 136), o segundo secante à face  $(A)(B)(C)$ , mas exterior ao triângulo face  $(J)(B)(C)$  (Figura 137).

Porque os segmentos  $(R)(S)$  e  $(T)(U)$  que  $(\alpha)$  produz como seção nos triângulos  $(J)(B)(C)$  e  $(A)(B)(C)$  são paralelos a  $(B)(C)$  e necessariamente desiguais, porque  $\alpha$  não é paralelo a  $(J)(A)$ , a seção  $(R)(S)(T)(U)$  é um trapézio. E porque os extremos de cada um desses dois segmentos são simétricos em relação ao plano mediador da aresta  $(B)(C)$ , o trapézio seção é isósceles (Figura 136).

E porque  $(\beta)$  corta a aresta  $(J)(A)$  segundo um ponto qualquer  $(X)$  e a face  $(A)(B)(C)$  segundo um segmento  $(Y)(Z)$  paralelo à aresta  $(B)(C)$  e simetricamente disposto em relação ao plano mediador desta aresta, a seção que  $(\beta)$  produz no sólido é um triângulo isósceles  $(X)(Y)(Z)$  (Figura 137), de base  $(Y)(Z)$ .

14. O contorno da projeção ortogonal de um tetraedro regular sobre um plano paralelo a uma de suas faces é um triângulo equilátero, igual à face do sólido.

Porque a face  $(A)(B)(C)$ , paralela ao plano  $(\pi)$  (Figura 138), projeta-se em verdadeira grandeza sobre esse plano e a projeção  $J$  do quarto vértice  $(J)$  do sólido é interior (é o próprio centro de  $ABC$ ) à projeção  $ABC$  da face paralela a  $(\pi)$ .

A projeção do sólido resulta, então, num triângulo equilátero  $ABC$  e nos três segmentos que unem seu centro  $J$  aos três vértices.

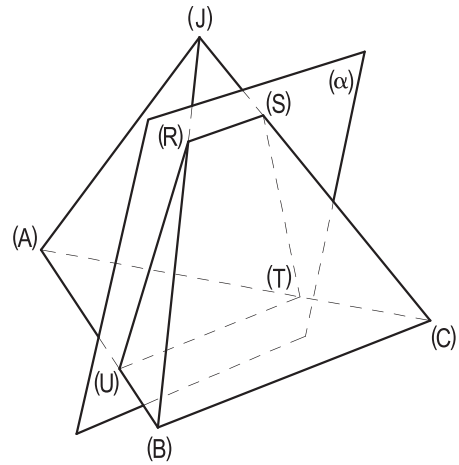


Figura 136

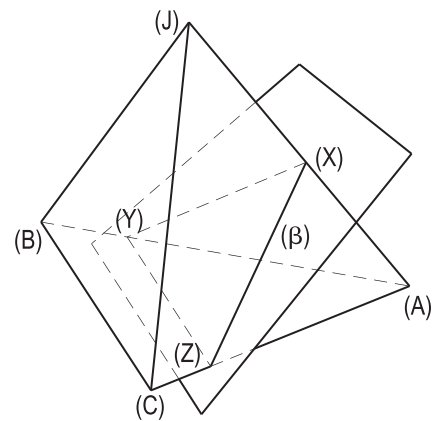


Figura 137

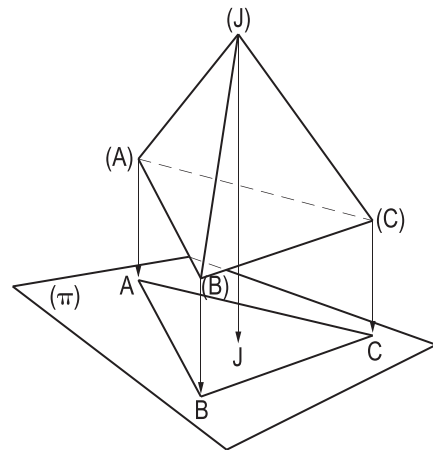


Figura 138

15. O contorno da projeção ortogonal de um tetraedro regular sobre um plano perpendicular a uma de suas arestas é um triângulo isósceles igual à seção produzida no sólido pelo plano mediador de uma de suas arestas.

Porque, sendo  $(J)(A)$  a aresta perpendicular ao plano  $(\pi)$ , o triângulo isósceles  $(B)(M)(C)$ , seção produzida no sólido pelo plano mediador da aresta  $(J)(A)$  (número 105.3), projeta-se em verdadeira grandeza sobre  $(\pi)$ , resultando coincidentes as projeções  $J, M$  e  $A$  dos pontos  $(J), (M)$  e  $(A)$ , respectivamente (Figura 139).

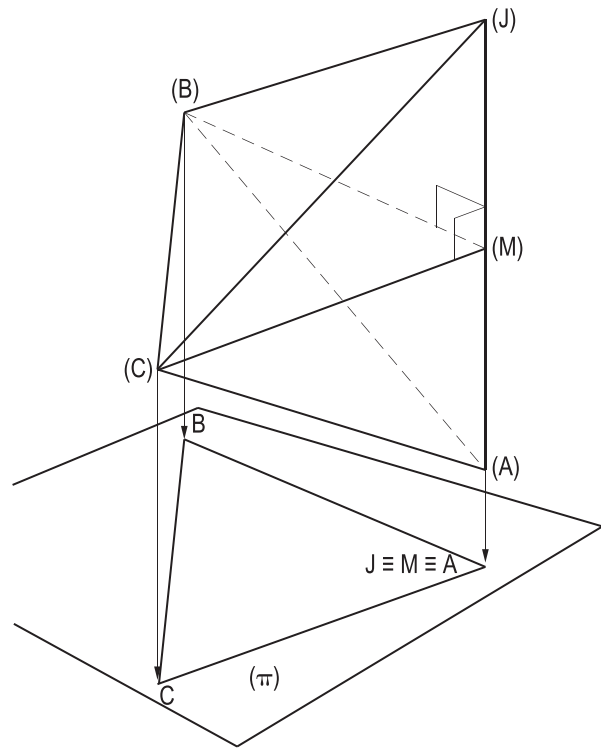


Figura 139

16. O contorno da projeção ortogonal de um tetraedro regular sobre um plano paralelo a duas arestas opostas é um quadrado cuja diagonal é igual à aresta do sólido.

Consideremos um plano  $(\pi)$  de projeção, paralelo às arestas opostas  $(J)(A)$  e  $(B)(C)$  do tetraedro  $(J)-(A)(B)(C)$ . A perpendicular comum  $(M)(N)$  àquelas arestas será, então, perpendicular a  $(\pi)$ . Por isso, as projeções  $JA$  e  $BC$  – em verdadeira grandeza – daquelas arestas sobre  $(\pi)$  serão iguais, com o mesmo ponto médio  $(M)$ , coincidente com  $(N)$ . E como  $(J)(A)$  e  $(B)(C)$  são ortogonais (número 105.5),  $JA$  e  $BC$  são perpendiculares (Figura 140).

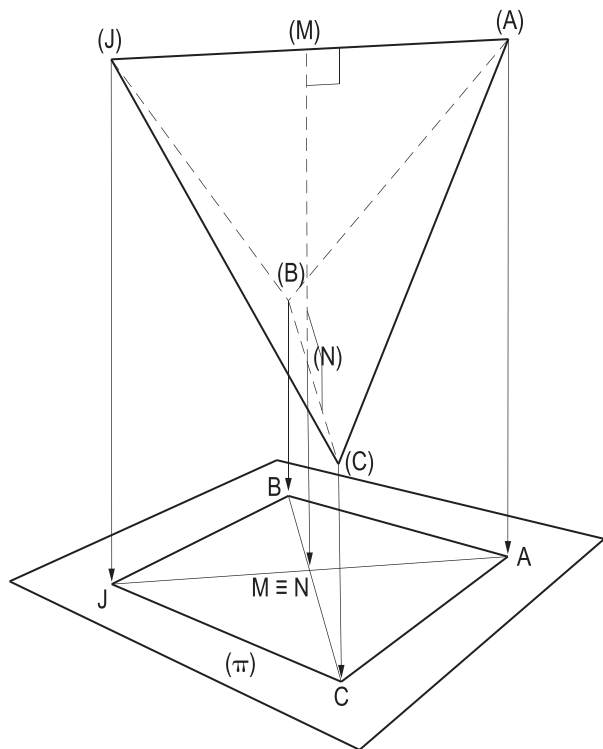


Figura 140

Assim, o contorno  $JBAC$  da projeção é um quadrado, cujas diagonais  $JA$  e  $BC$  são iguais à aresta do sólido, cortando-se em seu centro  $M$  (ou  $N$ ).

## 106 – Relações métricas

### 1. Relação fundamental

Seja (G) o pé da altura relativa ao vértice (J) de um tetraedro regular (J)–(A)(B)(C). Porque (J) é equidistante dos vértices da face (A)(B)(C), (G) é o circuncentro dessa face e, assim, (G)(A) é um raio do círculo circunscrito ao triângulo (A)(B)(C) (Figura 141).

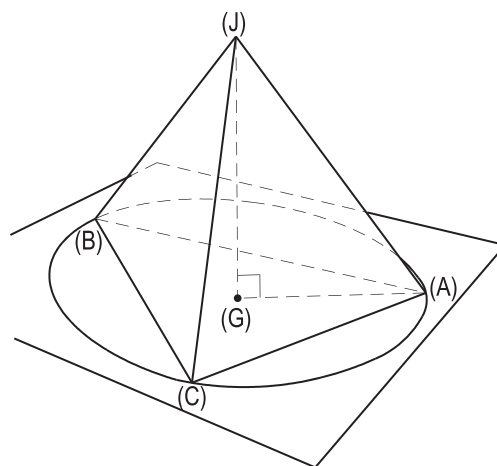


Figura 141

Assim, designando por  $a$  e  $r$  a aresta do tetraedro e o raio do círculo circunscrito à sua face, temos (*Geometria Plana*, número 290.a):

$$a = r \sqrt{3} \quad (1)$$

E, sendo  $h$  a altura do sólido, o triângulo retângulo (J)(G)(A) (Figura 141) fornece:

$$h^2 = a^2 - r^2 = 3r^2 - r^2 = 2r^2 \quad \therefore \quad h = r \sqrt{2} \quad (2)$$

Reunindo (1) e (2) vem:

$$\boxed{\frac{r}{1} = \frac{h}{\sqrt{2}} = \frac{a}{\sqrt{3}}}$$

Tal relação, básica no estudo do tetraedro regular, permite o cálculo de duas quaisquer das três grandezas em jogo (número 106.1) e se enuncia: em todo tetraedro regular, o raio do círculo circunscrito à face, a altura e a aresta são diretamente proporcionais a 1,  $\sqrt{2}$  e  $\sqrt{3}$ .

### 2. Escala gráfica

A proporção acima instituída e que se constitui na relação métrica fundamental para o tetraedro regular possibilita a construção de uma escala gráfica para o poliedro, mediante a qual é imediato determinar graficamente os valores de duas daquelas três grandezas, a partir do conhecimento da terceira.

A construção da escala se faz (Figura 142) arbitrando um valor  $k$  e determinando os segmentos representativos de  $k\sqrt{2}$  e  $k\sqrt{3}$ .

A utilização da escala, de tripla entrada, se faz por homotetia.

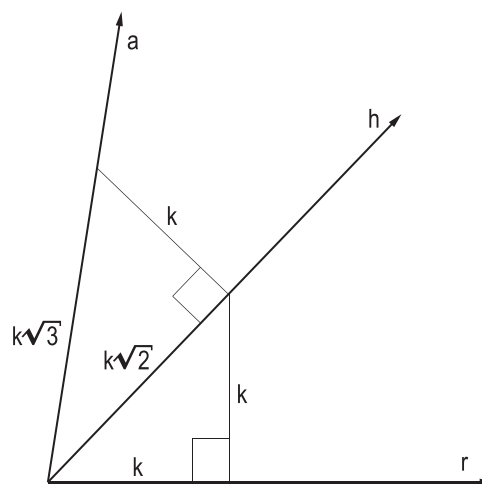


Figura 142

### 3. Área total

A área total  $S_t$ , isto é, a soma das áreas de todas as faces de um tetraedro regular de aresta  $a$  é o quádruplo da área  $S_f$  de uma qualquer de suas faces.

Assim, como (*Geometria Plana*, número 327)  $S_f = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$ ,

vem: 
$$S_t = a^2 \sqrt{3}$$

### 4. Distância entre duas arestas opostas

A distância  $d$  entre duas arestas opostas (J)(A) e (B)(C) de um tetraedro regular (J)-(A)(B)(C) de aresta  $a$  se mede pelo valor da perpendicular comum (M)(N) àquelas duas arestas (número 32).

Como (M)(N) é (Figura 143) a diagonal de um quadrado (M)(R)(N)(S) de lado igual à metade da aresta do sólido (números 105.6 e 105.9), temos (*Geometria Plana*, número 200.2):

$$d = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

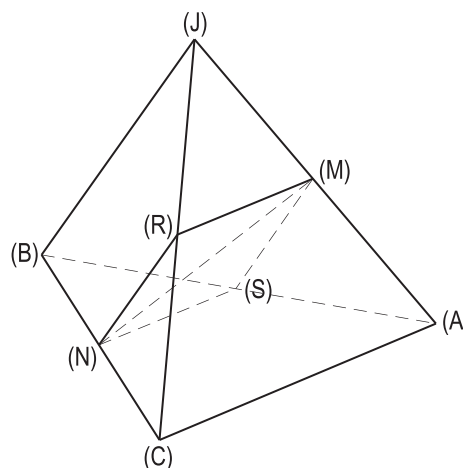


Figura 143

### 5. Raio da esfera tangente às arestas

Porque o diâmetro da esfera tangente às arestas de um tetraedro regular é igual à distância  $d$  entre duas arestas opostas do sólido (número 105.12), para o cálculo do raio  $R_a$  dessa esfera em função da aresta  $a$  do tetraedro, temos:

$$R_a = \frac{d}{2} \quad \therefore \quad R_a = \frac{a\sqrt{2}}{4}$$

### 6. Raios das esferas inscrita e circunscrita

Para o cálculo dos raios  $R_i$  e  $R_c$  das esferas inscrita e circunscrita a um tetraedro regular (J)-(A)(B)(C), consideremos o triângulo isósceles (J)(M)(A), seção produzida no sólido pelo plano medidor da aresta (B)(C) (número 105.3), bem como o ponto (O) comum às alturas (J)(G) e (A)(G') (Figura 144).

Porque (O) é o centro comum às duas esferas em estudo (número 105.12), temos (Figura 144):

$$(O)(G) = (O)(G') = R_i \quad \text{e} \quad (O)(J) = (O)(A) = R_c$$

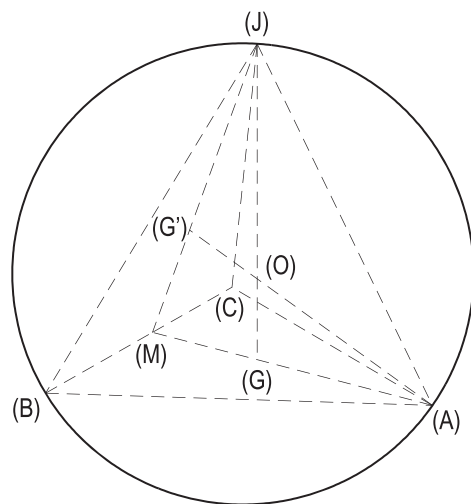


Figura 144

E porque os pés das alturas são os baricentros das faces opostas,

$$(M)(A) = 3 \cdot (M)(G) = 3 \cdot (M)(G')$$

Assim, os triângulos retângulos semelhantes (A)(M)(G') e (A)(O)(G) (Figura 144) fornecem:

$$\frac{(O)(A)}{(O)(G)} = \frac{(M)(A)}{(M)(G')} = \frac{3 \cdot (M)(G')}{(M)(G')} = 3 \quad \therefore \quad \boxed{R_c = 3 \cdot R_i}$$

Mas, designando por h a altura do tetraedro, temos:

$$(J)(G) = (J)(O) + (O)(G) \quad \therefore \quad h = R_c + R_i = 3R_i + R_i = 4R_i$$

Logo:

$$\boxed{R_i = \frac{h}{4}}$$

e

$$\boxed{R_c = \frac{3h}{4}}$$

E, para calcular os raios das esferas em função do valor a da aresta do tetraedro, basta utilizar a relação fundamental (número 106.1):

$$\frac{h}{\sqrt{2}} = \frac{a}{\sqrt{3}} \quad \therefore \quad h = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

$\therefore$

$$\boxed{R_i = \frac{a\sqrt{6}}{12}}$$

e

$$\boxed{R_c = \frac{a\sqrt{6}}{4}}$$

## 7. Volume

Por ser uma pirâmide, conforme adiante será demonstrado (número 157), o tetraedro regular tem por volume a expressão  $V = \frac{(B)h}{3}$ , onde (B) é a área de sua base e h sua altura.

Assim, em função do valor de sua aresta a, para o cálculo do volume V de um tetraedro regular, temos (números 106.1 e 106.3):

$$B = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \quad \text{e} \quad h = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

$$\text{Logo, } V = \frac{Bh}{3} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \quad \therefore \quad \boxed{V = \frac{a^3 \sqrt{2}}{12}}$$

E, em função de sua altura  $h$ , temos (números 106.1 e 106.3):

$$a = \frac{h\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \quad \text{e} \quad B = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{3}{2} h^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{3}{8} h^2 \sqrt{3}$$

$$\text{Logo, } V = \frac{Bh}{3} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{8} h^2 \sqrt{3} \cdot h \quad \therefore \quad \boxed{V = \frac{h^3 \sqrt{3}}{8}}$$

### 107 – Observações

1. O centro de um tetraedro regular está situado em cada altura do sólido a um quarto do valor da altura, a contar de seu pé. Ou seja, a três quartos do valor da altura, a contar do vértice.
2. O raio da esfera tangente às arestas de um tetraedro regular é igual à média geométrica entre os raios das esferas inscrita e circunscrita ao sólido.

De fato, temos (número 106.6):

$$R_i \cdot R_c = \frac{a\sqrt{6}}{12} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{4}$$

$$R_i \cdot R_c = \frac{6a^2}{48}$$

$$R_i \cdot R_c = \frac{2a^2}{16}$$

$$R_i \cdot R_c = \left( \frac{a\sqrt{2}}{4} \right)^2 \quad (1)$$

E, como (número 106.5):

$$R_a = \frac{a\sqrt{2}}{4}$$

$$R_a^2 = \left( \frac{a\sqrt{2}}{4} \right)^2 \quad (2)$$

Assim, reunindo as relações (1) e (2), chega-se a:

$$\boxed{R_a^2 = R_i \cdot R_c}$$

## 108 – Tetraedro órtico de um tetraedro regular

Tetraedro órtico de um tetraedro dado é o poliedro que tem por vértices os pés das alturas do dado.

Porque os pés das alturas de um tetraedro regular são transformados por homotetia de razão  $-1/3$  dos vértices do sólido, em relação ao seu centro, conclui-se que o tetraedro  $(\bar{J})-(\bar{A})(\bar{B})(\bar{C})$ , órtico de um tetraedro regular dado  $(J)-(A)(B)(C)$ , é homotético do dado, na razão  $-1/3$ , em relação ao centro  $(O)$ , comum, então, aos dois sólidos (Figura 145).

Tal homotetia garante que o tetraedro órtico é semelhante ao dado na razão  $1/3$ , ou seja, que a aresta do órtico é igual à terça parte da aresta do dado.

## 109 – Observação

A esfera inscrita num tetraedro regular circunscreve seu órtico.

De fato, sabe-se (número 105.12) que os pontos de contato da esfera inscrita no tetraedro  $(J)-(A)(B)(C)$  com sua superfície são os baricentros  $(\bar{J})$ ,  $(\bar{A})$ ,  $(\bar{B})$  e  $(\bar{C})$  de suas faces, o que assegura sua circunscrição ao tetraedro  $(\bar{J})-(\bar{A})(\bar{B})(\bar{C})$  órtico do dado.

Aliás, tal garantia se obtém diretamente ao se observar que a esfera inscrita em  $(J)-(A)(B)(C)$  é transformada pela homotetia de centro  $(O)$  e razão  $-1/3$  da esfera circunscrita ao próprio  $(J)-(A)(B)(C)$ .

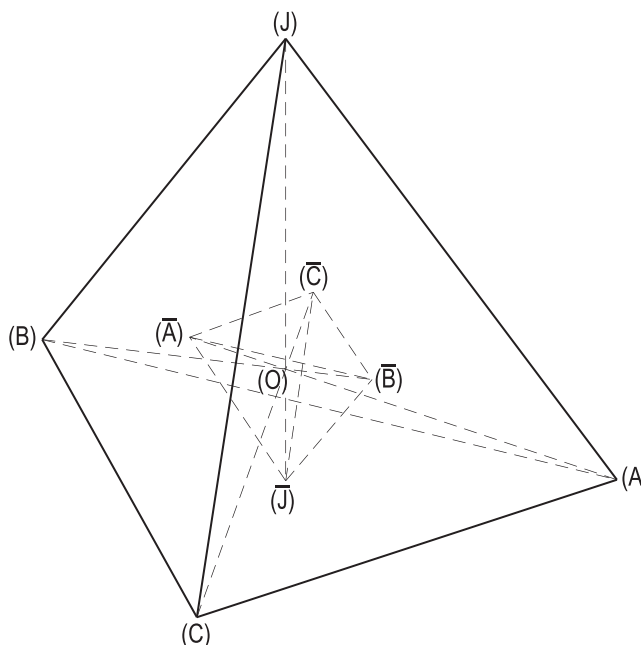


Figura 145

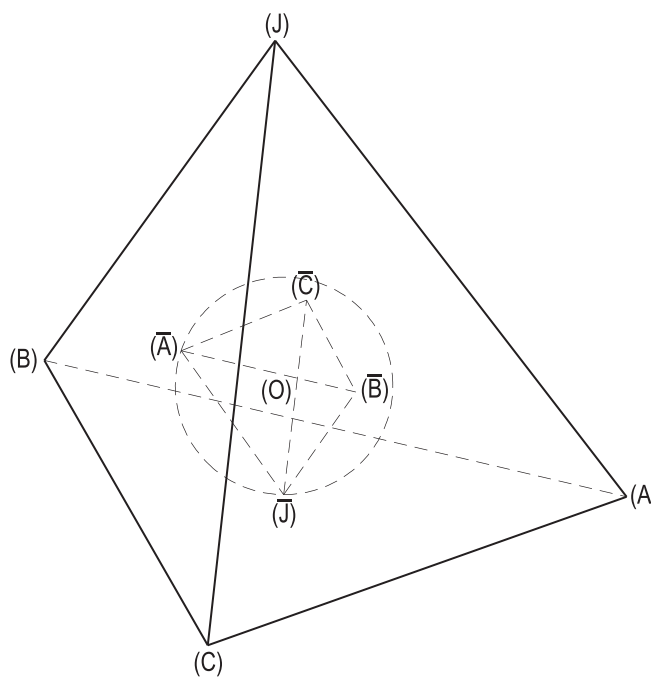


Figura 146



# CAPÍTULO IX

## HEXAEDRO REGULAR

### 110 – Hexaedro regular

Comumente denominado cubo, é o poliedro formado por seis faces quadradas iguais, reunidas três a três em cada vértice. Possui doze arestas, oito vértices e quatro diagonais (número 102.4).

Decorre da própria definição que as três arestas que concorrem num mesmo vértice constituem um triedro trirretângulo. E que, então, duas arestas do cubo só podem ser perpendiculares, ortogonais ou paralelas. Assim, duas faces do sólido pertencem a planos paralelos ou perpendiculares, conforme respectivamente sejam opostas ou consecutivas.

### 111 – Propriedades

1. A seção produzida por um plano paralelo a uma face é um quadrado igual à face.

Porque a seção provém da translação da face paralela ao plano secante, segundo a direção perpendicular a esse plano (Figura 147).

2. Os planos perpendiculares a uma face produzem seções retangulares ou quadradas.

Porque o plano  $(\alpha)$ , perpendicular à face  $(A)(B)(C)(D)$ , corta duas faces perpendiculares àquela e os segmentos  $(X)(Y)$  e  $(W)(Z)$ , assim formados (Figura 148), são necessariamente paralelos e iguais à aresta  $(A)(R)$  do cubo. Assim, a seção  $(X)(Y)(Z)(W)$  produzida por  $(\alpha)$  no sólido (Figura 148) é, geralmente, um retângulo.

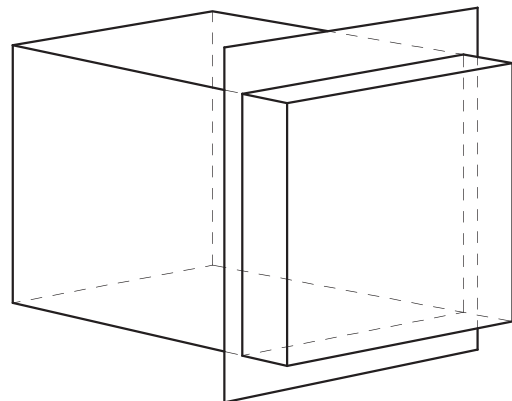


Figura 147

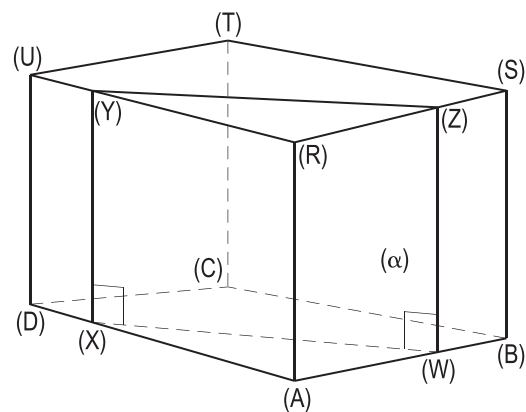


Figura 148

Eventualmente, a seção poderá ser um quadrado. Neste caso (Figura 149), a dimensão  $(Y)(Z)$  iguala a aresta do cubo, o que pode acontecer em diversas situações, até mesmo, em caso particular, quando o plano secante é paralelo a uma das faces (número 111.1).

3. Todo plano que corta quatro arestas paralelas produz, por seção, um paralelogramo.

Porque o plano, cortando quatro arestas paralelas do cubo, secciona dois pares de planos paralelos: as faces opostas do sólido (Figura 150).

É claro que o paralelogramo seção pode ser um retângulo (ou um quadrado), desde que (número 111.2) o plano secante seja perpendicular a uma face do cubo.

Ainda mais, a seção será um losango quando o plano secante for paralelo a uma diagonal facial do cubo. De fato, o plano  $(\beta)$ , paralelo à diagonal facial  $(A)(C)$ , corta a seção diagonal  $(A)(C)(T)(R)$  segundo o segmento  $(X)(Z)$  paralelo a  $(A)(C)$  (Figura 151). Assim, o ângulo formado pelas diagonais  $(X)(Z)$  e  $(Y)(W)$  da seção  $(X)(Y)(Z)(W)$  é reto, uma vez que, tendo um lado paralelo à face  $(A)(B)(C)(D)$  do cubo, projeta-se reto sobre essa face. E, então, o paralelogramo seção  $(X)(Y)(Z)(W)$ , por ter diagonais perpendiculares, será um losango (Figura 151).

Assim:

4. Todo plano que corta quatro arestas paralelas e que é paralelo a uma diagonal facial produz, por seção, um losango.
5. Os planos formados por duas arestas paralelas opostas cortam o cubo segundo retângulos cujos lados são duas arestas e duas diagonais faciais e cujas diagonais são duas das diagonais do sólido (Figura 152).

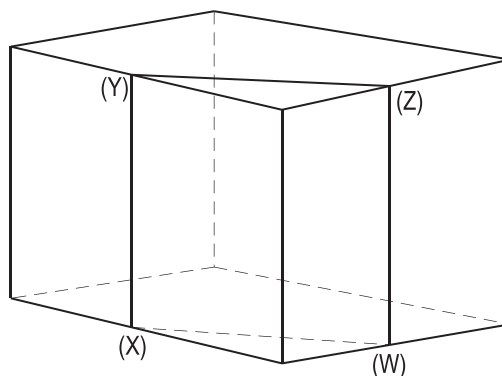


Figura 149

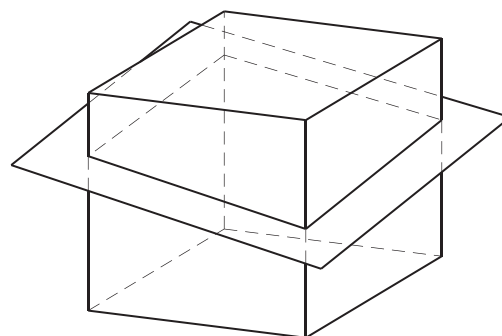


Figura 150

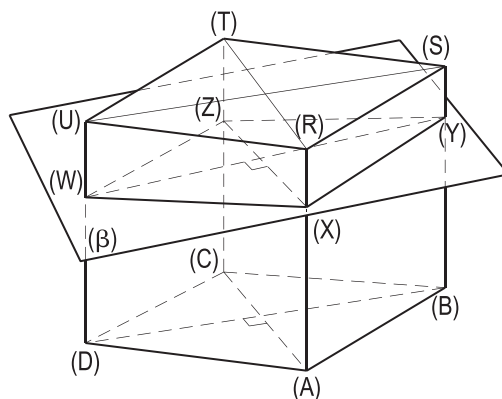


Figura 151

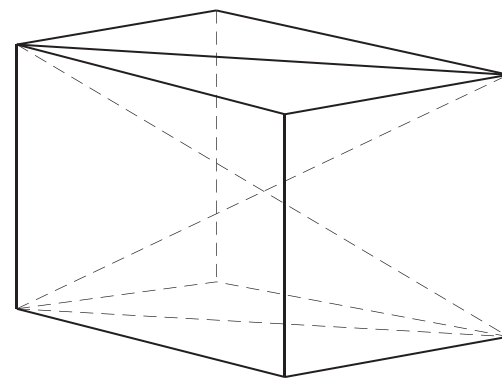


Figura 152

6. As quatro diagonais do cubo são iguais e cortam-se mutuamente ao meio.

Porque são, duas a duas, diagonais dos diversos retângulos seções todos iguais, note-se, produzidos pelos planos pertencentes aos pares de arestas opostas paralelas do cubo (Figura 153).

Tais retângulos têm lados iguais à aresta e à diagonal facial do cubo.

7. O ponto comum às diagonais é o centro de simetria do cubo.

Porque o ponto (O), comum às quatro diagonais, é o médio de qualquer segmento de reta que o contenha e que fique limitado por duas faces opostas do sólido.

De fato, sendo (r) uma reta qualquer pertencente ao ponto (O) e (E) e (F) seus traços em duas faces opostas do cubo, os triângulos (O)(E)(A) e (O)(F)(T), por terem os ângulos respectivamente iguais (lados paralelos) e os lados (A)(O) e (O)(T) iguais (número 111.6), são iguais (Figura 154). Assim,  $(E)(O) = (O)(F)$ , ou seja, (O) é o ponto médio do segmento (E)(F).

O ponto (O), centro de simetria do sólido, comumente denominado centro do cubo, tanto equidista dos vértices quanto das faces e das arestas do poliedro. De fato, basta ver que a distância de (O) a cada um dos vértices é igual à semidiagonal do cubo (Figura 155); que a distância de (O) a cada uma das faces é igual à metade da aresta do cubo (Figura 156) e que a distância de (O) a cada uma das arestas é igual à semidiagonal facial do cubo (Figura 157).

Tais equidistâncias do centro do cubo aos vértices, às faces e às arestas garantem as existências de uma esfera circunscrita (Figura 155), de uma esfera inscrita (Figura 156) e de uma esfera tangente às arestas do sólido (Figura 157).

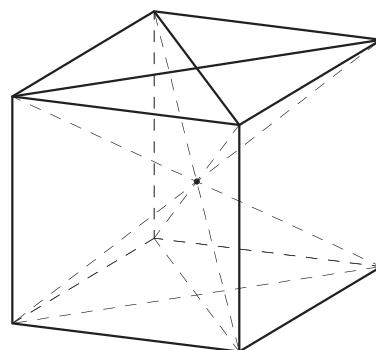


Figura 153

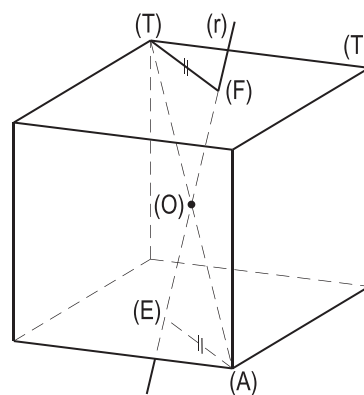


Figura 154

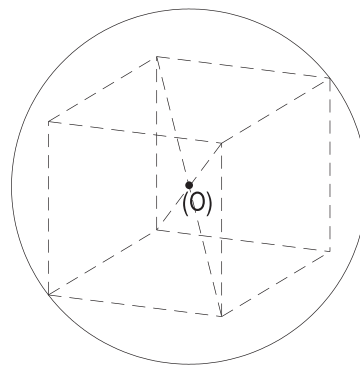


Figura 155

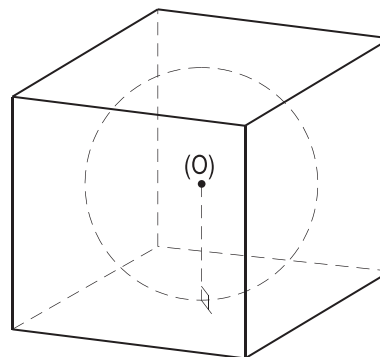


Figura 156

E porque o ponto (O) é o centro dessas três esferas, vem que:

8. A esfera circunscrita, a esfera inscrita e a esfera tangente às arestas de um cubo são concêntricas, sendo o centro comum o próprio centro do sólido.

Cabe ressaltar que a esfera tangente às arestas do cubo é secante às suas faces, cortando-as segundo os círculos nelas inscritos (Figura 157).

9. Os extremos não comuns de três arestas relativas a um mesmo vértice formam um triângulo equilátero cujo centro pertence à diagonal do cubo relativa àquele vértice e cujo plano é perpendicular àquela diagonal.

De fato, o triângulo – (S)(U)(C) na Figura 158 – é equilátero porque seus lados são diagonais faciais do cubo. E porque os pontos (A) e (T) equidistam dos vértices do triângulo (S)(U)(C), a reta a que pertence a diagonal (A)(T) do cubo contém o centro (G) do triângulo e é perpendicular ao seu plano, porque (A)(T) é o eixo do triângulo (S)(U)(C).

10. Os dois planos perpendiculares a uma diagonal formados pelos vértices não comuns das arestas que concorrem nos extremos dessa diagonal dividem-na em três partes iguais.

Sejam (A)(T) a diagonal considerada e (S)(U)(C) e (D)(B)(R) os dois triângulos equiláteros formados pelos extremos não comuns das arestas relativas aos vértices (A) e (T) (Figura 159).

Porque a diagonal facial (B)(D) equidista dos vértices (A) e (C), temos (Figura 159):  $(A)(J) = (J)(G)$ . E porque a diagonal facial (S)(U) equidista dos vértices (R) e (T), temos (Figura 159):  $(J)(G) = (G)(T)$ .

Assim,  $(A)(J) = (J)(G) = (G)(T)$ , isto é, os planos dos triângulos equiláteros (D)(B)(R) e (S)(U)(C) dividem a diagonal (A)(T) a que são perpendiculares em três partes iguais.

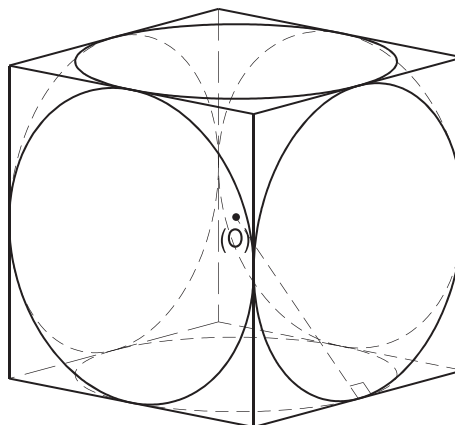


Figura 157

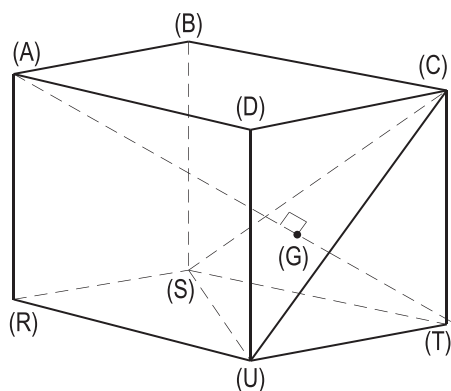


Figura 158

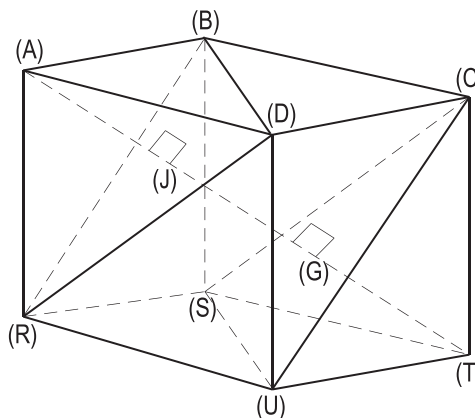


Figura 159

11. Os planos perpendiculares a uma diagonal do cubo cortam o sólido segundo triângulos equiláteros ou hexágonos equiângulos.

Todos os planos perpendiculares a uma diagonal  $(A)(T)$  de um cubo  $(A)(B)(C)(D) - (R)(S)(T)(U)$  que atingem essa diagonal em suas terças partes extremas, isto é, entre  $(A)$  e  $(J)$  ou entre  $(T)$  e  $(G)$  (Figura 160), cortam o cubo segundo triângulos equiláteros. Porque as seções assim obtidas são homotéticas do triângulo equilátero  $(B)(D)(R)$ , em relação ao vértice  $(A)$ , ou do triângulo equilátero  $(S)(U)(C)$ , em relação ao vértice  $(T)$  (Figura 160).

Todos os planos perpendiculares à diagonal  $(A)(T)$  que a atingem em sua terça parte central, isto é, entre os pontos  $(J)$  e  $(G)$ , produzem, por seções, hexágonos equiângulos (Figura 161).

De fato, cada um destes planos secciona o triedro trirretângulo formado pelas arestas relativas ao vértice  $(T)$  segundo um triângulo  $(\bar{S})(\bar{U})(\bar{C})$  homotético de  $(S)(U)(C)$ , logo equilátero (Figura 162) como este. E como  $(\bar{S})$ ,  $(\bar{U})$  e  $(\bar{C})$  pertencem a prolongamentos das arestas do cubo, a seção que cada um dos planos considerados produz no cubo é um hexágono inscrito no triângulo equilátero  $(\bar{S})(\bar{U})(\bar{C})$ , com lados opostos paralelos (Figura 162), logo equiângulo.

Cumpra, ainda, observar que todos os hexágonos equiângulos seções, assim obtidos, são isoperímetros com os triângulos equiláteros  $(S)(U)(C)$  e  $(D)(B)(R)$ .

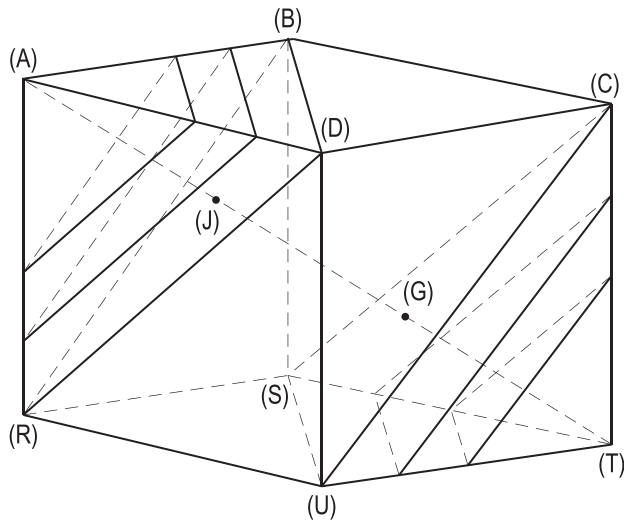


Figura 160

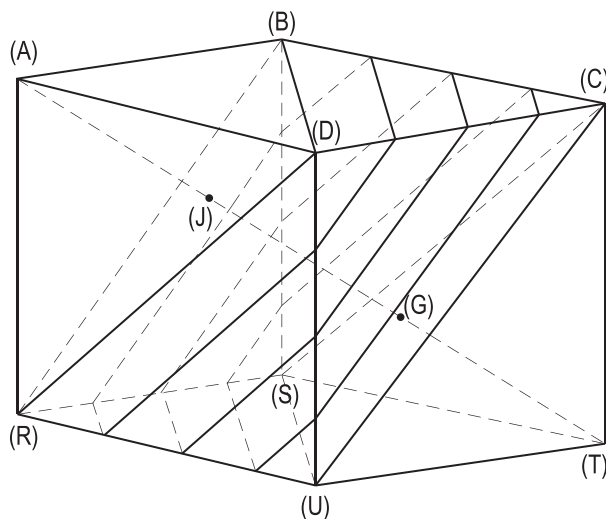


Figura 161

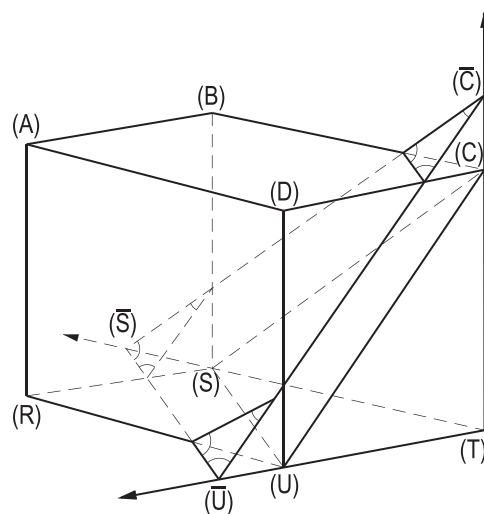


Figura 162

De fato, como paralelas entre paralelas, temos (Figura 163):

$$(Z)(Y) + (Y)(\bar{C}) = (U)(C)$$

E porque o triângulo  $(X)(Y)(\bar{C})$  é equilátero, vem:

$$(Y)(\bar{C}) = (Y)(X)$$

$$\text{Logo, } (Z)(Y) + (Y)(X) = (U)(C)$$

Como o hexágono equiângulo seção é inscriível num triângulo equilátero, seus lados são iguais três a três (Figura 163). Assim, seu perímetro é:

$$2p = 3 (Z)(Y) + 3 (Y)(X) = 3 (U)(C)$$

Igual, portanto, aos perímetros dos triângulos equiláteros  $(S)(U)(C)$  e  $(B)(D)(R)$ .

No caso particular em que o plano secante é o mediador de uma diagonal  $(A)(T)$  do cubo (Figura 164), porque o plano é também o mediador do segmento  $(J)(G)$ , ele equidista dos planos dos triângulos equiláteros  $(S)(U)(C)$  e  $(B)(D)(R)$ , cortando, pois, ao meio, as seis arestas do cubo que não concorrem em nenhum dos dois extremos da diagonal considerada  $(A)(T)$ .

Assim, o hexágono seção, além de equiângulo, é, neste caso particular, também equilátero, já que todos os seus lados valem a metade da diagonal facial do cubo (Figura 164).

E, sendo equilátero e equiângulo, o hexágono seção (Figura 164) é regular.

Logo:

12. O plano mediador de uma diagonal do cubo produz, por seção, um hexágono regular de lado igual à metade da diagonal facial do sólido.

Os vértices do hexágono regular seção são os pontos médios das arestas do cubo reversas à diagonal considerada (Figura 165) e seu centro é o próprio centro do cubo.

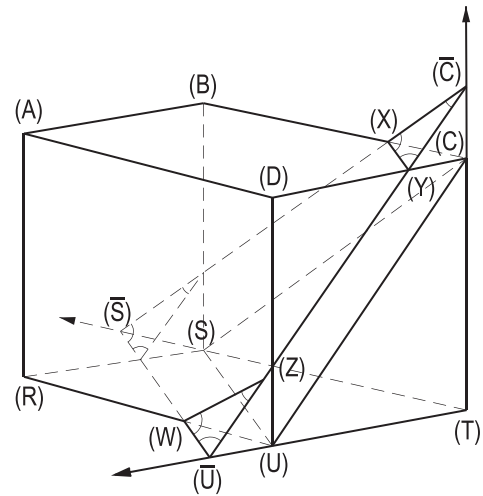


Figura 163

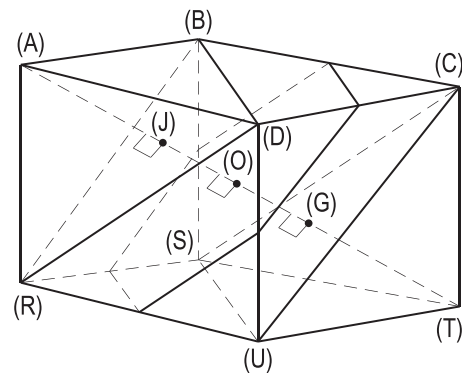


Figura 164

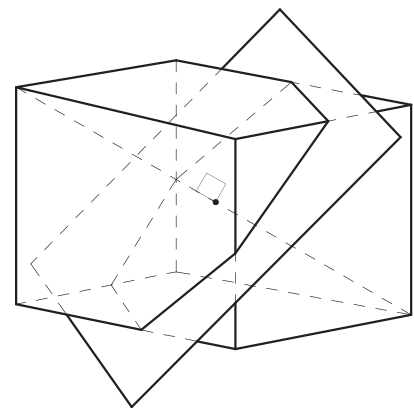


Figura 165

13. Quatro vértices alternados do cubo são vértices do tetraedro regular inscrito no cubo.

Porque todas as faces do tetraedro inscrito são triângulos equiláteros (Figura 166).

Ainda mais:

14. As arestas do tetraedro regular inscrito num cubo são diagonais faciais do cubo.
15. A altura do tetraedro regular inscrito num cubo é igual aos dois terços da diagonal do cubo.

Porque (número 111.10)

$$(A)(G) = \frac{2}{3} (A)(T) \text{ (Figura 166).}$$

16. A esfera circunscrita a um hexaedro regular é também circunscrita ao tetraedro regular inscrito nesse cubo.
17. A esfera inscrita no cubo é tangente às arestas do tetraedro regular nele inscrito.

Porque (Figura 167) os pontos médios das arestas do tetraedro são centros de faces do cubo.

18. O contorno da projeção ortogonal de um cubo sobre um plano paralelo a uma de suas faces é um quadrado igual à face do sólido.

Porque se a face (A)(B)(C)(D) do cubo (A)(B)(C)(D) – (R)(S)(T)(U) é paralela ao plano ( $\pi$ ), de projeção, as arestas (A)(R), (B)(S), (C)(T) e (D)(U) são perpendiculares a ( $\pi$ ), obrigando a superposição das projeções, em verdadeira grandeza, das faces (A)(B)(C)(D) e (R)(S)(T)(U) (Figura 168).

19. O contorno da projeção ortogonal de um cubo sobre um plano perpendicular a uma de suas diagonais é um hexágono regular.

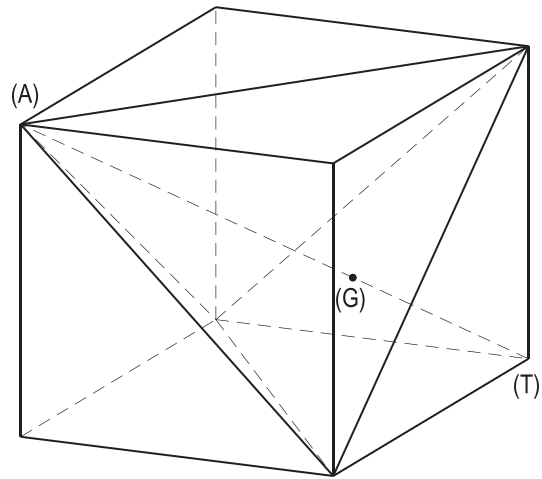


Figura 166

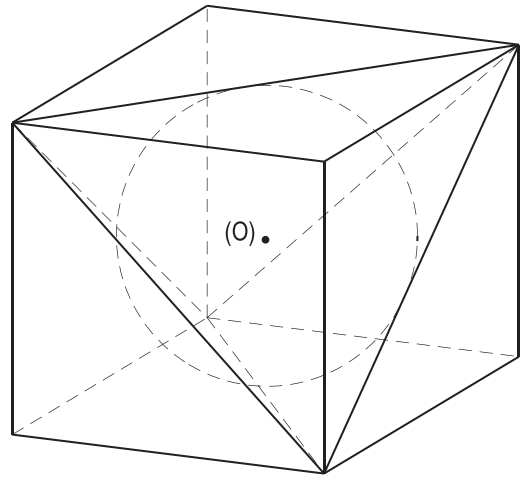


Figura 167

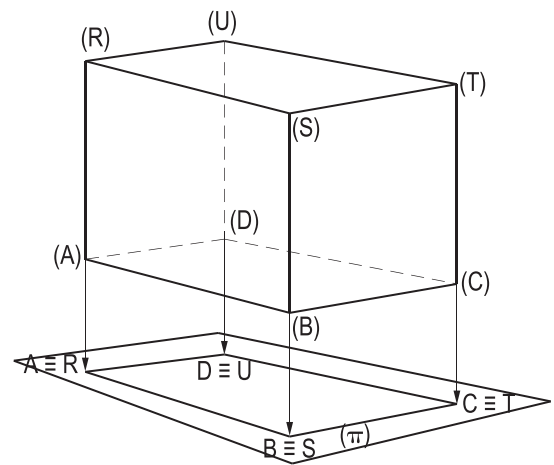


Figura 168

Sendo  $(A)(T)$  a diagonal do cubo  $(A)(B)(C)(D) - (R)(S)(T)(U)$  perpendicular ao plano  $(\pi)$ , de projeção, os triângulos  $(B)(D)(R)$  e  $(S)(U)(C)$ , pertencentes a planos perpendiculares a  $(A)(T)$  (número 111.9), projetam-se em verdadeira grandeza sobre  $(\pi)$  (Figura 169).

Como as projeções de  $(A)$  e de  $(T)$  sobre  $(\pi)$  coincidem, o contorno da projeção é hexagonal (Figura 169).

E porque as projeções, sobre  $(\pi)$ , dos outros seis vértices formam, três a três, dois triângulos equiláteros  $BDR$  e  $SUC$  iguais, com lados paralelos e inscritos num mesmo círculo, o hexágono  $BCDURS$ , contorno da projeção, é regular (Figura 169).

Para a determinação gráfica (Figura 170) do raio  $r$  do círculo circunscrito ao contorno hexagonal regular  $BCDURS$ , basta utilizar o triângulo retângulo  $(A)(C)(T)$  (Figura 169) cujos catetos são respectivamente iguais à aresta e à diagonal facial do cubo.

A hipotenusa  $(A)(T)$  mede a diagonal do cubo e a altura  $(C)(G)$ , relativa à hipotenusa, mede o raio  $r$  do círculo circunscrito ao contorno, conforme indica a Figura 170.

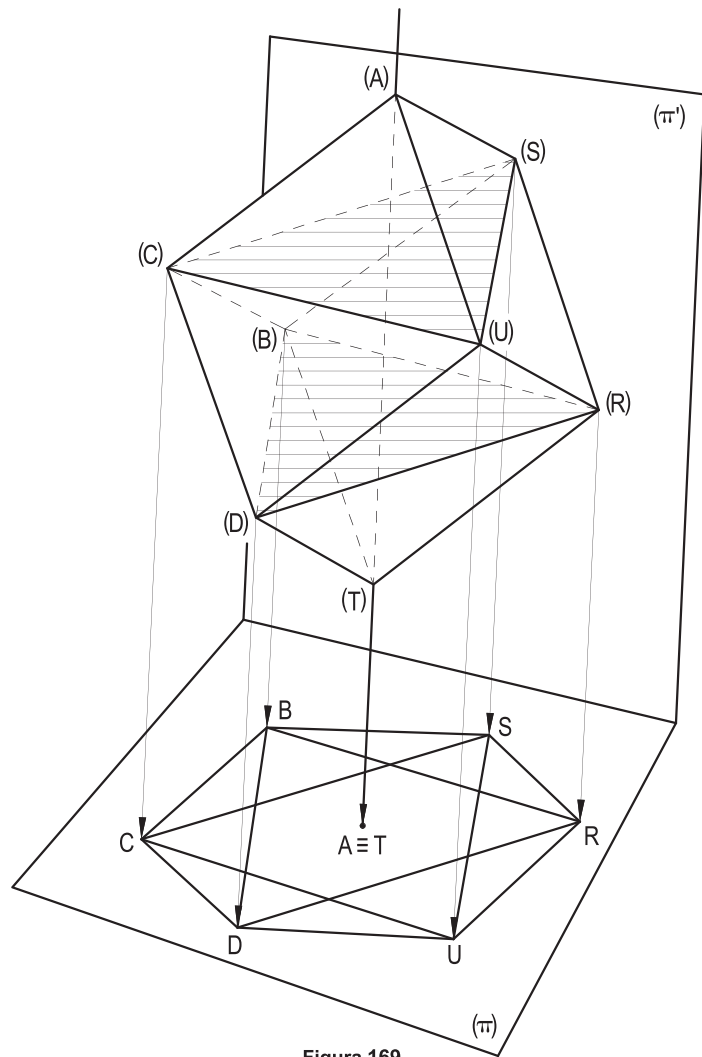


Figura 169

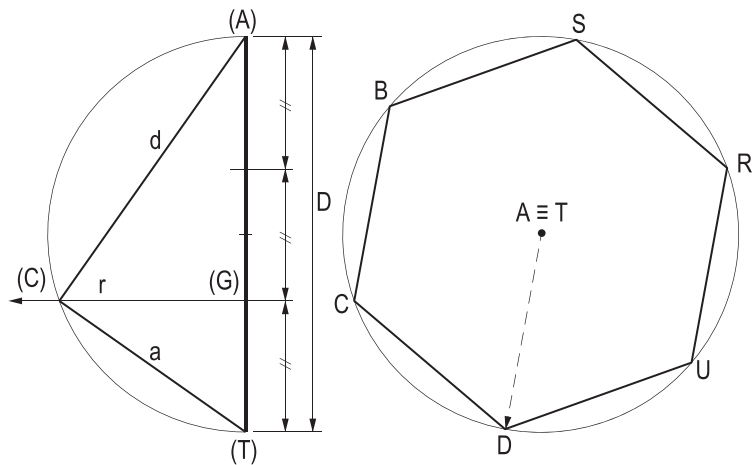


Figura 170



## 112 – Relações métricas

### 1. Relação fundamental

Designando respectivamente por  $a$ ,  $d$  e  $D$  a aresta, a diagonal facial e a diagonal do cubo, temos (*Geometria Plana*, número 200.2):

$$d = a\sqrt{2} \quad (1)$$

E mais (Figura 171):

$$D^2 = d^2 + a^2 = 2a^2 + a^2 = 3a^2$$

$$D = a\sqrt{3} \quad (2)$$

Reunindo (1) e (2), vem:

$$\boxed{\frac{a}{1} = \frac{d}{\sqrt{2}} = \frac{D}{\sqrt{3}}}$$

Tal relação, básica no estudo do cubo, se enuncia: a aresta, a diagonal facial e a diagonal de um cubo são diretamente proporcionais a 1,  $\sqrt{2}$  e  $\sqrt{3}$ .

### 2. Escala gráfica

A proporção, que constitui a relação fundamental para o cubo, possibilita a construção de uma escala gráfica para o poliedro, mediante a qual é imediato determinar graficamente os valores de duas quaisquer das três grandezas envolvidas, a partir do conhecimento da terceira. A construção (Figura 172) da escala se faz arbitrando um valor  $k$  e determinando os segmentos representativos de  $k\sqrt{2}$  e  $k\sqrt{3}$ .

### 3. Área total

A área total  $S_t$  do cubo é, evidentemente, igual ao sêxtuplo da área da face do sólido.

Assim, sendo  $a$  a aresta do cubo, temos:

$$\boxed{S_t = 6a^2}$$

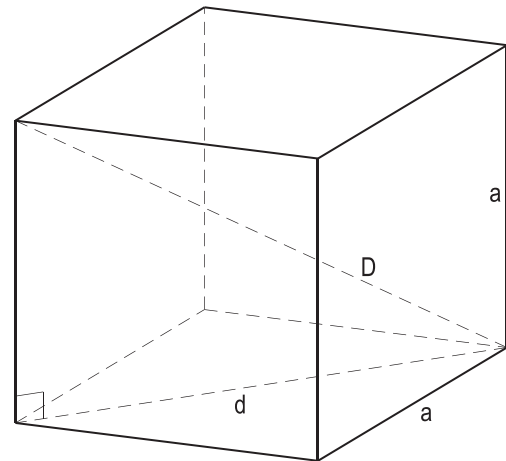


Figura 171

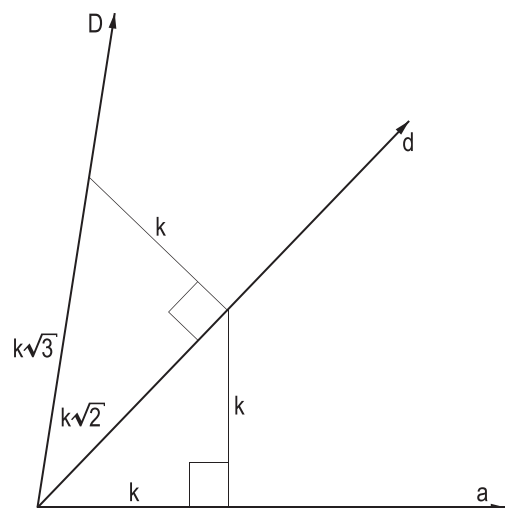


Figura 172

#### 4. Distância entre duas arestas opostas

Dois arestas opostas de um cubo (A)(B)(C)(D) – (R)(S)(T)(U) podem ser paralelas, como (A)(R) e (C)(T), ou ortogonais como (A)(R) e (S)(T) (número 110). E as distâncias  $d_1$  e  $d_2$  entre elas (Figura 173) são respectivamente iguais à diagonal facial e à aresta do cubo.

Assim,

$$d_1 = a\sqrt{2}$$

e

$$d_2 = a$$

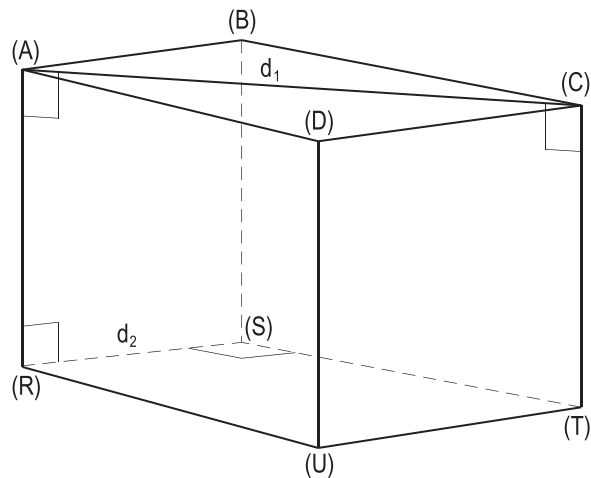


Figura 173

#### 5. Raios das esferas inscrita, circunscrita e tangente às arestas

Os raios  $R_i$  da esfera inscrita,  $R_a$  da esfera tangente às arestas e  $R_c$  da esfera circunscrita a um cubo são (número 111.7) respectivamente iguais às metades da aresta, da diagonal facial e da diagonal do sólido.

Assim temos:

$$R_i = \frac{a}{2}$$

$$R_a = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

$$R_c = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

#### 6. Volume

Por ser um prisma, o volume de um cubo de aresta  $a$  se escreve (número 141):

$$V = (B) h = a^2 \cdot a$$

$$\therefore V = a^3$$

E, se em função de sua diagonal facial  $d$  ou de sua diagonal  $D$  (número 112.1):

$$V = \left(\frac{d}{\sqrt{2}}\right)^3 \therefore V = \frac{d^3}{2\sqrt{2}}$$

$$e V = \left(\frac{D}{\sqrt{3}}\right)^3 \therefore V = \frac{D^3}{3\sqrt{3}}$$

# CAPÍTULO X

## OCTAEDRO REGULAR

### 113 – Octaedro regular

É o poliedro formado por oito faces triangulares equiláteras iguais, reunidas quatro a quatro em cada vértice (Figura 174). Possui doze arestas, seis vértices e três diagonais (número 102.2).

### 114 – Propriedades

1. Os pontos médios das arestas de um tetraedro regular são os vértices do octaedro regular inscrito no tetraedro.

Porque todas as arestas do poliedro inscrito são iguais à metade da aresta do tetraedro (Figura 175). E, assim, as faces do poliedro inscrito são triângulos equiláteros iguais, reunidos quatro a quatro em cada vértice. Por isso (número 113), tal poliedro é um octaedro regular.

2. As diagonais do octaedro regular são iguais, perpendiculares duas a duas e cortam-se mutuamente ao meio.

Porque as três diagonais do octaedro são (Figura 175) as perpendiculares comuns aos três pares de arestas opostas do tetraedro regular circunscrito ao octaedro, para as quais aplicam-se tais propriedades (número 105.10).

Daí decorrem as seguintes propriedades para os octaedros regulares:

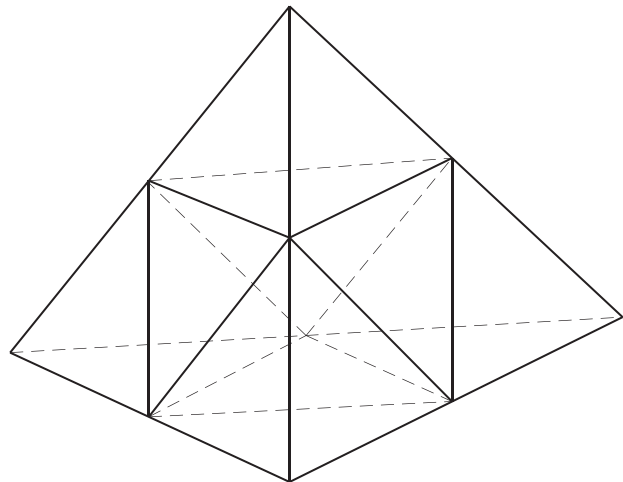


Figura 174

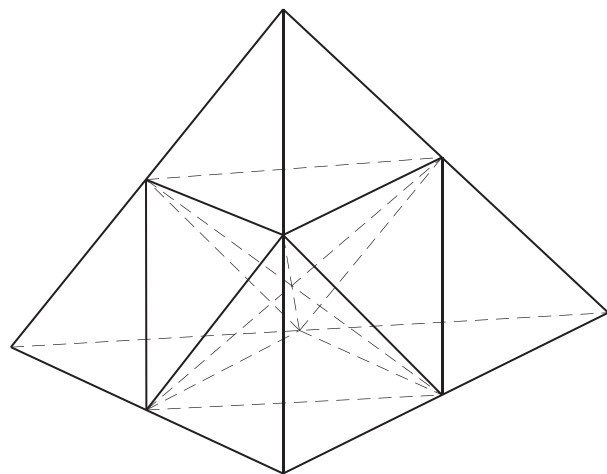


Figura 175

- Os oito triedros formados pelas diagonais são triângulos (Figura 176).
- Os três planos diagonais são perpendiculares dois a dois (Figura 176).
- As seções produzidas pelos planos diagonais são quadrados de lados iguais à aresta do octaedro (Figura 176).
- As faces opostas pertencem a planos paralelos.

De fato, porque as seções diagonais são quadrados, as arestas pertencentes a duas faces opostas são respectivamente paralelas (Figura 177).

- O ponto comum às diagonais é o centro de simetria do octaedro.

Porque o ponto (O), comum às três diagonais do sólido, é o médio de qualquer segmento de reta que o contenha e que fique limitado por duas faces opostas do octaedro (Figura 178).

De fato, sendo (r) uma reta qualquer pertencente ao ponto (O) e (E) e (F) seus traços em duas faces opostas do octaedro regular (J)-(A)(B)(C)(D)-(S) (Figura 178), os triângulos (J)(O)(E) e (S)(O)(F), por terem os ângulos respectivamente iguais (lados paralelos) e os lados (J)(O) e (O)(S) iguais (número 114.2), são iguais.

Assim,  $(E)(O) = (O)(F)$ , ou seja, (O) é o ponto médio do segmento (E)(F).

O ponto (O), centro de simetria do sólido – comumente denominado centro do octaedro –, tanto equidista dos vértices quanto das faces e das arestas do poliedro.

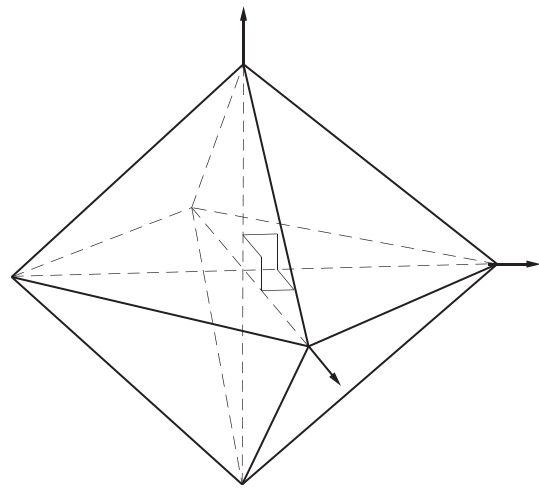


Figura 176

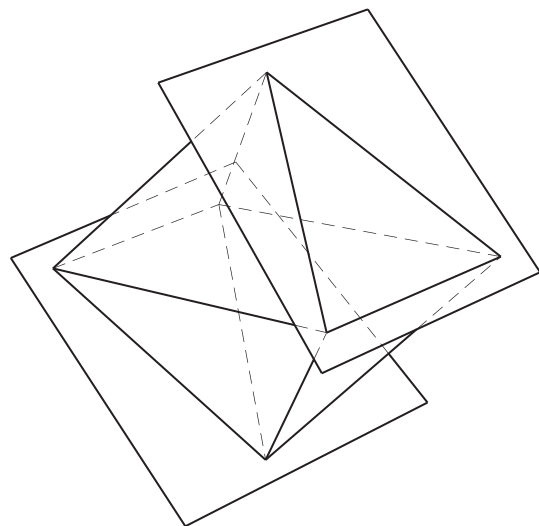


Figura 177

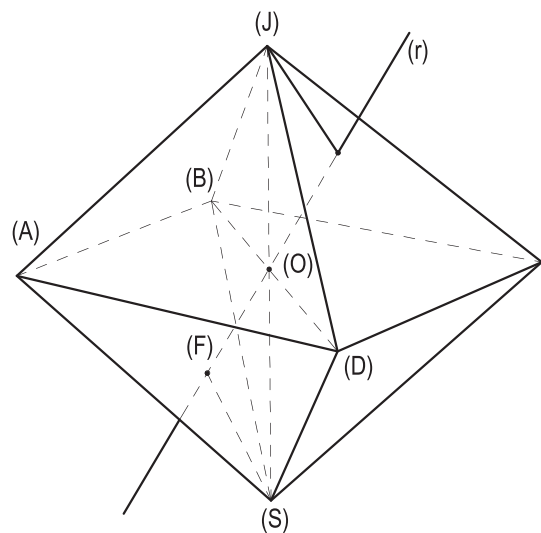


Figura 178

Tais equidistâncias garantem as existências de uma esfera circunscrita (Figura 179), de uma esfera inscrita (Figura 180) e de uma esfera tangente às arestas do octaedro (Figura 181).

E porque o ponto (O) é o centro dessas três esferas, vem que:

8. A esfera circunscrita, a esfera inscrita e a esfera tangente às arestas de um octaedro regular são concêntricas, sendo o centro comum o próprio centro do sólido.

De fato, porque a superfície da esfera circunscrita ao octaedro regular tem de conter todos os seus seis vértices (Figura 179), seu centro há que equidistar de todos eles, devendo, por isso, coincidir com o próprio centro do sólido (Figura 179).

Analogamente, porque a esfera inscrita no octaedro regular deve ser tangente a todas as suas oito faces, seu centro, por ter que delas equidistar, tem de ser o centro do poliedro (Figura 180).

Finalmente, para ser tangente a todas as oito arestas do octaedro regular, a esfera a elas tangente tem que ter por centro o único ponto delas equidistante, que é o centro do sólido (Figura 181).

Os raios dessas três esferas terão seus cálculos desenvolvidos adiante (número 115.6).

Cabe ressaltar que a esfera tangente às arestas do octaedro é secante às suas faces, cortando-as segundo os círculos nelas inscritos (Figura 181).

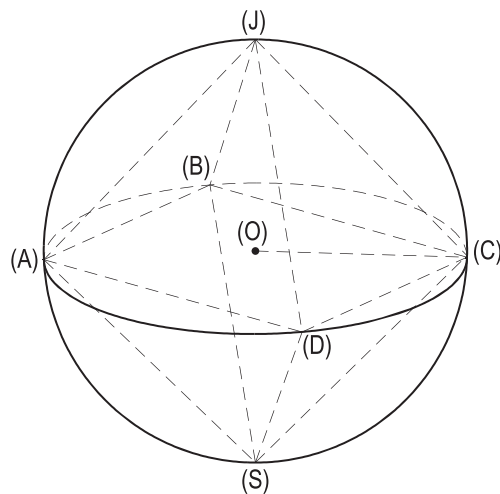


Figura 179

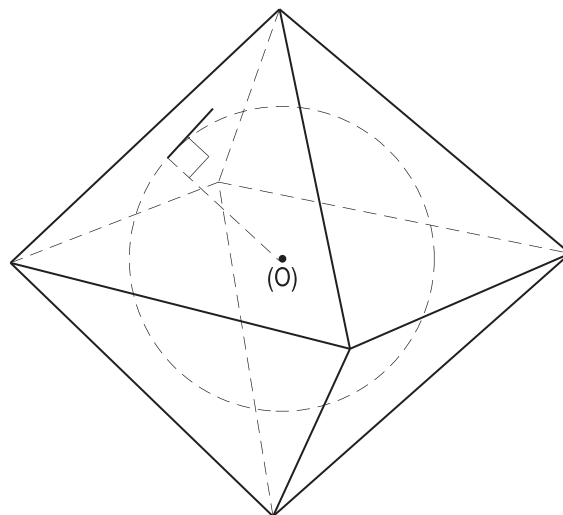


Figura 180

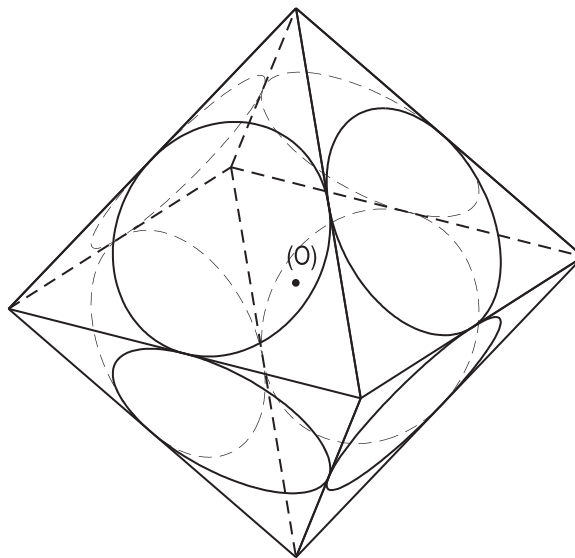


Figura 181

9. Todo plano perpendicular a uma diagonal produz, por seção, um quadrado.

Porque a seção assim obtida é homotética do quadrado seção produzido por um plano diagonal em relação a um dos outros dois vértices do sólido (Figuras 182 e 183).

10. Todos os planos pertencentes a uma diagonal seccionam o sólido segundo losangos (ou, eventualmente, quadrados).

De fato, os planos pertencentes a uma diagonal  $(J)(S)$  cortam o plano diagonal  $(A)(B)(C)(D)$  segundo segmentos  $(X)(Y)$  perpendiculares a  $(J)(S)$  (número 21).

E como  $(J)(S)$  e cada um dos segmentos  $(X)(Y)$  têm o mesmo ponto médio – o centro  $(O)$  do sólido –, as seções produzidas são losangos (Figura 184) ou, eventualmente, dois quadrados: as seções diagonais  $(J)(A)(S)(C)$  e  $(J)(B)(S)(D)$  (número 114.5).

Quando, em posição particular, o plano secante, pertencente a  $(J)(S)$ , é perpendicular a uma das arestas ortogonais a  $(J)(S)$ , como  $(A)(B)$ , e também  $(C)(D)$ , na Figura 185, o losango  $(J)(M)(S)(N)$  determinado por seção no poliedro tem dimensões particulares, motivo pelo qual esta seção é das mais importantes no estudo do octaedro regular.

De fato, porque  $(M)$  e  $(N)$  são os pontos médios das arestas  $(A)(B)$  e  $(C)(D)$ , o plano secante é o mediador da aresta  $(A)(B)$  – e também de  $(C)(D)$  (Figura 185).

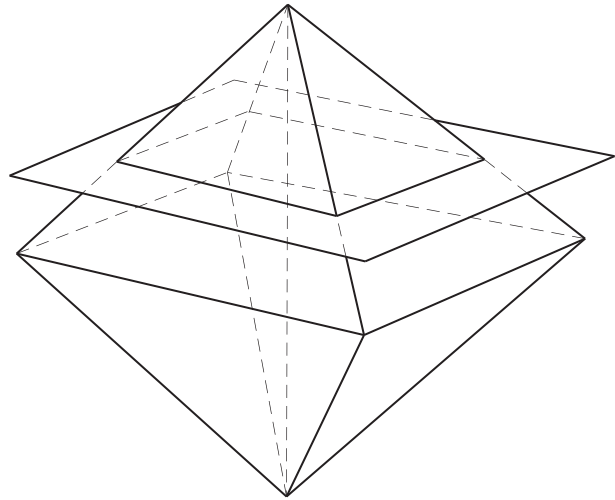


Figura 182

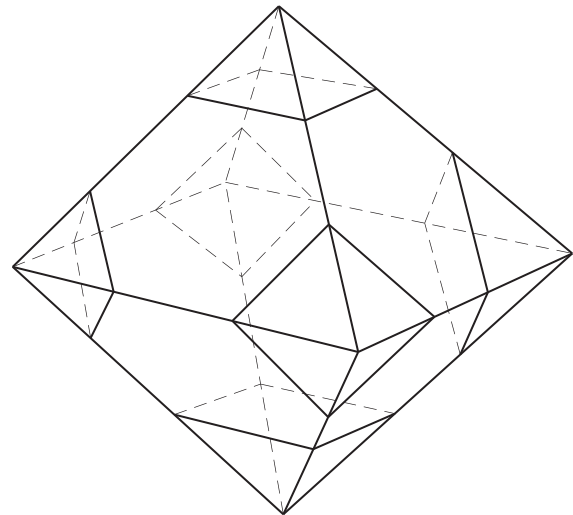


Figura 183

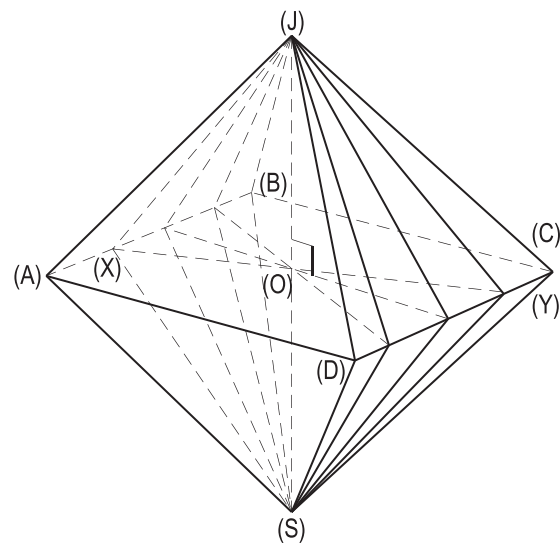


Figura 184

11. O plano mediador de uma aresta produz, por seção, um losango cujas diagonais medem a aresta e a diagonal do octaedro.

Ainda mais, o centro do losango seção é o próprio centro (O) do sólido; os lados da seção são alturas dos triângulos faces atingidos e seus ângulos internos obtusos – iguais –  $(\hat{M})$  e  $(\hat{N})$  (Figura 185) medem o retilíneo do diedro do octaedro.

12. Os diedros do octaedro e do tetraedro regulares são suplementares.

De fato, considerando um tetraedro regular e o octaedro regular nele inscrito (número 114.1), o plano mediador da aresta  $(\bar{A})(\bar{B})$  do octaedro é também o mediador da aresta (A)(B) do tetraedro, cortando, pois, o tetraedro segundo um triângulo isósceles (J)(M)(C) (número 105.3) e o octaedro segundo um losango (M)( $\bar{M}$ )(N)( $\bar{N}$ ) (número 114.11), inscrito naquele triângulo (Figura 186).

Assim, os retilíneos  $\hat{\alpha}$  e  $\hat{\beta}$  dos diedros do octaedro e do tetraedro, sendo ângulos consecutivos de um losango (Figuras 186 e 187), são suplementares.

13. Os planos pertencentes a apenas uma aresta seccionam o sólido segundo trapézios isósceles.

De fato, todo plano ( $\alpha$ ) pertencente a apenas uma aresta (A)(B) de um octaedro regular (J) – (A)(B)(C)(D) – (S) corta uma das faces paralelas a (A)(B) segundo um segmento (E)(F) paralelo a (A)(B) e necessariamente menor que (A)(B) (Figura 188). Por isso, a seção produzida é um trapézio (A)(B)(F)(E).

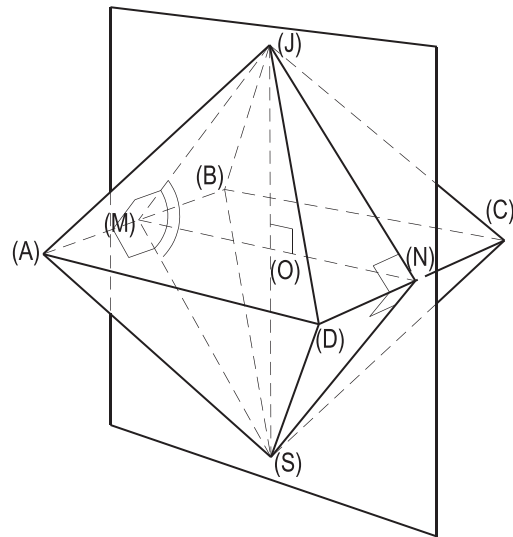


Figura 185

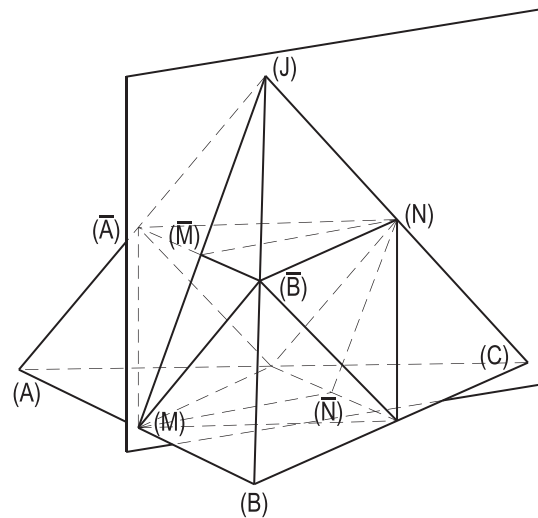


Figura 186

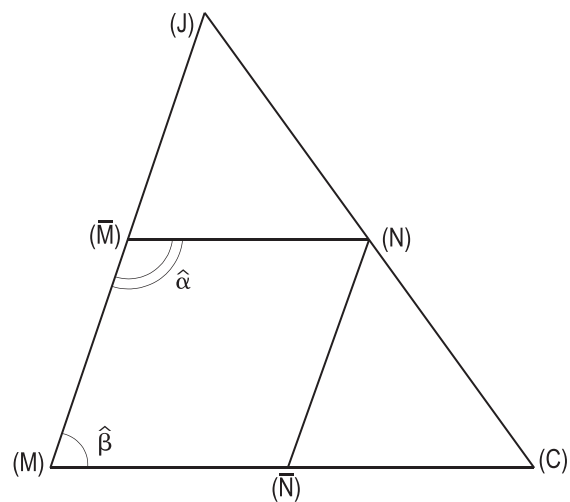


Figura 187

E porque os extremos de cada um desses dois segmentos são simétricos em relação ao plano mediador da aresta (A)(B), o trapézio seção (A)(B)(F)(E) (Figura 188) é isósceles.

De um modo mais geral, mesmo que o plano secante não pertença a uma aresta e sim seja paralelo a apenas duas arestas paralelas do octaedro, desde que ele corte apenas quatro arestas do sólido e seja oblíquo às diagonais do sólido, a seção por ele produzida ainda é um trapézio isósceles.

De fato, sendo  $(\alpha)$  um plano paralelo às arestas – opostas e paralelas – (A)(B) e (C)(D) de um octaedro regular (J)–(A)(B)(C)(D)–(S) e oblíquo às suas diagonais, os segmentos (X)(Y) e (Z)(W) segundo os quais  $(\alpha)$  corta as faces (J)(A)(B) e (J)(C)(D) são paralelos e necessariamente desiguais (Figura 189), tendo, cada um deles, os extremos simétricos em relação ao plano mediador de (A)(B).

Por isso:

14. Todos os planos paralelos apenas a duas arestas paralelas e secantes a apenas quatro arestas e oblíquos às diagonais de um octaedro regular cortam o sólido segundo trapézios isósceles.
15. Os planos paralelos a duas faces opostas cortam o octaedro segundo hexágonos equiângulos e isoperímetros com as faces do sólido.

Consideremos um plano  $(\alpha)$  paralelo às faces opostas (J)(A)(B) e (S)(C)(D) do octaedro regular (J)–(A)(B)(C)(D)–(S) e observemos que ele corta apenas as seis arestas do poliedro não pertencentes a nenhuma daquelas duas faces. Por isso a seção produzida por  $(\alpha)$  é hexagonal (Figura 190).

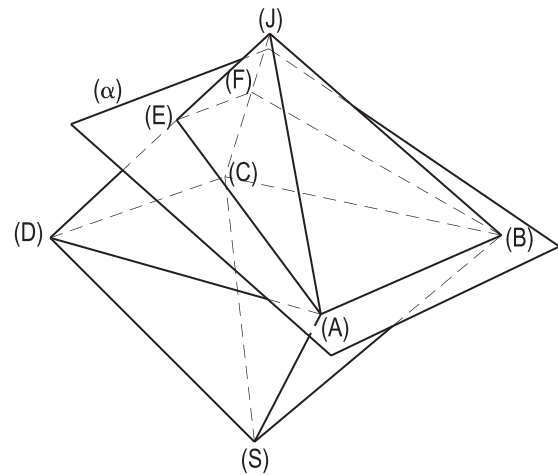


Figura 188

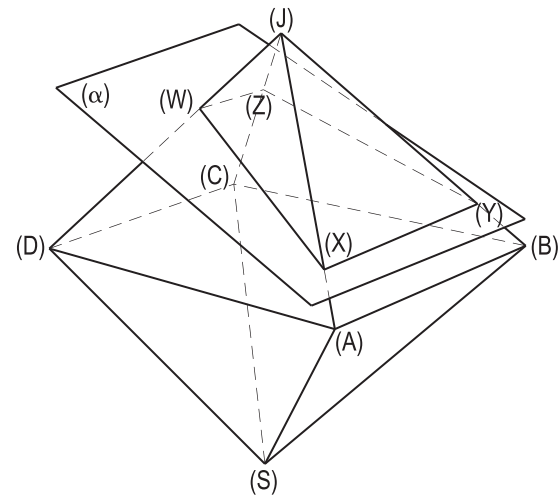


Figura 189

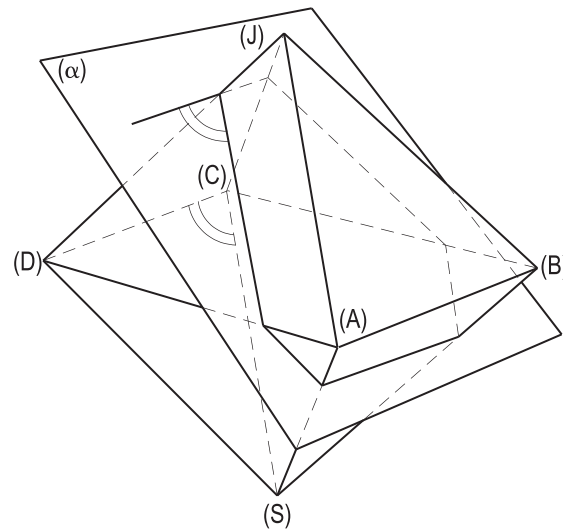


Figura 190



Como os lados opostos da seção pertencem a faces opostas do sólido, conclui-se que o hexágono seção tem lados opostos paralelos. E mais, porque cada ângulo externo do hexágono é agudo com lados respectivamente paralelos a duas arestas de uma face do poliedro (Figura 190), todos os ângulos externos da seção valem  $60^\circ$ , isto é, o hexágono é equiângulo.

Assim, o hexágono seção é inscritível num triângulo equilátero  $(\bar{J})(\bar{C})(\bar{D})$  (Figura 191), tendo, pois, seus lados três a três iguais. E os triângulos equiláteros  $(J)(X)(Y)$  e  $(A)(Y)(Z)$  (Figura 191) permitem escrever:

$$(X)(Y) = (J)(Y)$$

$$(Y)(Z) = (Y)(A), \text{ que, somados, dão:}$$

$$(X)(Y) + (Y)(Z) = (J)(Y) + (Y)(A) = (J)(A)$$

E, então, o perímetro  $2p$  da seção é:

$2p = 3(X)(Y) + 3(Y)(Z) = 3(J)(A)$ ,  
 igual, portanto, ao perímetro de uma qualquer das faces do octaedro.

Assim, quando um plano secante a um octaedro regular  $(J) - (A)(B)(C)(D) - (S)$  se desloca, mantendo-se paralelo a duas faces opostas  $(J)(A)(B)$  e  $(B)(C)(D)$ , as seções produzidas são hexágonos equiângulos de forma variável (Figura 192), mas de perímetro constante e igual ao da face do sólido.

No caso particular em que o plano secante é equidistante de duas faces opostas, porque os vértices da seção são os pontos médios das arestas atingidas, o hexágono, além de equiângulo, é equilátero, porque todos os seus lados valem a metade da aresta do sólido, (Figura 193). Logo, regular.

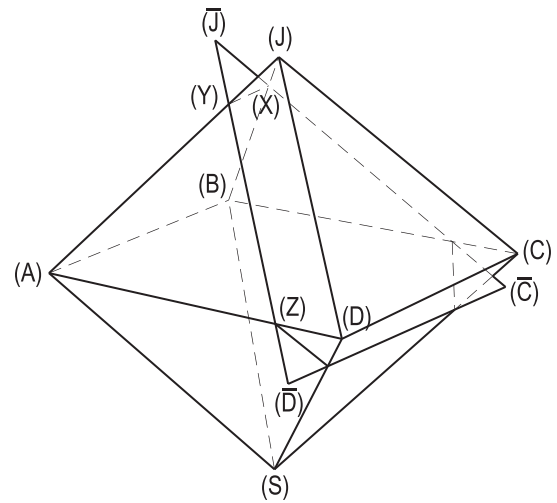


Figura 191

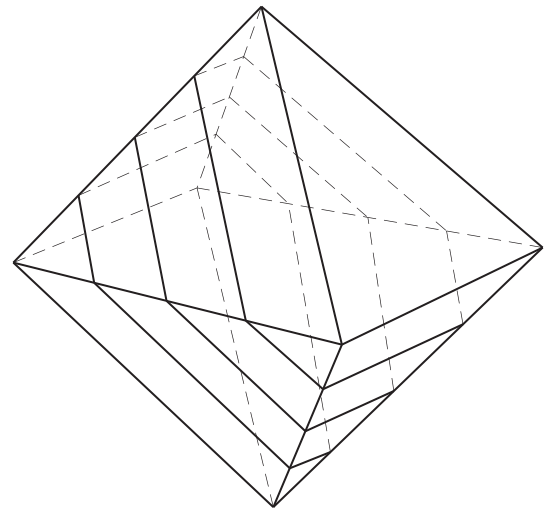


Figura 192

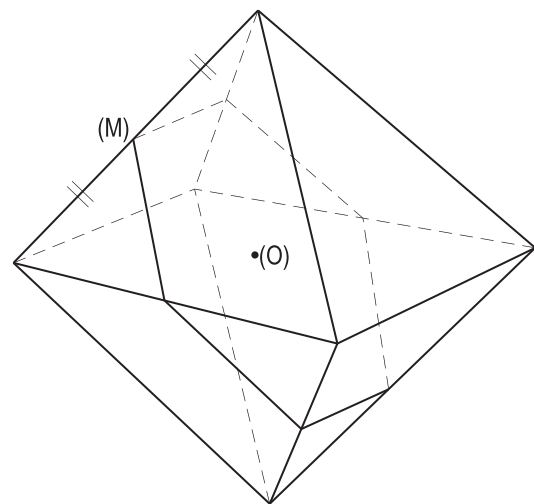


Figura 193

Assim:

16. A seção produzida pelo plano equidistante de duas faces opostas é um hexágono regular de lado igual à metade da aresta do octaedro.

O centro da seção é, evidentemente, o próprio centro (O) do octaedro (Figura 193).

17. O pé da perpendicular a uma face, traçada pelo centro do octaedro, é o centro dessa face.

Porque o triedro (O)–(J)(A)(B) é trirretângulo, o pé – (G) – da perpendicular (O)(G) (Figura 194), traçada do centro (O) do octaedro à face (J)(A)(B), é (número 76) o ortocentro dessa face.

E como o triângulo (J)(A)(B) é equilátero, seu ortocentro (G) é também baricentro, circuncentro e incentro.

18. Os centros de duas faces opostas do sólido definem um segmento perpendicular a essas faces.

Os centros (G) e (G') de duas faces opostas (Figura 195) são, em verdade, simétricos em relação ao centro do sólido.

19. Os centros de quatro faces relativas a um mesmo vértice do sólido são vértices de um quadrado de lado igual a um terço da diagonal do octaedro.

Como os centros das quatro faces que formam um vértice (J) do sólido equidistam desse vértice, eles pertencem a um plano ( $\alpha$ ) perpendicular à diagonal (J)(S) cuja distância a (J) é igual aos dois terços da distância de (J) ao centro (O) do sólido (Figura 196).

A seção que ( $\alpha$ ) produz no octaedro é, então (número 114.9), um quadrado ( $\bar{A}$ )( $\bar{B}$ )( $\bar{C}$ )( $\bar{D}$ ) homotético de (A)(B)(C)(D), em relação ao vértice (J), na razão  $2/3$  (Figura 196). Assim, a diagonal da seção ( $\bar{A}$ )( $\bar{B}$ )( $\bar{C}$ )( $\bar{D}$ ) é igual aos dois terços da diagonal do octaedro.

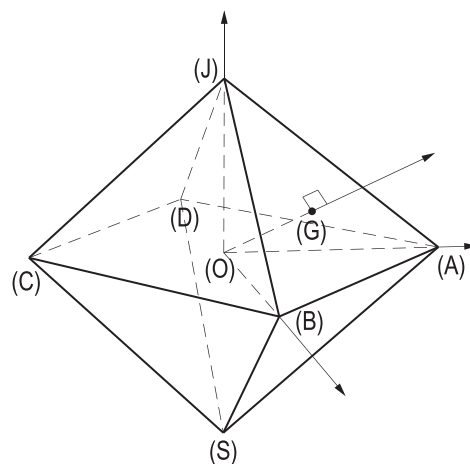


Figura 194

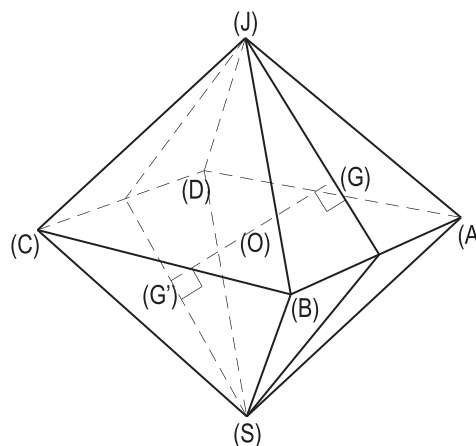


Figura 195

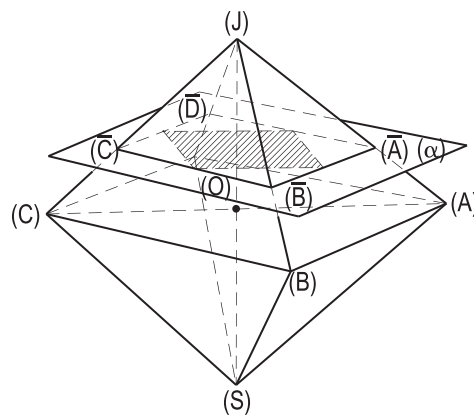


Figura 196

E como os centros (E), (F), (G) e (H) das faces que formam (J) são os pontos médios dos lados do quadrado  $(\bar{A})(\bar{B})(\bar{C})(\bar{D})$ , conclui-se que eles definem um outro quadrado (E)(F)(G)(H) (Figura 197) cujo lado (F)(G) vale:

$$(F)(G) = \frac{1}{2} (\bar{A})(\bar{C}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} (A)(C)$$

$$(F)(G) = \frac{1}{3} (A)(C)$$

20. Os centros das faces de um octaedro regular são vértices de um cubo cuja aresta é igual a um terço da diagonal do octaedro.

Porque o poliedro inscrito no octaedro é formado (número 114.19) por seis faces quadradas iguais, reunidas três a três em cada vértice (número 110). E porque os lados desses quadrados valem (número 114.19) um terço da diagonal do octaedro (Figura 198). E como cada diagonal do cubo é um segmento formado pelos centros de duas faces opostas do octaedro, conclui-se que (número 114.18) (Figura 199):

21. A esfera inscrita num octaedro regular circunscreve o cubo que tem por vértices os centros das faces do octaedro.
22. Os centros das faces de um cubo são vértices do octaedro regular inscrito no cubo.

Os centros das faces de um cubo, relativas a um de seus vértices – (I), na Figura 200 –, são os pontos médios dos lados do triângulo equilátero (X)(Y)(Z) formado (número 111.9) pelos extremos não comuns das arestas do cubo relativas àquele vértice (Figura 200). Por isso, os centros (A), (B) e (C) daquelas três faces definem um triângulo equilátero.

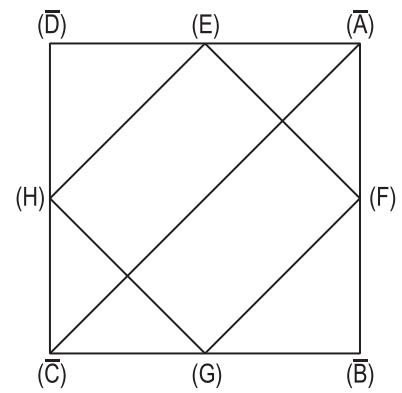


Figura 197

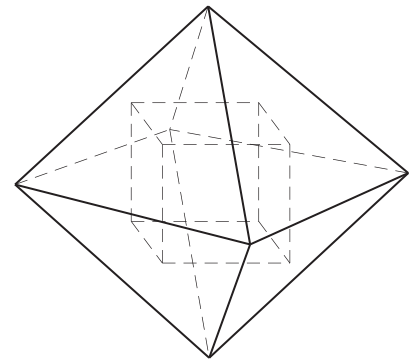


Figura 198

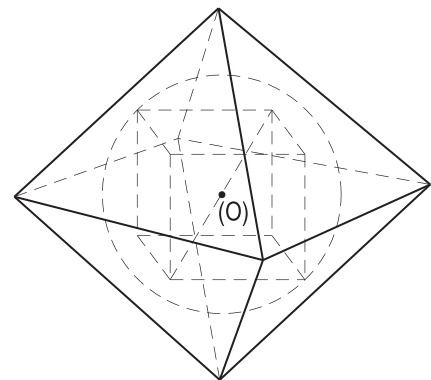


Figura 199

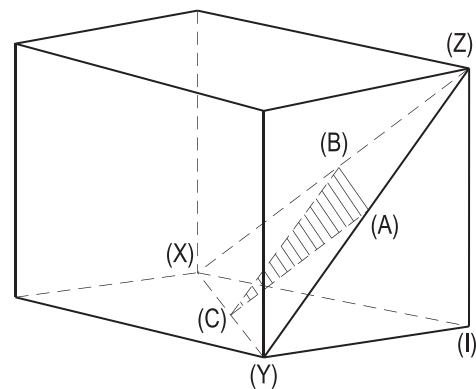


Figura 200

Então, o poliedro que tem por vértices os centros das faces do cubo, sendo formado por oito triângulos equiláteros iguais, reunidos quatro a quatro em cada vértice é (número 113) um octaedro regular (Figura 201).

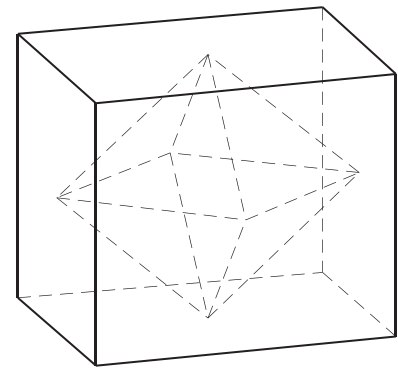


Figura 201

E porque os centros das faces do cubo são (número 111.13) os pontos médios das arestas de um dos dois tetraedros regulares inscritos no cubo, é imediato (número 114.1) concluir que (Figura 202):

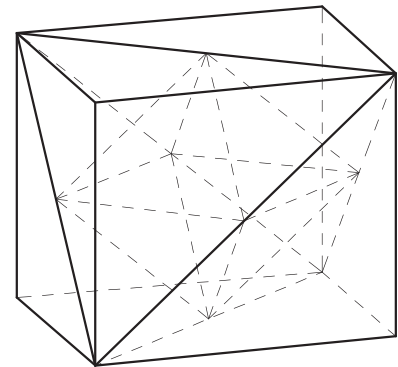


Figura 202

23. Um octaedro regular inscrito num cubo, tendo por vértices os centros de faces do cubo, é também inscrito no tetraedro regular inscrito no cubo, tal como mostra a Figura 202.

Decorrem, prontamente, as seguintes propriedades:

24. A aresta do octaedro regular inscrito num cubo, tendo por vértices os centros das faces do cubo, é igual à metade da diagonal facial do cubo.
25. A diagonal do octaedro regular inscrito num cubo, tendo por vértices os centros das faces do cubo, é igual à aresta do cubo (Figura 201).

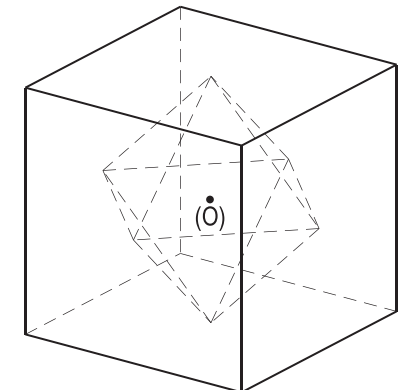


Figura 203

26. A esfera inscrita num cubo circunscreve o octaedro regular inscrito no cubo (Figura 203).
27. A esfera circunscrita ao octaedro regular inscrito num tetraedro regular é tangente às arestas do tetraedro.

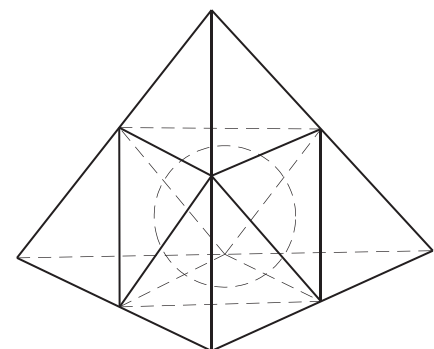


Figura 204

28. A esfera inscrita num tetraedro regular é também inscrita no octaedro regular inscrito no tetraedro (Figura 204).

29. O contorno da projeção ortogonal de um octaedro regular sobre um plano perpendicular a uma de suas diagonais é um quadrado igual à seção diagonal do sólido.

De fato, sendo  $(J)(S)$  a diagonal perpendicular ao plano  $(\pi)$  (Figura 205), a seção diagonal quadrada  $(A)(B)(C)(D)$ , pertencendo a um plano perpendicular à diagonal  $(J)(S)$ , projeta-se em verdadeira grandeza sobre  $(\pi)$  (Figura 205).

Assim, porque a projeção de  $(J)(S)$  sobre  $(\pi)$  é o próprio centro do quadrado  $ABCD$ , este quadrado, de lado igual à aresta do sólido, é o contorno de sua projeção sobre  $(\pi)$ .

30. O contorno da projeção ortogonal de um octaedro regular sobre um plano perpendicular a uma de suas arestas é um losango cujas diagonais medem a aresta e a diagonal do sólido.

Porque as projeções das duas arestas  $(A)(B)$  e  $(C)(D)$ , perpendiculares a  $(\pi)$ , reduzem-se a pontos e porque o losango  $(J)(M)(S)(N)$  (número 114.11), seção produzida pelo plano mediador daquelas duas arestas, projeta-se em verdadeira grandeza sobre  $(\pi)$  (Figura 206).

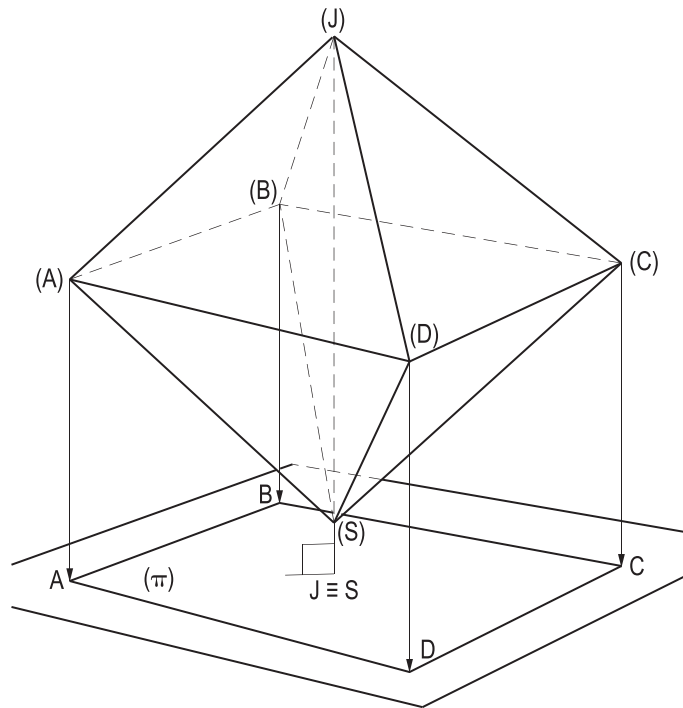


Figura 205

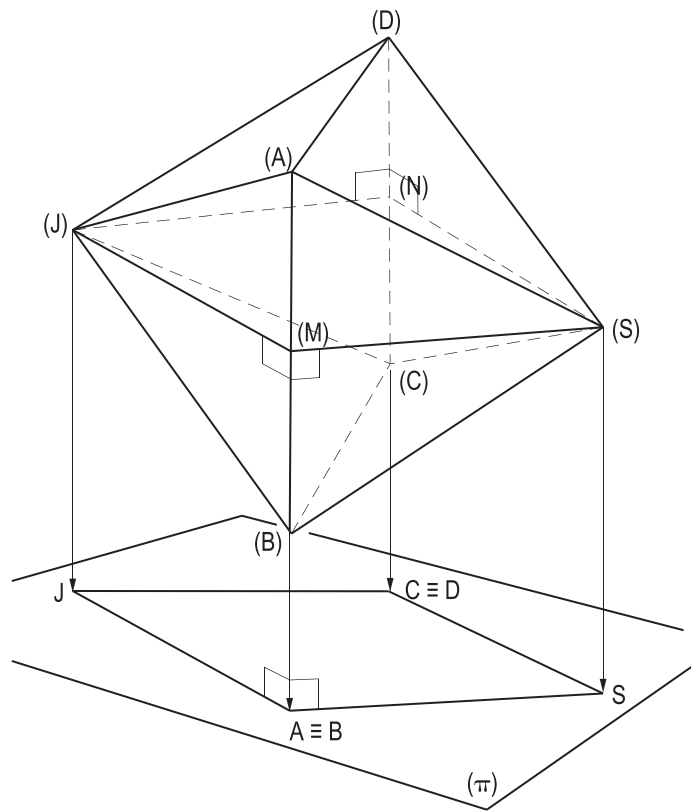


Figura 206

31. O contorno da projeção ortogonal de um octaedro regular sobre um plano paralelo a uma de suas faces é um hexágono regular.

A face (J)(A)(B), paralela ao plano  $(\pi)$ , e a que lhe é oposta, (S)(C)(D), projetam-se em verdadeira grandeza sobre  $(\pi)$  (Figura 207). E porque os centros (G) e (G') dessas faces definem um segmento perpendicular a  $(\pi)$  (número 114.18), suas projeções G e G' sobre  $(\pi)$  coincidem.

Assim, os triângulos equiláteros JAB e SCD, além de serem iguais e terem lados respectivamente paralelos, possuem o mesmo centro  $G \equiv G'$  (Figura 207) e inscrevem-se num mesmo círculo, obrigando que o contorno da projeção ortogonal do octaedro sobre  $(\pi)$  seja um hexágono regular JCBSAD (Figura 208).

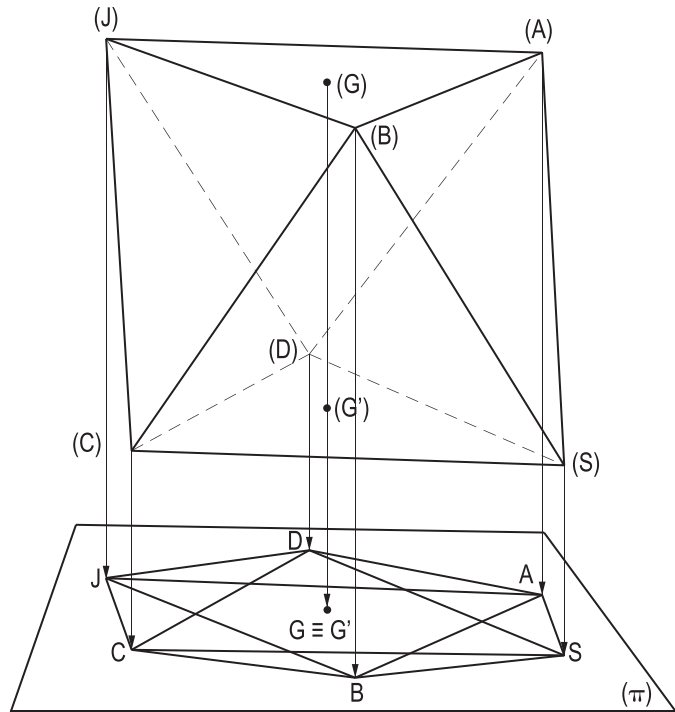


Figura 207

O dimensionamento do contorno da projeção é imediato, pois o círculo circunscrito ao hexágono regular é igual ao que circunscreve a face do poliedro.

Em verdade, o círculo circunscrito ao hexágono regular JCBSAD, contorno da projeção do sólido sobre  $(\pi)$ , é a projeção, em verdadeira grandeza, dos círculos circunscritos às faces (J)(A)(B) e (S)(C)(D), paralelas a  $(\pi)$ .

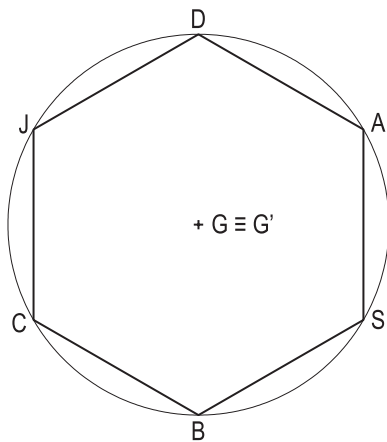


Figura 208

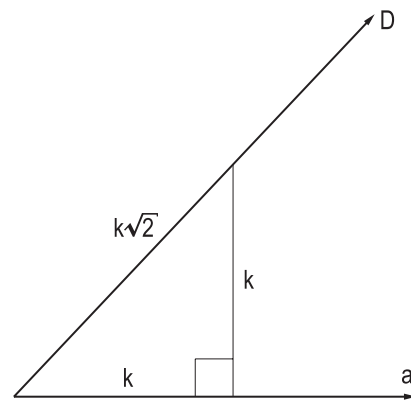


Figura 209

## 115 – Relações métricas

### 1. Relação fundamental

Designando respectivamente por  $a$  e  $D$  a aresta e a diagonal do octaedro regular, porque  $D$  é a diagonal de um quadrado de lado  $a$  (número 114.5), temos:

$$D = a\sqrt{2}$$

### 2. Escala gráfica

A escala gráfica do octaedro regular, mais simples que as do tetraedro regular e do cubo, é de dupla entrada (Figura 209), traduzindo graficamente a relação fundamental do octaedro regular. Sua construção é imediata (Figura 209) e seu emprego se faz por homotetia.

### 3. Área total

A área total  $S_t$  de um octaedro regular de aresta  $a$  é, evidentemente, igual ao óctuplo da área da face do sólido.

Assim, temos:

$$S_t = 8 \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \quad \therefore \quad S_t = 2a^2 \sqrt{3}$$

### 4. Distância entre duas faces opostas

A distância  $d$  entre duas faces opostas de um octaedro regular de aresta  $a$  se mede pelo valor do segmento formado pelos centros  $(G)$  e  $(G')$  dessas faces (número 114.18), ou seja, pela diagonal do cubo inscrito no octaedro (número 114.20).

Assim, porque (número 114.20) a aresta  $a'$  do cubo é igual à terça parte da diagonal  $D$  do octaedro, podemos escrever (Figura 210):

$$d = a' \sqrt{3} = \frac{D}{3} \sqrt{3}$$

$$\therefore d = \frac{a\sqrt{2}}{3} \sqrt{3} \quad \therefore \quad d = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

### 5. Distância entre duas arestas paralelas

Dois arestas opostas de um octaedro regular  $(J)-(A)(B)(C)(D)-(S)$  podem ser paralelas, como  $(A)(B)$  e  $(C)(D)$ , ou reversas, como  $(A)(B)$  e  $(J)(D)$  (Figura 211).

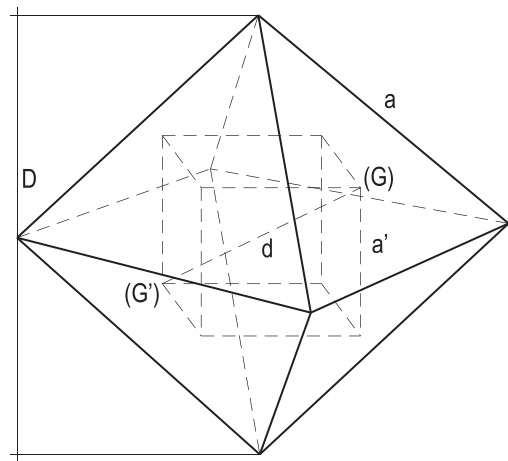


Figura 210

A distância  $d_1$  entre as arestas paralelas (A)(B) e (C)(D) se mede, evidentemente, no próprio plano diagonal (A)(B)(C)(D) (Figura 211) por uma perpendicular (A)(D) às duas arestas.

Assim, a distância  $d_1$  é igual à própria aresta  $a$  do sólido.

E, para obter a distância  $d_2$  entre duas arestas reversas (A)(B) e (J)(D), observemos que, porque (A)(B) é paralela à face (J)(C)(D),  $d_2$  é a própria distância (M)(L) de (A)(B) ao plano da face (J)(C)(D) (Figura 212), ou ainda, a distância (G)(G') entre as faces opostas (S)(A)(B) e (J)(C)(D) (número 115.4).

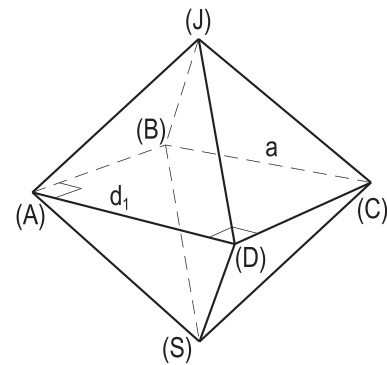


Figura 211

Assim,

$$d_1 = a \quad d_2 = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

#### 6. Raios das esferas inscrita, circunscrita e tangente às arestas

Os raios  $R_i$  da esfera inscrita,  $R_c$  da esfera circunscrita e  $R_a$  da esfera tangente às arestas de um octaedro regular de aresta  $a$  são respectivamente iguais às metades da distância  $d$  entre duas faces opostas (número 115.4), da diagonal  $D$  do sólido (número 115.1) e da distância  $d_1$  entre duas arestas opostas paralelas (número 115.5).

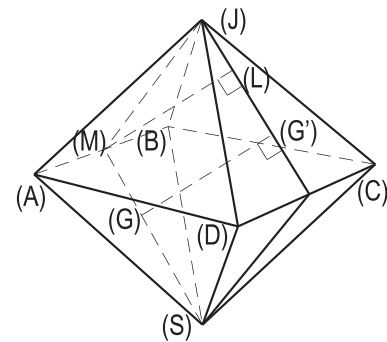


Figura 212

Assim, temos:

$$R_i = \frac{a\sqrt{6}}{6} \quad R_c = \frac{a\sqrt{2}}{2} \quad R_a = \frac{a}{2}$$

#### 7. Volume

Por ser a soma de duas pirâmides regulares iguais, de base comum – o quadrado (A)(B)(C)(D) de lado igual à aresta  $a$  do sólido – e de alturas iguais à metade de sua diagonal (J)(S), (Figura 212), o volume  $V$  de um octaedro regular se escreve:

$$V = 2 \cdot \frac{B \cdot h}{3} = \frac{2}{3} \cdot a^2 \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

Ou seja,

$$V = \frac{a^3\sqrt{2}}{3}$$

E, em função de sua diagonal  $D$  (número 115.1):

$$V = \left(\frac{D}{\sqrt{2}}\right)^3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{3} = \frac{D^3}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{3}$$

Ou então,

$$V = \frac{D^3}{6}$$



# CAPÍTULO XI

## DODECAEDRO REGULAR

### 116 – Dodecaedro regular

É o poliedro formado por doze faces pentagonais regulares reunidas três a três em cada vértice. Possui trinta arestas, vinte vértices e cem diagonais (Figura 213), conforme demonstrado no item 102.5.

### 117 – Propriedades

1. Porque seus números de faces e de vértices são, respectivamente, iguais aos de vértices e de faces do icosaedro regular (número 102.3), o dodecaedro regular é conjugado do icosaedro regular (número 97).

2. A soma dos ângulos internos de todas as faces é igual a 72 retos, porque (número 92) temos:

$$S_i = (A - F) 4r = (30 - 12) 4r = 72r$$

3. A soma dos ângulos externos de todas as faces é igual a 48 retos.

De fato (número 93), temos:

$$S_e = F.4r = 12.4r = 48 \text{ retos}$$

4. Porque as faces pentagonais grupam-se três a três em cada vértice, há a formação em qualquer deles de tetraedros iguais, tendo por faces laterais triângulos isósceles com dois lados iguais às arestas do sólido e, por bases, triângulos equiláteros, com lados iguais às diagonais dos pentágonos faces (Figura 214).

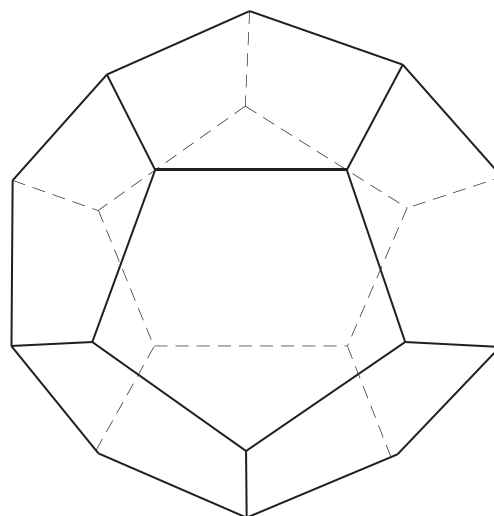


Figura 213

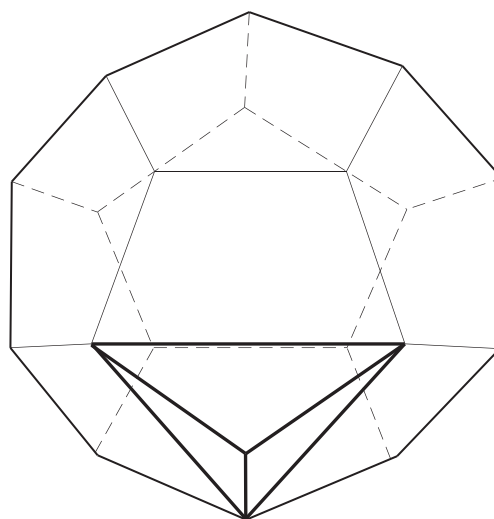


Figura 214

## 118 – Área total

A área total de um dodecaedro regular é, naturalmente, igual a doze vezes a área de qualquer de suas faces.

Sabe-se (*Geometria Plana*, número 291) que, em função do raio  $R$  do círculo que o circunscribe, o lado  $\ell_5$  e o apótema  $a_5$  do pentágono regular convexo são:

$$\ell_5 = \frac{R}{2} \sqrt{10 - 2\sqrt{5}} \quad \text{e} \quad a_5 = \frac{R}{4} (\sqrt{5} + 1)$$

Por isso, para calcular  $a_5$  em função de  $\ell_5$ , basta dividir as expressões, acima, obtendo-se:

$$\frac{a_5}{\ell_5} = \frac{(R/4) (\sqrt{5} + 1)}{(R/2) \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}$$

$$\frac{a_5}{\ell_5} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{5} + 1}{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}$$

$$\text{Donde, } a_5 = \frac{\sqrt{5} + 1}{2\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}} \cdot \ell_5$$

Então, a área  $S$  de um pentágono regular, em função de seu lado  $\ell_5$ , será (*Geometria Plana*, número 314):

$$S = \frac{5\ell_5}{2} \cdot a_5 = \frac{5}{2} \cdot \ell_5 \cdot \left( \frac{\sqrt{5} + 1}{2\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}} \right) \cdot \ell_5$$

$$\text{ou } S = \frac{5}{4} \cdot \frac{\sqrt{5} + 1}{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}} \cdot \ell_5^2$$

Designando por  $a$  a aresta de um dodecaedro regular, sua área total  $S_t$  será:

$$S_t = 12 \cdot S = 12 \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{\sqrt{5} + 1}{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}} \cdot a^2$$

$$S_t = 15 \cdot \frac{(\sqrt{5} + 1) \cdot \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}} \cdot \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}} \cdot a^2$$

$$S_t = 15 \cdot \frac{\sqrt{50 + 10\sqrt{5}} + \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{\sqrt{100 - 20}} \cdot a^2$$

$$S_t = 15 \cdot \frac{\sqrt{50 + 10\sqrt{5}} + \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4\sqrt{5}} \cdot a^2$$

$$S_t = \frac{15}{20} \cdot \left[ \sqrt{50\sqrt{5} + 50} + \sqrt{10\sqrt{5} + 10} \right] \cdot a^2$$

$$\text{Desenvolvendo a expressão, vem: } S_t = 3\sqrt{25 + 10\sqrt{5}} \cdot a^2$$

## 119 – Volume

O dodecaedro regular pode ser decomposto em um cubo e seis poliedros iguais (Figuras 215 e 216).

Observe-se que as arestas do cubo são diagonais das faces do dodecaedro e que os seis poliedros iguais são troncos de prismas triangulares que têm uma aresta lateral igual à do dodecaedro e outras duas iguais à diagonal da face deste sólido.

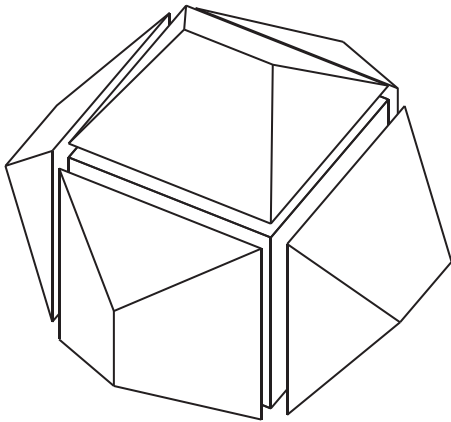


Figura 215

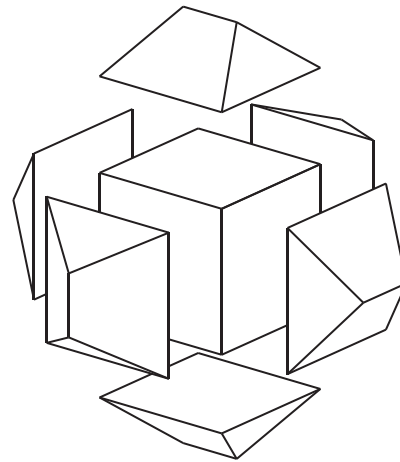


Figura 216

O volume do dodecaedro será, então, igual à soma do volume desse cubo com o sêxtuplo do volume de cada um dos seis troncos de prismas triangulares formados (Figura 216).

Passemos, então, a calcular os volumes desses sólidos em que o dodecaedro foi decomposto.

Para tanto, designemos por  $a$  a sua aresta e por  $d$  sua diagonal facial e estudemos um dos seis troncos de prismas triangulares (A)(B)(C)–(D)(E)(F), na Figura 217.

Observemos (Figuras 215, 216 e 217) que a face (B)(C)(D)(E) do tronco é também uma face do cubo, um quadrado, portanto, com lados iguais à diagonal  $d$  do pentágono face e que a aresta (A)(F) é uma das arestas  $a$  do dodecaedro.

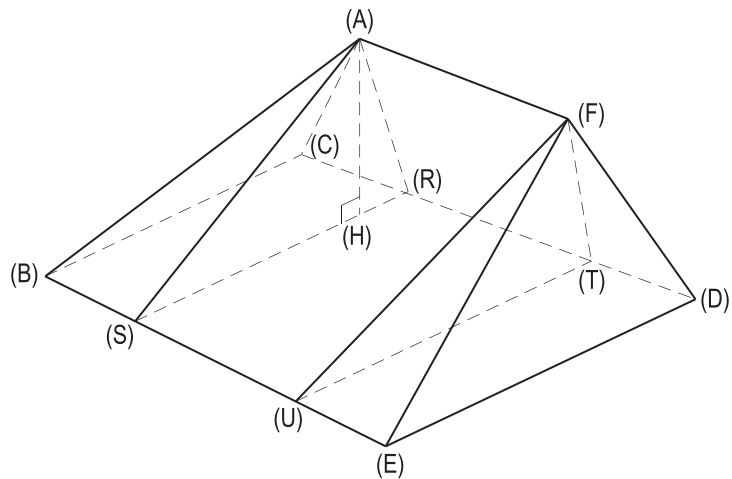


Figura 217

Os planos que contêm os vértices (A) e (F) e que são perpendiculares às arestas laterais do tronco produzem as seções (A)(R)(S) e (F)(T)(U), (Figura 217), que decompõem o tronco em um prisma triangular reto (A)(R)(S) – (F)(T)(U) e em duas pirâmides quadrangulares iguais (A) – (B)(C)(R)(S) e (F) – (D)(E)(U)(T).

Como estabelecemos:

$$(A)(F) = a \quad \text{e} \quad (C)(D) = d, \text{ vem}$$

$$(C)(R) = (T)(D) = (B)(S) = (U)(E) = \frac{d-a}{2} \quad (1)$$

Para calcular a altura (A)(H) = h das duas pirâmides quadrangulares, o triângulo retângulo (A)(H)(S) (Figura 218) dá:

$$(A)(H)^2 = (A)(S)^2 - (S)(H)^2 \quad (2)$$

E o triângulo retângulo (A)(S)(B) (Figura 217), por sua vez:

$$(A)(S)^2 = (A)(B)^2 - (B)(S)^2 \quad (3)$$

Levando (3) a (2) e utilizando (1), vem:

$$(A)(H)^2 = (A)(B)^2 - (B)(S)^2 - (S)(H)^2 \text{ ou:}$$

$$h^2 = a^2 - \left(\frac{d-a}{2}\right)^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2$$

$$\therefore h^2 = a^2 - \frac{d^2 + a^2 - 2ad}{4} - \frac{d^2}{4}$$

$$\therefore h^2 = \frac{4a^2 - d^2 - a^2 + 2ad - d^2}{4}$$

$$\therefore h^2 = \frac{3a^2 - 2d^2 + 2ad}{4}$$

$$\therefore h^2 = \frac{3a^2}{4} - \frac{d(d-a)}{2} \quad (4)$$

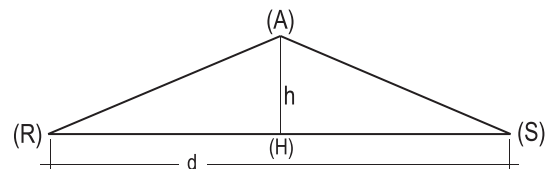


Figura 218

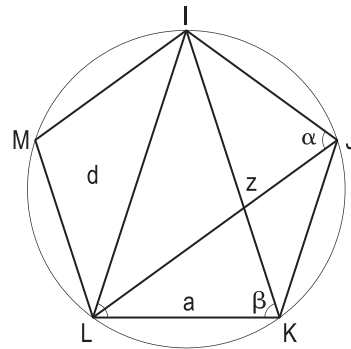


Figura 219

Mas, como a diagonal facial d é o lado do pentágono regular estrelado inscrito no mesmo círculo que o pentágono convexo regular, observando a Figura 219, nota-se a igualdade dos ângulos  $\hat{\alpha}$  e  $\hat{\beta}$ , que subtendem o mesmo arco IML, assegurando a semelhança dos triângulos IZJ e ILK, permite anotar:

$$\frac{LK}{ZJ} = \frac{IL}{IJ} \quad \therefore \frac{a}{d-a} = \frac{d}{a} \quad \therefore a^2 = d(d-a)$$

$$\therefore d^2 - ad - a^2 = 0 \quad \therefore d = \frac{a \pm \sqrt{a^2 + 4a^2}}{2}$$

$$\therefore d = \frac{a + a\sqrt{5}}{2} \quad \therefore d = \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right) a \quad (5)$$

$$\therefore d - a = \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right) a - a = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) a \quad (6)$$

Aplicando (5) e (6) em (4), vem:

$$h^2 = \frac{3a^2}{4} - \frac{1}{2} \left[ \frac{(\sqrt{5}+1)a}{2} \cdot \frac{(\sqrt{5}-1)a}{2} \right] = \frac{3a^2}{4} - \frac{4a^2}{8}$$

$$\therefore h^2 = \frac{3a^2}{4} - \frac{2a^2}{4} = \frac{a^2}{4} \quad \therefore h = \frac{a}{2} \quad (7)$$

Passemos, então, ao cálculo do volume  $V$  do dodecaedro regular de aresta  $a$ .

Recordando que  $(B)(C) = (C)(D) = (D)(E) = (E)(B) = d$  (Figura 217), podemos escrever para os volumes  $V_1$  e  $V_3$ , iguais, dessas duas pirâmides quadrangulares (número 157):

$$V_1 = V_3 = \frac{(BCRS) \cdot (A)(H)}{3}$$

$$V_1 = V_3 = \frac{1}{3} \cdot \left( \frac{d-a}{2} \right) \cdot d \cdot h$$

$$V_1 = V_3 = \frac{ad(d-a)}{12} \quad (8)$$

O volume  $V_2$  do prisma triangular  $(A)(R)(S) - (F)(T)(U)$  se calcula assim:

$$V_2 = \frac{dh}{2} \cdot a$$

Utilizando a relação (7), temos:

$$\therefore V_2 = \frac{da}{4} \cdot a = \frac{da^2}{4}$$

Assim, o volume de cada um dos seis troncos de prismas  $V_{tr}$  é:

$$V_{tr} = V_1 + V_2 + V_3 = 2V_1 + V_2$$

Utilizando a relação (8), chegamos a:

$$V_{tr} = \frac{2ad(d-a)}{12} + \frac{da^2}{4}$$

$$V_{tr} = \frac{ad(d-a)}{6} + \frac{da^2}{4}$$

$$V_{tr} = \frac{2ad(d-a) + 3da^2}{12}$$

$$V_{tr} = \frac{2ad^2 - 2a^2d + 3a^2d}{12}$$

$$\text{Assim, } V_{\text{tr}} = \frac{2ad^2 + a^2d}{12}$$

$$\therefore V_{\text{tr}} = \frac{(2d + a) \cdot ad}{12}$$

Para o cubo, central, o volume  $V_c$  é:

$$V_c = d^3$$

Então, o volume  $V$  do dodecaedro se anota:

$$V = 6 V_{\text{tr}} + V_c$$

$$\therefore V = 6 V_{\text{tr}} + d^3$$

$$\therefore V = \frac{6(2ad^2 + a^2d)}{12} + d^3$$

$$\therefore V = \frac{2ad^2 + a^2d}{2} + d^3$$

$$\therefore V = ad^2 + \frac{a^2d}{2} + d^3 \quad (9)$$

Apliquemos, então, nesta relação (9), as intuições em (5) e (6).

Temos, assim:

$$V = a \left( \frac{\sqrt{5}+1}{2} \right)^2 a^2 + \frac{a^2}{2} \left( \frac{\sqrt{5}+1}{2} \right) a + \left( \frac{\sqrt{5}+1}{2} \right)^3 a^3$$

$$\therefore V = \frac{(6 + 2\sqrt{5})}{4} a^3 + \frac{(\sqrt{5}+1)}{4} a^3 + \frac{(8\sqrt{5}+16)}{8} a^3$$

$$\therefore V = \left( \frac{6 + 2\sqrt{5}}{4} + \frac{\sqrt{5}+1}{4} + \frac{4\sqrt{5}+8}{4} \right) a^3$$

$$\therefore V = \frac{6 + 1 + 8 + 2\sqrt{5} + \sqrt{5} + 4\sqrt{5}}{4} a^3$$

$$\text{Ou, finalmente, } \boxed{V = \left( \frac{15 + 7\sqrt{5}}{4} \right) a^3}$$

# CAPÍTULO XII

## ICOSAEDRO REGULAR

### 120 – Icosaedro regular

É o poliedro formado por vinte faces triangulares regulares reunidas cinco a cinco em cada vértice. Possui trinta arestas, doze vértices e trinta e seis diagonais, conforme demonstrado no número 102.3 (Figura 220).

### 121 – Propriedades

1. Porque seus números de faces e de vértices são, respectivamente, iguais aos de vértices e de faces do dodecaedro regular (número 102.5), o icosaedro regular é conjugado do dodecaedro regular (número 97).

2. A soma dos ângulos internos de todas as faces é 40 retos. De fato (número 92), temos:

$$S_i = (A - F) 4r = (30 - 20) 4r = 40r$$

3. A soma dos ângulos externos de todas as faces é 80 retos. De fato (número 93), temos:

$$S_e = F \cdot 4r = 20 \cdot 4r = 80r$$

4. Porque as faces triangulares grupam-se cinco a cinco em cada vértice, há a formação, em cada um deles, de pirâmides pentagonais regulares, tendo por faces laterais triângulos equiláteros, faces do sólido, e por bases pentágonos regulares, com lados iguais também à aresta do sólido (Figura 220).

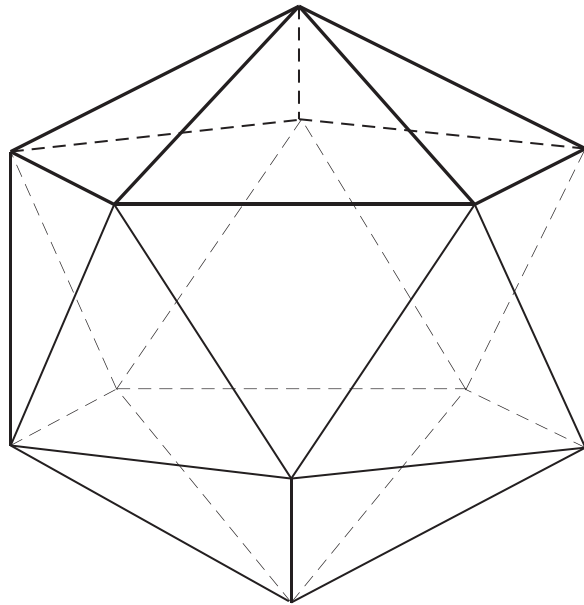


Figura 220

## 122 – Área total

A área total de um icosaedro regular é, naturalmente, igual a vinte vezes a área de qualquer de suas faces.

Sabe-se que, em função de seu lado  $a$  (*Geometria Plana*, número 327), a área do triângulo equilátero é  $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ .

Assim, a área total  $S_t$  do icosaedro regular de aresta  $a$  será:

$$S_t = 20 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

ou 
$$S_t = (5\sqrt{3})a^2$$

## 123 – Volume

Para o cálculo do volume de um icosaedro regular, vamos decompô-lo em vinte pirâmides triangulares iguais, todas com vértice no centro (O) do sólido, tendo por bases cada uma das faces do icosaedro.

Designemos por  $d$  uma das maiores diagonais (A)(A') do icosaedro e observemos que as arestas laterais de cada uma das vinte pirâmides triangulares, como a (O)–(A)(B)(C), valem  $\frac{d}{2}$  (Figura 221).

Consideremos, ainda, duas seções planas no icosaedro, uma – (A)(B)(Y)(C)(D), na Figura 222 – contendo os vértices das arestas do sólido que convergem no vértice (Z) e, outra, a hexagonal (A)(V)(M)(A')(C)(N) (Figura 222), obtida por um plano que divide ao meio o icosaedro.

Observe-se que esse dois planos secantes cortam-se segundo a diagonal (A)(C) do pentágono convexo regular (A)(B)(Y)(C)(D) (Figura 222).

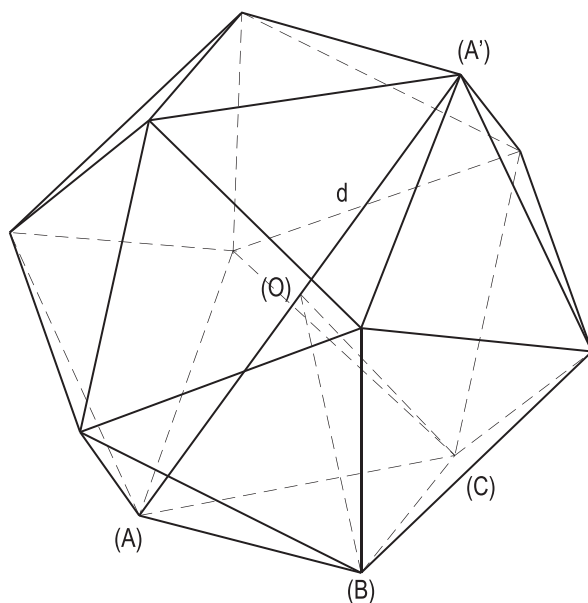


Figura 221

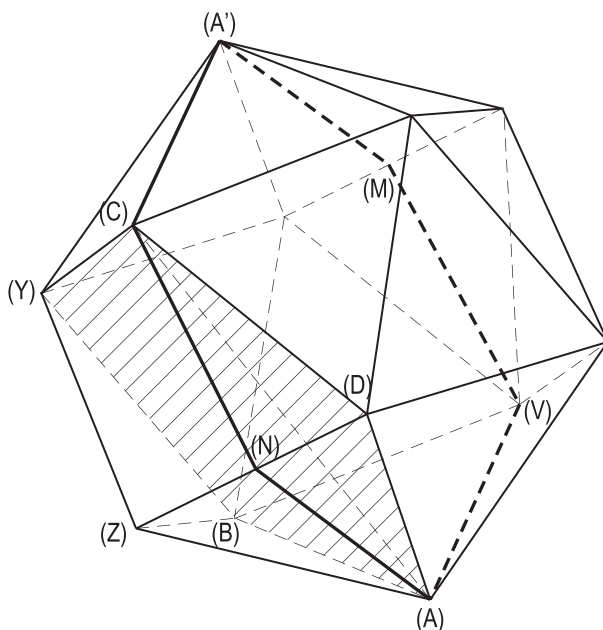


Figura 222



O hexágono (A)(V)(M)(A')(C)(N), a segunda seção em estudo, tem dois lados – (A)(V) e (A')(C) – que são arestas do sólido e os outros quatro – (V)(M), (A')(M), (N)(A) e (C)(N) – que são alturas de quatro triângulos equiláteros, faces do icosaedro (Figura 222).

Designando por  $a$  a aresta do sólido, as alturas dessas faces equiláteras medem  $\frac{a\sqrt{3}}{2}$  (*Geometria Plana*, número 217).

Por ser diagonal do pentágono convexo regular (A)(B)(Y)(C)(D) (Figura 222), o segmento (A)(C) é o lado do pentágono estrelado regular inscrito no mesmo círculo que o convexo.

Assim, pode-se (*Geometria Plana*, número 291) escrever:

$$(A)(C) = \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}} \cdot a$$

E, do triângulo retângulo (C)(A)(V) (Figura 223), temos:  $d^2 = a^2 + (A)(C)^2$

$$d^2 = a^2 + \left( \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}} \right)^2 \cdot a^2$$

$$\therefore d^2 = a^2 + \frac{10 + 2\sqrt{5}}{10 - 2\sqrt{5}} \cdot a^2$$

$$\therefore d^2 = a^2 + \frac{(10 + 2\sqrt{5})(10 - 2\sqrt{5})}{(10 - 2\sqrt{5})(10 - 2\sqrt{5})} \cdot a^2$$

$$\therefore d^2 = a^2 + \frac{100 - 20}{100 + 20 - 40\sqrt{5}} \cdot a^2$$

$$\therefore d^2 = a^2 + \frac{80}{120 - 40\sqrt{5}} \cdot a^2 \qquad \therefore d^2 = a^2 + \frac{2}{3 - \sqrt{5}} \cdot a^2$$

$$\therefore d^2 = \left( 1 + \frac{2}{3 - \sqrt{5}} \right) \cdot a^2 \qquad \therefore d^2 = \left( \frac{3 - \sqrt{5} + 2}{3 - \sqrt{5}} \right) \cdot a^2$$

$$\therefore d^2 = \frac{5 - \sqrt{5}}{3 - \sqrt{5}} \cdot a^2 \qquad \therefore d^2 = \frac{(5 - \sqrt{5})(3 + \sqrt{5})}{(3 - \sqrt{5})(3 + \sqrt{5})} \cdot a^2$$

$$\therefore d^2 = \frac{15 + 5\sqrt{5} - 3\sqrt{5} - 5}{4} \cdot a^2 \qquad \therefore d^2 = \frac{10 + 2\sqrt{5}}{4} \cdot a^2$$

$$\therefore d^2 = \frac{2(5 + \sqrt{5})}{4} \cdot a^2 \qquad \therefore d = \sqrt{2(5 + \sqrt{5})} \cdot \frac{a}{2} \qquad (1)$$

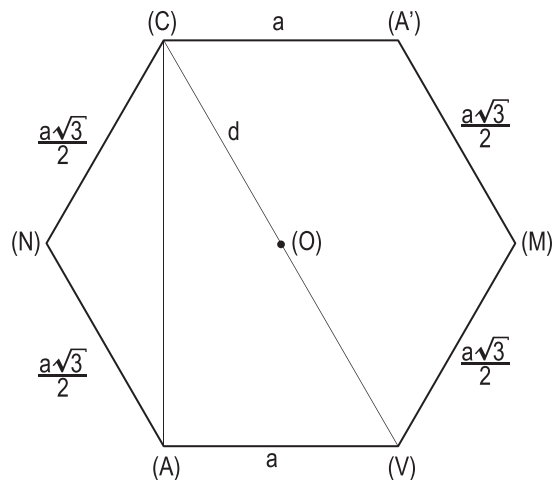


Figura 223

Para calcular o volume de uma qualquer das vinte pirâmides triangulares em que se dividiu o icosaedro, observe-se que suas bases são triângulos equiláteros de lado  $a$  e que suas arestas laterais valem a metade da diagonal maior do sólido. Como o pé (H) da altura da pirâmide é também o baricentro da base equilátera (A)(B)(C) (Figura 224), podemos escrever, para o triângulo retângulo (O)(H)(A):

$$\left(\frac{d}{2}\right)^2 = \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + h^2$$

$$\left(\frac{d}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{3} + h^2$$

$$h^2 = \frac{d^2}{4} - \frac{a^2}{3} \quad (2)$$

Levando (1) a (2), temos:

$$h^2 = \frac{2(5 + \sqrt{5})a^2}{16} - \frac{a^2}{3}$$

$$h^2 = \left(\frac{6(5 + \sqrt{5}) - 16}{48}\right) \cdot a^2$$

$$h^2 = \left(\frac{30 + 6\sqrt{5} - 16}{48}\right) \cdot a^2$$

$$h^2 = \frac{14 + 6\sqrt{5}}{48} \cdot a^2$$

$$h^2 = \frac{7 + 3\sqrt{5}}{24} \cdot a^2$$

$$h = \sqrt{\frac{7 + 3\sqrt{5}}{24}} \cdot a$$

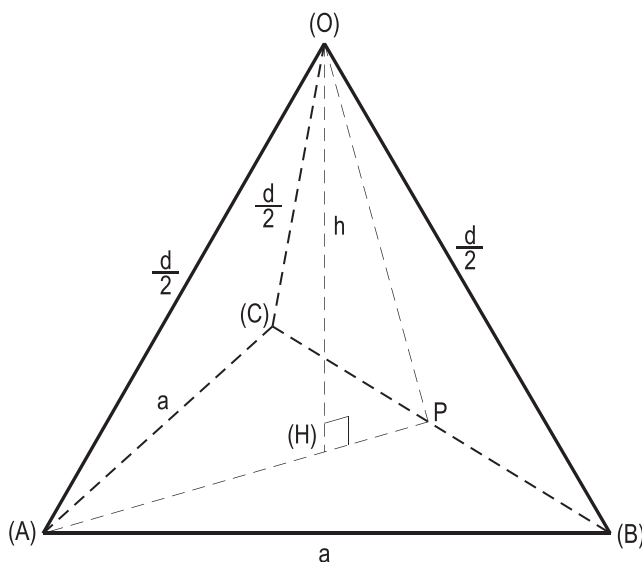


Figura 224

O volume  $V$  do icosaedro regular, por ser igual a vinte vezes o valor do volume de cada uma das vinte pirâmides em que foi decomposto, será, então:

$$V = 20 \cdot \frac{Bh}{3}$$

$$V = 20 \left(\frac{1}{3}\right) \left(\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\right) \left(\sqrt{\frac{7 + 3\sqrt{5}}{24}}\right) a$$

Ou, calculando e simplificando:

$$V = \frac{5}{12} (3 + \sqrt{5}) a^3$$

# CAPÍTULO XIII

## PRISMAS

### 124 – Superfícies prismáticas

Superfície prismática é a superfície gerada pelo deslocamento de uma reta que se apoia continuamente nos lados de uma linha poligonal plana fixa, movendo-se com direção constante, naturalmente não paralela ao plano da poligonal (Figura 225). A linha poligonal fixa e a reta móvel denominam-se, respectivamente, diretriz e geratriz da superfície.

As geratrizes que passam pelos vértices da diretriz são as arestas e as porções de plano limitadas por duas arestas consecutivas são as faces da superfície.

Uma superfície prismática é dita aberta ou fechada conforme, respectivamente, sua diretriz seja aberta ou fechada.

### 125 – Superfícies prismáticas convexas

Uma superfície prismática é convexa quando os planos de todas as suas faces não a atravessam, isto é, quando ela se situa inteiramente num dos semiespaços formados pelo plano de uma qualquer de suas faces (Figura 226). Quando ocorre o contrário, ela é denominada não convexa ou côncava (Figura 227).

Decorre, então, que:

1. Todas as seções planas produzidas numa superfície prismática convexa que atinjam todas as suas arestas são convexas; as seções planas das superfícies prismáticas não convexas que atinjam todas as suas arestas são côncavas.

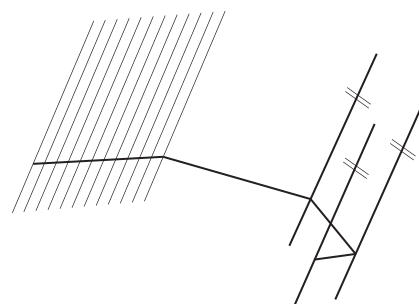


Figura 225

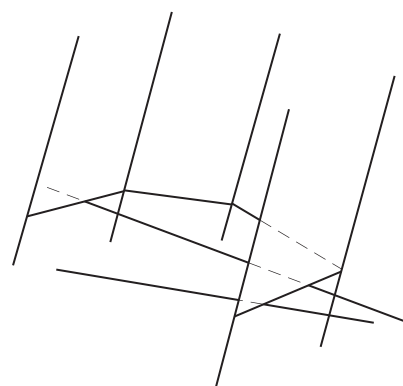


Figura 226

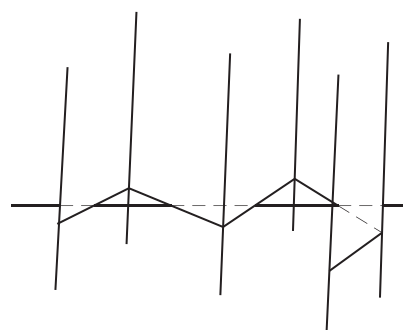


Figura 227

2. Toda reta secante a uma superfície prismática convexa possui no máximo dois pontos em comum com a superfície (Figura 226); quando a superfície é não convexa, uma reta secante pode ter mais de dois pontos comuns com ela (Figura 227).

De fato, basta ver que os traços da reta considerada na superfície são os pontos que ela tem em comum com os lados da poligonal seção produzida na superfície por um dos planos que a contém.

## 126 – Seções

1. As seções produzidas numa superfície prismática por planos paralelos entre si, mas não paralelos às arestas da superfície, são iguais.

Porque os lados das seções são respectivamente iguais, como paralelas entre paralelas, e os ângulos internos, respectivamente iguais, por terem os lados, aos pares, paralelos (Figura 228).

2. Seção reta de uma superfície prismática é a produzida, na superfície, por um plano perpendicular às suas arestas. As seções retas de uma superfície prismática são iguais, por pertencerem a planos paralelos entre si.

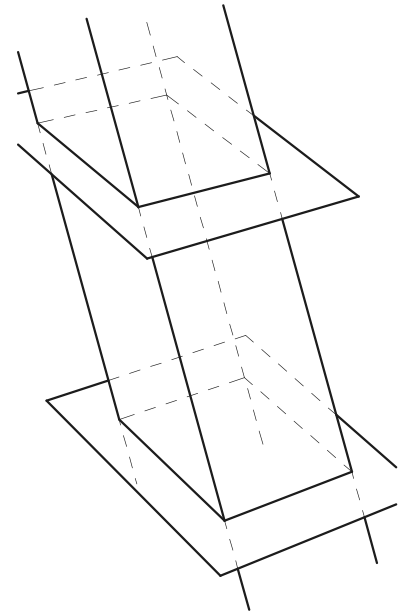


Figura 228

## 127 – Prismas

Por definição, prisma é o poliedro limitado por uma superfície prismática fechada e por dois planos paralelos entre si e não paralelos às arestas da superfície.

As seções que estes dois planos produzem na superfície (Figura 229) denominam-se bases do prisma. Seus lados são as arestas básicas do prisma.

As arestas e faces da superfície prismática, limitadas entre os planos das bases do prisma, são respectivamente denominadas arestas laterais e faces laterais do prisma.

É evidente que todas as faces laterais de um prisma são paralelogramos ou, eventualmente, retângulos, losangos ou quadrados. E que todas as arestas laterais são iguais.

Altura de um prisma é a distância entre os planos de suas bases, representada, na Figura 229, pelo segmento  $h$ .

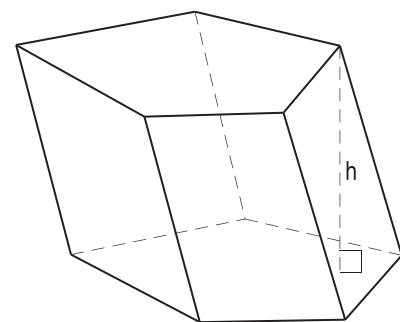


Figura 229

## 128 – Classificação dos prismas

1. Um prisma é dito triangular, quadrangular, pentagonal, hexagonal, etc., conforme suas bases sejam respectivamente triângulos, quadriláteros, pentágonos, hexágonos, etc.
2. Diz-se que um prisma é reto ou oblíquo conforme, respectivamente, suas arestas laterais sejam perpendiculares ou oblíquas aos planos das bases.
3. Um prisma é regular quando é reto e suas bases são polígonos regulares.
4. Nos prismas retos (e, conseqüentemente, nos regulares) as arestas laterais são iguais à altura.
5. Nos prismas oblíquos as arestas laterais, iguais entre si, são maiores que a altura.
6. Nos prismas regulares as faces laterais são retângulos (ou quadrados) iguais; nos retos ainda são retângulos (ou quadrados), mas não necessariamente iguais.
7. As faces laterais de um prisma oblíquo são paralelogramos. Eventualmente algumas dessas faces podem ser retângulos, losangos ou quadrados.
8. Os prismas podem ser convexos ou côncavos, segundo os critérios apresentados em termos gerais (número 89) para os poliedros.

## 129 – Paralelepípedos

Por definição, paralelepípedo é todo prisma cujas bases são paralelogramos. É claro, pois, que todo paralelepípedo é um prisma quadrangular e, por isso, um hexaedro. E que todas as suas faces são paralelogramos ou retângulos, ou losangos, ou quadrados, podendo, pois, qualquer uma delas funcionar como base do sólido.

Os paralelepípedos classificam-se em oblíquos (Figura 230) ou retos (Figura 231), segundo os próprios critérios gerais apresentados para os prismas (número 128.2). Quando, em caso particular, um paralelepípedo reto tem bases retangulares (ou quadradas), ele é denominado paralelepípedo retângulo (Figura 232).

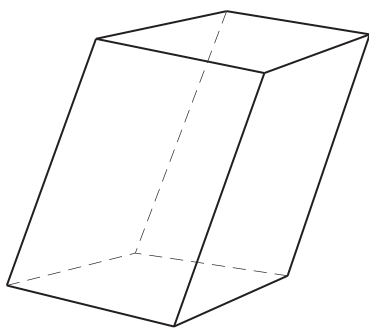


Figura 230

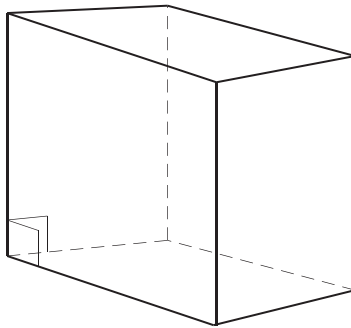


Figura 231

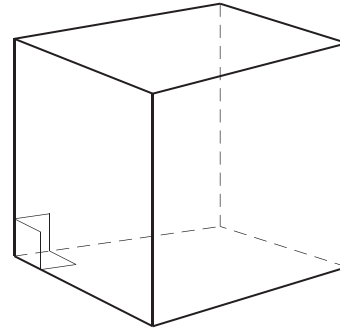


Figura 232

## 130 – Propriedades dos paralelepípedos

Porque todas as faces de um paralelepípedo são paralelogramos, é imediato concluir que (Figura 233):

1. As arestas são, quatro a quatro, iguais e paralelas.
2. As faces opostas são iguais e pertencem a planos paralelos.
3. Os triedros formados pelas arestas relativas a cada um dos vértices de um paralelepípedo oblíquo só podem ter, no máximo, um ângulo face reto.

De fato, para que o paralelepípedo seja oblíquo (Figuras 234 e 235) é preciso (número 129) que cada quatro arestas paralelas sejam oblíquas às duas faces opostas que não as contêm. E a existência de pelo menos dois ângulos faces retos naqueles triedros implicaria na perpendicularidade entre arestas e faces do sólido.

Assim, dentre todas as faces de um paralelepípedo oblíquo, duas (opostas) no máximo podem ser retangulares (Figura 235) (ou quadradas).

4. Os triedros formados pelas arestas relativas a cada vértice de um paralelepípedo reto possuem pelo menos dois ângulos faces retos.

Para assegurar ao menos que, dentre todas, quatro arestas paralelas sejam (Figura 236) perpendiculares às duas faces opostas que não as contêm.

Assim, pelo menos quatro faces de um paralelepípedo reto são, necessariamente, retangulares (ou quadradas).

5. Os triedros formados pelas arestas relativas a cada vértice de um paralelepípedo retângulo são trirretângulos.

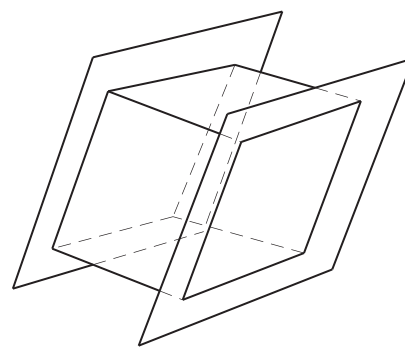


Figura 233

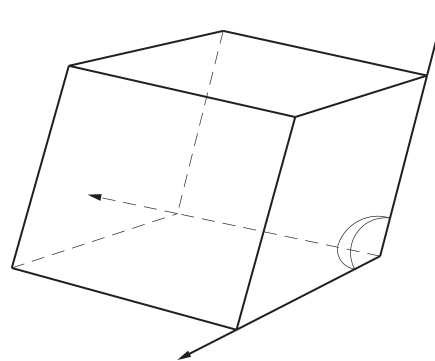


Figura 234

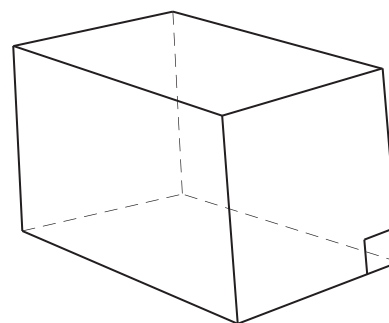


Figura 235

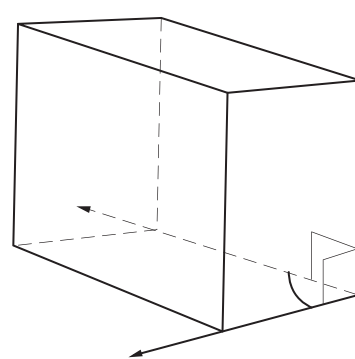


Figura 236

Porque (número 129) todas as suas faces são retângulos, ou eventualmente, quadrados (Figura 237). E porque os ângulos internos de todas as faces de um paralelepípedo retângulo são retos, o sólido é comumente denominado ortoedro.

6. As seções produzidas por planos que cortam quatro arestas paralelas de um paralelepípedo são paralelogramos ou retângulos, ou losangos, ou quadrados.

Porque tais planos cortam dois pares de planos paralelos: as faces opostas do sólido (Figura 238).

7. Em todo paralelepípedo, as quatro diagonais cortam-se mutuamente ao meio.

Os paralelepípedos – sendo formados apenas por faces quadrangulares, reunidas três a três em cada vértice – possuem quatro diagonais.

E mais: os planos formados por duas arestas opostas paralelas cortam o sólido segundo paralelogramos ou retângulos, ou losangos, ou quadrados (número 130.6). Assim, as quatro diagonais do paralelepípedo cortam-se mutuamente ao meio (Figura 239), por serem, aos pares, diagonais daqueles paralelogramos, seções diagonais.

8. O ponto comum às diagonais de um paralelepípedo é o centro de simetria, ou simplesmente, centro do sólido.

Porque o ponto (O), comum às diagonais, é o médio de qualquer segmento de reta que o contenha e que fique limitado por duas faces opostas do sólido (Figura 240).

De fato, sendo (r) uma reta qualquer pertencente a (O) e (E) e (F) seus traços em duas faces opostas, os triângulos (O)(E)(A) e (O)(F)(C), por terem os ângulos respectivamente iguais (lados paralelos) e os lados (A)(O) e (O)(C) iguais (número 130.7), são iguais (Figura 240).

Assim,  $(E)(O) = (O)(F)$ , ou seja, (O) é o ponto médio do segmento (E)(F).

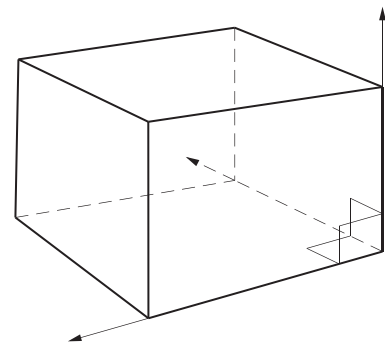


Figura 237

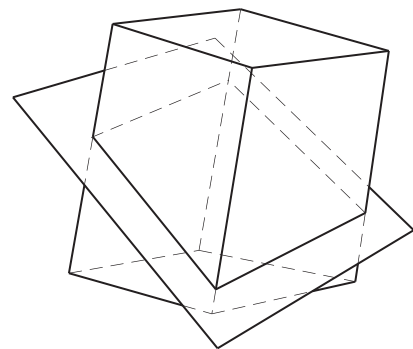


Figura 238

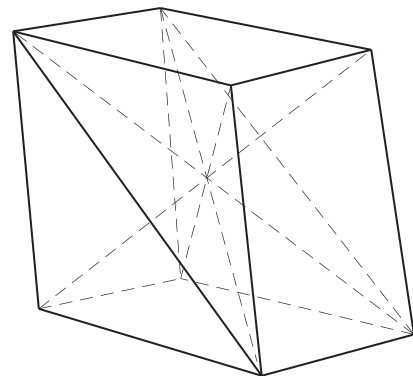


Figura 239

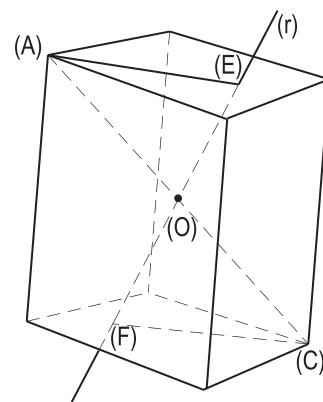


Figura 240

9. As diagonais do paralelepípedo retângulo são iguais.

Porque, escolhidas quatro arestas paralelas, os dois planos diagonais que com elas se pode formar cortam o sólido segundo retângulos iguais, cujas diagonais são as próprias diagonais do ortoedro (Figura 241).

10. O quadrado da diagonal de um ortoedro é igual à soma dos quadrados de suas três dimensões.

Porque sendo  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$  e  $D$  as três dimensões, a diagonal da base e o valor da diagonal do sólido, os triângulos retângulos  $(A)(R)(C)$  e  $(A)(B)(C)$  (Figura 242) fornecem:

$$D^2 = d^2 + c^2 \quad \text{e} \quad d^2 = a^2 + b^2$$

Logo: 
$$D^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

11. Todo ortoedro é inscritível numa esfera cujo centro é o próprio centro do sólido e cujo raio é igual à metade de sua diagonal.

Porque, sendo iguais as quatro diagonais (número 130.9) e cortando-se mutuamente ao meio (número 130.7), segundo o ponto  $(O)$ , este ponto equidista de todos os vértices do sólido (Figura 243).

Existe, pois, uma esfera circunscrita ao ortoedro (Figura 243) cujo centro é o próprio centro  $(O)$  do ortoedro e cujo raio é igual à metade da diagonal do sólido.

### 131 – Seções retas

Seções retas de um prisma são as produzidas pelos planos que, cortando todas as suas arestas laterais, são perpendiculares a elas (Figura 244).

Por pertencerem a planos paralelos, todas as seções retas de um prisma são iguais.

Os ângulos internos de uma seção reta são os retilíneos dos diedros formados pelos pares de faces laterais consecutivas do prisma (Figura 244).

Além disso, a seção reta de um prisma é, dentre todas as seções produzidas pelos planos secantes às arestas laterais, a que possui o menor perímetro e a menor área.

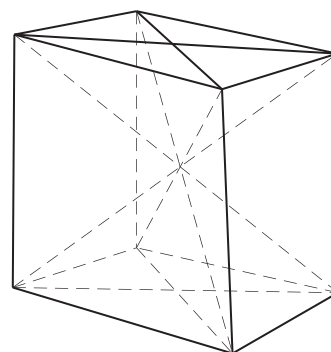


Figura 241

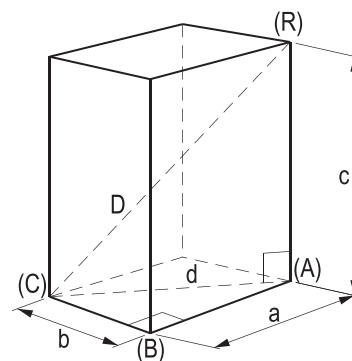


Figura 242

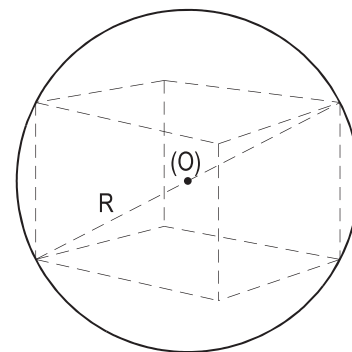


Figura 243

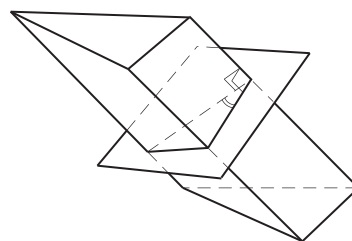


Figura 244



De fato, basta ver que, em cada face lateral, o lado da seção reta, sendo perpendicular às duas arestas laterais que limitam a face, é o menor que se pode apoiar nelas. E que a seção reta é a projeção ortogonal, sobre um plano perpendicular às arestas laterais do prisma, de qualquer seção produzida no prisma por plano que corte todas as arestas laterais, sendo pois, dentre todas aquelas seções, a de menor área.

Naturalmente, quando o prisma é reto, ou regular, as seções retas são iguais às próprias bases do sólido.

### 132 – Equivalência de poliedros

A extensão de espaço ocupada por um sólido é denominada volume do sólido.

É claro que dois sólidos, mesmo possuindo formas diferentes, podem ocupar extensões iguais de espaço, isto é, podem ter volumes iguais. Neste caso, diz-se que os dois sólidos são equivalentes.

Em caso contrário, isto é, quando os sólidos possuem volumes diferentes, o de maior volume é dito supervalente em relação ao outro e este subvalente em relação ao primeiro.

Dois poliedros são ditos equicompostos quando são formados por outros poliedros, respectivamente iguais, mas associados em formações que podem ser diferentes (Figura 245).

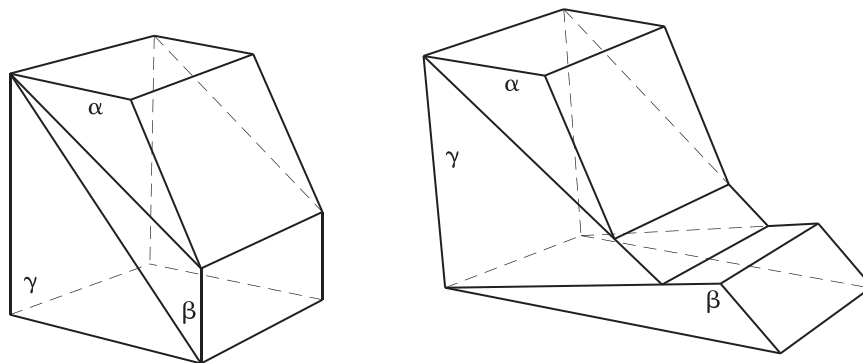


Figura 245

As principais propriedades são:

1. dois poliedros equicompostos são equivalentes, muito embora dois poliedros equivalentes possam não ser equicompostos;
2. dois poliedros equicompostos a um terceiro são equicompostos entre si e, conseqüentemente, equivalentes;
3. dois poliedros equicompostos podem ser divididos em um mesmo número de tetraedros respectivamente iguais;
4. dois poliedros iguais podem ser considerados equicompostos e são necessariamente equivalentes.

### 133 – Teorema

Todo prisma oblíquo é equivalente a um prisma reto cuja base é igual à seção reta do oblíquo e cuja altura é igual à aresta lateral do oblíquo.

Demonstração: Consideremos um prisma oblíquo genérico e tracemos, por um ponto (Y) qualquer da aresta lateral (A)(B), uma seção reta do prisma (Figura 246).

Prolonguemos (A)(B) até um ponto (X), tal que  $(A)(X) = (B)(Y)$ , e tracemos, por (X), nova seção reta, agora à superfície prismática da qual se extraiu o prisma (Figura 246).

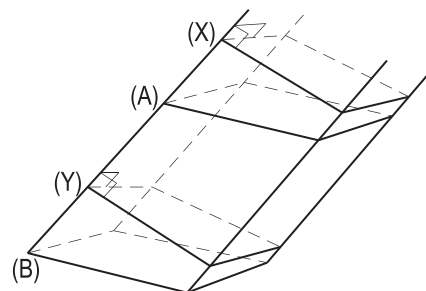


Figura 246

Os quadriláteros formados em cada face da superfície prismática, entre uma base do prisma e uma seção reta, são respectivamente iguais, por terem os lados respectivamente paralelos e três deles respectivamente iguais.

Assim, os dois poliedros compreendidos entre cada base do prisma e cada seção reta considerada são iguais e, por isso, o prisma oblíquo inicial e o prisma reto formado entre as duas seções retas traçadas são equicompostos e, conseqüentemente, equivalentes (número 132.1).

E como, por construção,  $(A)(X) = (B)(Y)$ , temos:

$$(A)(X) + (Y)(A) = (B)(Y) + (Y)(A) \quad \therefore \quad (X)(Y) = (A)(B).$$

Ou seja, a altura  $(X)(Y)$  do prisma reto formado é igual à aresta lateral  $(A)(B)$  do prisma oblíquo inicialmente considerado, o que demonstra o teorema.

### 134 – Teorema

A razão entre os volumes de dois paralelepípedos retângulos que possuem duas dimensões respectivamente iguais é igual à razão entre as dimensões diferentes.

Demonstração: Sejam  $a$  e  $b$  as dimensões iguais,  $c$  e  $c'$  as diferentes e  $V$  e  $V'$  os volumes dos dois paralelepípedos retângulos considerados.

Admitamos que exista um comprimento  $x$ , divisor comum de  $c$  e de  $c'$ , tal que  $c = mx$  e  $c' = nx$ , e, pelos pontos de divisão (Figura 247), tracemos planos paralelos aos das faces iguais, decompondo os dois sólidos em paralelepípedos retângulos iguais, com dimensões  $a$ ,  $b$  e  $x$ .

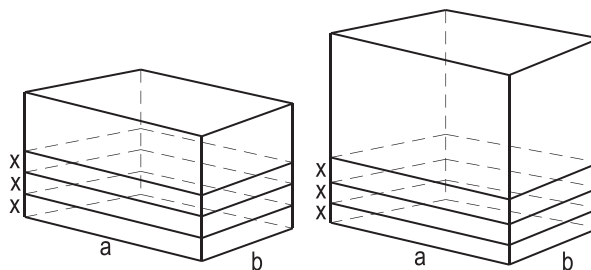


Figura 247

Designando por  $V_x$  os volumes dos sólidos parciais, podemos escrever:

$$\frac{V}{V'} = \frac{mV_x}{nV_x} = \frac{m}{n} \quad \therefore \quad \frac{V}{V'} = \frac{mx}{nx} = \frac{c}{c'}$$

Quando não houver um valor  $x$  comensurável com  $c$  e  $c'$ , escolheremos um valor tão pequeno para dividir as dimensões diferentes que as porções de volume restantes possam ser desprezadas perante os volumes  $V$  e  $V'$ , operando, então, como o acima indicado.

Então, a razão entre os volumes...

### 135 – Teorema

A razão entre os volumes de dois paralelepípedos retângulos quaisquer é igual à razão entre os produtos de suas três dimensões.

Demonstração: Sejam dois paralelepípedos retângulos, um com dimensões  $a, b$  e  $c$  e volume  $V$  e o outro com dimensões  $a', b'$  e  $c'$  e volume  $V'$ , e consideremos dois ortoedros auxiliares, o primeiro com dimensões  $a, b$  e  $c'$  e volume  $V_1$  e o segundo com dimensões  $a, b'$  e  $c'$  e volume  $V_2$ .

Podemos, então (número 134), escrever:

$$\frac{V}{V_1} = \frac{c}{c'}, \quad \frac{V_1}{V_2} = \frac{b}{b'} \quad \text{e} \quad \frac{V_2}{V'} = \frac{a}{a'}$$

Multiplicando, membro a membro, vem:

$$\frac{V V_1 V_2}{V_1 V_2 V'} = \frac{abc}{a' b' c'} \quad \therefore \quad \frac{V}{V'} = \frac{abc}{a' b' c'}$$

Então, a razão entre os volumes...

### 136 – Unidade de volume

Por convenção, a unidade de volume é o volume do cubo de aresta unitária. No sistema decimal, sendo  $1\text{m}$  a aresta desse cubo, o volume unitário é o metro cúbico ( $\text{m}^3$ ).

Além da unidade, utilizaremos habitualmente seus submúltiplos ( $\text{dm}^3, \text{cm}^3, \text{mm}^3$ ) e seu múltiplo ( $\text{km}^3$ ).

### 137 – Volume do paralelepípedo retângulo

Para medir o volume  $V$  de um paralelepípedo retângulo de dimensões  $a, b$  e  $c$ , basta comparar, por meio dos teoremas conhecidos, o volume  $V$  com o do cubo unitário.

$$\text{Temos, pois (número 135): } \frac{V}{1} = \frac{abc}{1.1.1} \quad \therefore \quad \boxed{V = abc}$$

Assim, o número que mede o volume de um paralelepípedo retângulo é igual ao produto dos números que medem suas três dimensões, referidas à mesma unidade.

Designando por  $h$  a altura e por  $(B)$  a área da base do ortoedro, porque  $h = c$  e porque (*Geometria Plana*, número 308)  $(B) = ab$ , o volume  $V$  do paralelepípedo retângulo, agora em função de  $(B)$  e de  $(h)$ , se escreve:

$$V = (B)h$$

### 138 – Volume do paralelepípedo reto

Consideremos um paralelepípedo reto de área de base  $(B)$ , de altura  $h$  e volume  $V$  e tracemos, por duas arestas laterais pertencentes a uma mesma face, os dois planos (paralelos entre si) perpendiculares às arestas básicas opostas àquelas (Figura 248).

O ortoedro limitado entre esses dois planos tem a mesma altura  $h$  do paralelepípedo reto e base equivalente (*Geometria Plana*, número 310) à do paralelepípedo reto.

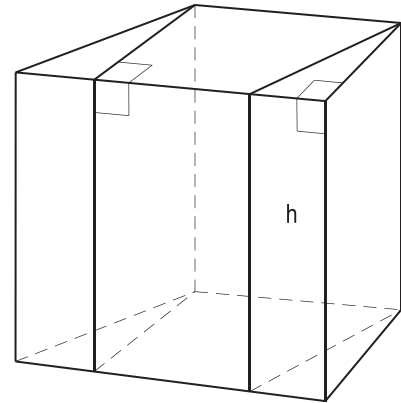


Figura 248

E porque os dois prismas triangulares formados são iguais, o paralelepípedo reto inicialmente considerado e o ortoedro construído são equicompostos, logo equivalentes, podendo-se, pois, escrever:

$$V = (B)h$$

### 139 – Volume do paralelepípedo oblíquo

Sejam  $x$  e  $y$  as dimensões da base e  $h$  a altura de um paralelepípedo oblíquo de volume  $V$  (Figura 249).

Pelos extremos da aresta básica  $(A)(B)$ , tracemos dois planos perpendiculares a essa aresta, dando formação a um outro paralelepípedo, este reto, tendo por bases as duas seções construídas.

O paralelepípedo reto obtido é (número 133) equivalente ao dado. E, porque sua base tem, então, dimensões  $y$  e  $h$  e sua altura é  $(A)(B) = x$ , (Figura 249), seu volume – igual ao volume  $V$  do paralelepípedo oblíquo – é:

$$V = (y \cdot h) x = (xy) \cdot h$$

Como o produto  $(xy)$  é (*Geometria Plana*, número 310) o valor da área  $(B)$  da base do paralelepípedo oblíquo, o volume  $V$  desse sólido é finalmente:

$$V = (B)h$$

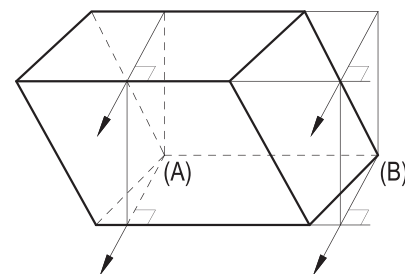


Figura 249

## 140 – Volume do prisma triangular

Consideremos um prisma triangular genérico e tracemos, por duas de suas arestas laterais, planos paralelos às faces opostas, dando formação a um paralelepípedo de mesma altura  $h$  que a do prisma, de área de base igual ao dobro da área ( $B$ ) da base do prisma (Figura 250) e de volume igual ao dobro do volume  $V$  do triangular.

Podemos (número 139), então, escrever:

$$2V = 2 (B) h$$

$\therefore$

$$V = (B)h$$

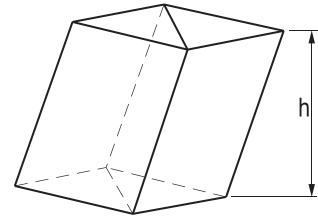


Figura 250

## 141 – Volume de um prisma qualquer

Para calcular o volume de um prisma qualquer, basta decompô-lo em prismas triangulares, o que se consegue traçando todos os planos diagonais pertencentes a uma de suas arestas laterais (Figura 251).

Porque todos os prismas triangulares formados têm a mesma altura  $h$  do prisma genérico dado e porque a área ( $B$ ) da base e o volume  $V$  deste prisma são respectivamente iguais às somas das áreas das bases dos prismas triangulares e às somas dos volumes destes prismas, podemos (número 140) escrever:

$$V = (B_1)h + (B_2)h + (B_3)h + \dots = [(B_1) + (B_2) + (B_3) + \dots] h$$

$\therefore$

$$V = (B)h$$

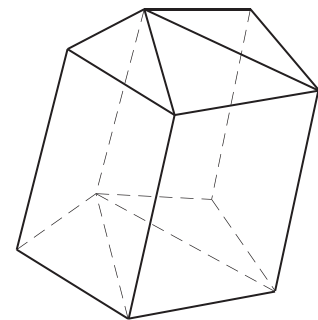


Figura 251

## 142 – Observações

1. Como conclusão geral, vem que, para todo prisma de área de base ( $B$ ) e de altura  $h$ , o volume  $V$  se calcula pela expressão:

$$V = (B)h$$

2. Porque todo prisma oblíquo é equivalente a um prisma reto de altura igual à aresta lateral  $\ell$  do oblíquo e com área de base igual à área ( $SR$ ) da seção reta do oblíquo (número 133), o volume  $V$  do prisma oblíquo pode também ser calculado pela expressão:

$$V = (SR)\ell$$

3. O volume  $V$  de um cubo de aresta  $a$  é:  $V = (B) h = a^2 \cdot a$

$\therefore$

$$V = a^3$$

### 143 – Áreas laterais e totais

Área lateral  $S_\ell$  de um prisma é a soma das áreas de todas as suas faces laterais.

Área total  $S_t$  é a soma das áreas de todas as faces.

1. Evidentemente, para todos os prismas, sendo  $B$  a área de suas bases, temos:  $S_t = S_\ell + 2(B)$

2. Área lateral do prisma oblíquo

Sendo  $\ell$  a aresta lateral e  $a, b, c$ , etc., os lados de uma seção reta do prisma oblíquo, porque as faces laterais são paralelogramos cujas bases valem  $\ell$  e cujas alturas são respectivamente iguais a  $a, b, c$ , etc., (Figura 252), vem:  
 $S_\ell = a\ell + b\ell + c\ell + \dots = (a + b + c + \dots) \ell$

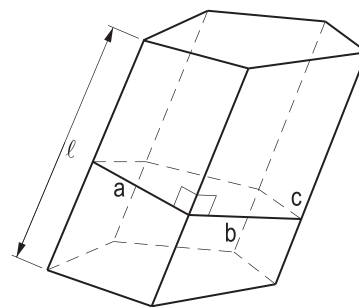


Figura 252

Assim, sendo  $2p_{SR}$  o perímetro da seção reta, a área lateral do prisma é:

$$S_\ell = 2p_{SR} \cdot \ell$$

3. Área lateral do prisma reto

Porque as faces laterais são retângulos de alturas iguais à própria altura  $h$  do prisma, designando por  $a, b, c$ , etc. as arestas básicas e por  $2p_B$  o perímetro da base temos:

$$S_\ell = ah + bh + ch + \dots = (a + b + c + \dots) h \quad \therefore$$

$$S_\ell = 2p_B \cdot h$$

### 144 – Observações

- Porque os prismas regulares são retos (número 128.3), a expressão para o cálculo de sua área lateral é a mesma instituída (número 143.3) para os prismas retos.
- Sendo  $a, b$  e  $c$  as dimensões de um ortoedro, porque todas as suas faces são retangulares, sua área total  $S_t$  é:

$$S_t = 2(ab + ac + bc)$$

- O quadrado da soma das três dimensões de um ortoedro é numericamente igual à soma do quadrado da diagonal do sólido e de sua área total, expressos todos, pela mesma unidade.

De fato, sendo  $a, b, c$  e  $D$  as dimensões e a diagonal de um ortoedro de área total  $S_t$ , (Figura 242), temos (número 130.10):

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + ac + bc) \quad \therefore$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = D^2 + S_t$$

# CAPÍTULO XIV

## PIRÂMIDES

### 145 – Superfícies piramidais

Superfície piramidal de uma folha é a superfície gerada pelo deslocamento de uma semirreta de origem fixa que se apoia continuamente nos lados de uma linha poligonal plana fixa (Figura 253), não coplanar com a origem da semirreta.

Superfície piramidal de duas folhas é a superfície gerada pelo deslocamento de uma reta que passa por um ponto fixo e que se apoia continuamente nos lados de uma linha poligonal plana e não coplanar com aquele ponto fixo. (Figura 254).

Nos dois casos, a linha poligonal fixa e a semirreta (ou reta) móvel são respectivamente denominadas diretriz e geratriz da superfície. O ponto comum às geratrizes é o vértice; as geratrizes que passam pelos vértices da diretriz são as arestas e as porções de plano limitadas por duas arestas consecutivas são as faces da superfície.

Uma superfície piramidal é dita aberta ou fechada conforme, respectivamente, sua diretriz seja uma poligonal aberta ou fechada.

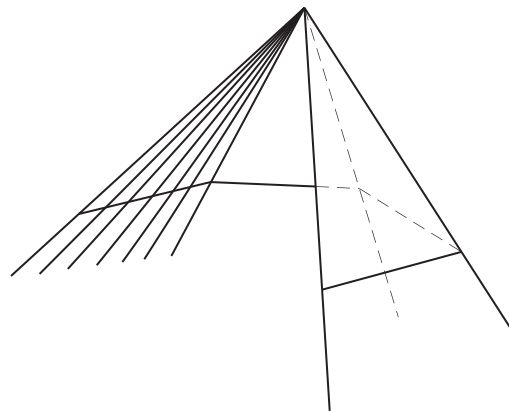


Figura 253

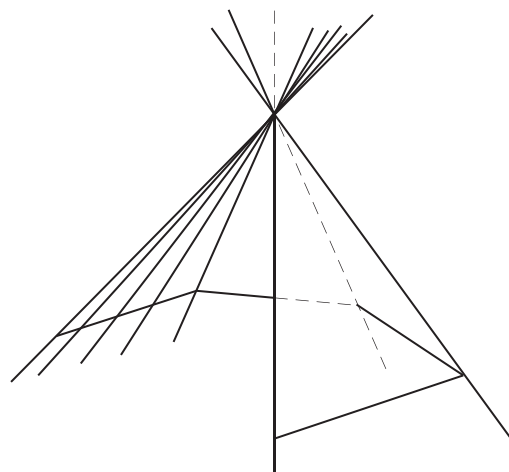


Figura 254

## 146 – Superfícies piramidais convexas

Uma superfície piramidal é convexa quando os planos de todas as suas faces não a atravessam, isto é, quando ela se situa inteiramente num dos semiespaços formados pelo plano de uma qualquer de suas faces. Quando ocorre o contrário, isto é, quando o plano de alguma das faces atravessa a superfície, ela é denominada não convexa ou côncava.

Decorre, então, que:

1. Todas as seções planas produzidas numa superfície piramidal convexa são convexas (Figura 255); as superfícies piramidais não convexas admitem, ao contrário, seções planas côncavas (Figura 256).
2. Toda reta secante a uma superfície piramidal convexa possui no máximo dois pontos em comum com a superfície (Figura 255); quando, ao contrário, a superfície piramidal é não convexa, uma reta secante pode ter mais de dois pontos comuns com ela (Figura 256).

De fato, basta ver que os traços da reta considerada na superfície são os pontos que ela tem em comum com os lados da poligonal seção produzida por um dos planos que a contém.

## 147 – Pirâmides

Por definição, pirâmide é o poliedro limitado por uma superfície piramidal fechada de uma folha e por um plano que corta todas as arestas da superfície (Figura 257).

A seção que o plano determina na superfície denomina-se base da pirâmide. Seus lados são arestas básicas da pirâmide.

As arestas e faces da superfície piramidal, limitadas entre o vértice da superfície e o plano da base, são respectivamente denominadas arestas laterais e faces laterais ou, simplesmente, faces da pirâmide.

O vértice da superfície é denominado vértice da pirâmide e sua distância ao plano da base é a altura  $(V)(H)$  da pirâmide (Figura 257).

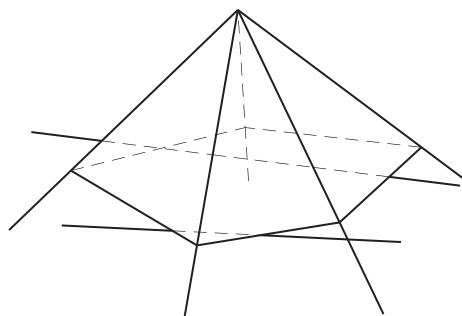


Figura 255

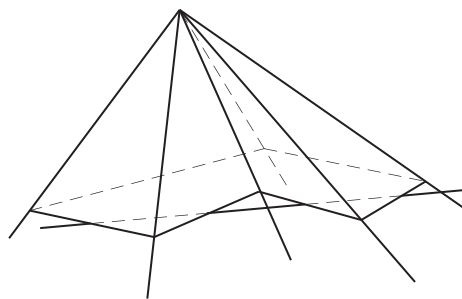


Figura 256

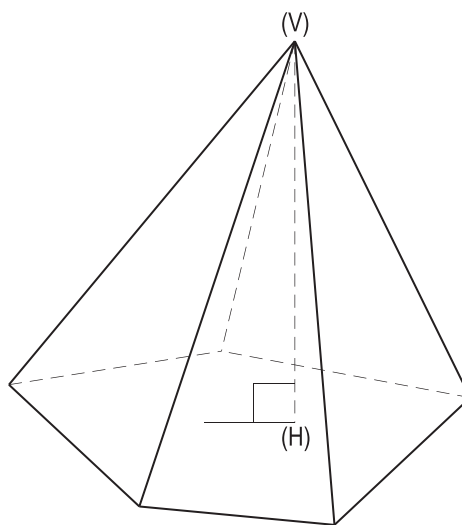


Figura 257



## 148 – Classificação das pirâmides

1. Uma pirâmide é dita triangular, quadrangular, pentagonal, etc., conforme respectivamente sua base seja um triângulo, um quadrilátero, um pentágono, etc.
2. Conforme as naturezas de suas bases e as posições de suas alturas, as pirâmides classificam-se em regulares, retas ou oblíquas.

Diz-se que uma pirâmide é regular, quando sua base é um polígono regular e a projeção ortogonal de seu vértice sobre o plano da base coincide com o centro do círculo circunscrito à base (Figura 258).

Diz-se que uma pirâmide é reta, quando sua base é um polígono inscritível num círculo e a projeção ortogonal de seu vértice sobre o plano da base coincide com o centro daquele círculo (Figura 259).

Assim, toda pirâmide regular é reta, embora a recíproca possa não ser verdadeira.

Uma pirâmide é oblíqua, ou irregular, quando não é regular nem reta (Figura 260).

## 149 – Propriedades

1. As arestas laterais de uma pirâmide reta (ou regular) são iguais.

Porque são (Figuras 258 e 259) oblíquas que se afastam igualmente do pé da altura da pirâmide (número 24.2).

E, conseqüentemente:

2. As arestas laterais de uma pirâmide reta (ou regular) tanto formam ângulos iguais com o plano da base como com a altura da pirâmide (Figura 261).
3. As faces laterais de uma pirâmide regular são triângulos isósceles iguais (Figura 262).

Porque têm lados respectivamente iguais.

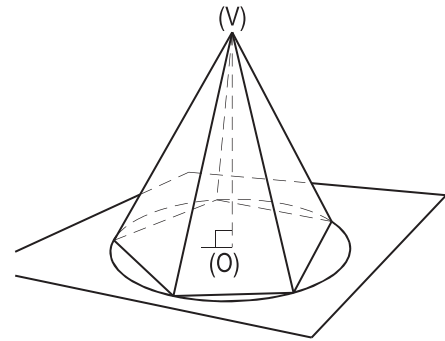


Figura 258

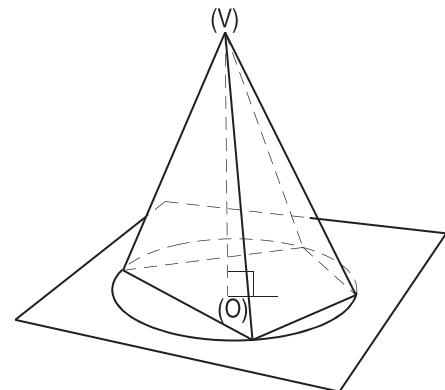


Figura 259

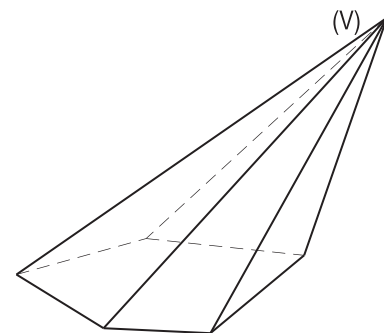


Figura 260

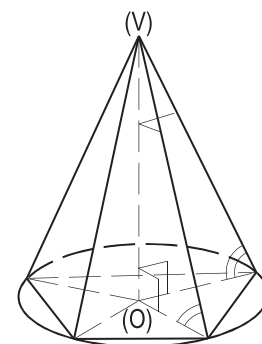


Figura 261

4. As faces laterais de uma pirâmide regular tanto formam ângulos iguais com o plano da base como com a altura do sólido (Figura 262).

Porque as arestas básicas distam igualmente do pé da altura da pirâmide (Figura 262).

### 150 – Apótema de uma pirâmide regular

Apótema de uma pirâmide regular é a altura de uma qualquer de suas faces laterais, em relação à aresta básica – como (V)(M), na Figura 263.

Porque todas as faces laterais de uma pirâmide regular são iguais (número 149.3), os apótemas são também todos iguais, independente das faces em que são traçados.

E porque o apótema de uma pirâmide regular, traçado numa de suas faces, é de máximo declive dessa face em relação à base, o ângulo que o apótema forma com sua projeção ortogonal sobre a base da pirâmide – um dos apótemas da base – é (Figura 263) o ângulo que a face lateral forma com a base (número 51).

Reciprocamente cada apótema da base de uma pirâmide regular é reta de máximo declive do plano da base em relação a cada um dos planos das faces laterais (Figura 263).

E mais, em toda pirâmide regular, são complementares os ângulos que cada face lateral faz com o plano da base e com a altura do sólido (Figura 262).

### 151 – Relações métricas nas pirâmides regulares

1. Área lateral

Área lateral  $S_\ell$  de uma pirâmide regular é a soma das áreas de suas faces laterais. Para calculá-la, designemos por  $b$  a aresta básica, por  $A$  o apótema da pirâmide, por  $n$  o gênero da base e por  $p_B$  seu semiperímetro (Figura 264).

Podemos, então, escrever:

$$S_\ell = n \left( \frac{bA}{2} \right) = \left( \frac{nb}{2} \right) A \quad \therefore \quad \boxed{S_\ell = p_B \cdot A}$$

2. Área total

Área total  $S_t$  de uma pirâmide é a soma das áreas de todas as faces. Assim, designando por  $(B)$  a área da base da pirâmide, para sua área total  $S_t$  temos:

$$\boxed{S_t = S_\ell + (B)}$$

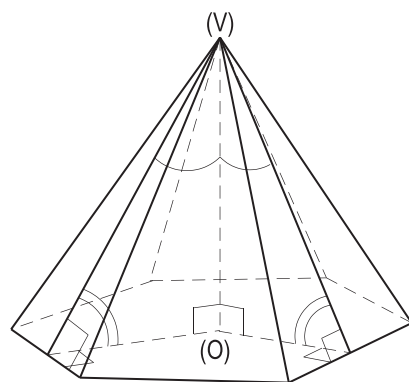


Figura 262

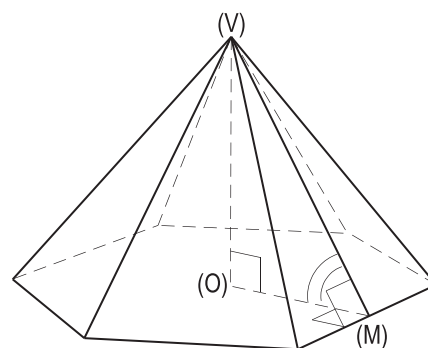


Figura 263

3. Designando por  $a$  e  $r$  o apótema e o raio do círculo circunscrito à base e por  $\ell$  a aresta lateral, os triângulos retângulos  $(V)(O)(M)$  e  $(V)(O)(A)$  (Figura 264) fornecem:

$$\overline{(V)(M)}^2 = \overline{(V)(O)}^2 + \overline{(O)(M)}^2 \quad \therefore \quad \boxed{A^2 = h^2 + a^2}$$

$$\overline{(V)(A)}^2 = \overline{(V)(O)}^2 + \overline{(O)(A)}^2 \quad \therefore \quad \boxed{\ell^2 = h^2 + r^2}$$

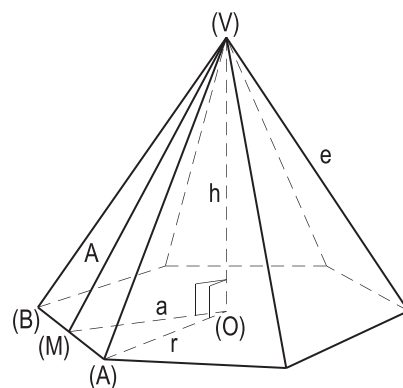


Figura 264

## 152 – Teorema

Quando se secciona uma pirâmide por um plano paralelo ao da base:

1. as arestas laterais e a altura da pirâmide ficam divididas na mesma razão;
2. a seção produzida é semelhante à base;
3. a razão entre as áreas da seção e da base é igual à razão entre os quadrados das distâncias de seus planos ao vértice da pirâmide.

Demonstração: A seção produzida numa pirâmide por um plano  $(\alpha)$  paralelo ao de sua base é homotética da base, sendo o vértice  $(V)$  da pirâmide o próprio centro da homotetia.

A razão dessa homotetia é igual à razão  $\frac{h'}{h}$ , entre as distâncias do plano secante e do plano da base ao vértice da pirâmide (Figura 265).

É essa homotetia que garante a divisão proporcional das arestas laterais e da altura da pirâmide, bem como a semelhança entre a seção produzida por  $(\alpha)$  e a base da pirâmide, o que demonstra as duas primeiras partes do teorema.

E como a razão entre as áreas de duas figuras semelhantes é igual ao quadrado da razão de semelhança (*Geometria Plana*, número 330), a razão entre as áreas  $(S)$  e  $(B)$ , da seção e da base, é igual ao quadrado da razão  $\frac{h'}{h}$  de semelhança desses dois polígonos. Isto é,

$$\frac{(S)}{(B)} = \left(\frac{h'}{h}\right)^2 \quad \therefore \quad \boxed{\frac{(S)}{(B)} = \frac{h'^2}{h^2}}$$

Fica, assim, demonstrada a terceira parte do teorema.

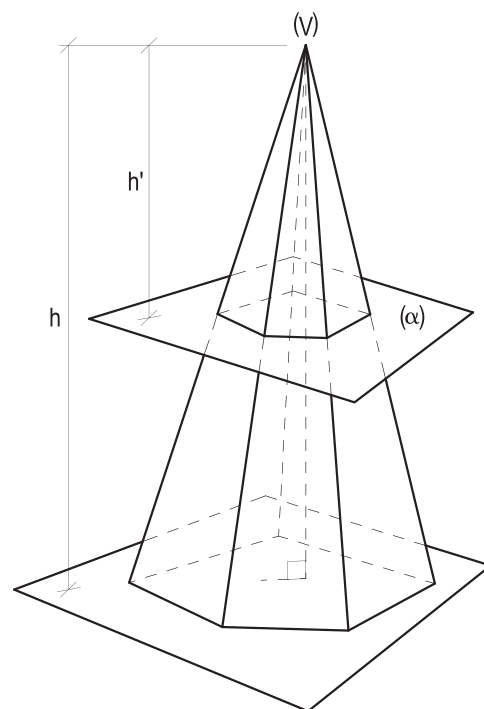


Figura 265

## 153 – Corolários

1. Quando duas pirâmides de alturas iguais são cortadas por planos paralelos aos de suas bases, a distâncias iguais de seus vértices, as áreas das seções produzidas são diretamente proporcionais às áreas de suas bases.

Porque, sendo  $(B_1)$  e  $(B_2)$  as áreas das bases,  $(S_1)$  e  $(S_2)$  as áreas das seções respectivas,  $h$  a altura das duas pirâmides e  $h'$  a distância de cada vértice ao plano secante (Figura 266), podemos escrever (número 152):

$$\frac{(S_1)}{(B_1)} = \frac{h'^2}{h^2} \quad \text{e} \quad \frac{(S_2)}{(B_2)} = \frac{h'^2}{h^2}$$

$$\text{Logo, } \frac{(S_1)}{(B_1)} = \frac{(S_2)}{(B_2)} \quad \therefore \quad \boxed{\frac{(S_1)}{(S_2)} = \frac{(B_1)}{(B_2)}}$$

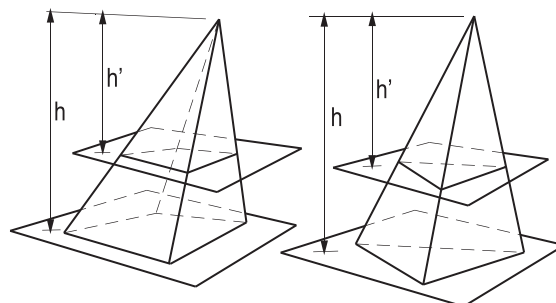


Figura 266

2. Quando duas pirâmides de alturas iguais e bases equivalentes são cortadas por planos paralelos aos de suas bases, a distâncias iguais de seus vértices, as seções assim produzidas são equivalentes.

Porque (Figura 266), se  $(B_1) = (B_2)$ , a relação acima (número 153.1) se escreve:

$$\boxed{(S_1) = (S_2)}$$

3. Quando são mantidos fixos os vértices da base de uma pirâmide e se faz o vértice da pirâmide descrever um plano paralelo ao da base (Figura 267), a seção produzida por um plano paralelo ao da base varia de posição, mas se conserva igual à primitiva.

Porque, em todas as posições, a seção é homotética da base, sempre na mesma razão.

4. Quando se fixa a base de uma pirâmide e se faz seu vértice descrever um plano paralelo ao de sua base, o volume da pirâmide permanece constante.

Porque, assim fazendo, sua altura conserva-se constante (número 157).

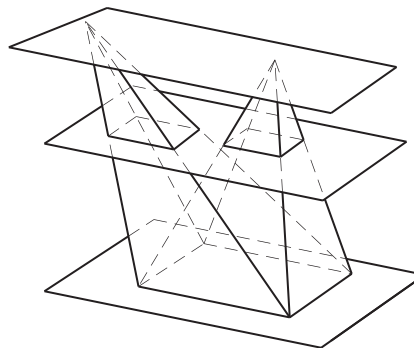


Figura 267

## 154 – Teorema de Cavalieri

Duas pirâmides de bases equivalentes e alturas iguais são equivalentes.

Demonstração: Consideremos duas pirâmides segundo a hipótese e assentes, por suas bases, em um mesmo plano.

Dividamos a altura das pirâmides em um número qualquer de partes iguais e tracemos, pelos pontos de divisão, planos paralelos ao da base (Figura 268). Cada um desses planos produz (número 153.2) seções equivalentes nas duas pirâmides.

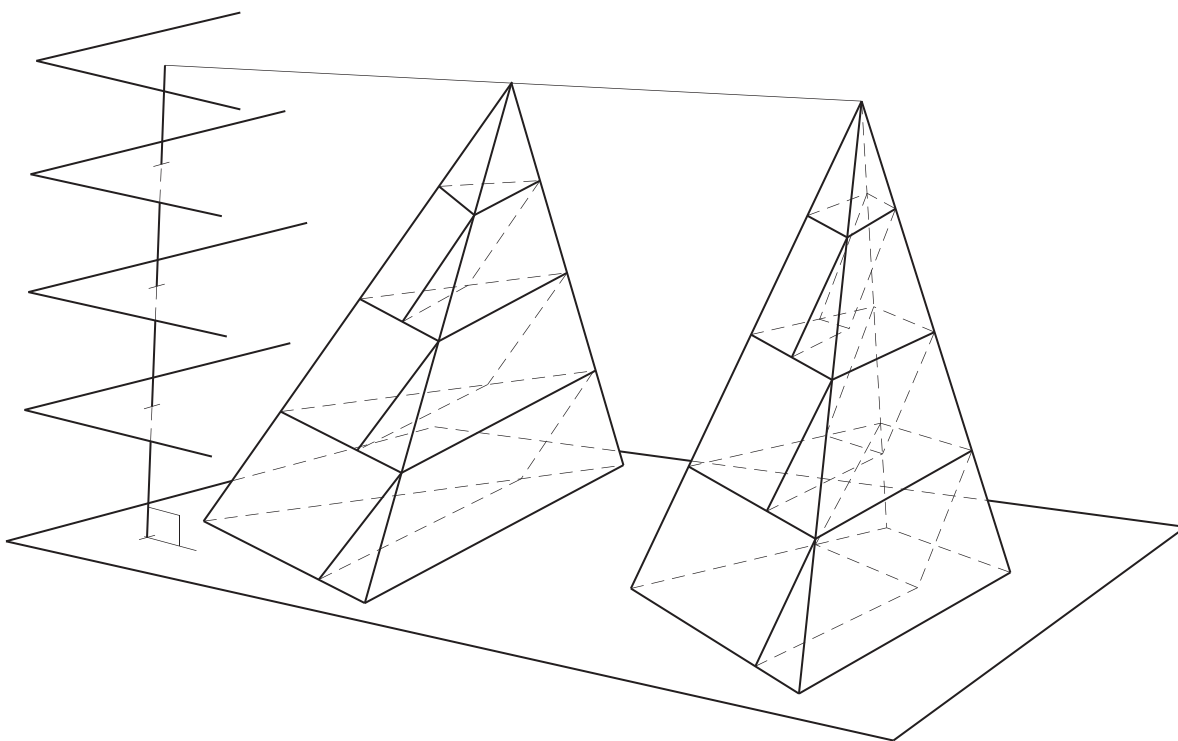


Figura 268

Consideremos ainda, em cada um dos intervalos formados no interior de cada pirâmide por dois planos paralelos consecutivos, um prisma que tenha por base a menor das duas seções que limitam o intervalo em questão e cujas arestas laterais tenham a mesma direção de uma qualquer das arestas laterais da pirâmide.

Tais prismas serão, aos pares – um em cada pirâmide –, equivalentes, por terem bases equivalentes e alturas iguais (Figura 268). Assim, as somas dos volumes dos prismas formados em cada uma das pirâmides são iguais.

E porque tal igualdade independe do número de partes iguais em que se dividiu a altura das pirâmides, mesmo que se aumente indefinidamente esse número, a igualdade das somas dos volumes dos prismas se manterá.

Desde que provemos, então, que os limites das somas dos volumes dos prismas, quando o número de divisões da altura em partes iguais cresce indefinidamente, são os próprios volumes das pirâmides, teremos demonstrado o teorema.

Voltemos, então, a considerar uma das pirâmides –  $(V)-(A)(B)(C)$  – em estudo (Figura 269), pondo em destaque (Figura 270) sua face lateral  $(V)(A)(B)$ .

Porque os triângulos  $(V)(V')(R)$ ,  $(R)(S')(S)$ ,  $(S)(T')(T)$  e  $(T)(B')(B)$  são iguais (Figura 270), os pontos  $(S')$  e  $(T')$  pertencem à reta  $(V')(B')$ , a qual é, então, paralela à aresta  $(V)(B)$  da pirâmide.

E como, analogamente,  $(V')(C')$  é paralela à aresta  $(V)(C)$  (Figura 269), concluímos que o plano formado pelas retas  $(V')(B')$  e  $(V')(C')$  é paralelo ao da face  $(V)(B)(C)$ .

Porque o plano  $(V')(B')(C')$  corta os prismas (Figura 269), a soma dos volumes dos prismas está, necessariamente, compreendida entre os volumes das pirâmides  $(V')-(A)(B')(C')$  e  $(V)-(A)(B)(C)$ . Assim, quando o número de prismas cresce indefinidamente, suas alturas tendem a se anular, o plano  $(V')(B')(C')$  aproxima-se do da face  $(V)(B)(C)$ , tendendo a coincidir com este. E, conseqüentemente, o volume da pirâmide  $(V')-(A)(B')(C')$  tende a igualar o da pirâmide  $(V)-(A)(B)(C)$ . Por isso, o limite, nas condições já citadas, da soma dos volumes dos prismas é também o próprio volume da pirâmide  $(V)-(A)(B)(C)$ .

Então, duas pirâmides...

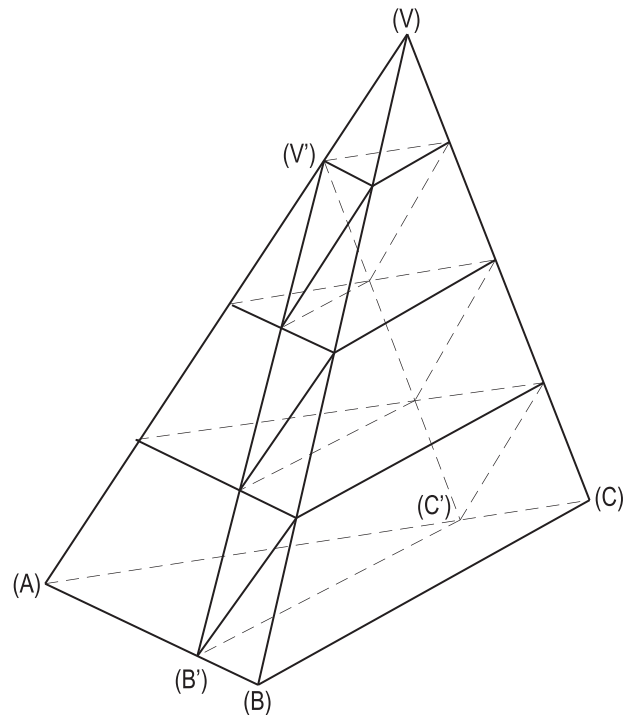


Figura 269

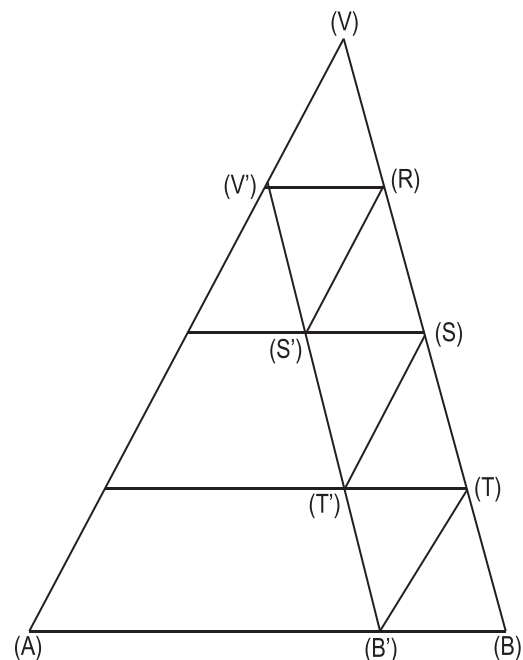


Figura 270

## 155 – Teorema

Todo prisma triangular pode ser decomposto em três pirâmides triangulares equivalentes.

Demonstração: Consideremos um prisma triangular qualquer (Figura 271) de bases  $(A)(B)(C)$  e  $(R)(S)(T)$  e seccionemo-lo pelo plano diagonal  $(S)(A)(C)$ , o que permite destacar, do prisma, uma primeira pirâmide triangular  $(S)-(A)(B)(C)$  (Figura 272), a qual tem base e altura iguais às do prisma, restando, do prisma, o sólido  $(S)-(A)(C)(T)(R)$ .

Consideremos, então, o plano  $(R)(S)(C)$  que divide o sólido  $(S)-(A)(C)(T)(R)$  em duas pirâmides triangulares  $(S)-(A)(C)(R)$  e  $(S)-(T)(C)(R)$  (Figura 272) que, por terem a mesma altura – distância do vértice comum  $(S)$  ao plano comum das bases – e bases iguais, como metades do paralelogramo  $(A)(C)(T)(R)$ , face lateral do prisma, são equivalentes.

Mas, como a pirâmide  $(S)-(T)(C)(R)$  pode ser considerada como tendo vértice  $(C)$  e base  $(R)(S)(T)$ , isto é, com base e altura iguais às do prisma, conclui-se (número 154) que ela é equivalente à primeira pirâmide destacada. E, por isso, as três pirâmides triangulares em que se dividiu o prisma (Figura 273) são equivalentes, como se queria demonstrar.

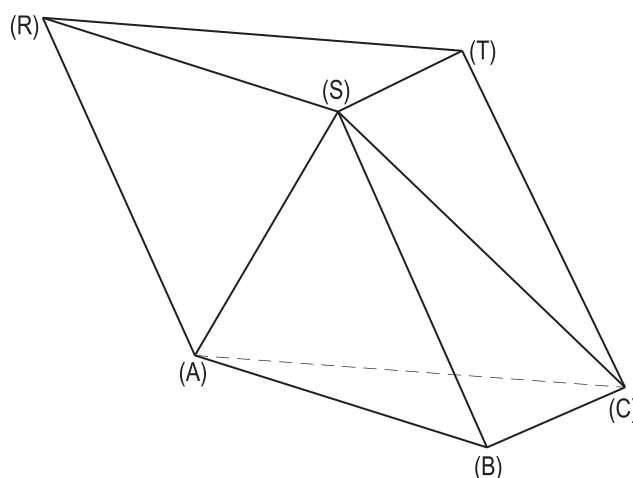


Figura 271

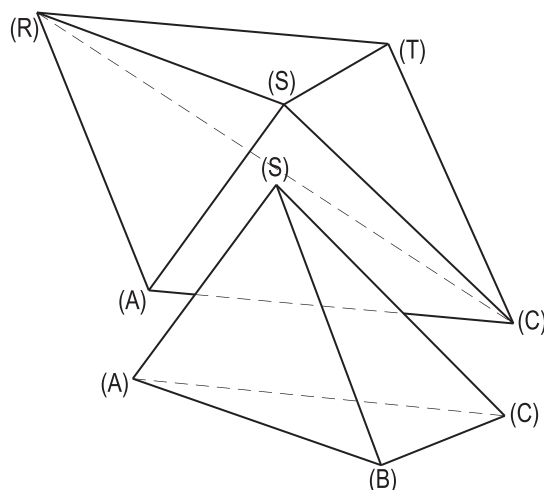


Figura 272

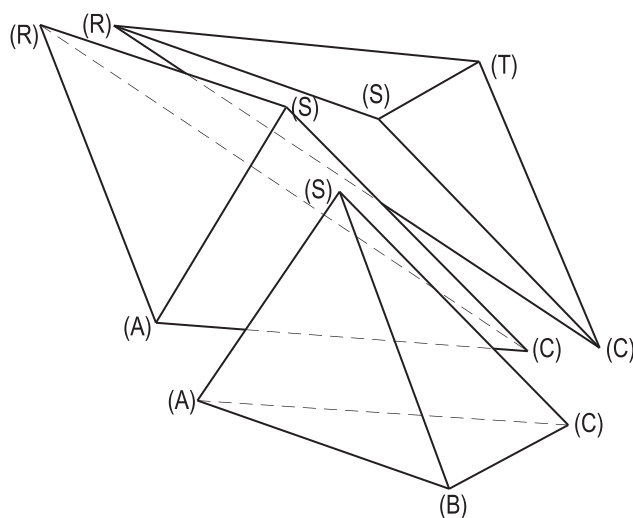


Figura 273

## 156 – Volume da pirâmide triangular

Sendo (B) a área da base e h a altura de um prisma triangular genérico, porque ele pode ser decomposto em três pirâmides triangulares equivalentes (número 155), conclui-se que cada uma dessas pirâmides tem volume igual a um terço do volume do prisma.

E como essas três pirâmides podem ser consideradas como tendo bases (B) e alturas h iguais às do prisma, para o volume V da pirâmide triangular podemos (número 140) escrever:

$$3V = (B)h \quad \therefore \quad \boxed{V = \frac{(B)h}{3}}$$

## 157 – Volume de uma pirâmide qualquer

Para calcular o volume de uma pirâmide qualquer, basta decompô-la em pirâmides triangulares, o que se consegue traçando todos os planos diagonais pertencentes a uma de suas arestas laterais (Figura 274). Porque todas as pirâmides triangulares assim formadas têm a mesma altura h da pirâmide genérica e porque a área (B) da base e o volume V desta pirâmide são respectivamente iguais às somas das áreas (B<sub>1</sub>), (B<sub>2</sub>), (B<sub>3</sub>), etc. das bases das pirâmides triangulares formadas e aos volumes V<sub>1</sub>, V<sub>2</sub>, V<sub>3</sub>, etc. destas pirâmides, podemos (número 156) escrever:

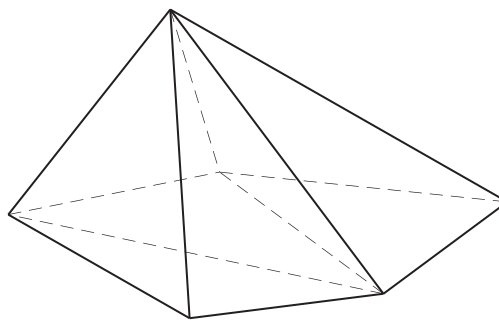


Figura 274

$$V = V_1 + V_2 + V_3 + \dots \quad \therefore \quad V = \frac{(B_1)h}{3} + \frac{(B_2)h}{3} + \frac{(B_3)h}{3} + \dots$$
$$\therefore \quad V = [(B_1) + (B_2) + (B_3) + \dots] \frac{h}{3} \quad \therefore \quad \boxed{V = \frac{(B)h}{3}}$$

## 158 – Aplicações

### 1. Volume do tetraedro regular

Designando por a e h a altura e a aresta do tetraedro regular de área facial (B) e de volume (V), sabemos, (*Geometria Plana*, número 327) e número 106.1, que:

$$(B) = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \quad \text{e} \quad h = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$
$$\therefore \quad V = \frac{(B)h}{3} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \quad \therefore \quad \boxed{V = \frac{a^3 \sqrt{2}}{12}}$$



## 2. Volume do octaedro regular

Porque um qualquer dos planos diagonais do octaedro regular o divide em duas pirâmides regulares iguais que têm por base comum um quadrado (número 114.5) de lado igual à aresta  $a$  do octaedro e porque as alturas dessas pirâmides são iguais à metade da diagonal  $D$  do sólido, seu volume  $V$  será (*Geometria Plana*, número 309):

$$V = 2 \cdot \frac{(B)h}{3} = 2 \cdot \frac{a^2}{3} \cdot \frac{D}{2} = \frac{a^2}{3} \cdot a\sqrt{2} \quad \therefore \quad \boxed{V = \frac{a^3\sqrt{2}}{3}}$$

### 159 – Teorema

A razão entre os volumes de dois tetraedros que possuem um ângulo sólido igual é igual à razão entre os produtos das arestas que formam, em cada tetraedro, o ângulo sólido igual.

Demonstração: Sejam os tetraedros  $(J)-(A)(B)(C)$  e  $(J')-(A)(B')(C')$  que possuem o ângulo sólido  $(A)$  igual;  $(J)(H)$  e  $(J')(H')$  suas alturas, respectivamente, em relação às faces  $(A)(B)(C)$  e  $(A)(B')(C')$  (Figura 275) e  $V$  e  $V'$  seus volumes.

Como os pontos  $(A)$ ,  $(H')$  e  $(H)$  são colineares, por pertencerem à projeção ortogonal da aresta  $(J)(A)$  sobre a face  $(A)(B)(C)$ , conclui-se (Figura 275) que os triângulos retângulos  $(A)(J')(H')$  e  $(A)(J)(H)$  são semelhantes, o que nos permite anotar:

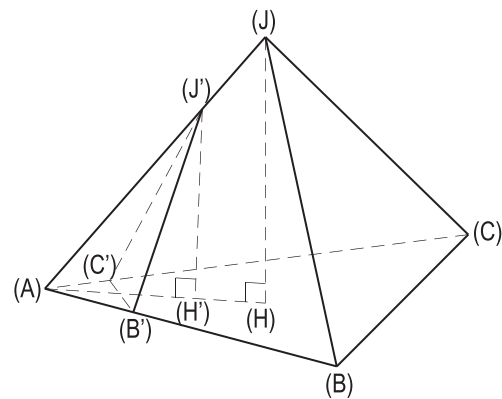


Figura 275

$$\frac{(J')(H')}{(J)(H)} = \frac{(A)(J')}{(A)(J)} \quad (1)$$

$$\frac{V'}{V} = \frac{\frac{1}{3} (B') \cdot \overline{(J')(H')}}{\frac{1}{3} (B) \cdot \overline{(J)(H)}} = \frac{\overline{(J')(H')}}{\overline{(J)(H)}} \cdot \frac{(B')}{(B)} \quad (2)$$

Por outro lado, sabe-se (*Geometria Plana*, número 329) que:

$$\frac{(B')}{(B)} = \frac{\overline{(A)(B')} \cdot \overline{(A)(C')}}{\overline{(A)(B)} \cdot \overline{(A)(C)}} \quad (3)$$

Substituindo (1) e (3) em (2), vem

$$\boxed{\frac{V'}{V} = \frac{\overline{(A)(B')} \cdot \overline{(A)(C')} \cdot \overline{(A)(J')}}{\overline{(A)(B)} \cdot \overline{(A)(C)} \cdot \overline{(A)(J)}}}$$

Então, a razão entre os volumes...

## 160 – Poliedros semelhantes

Por definição, dois poliedros são semelhantes, quando suas faces são respectivamente semelhantes e seus ângulos sólidos são respectivamente iguais.

Razão de semelhança dos poliedros é a razão de semelhança existente entre um par qualquer de faces homólogas e, então, a razão entre duas de suas linhas homólogas.

É claro que dois poliedros semelhantes têm diedros respectivamente iguais. E que podem ser decompostos em números iguais de tetraedros respectivamente semelhantes – na mesma razão que a existente entre os dois poliedros.

## 161 – Teorema

A razão entre os volumes de dois poliedros semelhantes é igual ao cubo da razão de semelhança entre os dois poliedros.

Demonstração: Consideremos, inicialmente, dois tetraedros semelhantes  $(J')-(A)(B')(C')$  e  $(J)-(A)(B)(C)$ , numa certa razão  $k$  (Figura 276), isto é, tais que:

$$\frac{(A)(B')}{(A)(B)} = \frac{(A)(C')}{(A)(C)} = \frac{(A)(J')}{(A)(J)} = k$$

Como o ângulo sólido  $(A)$  é comum aos dois tetraedros (Figura 276), podemos (número 159), para seus volumes  $V'$  e  $V$ , escrever:

$$\frac{V'}{V} = \frac{(A)(B')}{(A)(B)} \cdot \frac{(A)(C')}{(A)(C)} \cdot \frac{(A)(J')}{(A)(J)} = k \cdot k \cdot k$$

$$\therefore \boxed{\frac{V'}{V} = k^3}$$

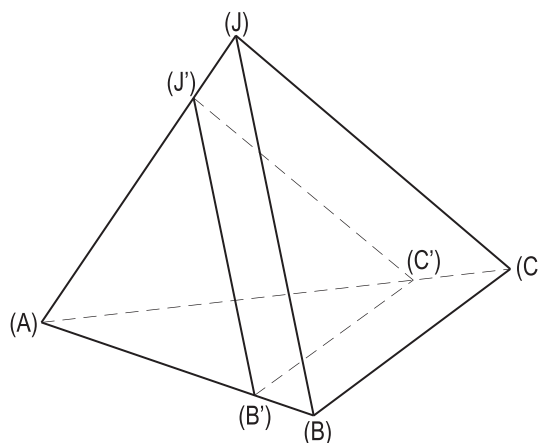


Figura 276

No caso mais geral em que considerarmos dois poliedros, de volumes  $V'$  e  $V$ , semelhantes numa dada razão  $k$ , decompondo-os em tetraedros respectivamente semelhantes – naquela mesma razão  $k$  –, de volumes  $V'_1$  e  $V_1$ ,  $V'_2$  e  $V_2$ ,  $V'_3$  e  $V_3$ , etc., podemos escrever:

$$\frac{V'_1}{V_1} = \frac{V'_2}{V_2} = \frac{V'_3}{V_3} = \dots = k^3 \quad \therefore \quad \frac{V'_1 + V'_2 + V'_3 + \dots}{V_1 + V_2 + V_3 + \dots} = k^3$$

E, então, finalmente:

$$\boxed{\frac{V'}{V} = k^3}$$

Logo, a razão entre os volumes...

## 162 – Teorema

A razão entre as áreas totais de dois poliedros semelhantes é igual ao quadrado da razão de semelhança existente entre os dois poliedros.

Demonstração: Designemos por  $S'$  e por  $S$  as áreas totais dos dois poliedros semelhantes considerados e por  $S'_1$  e  $S_1$ ,  $S'_2$  e  $S_2$ ,  $S'_3$  e  $S_3$ , etc., as áreas dos pares de faces homólogas.

Porque a razão  $k$  da semelhança entre os poliedros é igual à existente entre os pares de faces homólogas (número 160), podemos (*Geometria Plana*, número 330) escrever:

$$\frac{S'_1}{S_1} = \frac{S'_2}{S_2} = \frac{S'_3}{S_3} = \dots = k^2 \quad \therefore \quad \frac{S'_1 + S'_2 + S'_3 + \dots}{S_1 + S_2 + S_3 + \dots} = k^2 \quad \therefore \quad \boxed{\frac{S'}{S} = k^2}$$

## 163 – Tetraedros limitados por um triedro trirretângulo

1. Quando as três arestas relativas a um dos vértices de um tetraedro são perpendiculares duas a duas, isto é, quando pertencem às arestas de um triedro trirretângulo, para o cálculo do volume  $V$  do tetraedro, convém considerar o vértice do triedro trirretângulo como pertencente à base do tetraedro (Figura 277).

De fato, assim fazendo, uma das arestas relativas a esse vértice, por ser perpendicular a duas arestas básicas, funciona como altura do tetraedro (Figura 277).

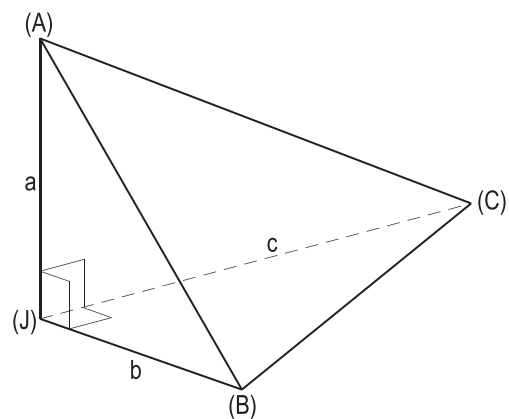


Figura 277

Designando, então, por  $a$ ,  $b$  e  $c$  as arestas perpendiculares duas a duas, o volume  $V$  será (número 156):

$$V = \frac{1}{3} (B) \cdot h = \frac{1}{3} \frac{bc}{2} a$$

Logo,

$$\boxed{V = \frac{abc}{6}}$$

2. Admitamos, agora, que a face que funciona como base seja a que se opõe ao vértice do triedro trirretângulo (Figura 278) e calculemos as áreas – lateral e total – do tetraedro.

Para a área lateral  $S_\ell$ , temos:

$$S_\ell = \frac{ab}{2} + \frac{ac}{2} + \frac{bc}{2}$$

$\therefore$

$$\boxed{S_\ell = \frac{1}{2} (ab + ac + bc)}$$

Para o cálculo da área total  $S_t$ , calculemos, em função de  $a$ ,  $b$  e  $c$ , as arestas básicas  $r$ ,  $s$  e  $t$  (Figura 278).

Teremos:

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$s = \sqrt{a^2 + c^2}$$

$$t = \sqrt{b^2 + c^2}$$

Assim,  $2p = r + s + t$

$e(B) = \sqrt{p(p-r)(p-s)(p-t)}$  (*Geometria Plana*, número 321).

De posse dessas relações, podemos escrever:

$$S_t = S_\ell + (B)$$

3. No caso particular em que o tetraedro é uma pirâmide regular, isto é, quando as três arestas perpendiculares são iguais (Figura 279), as faces laterais são triângulos retângulos isósceles e a base é um triângulo equilátero.

E como o sólido pode ser obtido por um truncamento num cubo por um plano formado pelos extremos não comuns das arestas relativas a um mesmo vértice (número 111.9), sendo  $a$  a aresta lateral do tetraedro (Figura 280), podemos (números 111.9, 112.1, 151.1 e 156) escrever:

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

$$S_\ell = \frac{3a^2}{2}$$

$$S_t = \frac{3a^2}{2} + \frac{(a\sqrt{2})^2\sqrt{3}}{4} \quad \therefore$$

$$S_t = \frac{a^2}{2} (3 + \sqrt{3})$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{(a\sqrt{2})^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{3} \quad \therefore$$

$$V = \frac{a^3}{6}$$

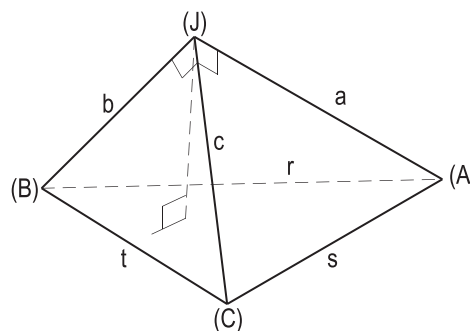


Figura 278

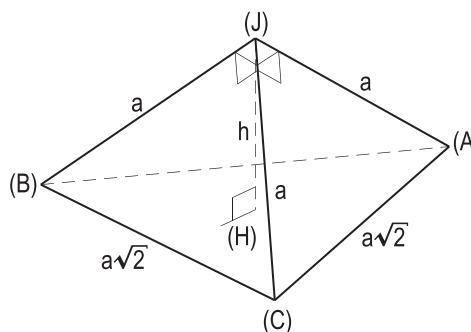


Figura 279

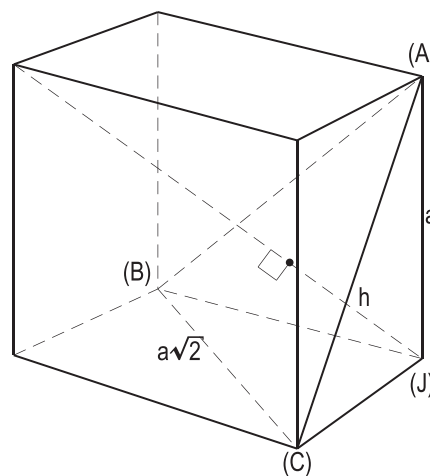


Figura 280

# CAPÍTULO XV

## TRONCOS DE PRISMAS

### 164 – Tronco de prisma

É o sólido limitado por uma superfície prismática fechada e por dois planos não paralelos que cortam as arestas da superfície e que se cortam exteriormente à superfície.

As seções que estes dois planos produzem na superfície são as bases do tronco e seus lados as arestas básicas do sólido. As demais faces e arestas são denominadas laterais (Figura 281).

Evidentemente, o tronco de prisma pode também ser definido como sendo cada um dos dois sólidos obtidos pelo seccionamento de um prisma por um plano não paralelo ao das bases e secante a todas as arestas laterais do prisma (Figura 282).

As faces laterais de um tronco de prisma são, geralmente, trapézios. Eventualmente uma face lateral pode ser um paralelogramo ou, em casos ainda mais particulares, um retângulo, um losango ou um quadrado.

As bases, de modo geral, são diferentes, o que, no entanto, não ocorre quando seus planos formam ângulos iguais com a direção das arestas laterais, o que implica em sua simetria em relação a um plano perpendicular a estas arestas e, por isso, na simetria das duas bases do tronco em relação a este último plano.

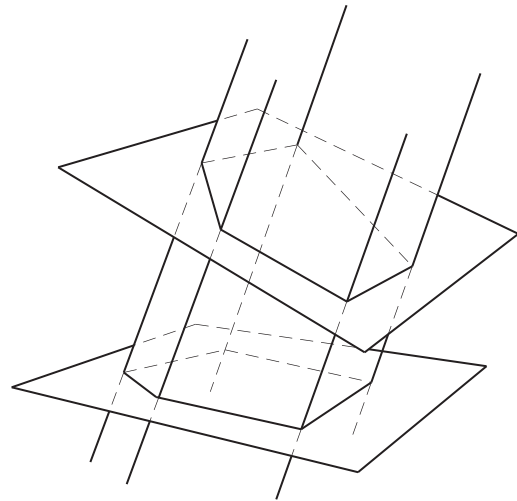


Figura 281

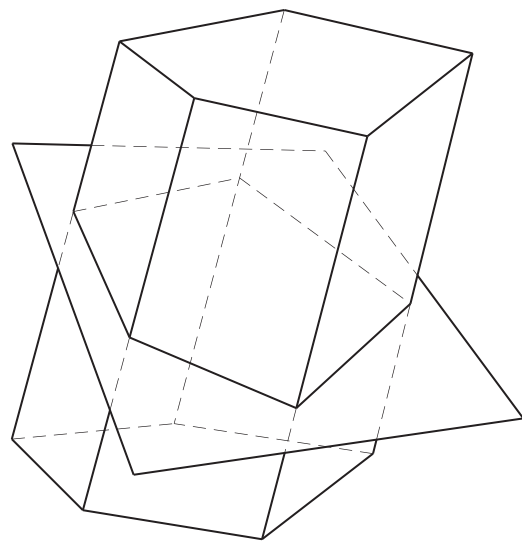


Figura 282

## 165 – Seções retas

Seções retas de um tronco de prisma são as produzidas pelos planos que, cortando todas as suas arestas laterais, são perpendiculares a elas (Figura 283).

Por pertencerem a planos paralelos, todas as seções retas de um tronco de prisma são iguais. Além disso, tal como nos prismas (número 131), a seção reta de um tronco de prisma é, dentre todas as seções produzidas por planos secantes a todas as arestas laterais, a que possui o menor perímetro e a menor área.

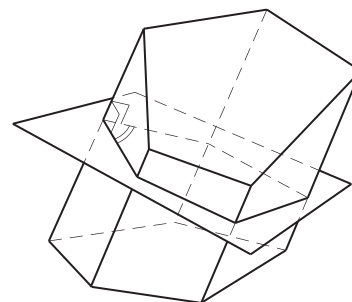


Figura 283

E mais, os ângulos internos da seção reta são os retilíneos dos diedros formados pelos pares de faces laterais consecutivas do sólido (Figura 283).

## 166 – Teorema

Todo tronco de prisma triangular é equivalente à soma de três pirâmides triangulares que têm por base uma das bases do tronco e por vértices os vértices da outra base do tronco.

Demonstração: Consideremos um tronco de prisma triangular genérico  $(A)(B)(C)-(R)(S)(T)$  e seccionemo-lo pelo plano diagonal  $(R)(B)(C)$ , o que permite destacar, do tronco, uma primeira pirâmide triangular  $(R)-(A)(B)(C)$  (Figura 284), a qual tem por base a base  $(A)(B)(C)$  do tronco e por vértice um dos vértices –  $(R)$  – da outra base do tronco, atendendo, pois, à tese.

Destacada a primeira pirâmide triangular, resta, do tronco, a pirâmide  $(R)-(B)(C)(T)(S)$  (Figura 284).

Seccionemos esta pirâmide pelo plano diagonal  $(R)(C)(S)$ , dividindo-a em duas pirâmides triangulares  $(R)-(B)(C)(S)$  e  $(R)-(C)(S)(T)$  (Figura 285).

Tomemos a primeira dessas duas pirâmides  $(R)-(B)(C)(S)$  e, fixando os vértices  $(B)$ ,  $(C)$  e  $(S)$  de sua base, façamos seu vértice  $(R)$  descrever a aresta  $(R)(A)$  do tronco (Figura 285), até que  $(R)$  coincida com o vértice  $(A)$  (Figura 286). Porque a aresta lateral  $(R)(A)$  do tronco é paralela ao plano  $(B)(C)(S)$ , ao se deslocar  $(R)$  para  $(A)$ , sobre  $(R)(A)$ , a altura da pirâmide  $(R)-(B)(C)(S)$  permanece constante e, conseqüentemente (número 153.4), seu volume não se altera.

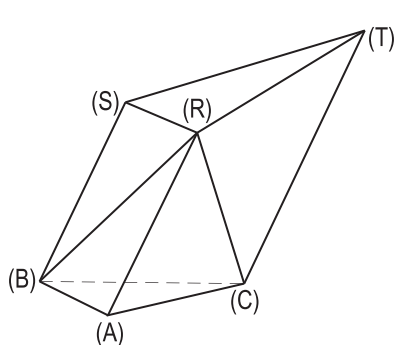


Figura 284

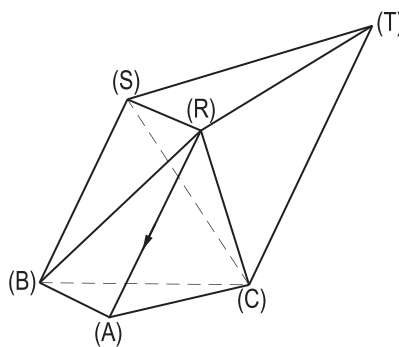


Figura 285

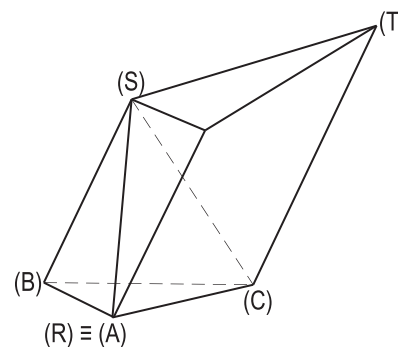


Figura 286

Assim, a pirâmide (R)–(B)(C)(S) pode ser transformada em uma outra equivalente (A)–(B)(C)(S) (Figura 286). E porque esta última pode ser considerada como tendo base (A)(B)(C) e vértice (S), também ela atende à tese.

Consideremos, finalmente, a última pirâmide triangular (R)–(C)(S)(T) restante do tronco (Figura 287) e, fixando os vértices (C), (S) e (T) de sua base, fazemos seu vértice (R) descrever a aresta (R)(A) do tronco (Figura 287), até que (R) coincida com o vértice (A) (Figura 288). Porque (R)(A) é paralela ao plano (C)(S)(T), ao se deslocar (R) para (A), sobre (R)(A), a altura da pirâmide (R)–(C)(S)(T) permanece constante e, conseqüentemente (número 153.4), seu volume não se altera.

E, tomando, agora, (S) como vértice e (A)(C)(T) como base dessa nova pirâmide, fixando os vértices da base e fazendo (S) descrever a aresta (S)(B) do tronco (Figura 288), até que (S) coincida com (B), porque (S)(B) é paralela ao plano (A)(C)(T), o volume da pirâmide (S)–(A)(C)(T) não se altera quando ela se transforma na pirâmide (B)–(A)(C)(T) (Figura 289), pelo mesmo motivo acima citado (número 153.4).

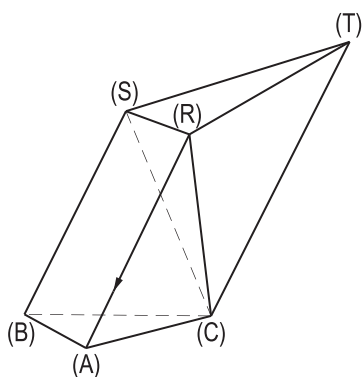


Figura 287

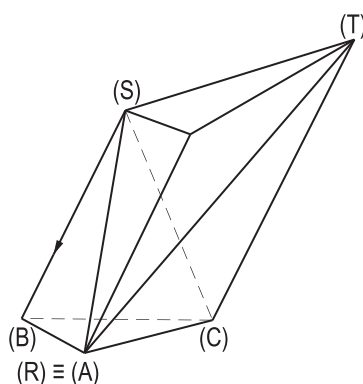


Figura 288

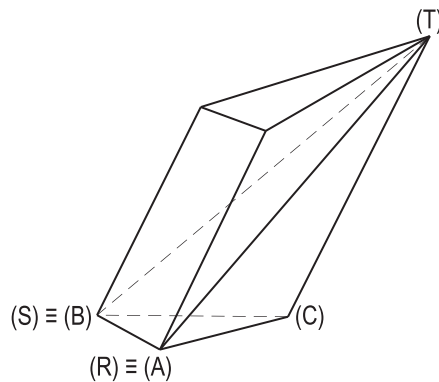


Figura 289

E porque esta última pirâmide pode ser considerada como tendo base (A)(B)(C) e vértice (T) (Figura 289), também esta atende à tese.

Assim, o tronco de prisma triangular considerado é equivalente à soma de três pirâmides triangulares (R)–(A)(B)(C) (Figura 284), (S)–(A)(B)(C) (Figura 286) e (T)–(A)(B)(C) (Figura 289), todas tendo por base a base (A)(B)(C) do tronco e cada uma tendo por vértice cada um dos vértices da outra base – (R)(S)(T) – do tronco.

Então, todo tronco de prisma triangular...

### 167 – Volume do tronco de prisma triangular

Porque um tronco de prisma triangular é equivalente à soma de três pirâmides triangulares, todas tendo por base uma das bases do tronco e por vértices cada um dos vértices da outra base (número 166), designando por (B) a área de uma das bases do tronco e por  $h_1$ ,  $h_2$  e  $h_3$  as

distâncias do plano dessa base aos vértices da outra base (Figura 290), o volume  $V$  do tronco se calcula pela soma dos volumes dessas três pirâmides.

$$\text{Logo: } V = \frac{(B)h_1}{3} + \frac{(B)h_2}{3} + \frac{(B)h_3}{3} \quad \therefore$$

$$V = (B) \left( \frac{h_1 + h_2 + h_3}{3} \right)$$

Assim, o volume de um tronco de prisma triangular pode ser medido pelo produto da área de uma de suas bases pela média aritmética das distâncias dos vértices da outra base ao plano da primeira.

Para obter nova relação, consideremos uma seção reta do tronco que o divida em outros dois (Figura 291) e designemos por (SR) a área dessa seção e por  $a_1$  e  $a_2$ ,  $b_1$  e  $b_2$  e  $c_1$  e  $c_2$  as porções segundo as quais seu plano divide as arestas laterais  $a$ ,  $b$  e  $c$  do tronco.

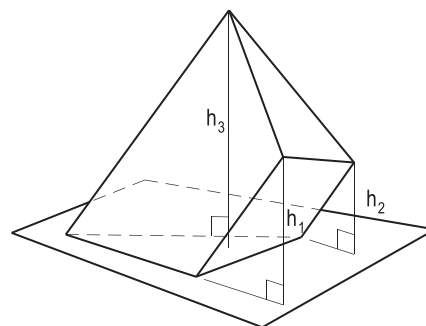


Figura 290

As arestas laterais  $a_1$ ,  $b_1$  e  $c_1$  do primeiro tronco de prisma triangular medem as distâncias de cada vértice de sua base original ao plano da seção reta. Da mesma forma,  $a_2$ ,  $b_2$  e  $c_2$  medem as distâncias da outra base original ao plano da seção reta.

Assim, para o volume  $V$  do tronco considerado, podemos escrever:

$$V = \frac{(SR)}{3} (a_1 + b_1 + c_1) + \frac{(SR)}{3} (a_2 + b_2 + c_2)$$

$$\therefore V = \frac{(SR)}{3} (a_1 + a_2 + b_1 + b_2 + c_1 + c_2)$$

E, como  $a_1 + a_2 = a$ ,  $b_1 + b_2 = b$ ,  $c_1 + c_2 = c$ , vem:

$$V = (SR) \left( \frac{a + b + c}{3} \right)$$

Assim, o volume de um tronco de prisma triangular pode ser medido pelo produto da área de sua seção reta pela média aritmética dos comprimentos de suas arestas laterais.

## 168 – Volume do tronco de prisma qualquer

Para calcular o volume de um tronco de prisma não triangular, basta decompô-lo, por meio de planos diagonais pertencentes a uma de suas arestas laterais, em troncos de prismas triangulares, calcular (número 167), em separado, os volumes destes últimos e somá-los, utilizando, naturalmente, uma das duas expressões acima instituídas.

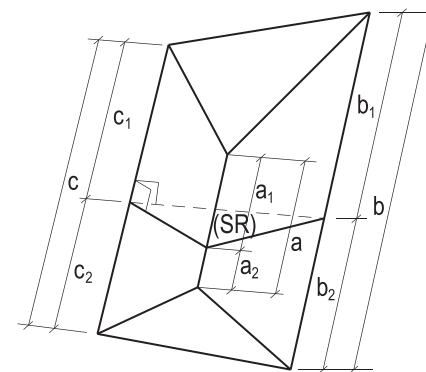


Figura 291



# CAPÍTULO XVI

## TRONCOS DE PIRÂMIDES

### 169 – Troncos de pirâmides de primeira espécie

Tronco de pirâmide de primeira espécie é o sólido limitado por uma superfície piramidal fechada de uma folha e por dois planos secantes a todas as arestas da superfície que não se cortam interiormente a ela.

Há, pois, que considerar duas hipóteses: troncos de bases paralelas (Figura 292) e troncos de bases não paralelas (Figura 293).

As faces dos troncos de pirâmide de primeira espécie, de bases paralelas, são trapézios e suas bases são polígonos semelhantes, por serem homotéticas, em relação ao vértice da superfície piramidal que contém o tronco. A distância entre os planos das bases é denominada altura do tronco ( $h$ , na Figura 292).

Já as faces dos troncos de pirâmide de primeira espécie e de bases não paralelas são quadriláteros quaisquer, embora, naturalmente, alguns possam ser trapézios.

Evidentemente, todo tronco de pirâmide de primeira espécie pode também ser definido como sendo o sólido limitado, numa pirâmide, entre a base e um plano secante a todas as suas arestas laterais, paralelo ou não ao plano da base da pirâmide.

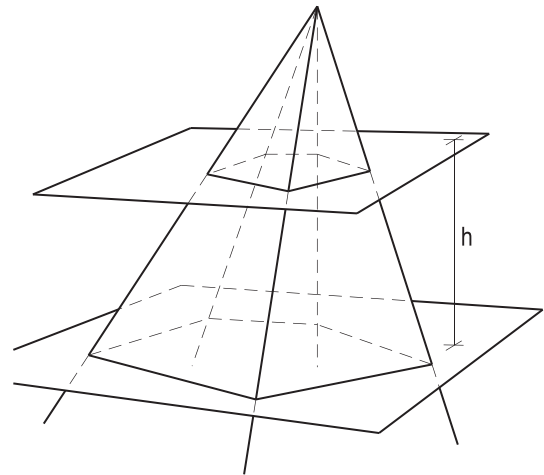


Figura 292

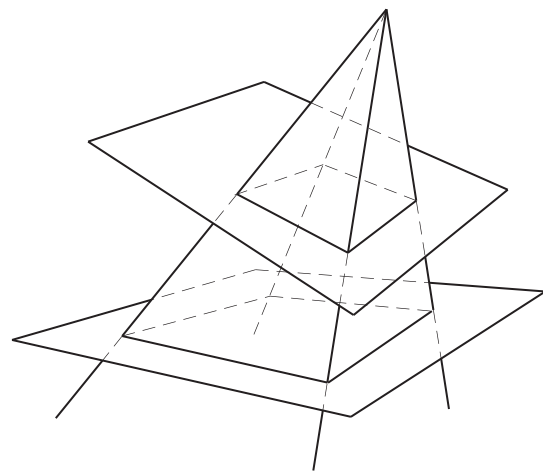


Figura 293

## 170 – Troncos de pirâmide de segunda espécie

Tronco de pirâmide de segunda espécie é o sólido limitado por uma superfície piramidal fechada de duas folhas e por dois planos que atingem, cada um numa folha, todas as arestas da superfície.

Naturalmente, há que considerar os troncos de pirâmides de bases paralelas (Figura 294) e os de bases não paralelas (Figura 295).

É claro, ainda, que os troncos de pirâmide de segunda espécie podem ser considerados como constituídos por duas pirâmides tais que as arestas laterais de uma sejam os prolongamentos das arestas laterais da outra. E mais, no caso particular em que o tronco de pirâmide de segunda espécie tem bases paralelas, as duas pirâmides que o constituem são homotéticas inversamente, em relação ao próprio vértice do tronco, ou seja, o vértice da superfície piramidal que contém o tronco. O que obriga, até, que suas bases sejam polígonos semelhantes.

A distância,  $h$ , na Figura 294, entre os planos das bases do tronco de pirâmide de segunda espécie de bases paralelas é denominada altura do tronco. E é, evidentemente, igual à soma das alturas das duas pirâmides que constituem o tronco.

## 171 – Troncos de pirâmides regulares

Todo tronco de pirâmide de primeira espécie de bases paralelas extraído de uma pirâmide regular é denominado tronco de pirâmide regular de primeira espécie (Figura 296).

Todo tronco de pirâmide de segunda espécie de bases paralelas constituído por duas pirâmides regulares é denominado tronco de pirâmide regular de segunda espécie (Figura 297).

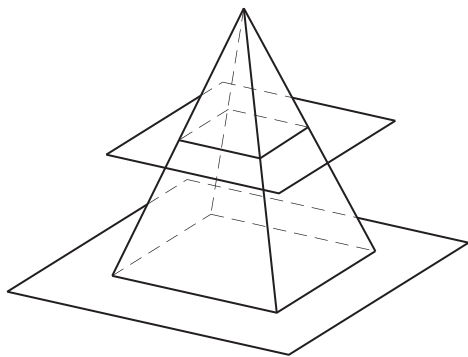


Figura 296

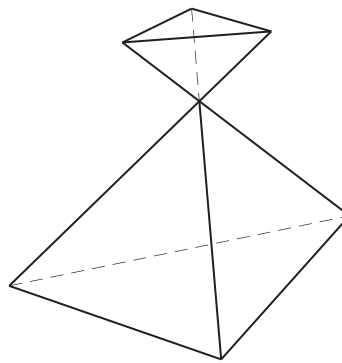


Figura 297

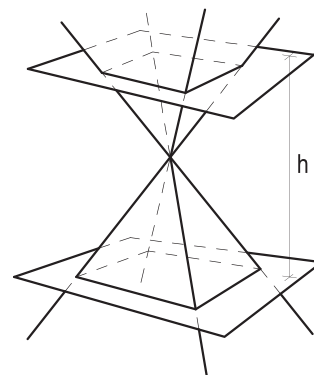


Figura 294

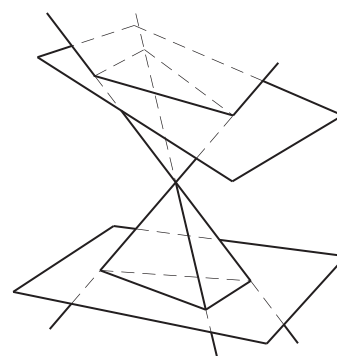


Figura 295

Apótema de um tronco de pirâmide regular (A, nas Figuras 298 e 299) é o segmento formado pelos pontos médios de duas arestas básicas pertencentes a uma mesma face lateral. Evidentemente, tanto nos de primeira como nos de segunda espécie, o apótema do tronco é perpendicular às duas arestas básicas em que se apoia (Figuras 298 e 299).

## 172 – Áreas dos troncos de pirâmides regulares

### 1. Primeira espécie

Designando por  $a$  e  $b$  as arestas básicas e por  $A$  o apótema de um tronco de pirâmide regular de primeira espécie (Figura 298), a área  $S_f$  de uma face lateral é (*Geometria Plana*, número 313):

$$S_f = \left( \frac{a+b}{2} \right) \cdot A$$

Assim, sendo  $n$  o gênero das bases,  $2p_B$  e  $2p_b$  seus perímetros e  $(B)$  e  $(b)$  suas áreas, as áreas lateral e total do tronco são:

$$S_\ell = nS_f = n \left( \frac{a+b}{2} \right) \cdot A$$

$$S_\ell = \left( \frac{na}{2} + \frac{nb}{2} \right) \cdot A$$

$$S_\ell = (p_B + p_b) A$$

e  $S_t = S_\ell + (B) + (b)$

### 2. Segunda espécie

Designando por  $a$  e  $b$  as arestas básicas de um tronco de pirâmide regular de segunda espécie, por  $n$  os gêneros de suas bases, por  $(B)$  e  $(b)$  as áreas dessas bases e por  $A_1$  e  $A_2$  os apótemas de cada uma das duas pirâmides regulares que o formam (Figura 299), podemos (*Geometria Plana*, número 313) escrever, para suas áreas lateral  $S_\ell$  e total  $S_t$ :

$$S_\ell = p_B \cdot A_1 + p_b \cdot A_2$$

$$S_t = S_\ell + (B) + (b)$$

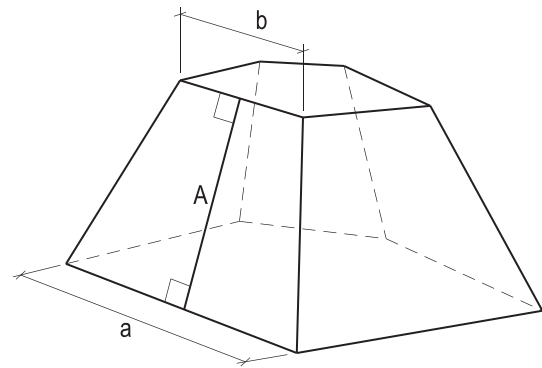


Figura 298

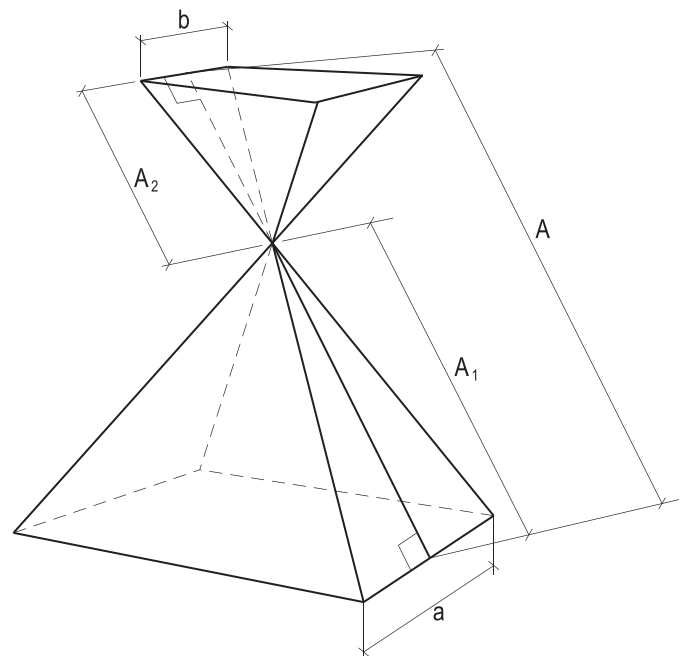


Figura 299

## 173 – Teorema

O volume de um tronco de pirâmide triangular de primeira espécie de bases paralelas é igual à soma dos volumes de três pirâmides triangulares, todas com alturas iguais à do tronco e com bases respectivamente equivalentes a cada uma das bases do tronco e à média geométrica entre elas.

Demonstração: Consideremos um tronco de pirâmide triangular de primeira espécie e de bases paralelas  $(A)(B)(C)-(R)(S)(T)$  e seccionemo-lo (Figura 300) pelos planos diagonais  $(S)(A)(C)$  e  $(C)(R)(S)$ , o que permite destacar do tronco duas pirâmides triangulares  $(S)-(A)(B)(C)$  e  $(C)-(R)(S)(T)$  que, por terem alturas iguais à do tronco e bases respectivamente iguais a cada uma das bases do tronco (Figura 300), atendem à tese.

Destacadas aquelas duas pirâmides, resta, do tronco, entre os dois planos diagonais considerados, a pirâmide triangular  $(S)-(A)(C)(R)$  (Figura 300). Para estudá-la, fixemos os vértices  $(A)$ ,  $(C)$  e  $(R)$  de sua base e façamos seu vértice  $(S)$  descrever a reta  $(S)(S')$ , paralela à aresta lateral  $(A)(R)$  do tronco (Figura 301), até que  $(S)$  venha a coincidir com  $(S')$ .

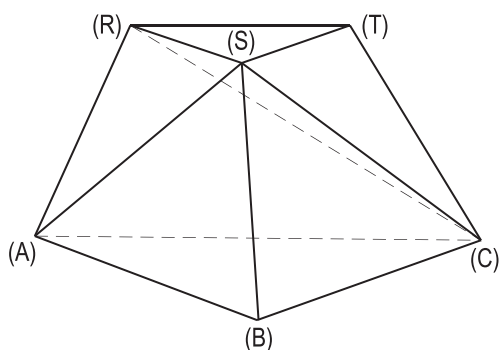


Figura 300

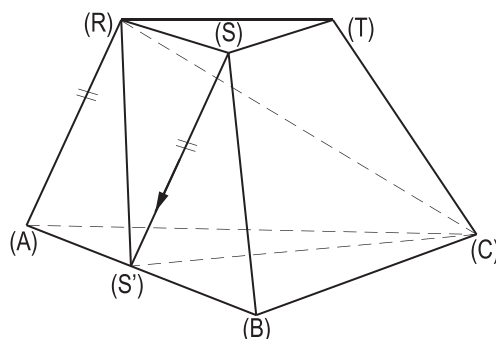


Figura 301

Porque a base  $(A)(C)(R)$  da pirâmide  $(S)-(A)(C)(R)$  é mantida fixa e porque seu vértice  $(S)$  descreve uma paralela ao plano da base, quando a pirâmide é transformada para  $(S')-(A)(C)(R)$  (Figura 301) seu volume não se altera (número 153.4).

Esta última pirâmide triangular pode ser considerada como tendo por vértice o ponto  $(R)$  e por base o triângulo  $(A)(S')(C)$  (Figura 301), tendo, pois, altura igual à do tronco.

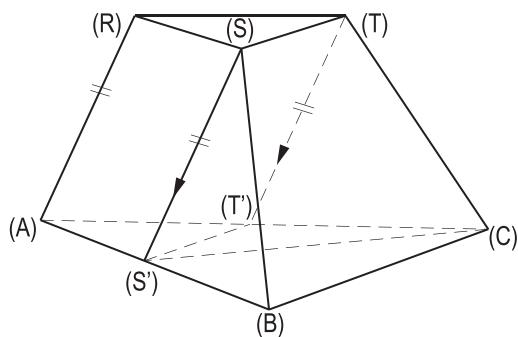


Figura 302

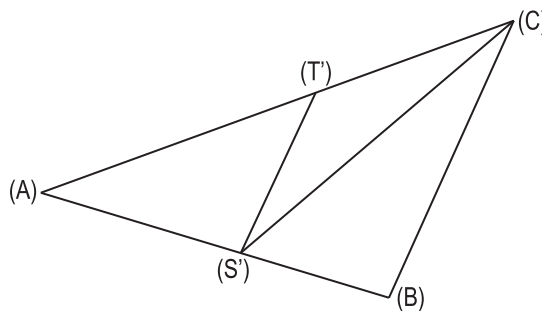


Figura 303

Para que ela atenda, também, à tese, basta provar que sua base (A)(S')(C) tem área igual à média geométrica entre as áreas das bases do tronco.

Para tanto, consideremos a paralela (T)(T') à aresta (A)(R) e o triângulo (A)(S')(T'), igual, por translação, à base menor (R)(S)(T) do tronco (Figuras 302 e 303).

Designando por (B) e (b) as áreas das bases do tronco e por (S) a área da base (A)(S')(C) da terceira pirâmide triangular, em estudo, porque os triângulos (A)(B)(C), (A)(S')(T') e (A)(S')(C) têm, todos, o ângulo (A) comum, podemos (*Geometria Plana*, número 329) escrever:

para o par (A)(S')(T') e (A)(S')(C):

$$\frac{(b)}{(S)} = \frac{(A)(T') \cdot (A)(S')}{(A)(S') \cdot (A)(C)} = \frac{(A)(T')}{(A)(C)} \quad (1)$$

para o par (A)(S')(T') e (A)(B)(C):

$$\frac{(S)}{(B)} = \frac{(A)(C) \cdot (A)(S')}{(A)(C) \cdot (A)(B)} = \frac{(A)(S')}{(A)(B)} \quad (2)$$

E porque os triângulos (A)(S')(T') e (A)(B)(C) são semelhantes, temos:

$$\frac{(A)(S')}{(A)(B)} = \frac{(A)(T')}{(A)(C)} \quad (3)$$

Reunindo as relações (1), (2) e (3), vem:

$$\frac{(b)}{(S)} = \frac{(S)}{(B)} \quad \therefore \quad S^2 = (B) \cdot (b) \quad \therefore \quad (S) = \sqrt{(B) \cdot (b)}$$

Assim, o tronco de pirâmide triangular considerado é equivalente à soma de três pirâmides triangulares (S)–(A)(B)(C) (Figura 300), (C)–(R)(S)(T) (Figura 300) e (R)–(A)(S')(C) (Figura 301), todas tendo altura igual à do tronco, a primeira tendo por base a base maior (A)(B)(C) do tronco, a segunda tendo por base a menor (R)(S)(T) do tronco e a terceira tendo base equivalente à média geométrica entre as duas bases do tronco.

Então, todo tronco de pirâmide triangular de primeira espécie de bases paralelas é equivalente a...

### 174 – Corolário

O volume V do tronco de pirâmide triangular de primeira espécie de bases paralelas pode ser calculado, em função de sua altura h e das áreas (B) e (b) de suas bases, pela relação:

$$V = \frac{(B)h}{3} + \frac{(b)h}{3} + \frac{\sqrt{(B) \cdot (b)} h}{3} \quad \therefore \quad \boxed{V = \left[ (B) + (b) + \sqrt{(B)(b)} \right] \frac{h}{3}}$$

## 175 – Volume do tronco de pirâmide de bases paralelas

Consideremos, inicialmente, um tronco de pirâmide de primeira espécie de bases paralelas, com gênero de base qualquer, bem como a pirâmide de que foi extraído o tronco e designemos por  $(B)$  e  $(b)$  as áreas das bases do tronco e por  $h$  e  $x$  as alturas, respectivamente, de tronco e da pirâmide extraída, a que tem por base a base menor do tronco (Figura 304).

Da semelhança existente entre as duas bases do tronco (*Geometria Plana*, número 330), temos:

$$\begin{aligned} \frac{(b)}{(B)} &= \frac{x^2}{(h+x)^2} \\ \therefore \frac{\sqrt{(b)}}{\sqrt{(B)}} &= \frac{x}{h+x} \\ \therefore \frac{\sqrt{(b)}}{\sqrt{(B)} - \sqrt{(b)}} &= \frac{x}{h+x-x} = \frac{x}{h} \\ \therefore x &= \frac{\sqrt{(b)}}{\sqrt{(B)} - \sqrt{(b)}} \cdot h \quad (1) \end{aligned}$$

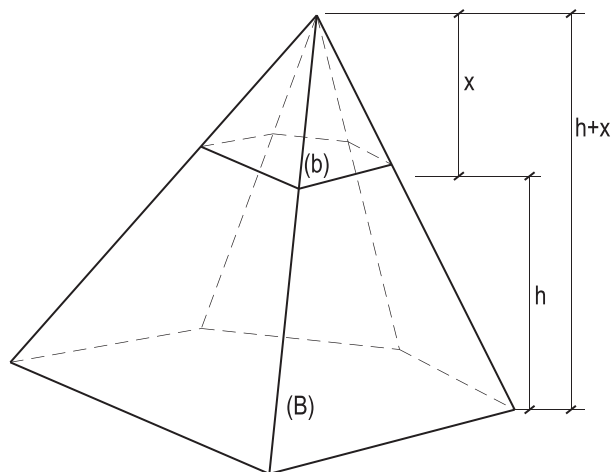


Figura 304

Como o volume  $V$  do tronco é igual à diferença entre os volumes das duas pirâmides (Figura 304), temos:

$$\begin{aligned} V &= \frac{(B)(h+x)}{3} - \frac{(b)x}{3} = \frac{1}{3} [(B)h + (B)x - (b)x] \\ \therefore V &= \frac{1}{3} [(B)h + [(B) - (b)]x] \quad (2) \end{aligned}$$

Substituindo (1) em (2), vem:

$$V = \frac{1}{3} \left[ (B)h + \left[ \frac{(B) - (b)}{\sqrt{(B)} - \sqrt{(b)}} \cdot \sqrt{(b)} \cdot h \right] \right] = \frac{h}{3} \left[ (B) + \frac{(B) - (b)}{\sqrt{(B)} - \sqrt{(b)}} \cdot \sqrt{(b)} \right]$$

Como  $\frac{(B) - (b)}{\sqrt{(B)} - \sqrt{(b)}} = \frac{(\sqrt{(B)} + \sqrt{(b)}) (\sqrt{(B)} - \sqrt{(b)})}{\sqrt{(B)} - \sqrt{(b)}} = \sqrt{(B)} + \sqrt{(b)}$ , temos:

$$V = \frac{h}{3} \left[ (B) + (\sqrt{(B)} + \sqrt{(b)}) \sqrt{(b)} \right]$$

ou, finalmente, 
$$V = \left[ (B) + (b) + \sqrt{(B)(b)} \right] \frac{h}{3}$$

Consideremos, agora, um tronco de pirâmide de segunda espécie de bases paralelas, com gênero de base qualquer, e designemos por (B) e (b) as áreas das bases e por h e x as alturas, respectivamente, do tronco e de uma das pirâmides que constituem o tronco. A semelhança existente entre essas duas pirâmides (Figura 305) permite anotar (*Geometria Plana*, número 330):

$$\frac{(b)}{(B)} = \frac{x^2}{(h-x)^2}$$

$$\therefore \frac{\sqrt{(b)}}{\sqrt{(B)}} = \frac{x}{h-x}$$

$$\therefore \frac{\sqrt{(b)}}{\sqrt{(B)} + \sqrt{(b)}} = \frac{x}{h-x+x} = \frac{x}{h}$$

$$\therefore x = \frac{\sqrt{(b)}}{\sqrt{(B)} + \sqrt{(b)}} \cdot h \quad (1)$$

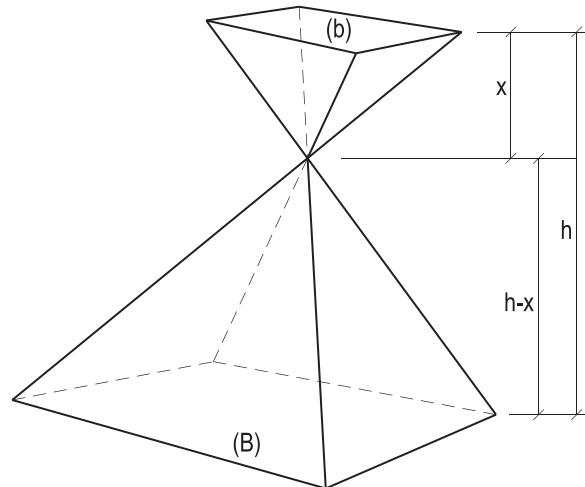


Figura 305

Como o volume V do tronco é igual à soma dos volumes daquelas duas pirâmides (Figura 305), temos:

$$V = \frac{(B)(h-x)}{3} + \frac{(b)x}{3}$$

$$\therefore V = \frac{1}{3} [(B)h - (B)x + bx] = \frac{1}{3} [(B)h - [(B) - (b)]x]$$

Substituindo (1) nesta última relação, vem:

$$\therefore V = \frac{1}{3} \left[ (B)h - \frac{(B) - (b)}{\sqrt{(B)} + \sqrt{(b)}} \cdot \sqrt{(b)} \cdot h \right] = \frac{h}{3} \left[ (B) - \frac{(B) - (b)}{\sqrt{(B)} + \sqrt{(b)}} \cdot \sqrt{(b)} \right]$$

Como  $\frac{(B) - (b)}{\sqrt{(B)} + \sqrt{(b)}} = \frac{(\sqrt{(B)} + \sqrt{(b)})(\sqrt{(B)} - \sqrt{(b)})}{\sqrt{(B)} + \sqrt{(b)}} = \sqrt{(B)} - \sqrt{(b)}$ , temos:

$$V = \frac{h}{3} \left[ (B) - (\sqrt{(B)} - \sqrt{(b)}) \sqrt{(b)} \right]$$

$$\boxed{V = [(B) + (b) - \sqrt{(B)(b)}] \frac{h}{3}}$$

## 176 – Cálculo do volume do tronco de pirâmide de bases paralelas

Do que foi acima desenvolvido, para cálculo do volume  $V$  de um tronco de pirâmide de bases paralelas com áreas  $(B)$  e  $(b)$  e com altura  $h$ , podemos anotar:

1. Troncos de pirâmides de primeira espécie, com bases paralelas.

$$V = \left[ (B) + (b) + \sqrt{(B)(b)} \right] \frac{h}{3}$$

2. Troncos de pirâmides de segunda espécie, com bases paralelas.

$$V = \left[ (B) + (b) - \sqrt{(B)(b)} \right] \frac{h}{3}$$

3. E, em função da razão  $k$  de semelhança entre suas bases:

$$\frac{(b)}{(B)} = k^2 \text{ (Geometria Plana, número 330)} \quad \therefore \quad (b) = k^2 (B)$$

$$V = \left[ (B) + k^2 (B) \pm \sqrt{(B) k^2 (B)} \right] \frac{h}{3} \quad \therefore \quad V = \left[ (B) + k^2 (B) \pm k (B) \right] \frac{h}{3}$$

$$V = \frac{(B)h}{3} (1 + k^2 \pm k)$$

O sinal da parcela  $k$  do segundo fator  $(1 + k^2 \pm k)$  é positivo ou negativo conforme, respectivamente, o tronco seja de primeira ou de segunda espécie.

## 177 – Volume do tronco de pirâmide de bases não paralelas

Para calcular o volume do tronco de pirâmide de bases não paralelas, devem ser consideradas as pirâmides de que se originam (Figura 306) e somar, ou subtrair, conforme o caso, seus volumes. Soma, no caso de segunda espécie e subtração, no caso de primeira.

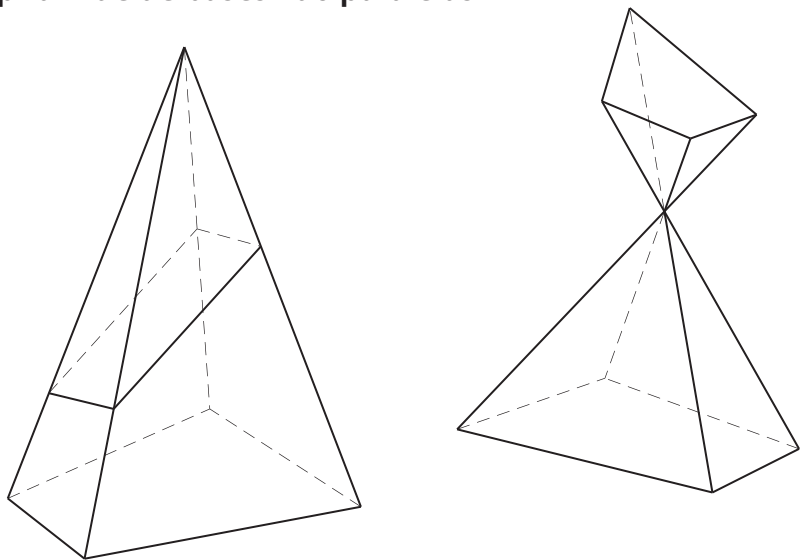


Figura 306



# CAPÍTULO XVII

## SUPERFÍCIES

### 178 – Introdução

De um modo geral, as superfícies classificam-se em regradas (ou retilíneas) e não regradas, conforme, respectivamente, possam (ou não) ser geradas por uma reta que obedeça, em seu movimento, a determinadas condições.

As superfícies regradas subdividem-se em desenvolvíveis e reversas. São ditas desenvolvíveis as superfícies regradas que podem ser planificadas, isto é, que podem ser estendidas sobre um plano, sem que, então, apresentem descontinuidade. Assim, serão desenvolvíveis as superfícies regradas, tais que duas quaisquer de suas geratrizes infinitamente próximas sejam coplanares. De fato, tal condição garante a sucessão contínua das geratrizes da superfície, quando a estendemos sobre um plano. São ditas reversas as superfícies regradas não desenvolvíveis.

Os conceitos apresentados em capítulos anteriores (ver números 124 e 145) para geratriz e diretriz de uma superfície são gerais. Convém, no entanto, observar que estabelecida uma superfície por sua (ou suas) diretriz (ou diretrizes) e pela qualidade do movimento de sua geratriz, isto é, por uma lei de geração, pode-se sempre – embora nem sempre com a mesma simplicidade – modificar, para a mesma superfície, tanto a diretriz quanto a geratriz.

Para exemplificar, consideremos uma superfície já conhecida – a prismática – que, por definição (número 124), teve por diretriz uma linha poligonal (A)(B)(C)(D) e, por geratriz, a reta móvel (r) paralela à reta fixa (d) (Figura 307).

Tal superfície poderia, no entanto, ser considerada como gerada por um movimento de translação da linha poligonal (A)(B)(C)(D), apoiada, sempre, na reta (r), agora mantida fixa. E, assim fazendo, (r) seria a diretriz enquanto que (A)(B)(C)(D) seria a geratriz.

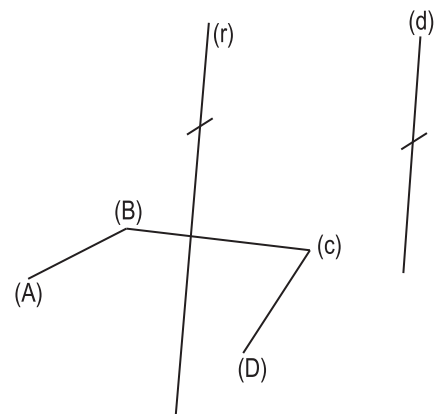


Figura 307

Ainda mais, se considerássemos uma outra linha poligonal (Figura 308) (X)(Y)(Z), obtida pelo seccionamento daquela superfície por um plano genérico, poderíamos admitir que a superfície fora gerada pelo movimento de uma reta (s) que, apoiando-se nos pares de lados correspondentes das duas poligonais, tivesse direção variável e ficasse limitada às suas interseções com as arestas (A)(X), (B)(Y), (C)(Z), etc. da superfície.

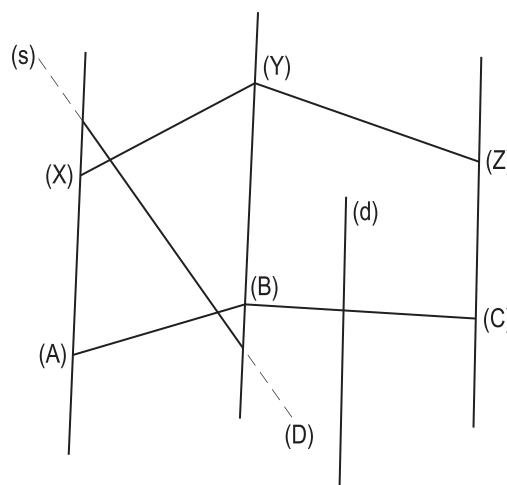


Figura 308

Nestas condições, a geração da superfície dependeria de duas diretrizes (as poligonais), enquanto que a geratriz deixaria de atender à imposição da constância de direção.

Estas possibilidades de permutabilidade entre geratriz e diretriz e de modificação da qualidade do movimento gerador da superfície existem para todas as superfícies, evidentemente.

Conclui-se, daí, que uma classificação geral das superfícies demanda, como passo inicial, a fixação de suas gerações, obediente, é claro, a um critério de simplicidade.

### 179 – Famílias de superfícies

Denomina-se família de superfícies o conjunto de superfícies que possuem geratrizes de mesma natureza e leis de geração iguais.

Assim, as superfícies de uma determinada família diferem entre si apenas pela natureza de suas diretrizes.

Tais são, por exemplo, as superfícies cilíndricas, cônicas e de revolução que, a seguir, abordaremos.

### 180 – Superfícies cilíndricas

Por definição, superfície cilíndrica é a gerada por uma reta de direção constante que se move apoiada numa curva fixa (Figura 309).

Assim, incluem-se na família das superfícies cilíndricas: as prismáticas, quando a diretriz é uma linha poligonal, e até mesmo o plano, quando a diretriz é uma reta, ou uma linha qualquer, coplanar com a geratriz.

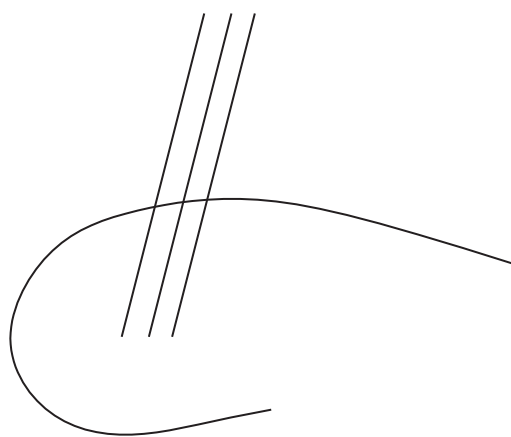


Figura 309

É claro que a natureza de uma superfície cilíndrica depende da sua diretriz. Pode-se ter, então, superfícies cilíndricas circulares, elíticas, parabólicas, etc.

Uma superfície cilíndrica é aberta ou fechada, conforme, respectivamente, sua diretriz seja aberta ou fechada. E é convexa ou não, conforme, respectivamente, a seção produzida por um plano genérico que corte todas as suas geratrizes seja uma linha convexa ou não. Assim, é fácil concluir que uma reta secante a uma superfície cilíndrica convexa só pode cortá-la, no máximo, em dois pontos, enquanto que uma secante a uma superfície cilíndrica não convexa pode encontrá-la por mais de duas vezes.

Seção reta a uma superfície cilíndrica é a produzida por um plano perpendicular às suas geratrizes.

### 181 – Superfícies cônicas

Por definição, superfície cônica é a gerada por uma reta que passa por um ponto fixo e se apoia numa linha fixa (Figura 310). O ponto fixo é denominado vértice da superfície e cada uma das duas partes simétricas que a constituem é uma folha da superfície.

Assim, se limitarmos as geratrizes ao vértice – fazendo-as semirretas – obteremos uma superfície cônica de apenas uma folha.

Naturalmente, incluem-se na família das superfícies cônicas: as piramidais e até mesmo o plano, com as mesmas restrições antes (número 180) formuladas para as superfícies cilíndricas.

Como nas cilíndricas, a natureza de uma superfície cônica fica condicionada à de sua diretriz. Há, portanto, superfícies cônicas circulares, elíticas, hiperbólicas, parabólicas, etc.

Também como ocorreu com as cilíndricas e segundo as mesmas condições, as superfícies cônicas podem ser abertas ou fechadas e convexas ou côncavas (não convexas).

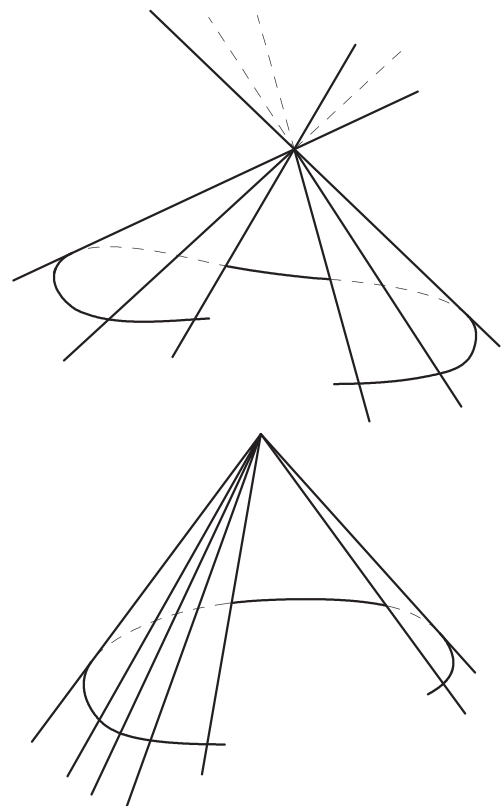


Figura 310

## 182 – Superfícies de revolução

Por definição, superfície de revolução é a gerada pela rotação completa de uma linha plana em torno de uma reta fixa de seu plano (Figura 311). Esta reta é denominada eixo da superfície.

Na geração da superfície, todos os pontos da curva (c), geratriz, descrevem círculos pertencentes a planos perpendiculares ao eixo, todos com centros sobre o eixo (Figura 311). Tais círculos são denominados paralelos da superfície.

Quando – é o caso mais geral – os paralelos da superfície têm raios diferentes, ao menor deles dá-se o nome de círculo de gola e, ao maior, equador da superfície.

Assim são, respectivamente, os círculos (g) e (w), para a superfície de revolução de eixo (e) gerada pela curva (c), na Figura 311.

Quando a geratriz encontra o eixo, anula-se o círculo de gola que, então, deixa de existir. O ponto (V) que ocupa seu lugar denomina-se vértice da superfície.

Meridiano ou seção meridiana de uma superfície de revolução é toda seção nela produzida por um plano que contenha seu eixo. Há, então, uma infinidade delas, todas iguais, para cada superfície considerada, todas apresentando duas posições  $c'$  e  $c''$ , simétricas da geratriz, em relação ao eixo e (Figura 312).

Cabe observar que toda superfície de revolução pode ser considerada como gerada por um círculo móvel, cujo centro percorre o eixo da superfície, cujo plano permanece perpendicular ao eixo e cujo raio tenha seu valor obediente a uma certa lei de variação dada.

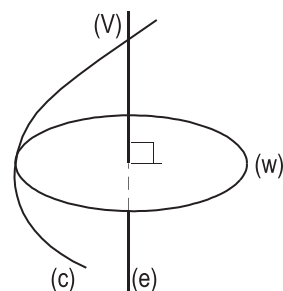
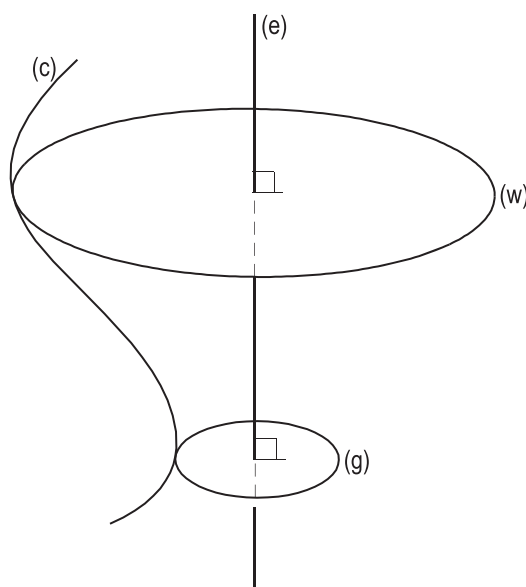


Figura 311

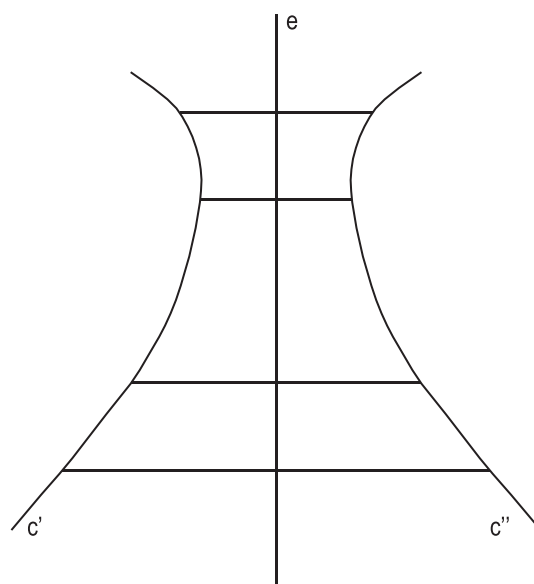


Figura 312

Dentre as superfícies de revolução, destacam-se:

1. Superfície cilíndrica de revolução

A geratriz é uma reta paralela ao eixo da superfície (Figura 313).

Todos os paralelos são iguais, não havendo, pois, círculo de gola nem equador.

2. Superfície cônica de revolução de uma folha

A geratriz é uma semirreta oblíqua ao eixo, tendo sua origem (V) pertencendo ao eixo (Figura 314).

O ponto (V), comum a todas as geratrizes, é o vértice da superfície. Não há círculo de gola nem equador.

3. Superfície cônica de revolução de duas folhas

A geratriz é uma reta concorrente com o eixo e oblíqua a ele.

O ponto (V) em que a geratriz encontra o eixo (Figura 315) é o vértice da superfície.

Não há círculo de gola nem equador.

4. Superfície esférica

É gerada pela revolução de um semicírculo, em torno do diâmetro que o limita (Figura 316).

A superfície esférica é fechada, não possuindo, pois, círculo de gola.

Seu equador – gerado pelo ponto (A) mais afastado do eixo (Figura 316) – é igual ao seu meridiano, por serem, os dois, círculos de mesmo raio  $\overline{(O)(A)}$ . Costuma-se, então, denominar, indistintamente, seções máximas da superfície, tanto uma quanto a outra.

O centro (O) e o raio R do semicírculo são denominados centro e raio da superfície.

A superfície esférica possui uma infinidade de eixos: todas as retas que contêm seu centro. Todos determinam, em seu interior, diâmetros, evidentemente, iguais.

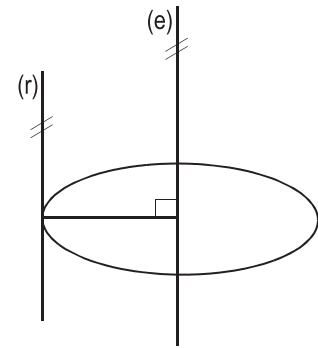


Figura 313

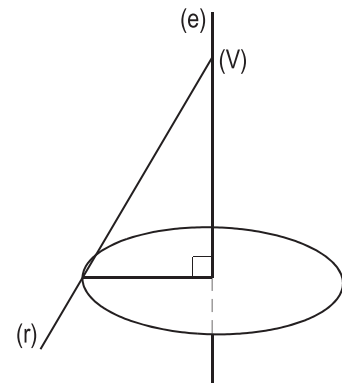


Figura 314

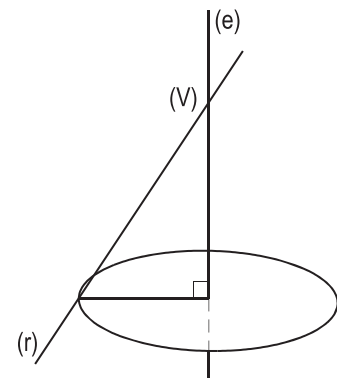


Figura 315

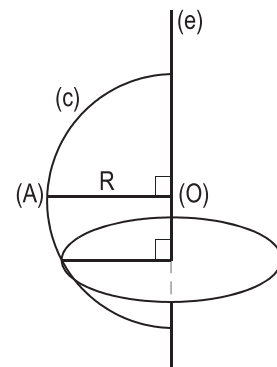


Figura 316

## 183 – Observações

1. O lugar geométrico dos pontos que distam um valor constante de uma reta fixa ( $e$ ) é a superfície cilíndrica de revolução de eixo ( $e$ ) e raio igual àquele valor constante (Figura 313).
2. O lugar geométrico das retas que passam por um ponto fixo ( $V$ ) e que formam um ângulo constante  $\hat{\alpha}$  ( $\neq 90^\circ$ ) com uma reta fixa ( $r$ ) é a superfície cônica de revolução de duas folhas, de vértice ( $V$ ), tendo por eixo a paralela ( $e$ ) à reta ( $r$ ) traçada por ( $V$ ) (Figura 317), cujo semiângulo, no vértice, seja igual a  $\hat{\alpha}$ .
3. O lugar geométrico das retas que passam por um ponto fixo ( $V$ ) e que formam um ângulo constante  $\hat{\beta}$  ( $\neq 90^\circ$ ) com um plano fixo ( $\theta$ ) é a superfície cônica de revolução de duas folhas, de vértice ( $V$ ) e eixo perpendicular a ( $\theta$ ), cujo semiângulo, no vértice, é igual ao complemento de  $\hat{\beta}$  (Figura 318).
4. O lugar geométrico dos pontos que distam um valor constante  $R$  de um ponto fixo ( $O$ ) é a superfície esférica de centro ( $O$ ) e raio  $R$  (Figura 319).
5. O lugar geométrico dos vértices ( $A$ ) dos triângulos retângulos ( $A$ )( $B$ )( $C$ ), cuja hipotenusa  $\overline{(B)(C)}$  é fixa, é a superfície esférica de diâmetro  $\overline{(B)(C)}$  (Figura 319), excluídos os pontos ( $B$ ) e ( $C$ ).

De fato, basta lembrar que, em todo triângulo retângulo, a mediana relativa à hipotenusa vale a metade da hipotenusa (*Geometria Plana*, número 76). Assim, os vértices ( $A$ ) devem distar do ponto ( $O$ ), médio de  $\overline{(B)(C)}$ , um valor constante: a metade de  $\overline{(B)(C)}$ .

E ( $A$ ) não pode coincidir nem com ( $B$ ) nem com ( $C$ ), para que exista o triângulo.

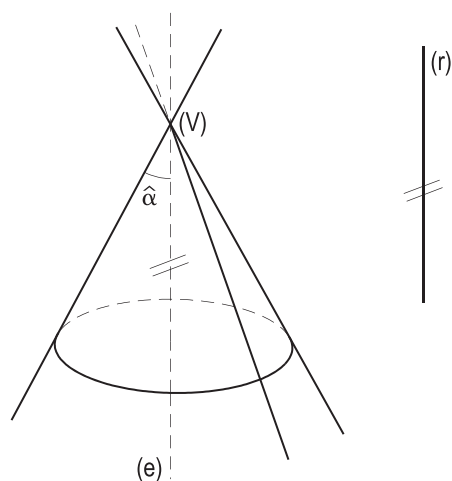


Figura 317

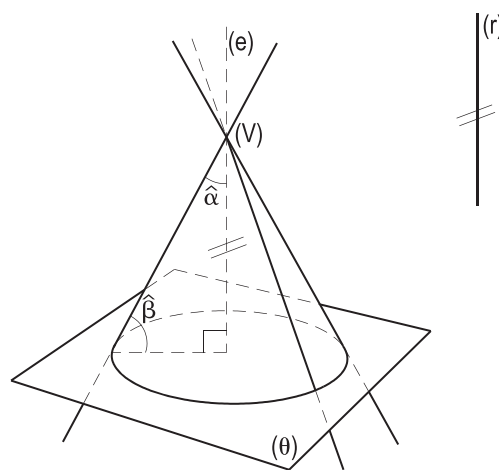


Figura 318

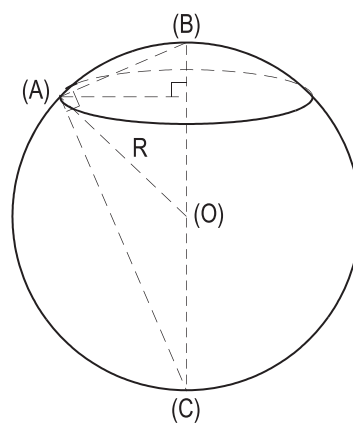


Figura 319

## 184 – Retas e planos tangentes a uma superfície

Uma reta ( $r$ ) é tangente a uma superfície ( $\alpha$ ), quando é tangente à linha ( $c$ ), seção produzida, na superfície, por um plano qualquer pertencente a ( $r$ ) (Figura 320). O ponto de contato ( $T$ ) da reta com a linha é, também, o ponto de contato da reta com a superfície.

Um plano ( $\gamma$ ) é tangente a uma superfície ( $\alpha$ ) em um ponto ( $T$ ) da superfície, quando ele contém todas as retas tangentes à superfície, em ( $T$ ) (Figura 321).

O ponto ( $T$ ) é, então, denominado ponto de contato do plano tangente ( $\gamma$ ) com a superfície ( $\alpha$ ).

A reta ( $n$ ), pertencente a ( $T$ ) e perpendicular a ( $\gamma$ ), é denominada normal à superfície, em ( $T$ ) (Figura 321).

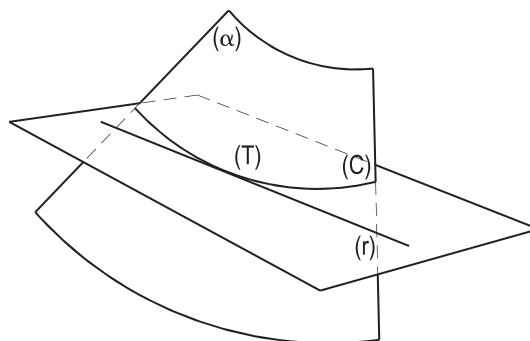


Figura 320

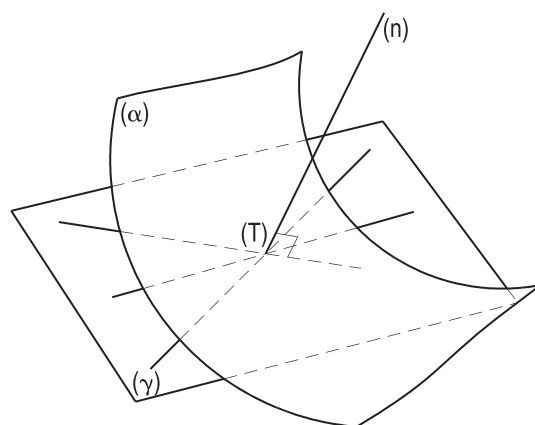


Figura 321

## 185 – Plano tangente a uma superfície cilíndrica

O plano ( $\gamma$ ) tangente a uma superfície cilíndrica ( $\alpha$ ) em um ponto ( $T$ ) da superfície é definido pela geratriz ( $g$ ) da superfície pertencente a ( $T$ ) e pela tangente ( $t$ ) à diretriz ( $d$ ) da superfície que passa por ( $T$ ) (Figura 322).

A geratriz ( $g$ ) da superfície que pertence também ao plano tangente é denominada geratriz de contato entre o plano e a superfície.

No caso particular em que a superfície cilíndrica é de revolução, o plano tangente em um ponto ( $T$ ) da superfície fica definido pela geratriz da superfície e pela tangente ( $t$ ) ao paralelo da superfície que passa pelo ponto ( $T$ ).

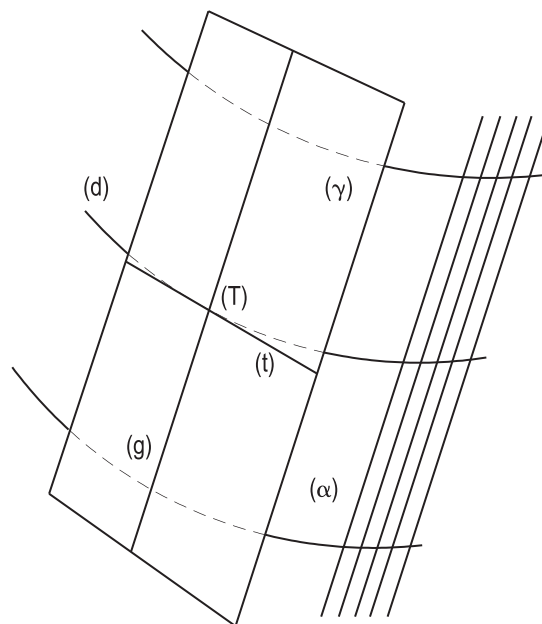


Figura 322

## 186 – Plano tangente a uma superfície cônica

A determinação do plano ( $\gamma$ ) tangente a uma superfície cônica é exatamente igual à do plano tangente à cilíndrica. Naturalmente, é fácil concluir que todos os planos tangentes pertencem ao vértice (V) da superfície cônica (Figura 323).

Cumprе ressaltar que, para o caso particular da superfície cônica de revolução, todos os planos tangentes formam ângulos  $\alpha$  iguais com o eixo (e) da superfície e ângulos  $\beta$  (complemento de  $\alpha$ ) iguais com todo plano ( $\theta$ ) perpendicular ao eixo (Figura 324).

Em verdade, neste caso, o plano tangente ( $\gamma$ ) fica definido pela geratriz de contato (V)(T) e pela tangente (t) ao paralelo (c) da superfície pertencente ao ponto de contato (T). E a geratriz (V)(T) de contato nada mais é que uma reta de máximo declive de ( $\gamma$ ) em relação a ( $\theta$ ) (Figura 324).

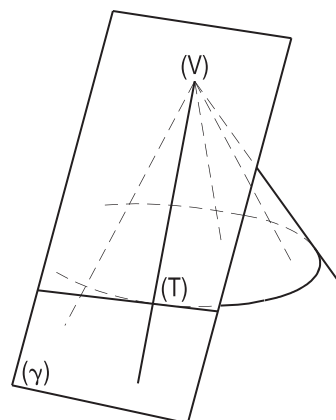


Figura 323

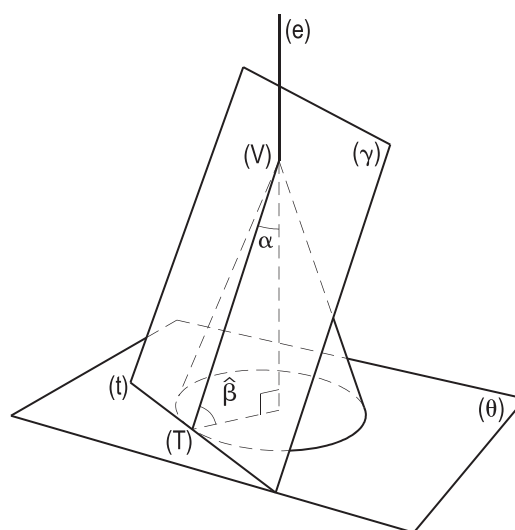


Figura 324

## 187 – Plano tangente a uma superfície esférica

O plano tangente a uma superfície esférica, num ponto da superfície, é perpendicular ao raio da superfície relativo àquele ponto, tendo, pois, em comum com a superfície apenas o ponto de contato, correspondendo ao ponto do plano mais próximo do centro da esfera.

Todas as normais a uma superfície esférica passam pelo centro da superfície.

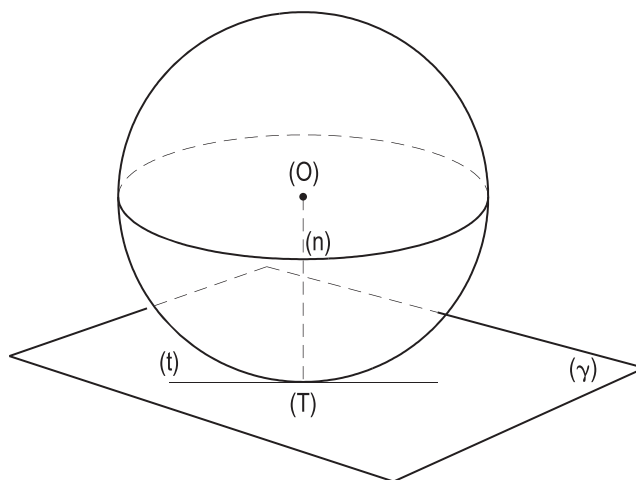


Figura 325



# CAPÍTULO XVIII

## CILINDROS

### 188 – Definições

Cilindro é o sólido limitado por uma superfície cilíndrica fechada e por dois planos paralelos entre si que cortam todas as geratrizes da superfície. As seções iguais produzidas por esses dois planos – e que limitam o cilindro – são as bases e a distância entre eles é a altura do cilindro (Figura 326).

### 189 – Classificação

Os cilindros são ditos retos ou oblíquos conforme, respectivamente, suas geratrizes sejam perpendiculares ou oblíquas aos planos de suas bases e são denominados circulares, elípticos, etc., conforme a natureza de suas bases.

Cilindro de revolução é o sólido gerado pela rotação completa de um retângulo em torno de um de seus lados (Figura 327). O lado fixo, que funciona como eixo, mede a altura do cilindro e os dois que lhe são perpendiculares medem os raios – iguais – das bases.

Naturalmente, todo cilindro de revolução é reto e circular.

Todas as seções meridianas, isto é, as produzidas pelos planos que contêm o eixo de um cilindro de revolução são retângulos iguais entre si, compostos por duas posições axialmente opostas do retângulo gerador (Figura 328). Isto significa que o retângulo seção meridiana tem base e altura respectivamente iguais ao diâmetro da base e à altura do cilindro.

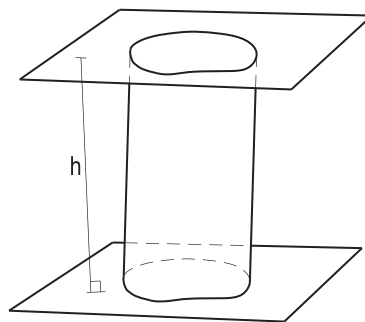


Figura 326

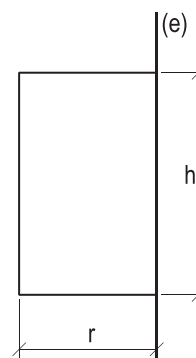


Figura 327

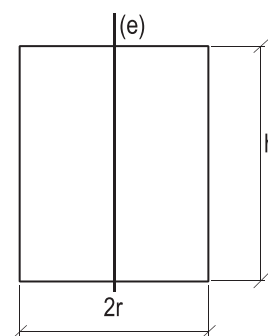


Figura 328

No caso particular em que a seção meridiana de um cilindro de revolução é um quadrado, diz-se, por definição, que o cilindro é equilátero (Figura 329). Assim, em todo cilindro equilátero – e apenas neles – a altura é igual ao diâmetro da base.

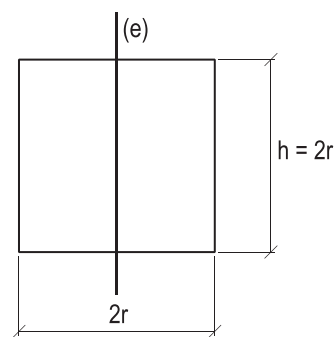


Figura 329

## 190 – Áreas laterais e totais

### 1. Cilindros oblíquos

Designando por  $g$  o comprimento da geratriz (Figura 330), por  $C_{SR}$  o perímetro da seção reta e por  $(B)$  a área de cada base e considerando o cilindro como a posição limite ocupada por um prisma inscrito, quando cresce indefinidamente o gênero de sua base, as expressões instituídas para o prisma (números 143.1 e 143.2) fornecem para o cilindro:

$$S_{\ell} = C_{SR} \cdot g$$

### 2. Cilindros retos

Designando por  $C_B$  o valor do perímetro da base e por  $g$  e  $h$  a geratriz e a altura do cilindro, como aplicação das relações antes instituídas, temos:

$$S_{\ell} = C_B \cdot g = C_B \cdot h$$

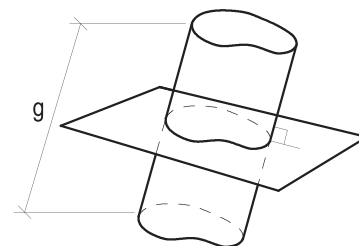


Figura 330

### 3. Cilindros de revolução

Designando por  $r$  e  $h$  o raio da base e a altura do cilindro (Figura 327), como aplicação das relações anteriores, temos:

$$S_{\ell} = 2\pi r h$$

### 4. Cilindros equiláteros

Porque nos cilindros equiláteros a altura é igual ao diâmetro da base (número 189), vem:

$$S_{\ell} = 2\pi r h = 2\pi r (2r) \quad \therefore \quad S_{\ell} = 4\pi r^2$$

### 5. Áreas totais

Para todos os casos, sendo  $(B)$  a área de cada base:

$$S_t = S_{\ell} + 2(B)$$

## 191 – Volume do cilindro

Utilizando, ainda, as relações instituídas para os prismas (números 142.1 e 142.2) e adaptando-as às condições presentes, temos:

1 – Cilindros oblíquos .....	$V = (B)h = (SR)g$
2 – Cilindros retos .....	$V = (B)h = (B)g$
3 – Cilindros de revolução .....	$V = (B)h = \pi r^2 h$
4 – Cilindros equiláteros .....	$V = (B)h = 2\pi r^3$

## 192 – Teorema

A seção produzida numa superfície cilíndrica de revolução por um plano oblíquo às suas geratrizes é uma elipse.

Demonstração: Sejam  $(\alpha)$  o plano secante a uma superfície cilíndrica de revolução, oblíquo às suas geratrizes, e  $(M)$  um ponto qualquer da seção assim produzida.

Consideremos as duas superfícies esféricas inscritas na cilíndrica e tangentes a  $(\alpha)$ , respectivamente, nos pontos  $(F)$  e  $(F')$  (Figura 331), e tracemos os segmentos  $\overline{(M)(F)}$  e  $\overline{(M)(F')}$ , bem como a geratriz da superfície cilíndrica que, passando por  $(M)$ , encontra os paralelos de contato das superfícies esféricas com a cilíndrica nos pontos  $(R)$  e  $(S)$ .

Como tangentes de  $(M)$  a cada uma das superfícies esféricas, temos:

$$\begin{aligned} \overline{(M)(F)} &= \overline{(M)(R)} \\ \overline{(M)(F')} &= \overline{(M)(S)} \\ \hline \overline{(M)(F)} + \overline{(M)(F')} &= \overline{(R)(S)} \end{aligned}$$

E como  $\overline{(R)(S)}$  é o valor – constante – da geratriz do cilindro de revolução limitado entre os dois paralelos de contato considerados (Figura 331), conclui-se, por sua própria definição (*Geometria Plana*, número 336), que a seção produzida por  $(\alpha)$ , na superfície cilíndrica dada, é uma elipse de focos  $(F)$  e  $(F')$  e de eixo transverso igual à geratriz  $(R)(S)$  do cilindro limitado, na superfície, pelos paralelos de contato das duas esferas inscritas, tal como se queria demonstrar.

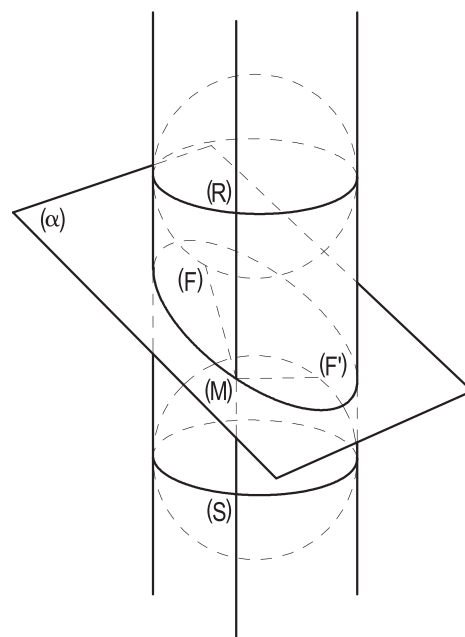


Figura 331

## 193 – Troncos de cilindro

Tronco de cilindro é o sólido limitado por uma superfície cilíndrica fechada e por dois planos não paralelos entre si que cortam todas as geratrizes da superfície e que se cortam exteriormente a ela.

Dentre os troncos, cumpre destacar os limitados lateralmente por superfícies cilíndricas de revolução, denominados, apesar da impropriedade, troncos de cilindro de revolução.

## 194 – Observação

Um tronco de cilindro de revolução pode ter uma base elítica e uma circular ou duas elíticas, iguais ou não (Figura 332).

## 195 – Teorema

Todo tronco de cilindro de revolução tem volume igual ao de um cilindro de revolução de mesma seção reta que o tronco e de altura igual ao eixo do tronco.

Demonstração: Seja um tronco de cilindro de revolução genérico cujas bases sejam elíticas e diferentes (Figura 332).

Consideremos os dois planos pertencentes aos centros dessas elipses e perpendiculares ao eixo do tronco, os quais produzem duas seções retas – circulares e iguais – na superfície cilíndrica que limita lateralmente o tronco (Figura 332).

Assim, entre as duas seções retas fica formado um cilindro de revolução de altura igual ao eixo (e) do tronco.

Junto a cada um dos extremos do eixo (centros das bases do tronco) ficam formados dois sólidos simétricos, entre cada base do tronco e a seção reta correspondente. Das simetrias desses pares de sólidos decorrem suas equivalências, também aos pares.

Então, ao se transformar o tronco dado no cilindro de revolução citado, o volume se conserva igual, pois as porções retiradas do tronco são respectivamente equivalentes às adicionadas para a formação do cilindro (Figura 332).

É claro que a propriedade vale, também, para o caso particular em que apenas uma base do tronco seja elítica (e a outra circular), quando a operação de substituição acima descrita fica reduzida a um par, apenas.

Assim, todo tronco de cilindro de revolução tem volume igual ao de um cilindro de revolução da mesma seção reta que o tronco e de altura igual ao eixo do tronco.

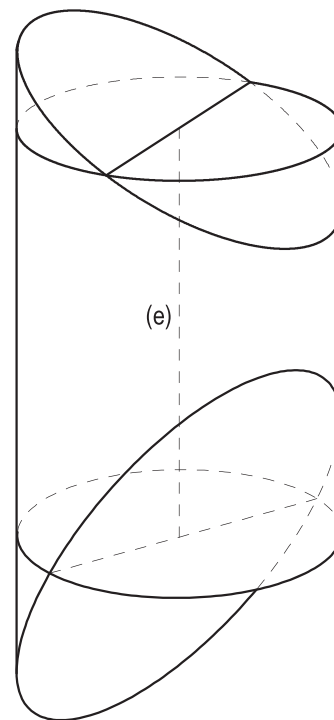


Figura 332

## 196 – Observações

1. Da própria demonstração do teorema, conclui-se que a área lateral de um tronco de cilindro de revolução é igual à do cilindro de revolução de mesma seção reta que o tronco e de altura igual ao eixo do tronco.
2. As seções meridianas de um tronco de cilindro de revolução, que tenha uma base circular, são todas, exceto uma, trapézios retângulos (Figura 333) que têm por base média comum o eixo (e) do tronco; alturas iguais ao diâmetro  $2r$  da base circular do tronco e por bases duas geratrizes do tronco, simétricas em relação ao seu eixo (Figuras 334 e 335).

A exceção ocorre para a seção meridiana paralela à interseção dos planos das duas bases do tronco. Neste caso, porque as geratrizes simétricas em relação ao eixo são iguais ao próprio eixo (Figura 336), a seção meridiana é um retângulo.

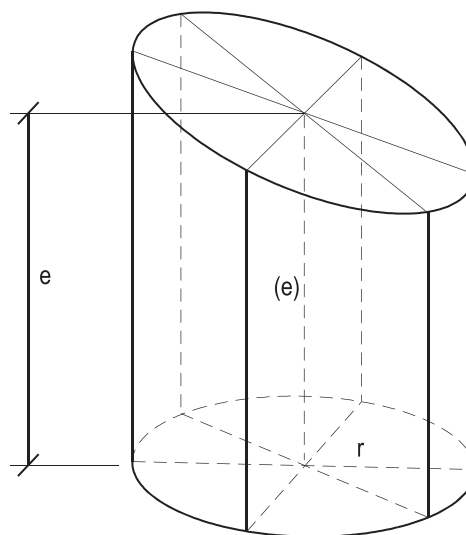


Figura 333

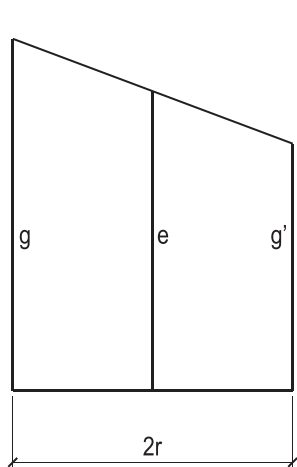


Figura 334

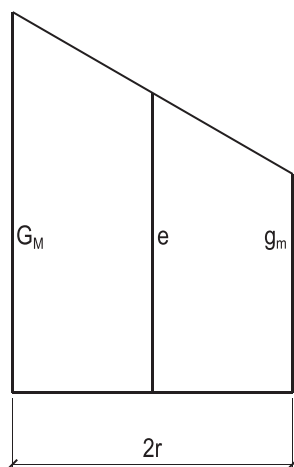


Figura 335

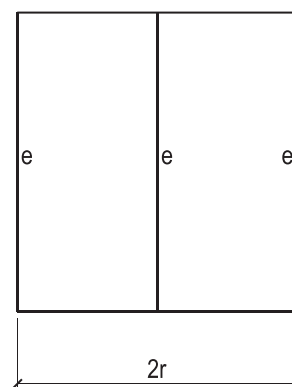


Figura 336

É claro, ainda, que todas as seções meridianas são equivalentes. Sua área comum é  $S = 2re$ .

Na Figura 335, vão destacadas as geratrizes  $G_M$  e  $g_m$ , de comprimentos máximo e mínimo, respectivamente.

E mais, todos os pares de geratrizes axialmente opostas possuem a mesma soma, igual ao dobro do valor do eixo. De fato (Figuras 334, 335 e 336), temos:

$$e = \frac{g + g'}{2} = \frac{G_M + g_m}{2} \quad \therefore \quad \boxed{g + g' = G_M + g_m = \dots = 2e}$$

3. As seções meridianas de um tronco de cilindro de revolução, que tenha as duas bases elípticas, são todas, exceto uma, trapézios que têm por base média comum o eixo do tronco; alturas iguais ao diâmetro  $2r$  da seção reta do tronco e por bases pares de geratrizes axialmente simétricas (Figuras 337).

A exceção ocorre para a seção meridiana paralela à interseção dos planos das duas bases do tronco. Neste caso, a seção meridiana é retangular. Todas as seções são equivalentes. Sua área comum é  $S = 2re$ .

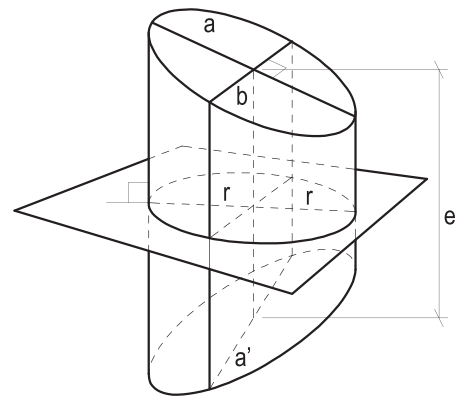


Figura 337

E todos os pares de geratrizes axialmente opostas possuem a mesma soma  $2e$  (Figura 337).

### 197 – Volume do tronco de cilindro de revolução

Devido à equivalência do tronco com o cilindro de revolução (número 195), o volume  $V$  do tronco será:

$$V = (SR) e \quad \therefore \quad \boxed{V = \pi r^2 e}$$

onde  $r$  e  $e$  representam o raio da seção reta e o comprimento do eixo do tronco.

### 198 – Área lateral do tronco de cilindro de revolução

Devido à equivalência antes citada do tronco com o cilindro, agora entre as áreas laterais, a do tronco será:

$$S_\ell = C_{SR} e \quad \therefore \quad \boxed{S_\ell = 2\pi r e}$$

### 199 – Área total do tronco de cilindro de revolução

1. Tronco com duas bases elípticas

Designando por  $2a$  e  $2a'$  os eixos maiores das duas elipses (Figura 337) e por  $S$  e  $S'$  suas áreas, porque seus eixos menores são iguais ao diâmetro  $2r$  da seção reta do tronco, a área total do tronco será (*Cônicas*, número 40):

$$S_t = S_\ell + S + S' = 2\pi r e + \pi a r + \pi a' r \quad \therefore \quad \boxed{S_t = \pi r (2e + a + a')}$$

2. Tronco com uma base elítica e uma circular

Sendo  $2a$  o eixo maior da base elítica e  $2r$  o diâmetro da base circular, a área total do tronco será:

$$S_t = S_\ell + S + S' = 2\pi r e + \pi a r + \pi r^2 \quad \therefore \quad \boxed{S_t = \pi r (2e + a + r)}$$

# CAPÍTULO XIX

## CONES

### 200 – Definições

Cone é o sólido limitado por uma superfície cônica fechada de uma folha e por um plano que corta todas as geratrizes dessa folha.

A seção que esse plano produz na superfície é a base e a distância do vértice ao seu plano é a altura do cone.

### 201 – Classificação

Os cones são denominados circulares, elípticos, etc., conforme as naturezas de suas bases.

Quando a base de um cone é uma figura simétrica, isto é, quando possui centro de simetria, e a reta formada pelo vértice do cone e pelo centro da base é perpendicular ao plano da base, diz-se que o cone é reto. Em todos os demais casos, o cone é dito oblíquo.

Cone de revolução é o sólido gerado pela rotação completa de um triângulo retângulo em torno de um de seus catetos (Figura 338). O cateto fixo, que funciona como eixo, mede a altura do cone, enquanto que o outro cateto e a hipotenusa – móveis, mas de comprimentos constantes – medem, respectivamente, o raio da base e a geratriz do cone.

Naturalmente, todo cone de revolução é circular e reto.

Todas as seções meridianas, isto é, as produzidas pelos planos que contêm o eixo de um cone de revolução são triângulos isósceles iguais, formados por duas posições axialmente opostas do triângulo gerador (Figura 339). Assim, a base, a altura e os lados iguais dessas seções são respectivamente iguais ao diâmetro da base, à altura e à geratriz do cone.

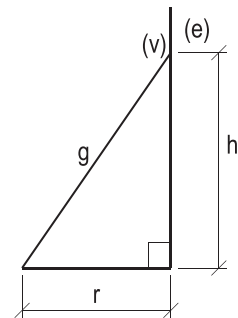


Figura 338

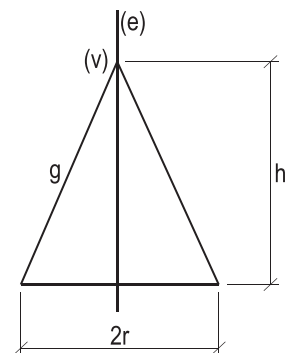


Figura 339

No caso particular em que a seção meridiana de um cone de revolução é um triângulo equilátero, diz-se, por definição, que o cone é equilátero (Figura 340). Então, para os cones equiláteros, e apenas para eles, valem (*Geometria Plana*, número 200.3) as relações:

$$h = r\sqrt{3}$$

$$g = 2r$$

## 202 – Desenvolvimento da superfície lateral

Porque as superfícies cônicas são retilíneas e desenvolvíveis, já que duas quaisquer de suas geratrizes, concorrendo em seu vértice, são coplanares (número 178), podemos estudar os aspectos das planificações das superfícies laterais dos cones.

1. Para os cones de revolução, porque todas as geratrizes são iguais, o desenvolvimento é um setor circular de raio igual à geratriz e tal que a retificação do arco que o limita é igual à retificação da circunferência de sua base (Figura 341).

Decorre daí o valor (em radianos) do ângulo central  $\hat{\alpha}$  desse setor:

$$\hat{\alpha} = \frac{2\pi r}{g}$$

2. Para os cones equiláteros, o desenvolvimento da superfície lateral é um semicírculo de raio igual à sua geratriz (Figura 342). De fato, neste caso:

$$g = 2r \quad \therefore \quad \hat{\alpha} = \frac{2\pi r}{g} = \frac{2\pi r}{2r} = \pi \text{ rd,}$$

o que acarreta a transformação do setor circular em um semicírculo.

3. Para os casos mais gerais em que o cone não é de revolução, a desigualdade das geratrizes implica em imensa variedade da forma do desenvolvimento, o qual depende, então, da natureza do cone e de qual seja a geratriz escolhida para o corte na superfície lateral do sólido.

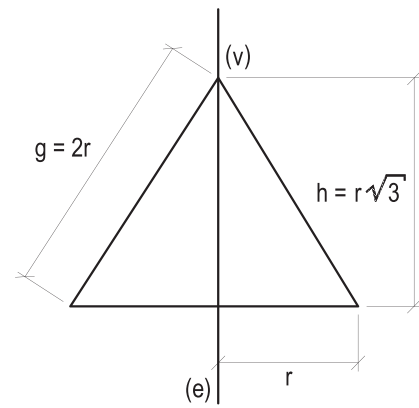


Figura 340

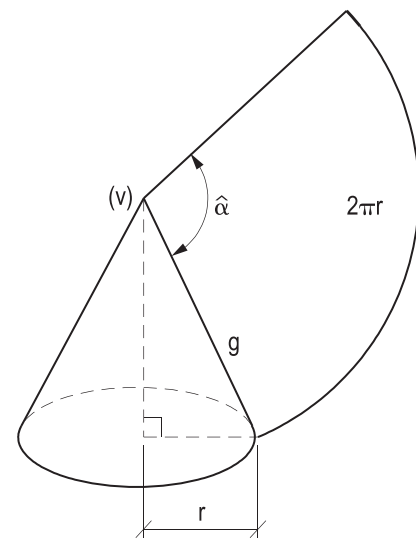


Figura 341

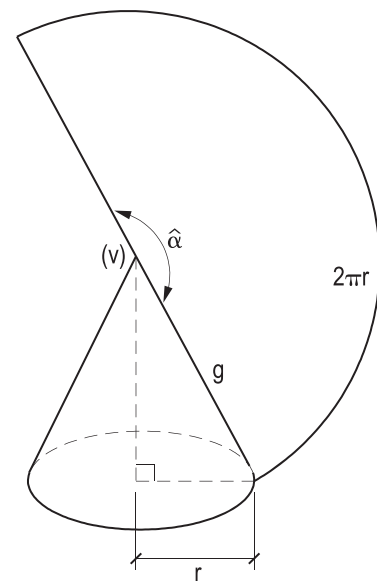


Figura 342



## 203 – Áreas laterais e totais dos cones de revolução

1. Porque a área lateral pode ser medida no desenvolvimento da superfície lateral do cone de revolução, temos, para os casos gerais (número 202.1):

$$S_{\ell} = \pi r g$$

$$\text{e } S_t = \pi r g + \pi r^2$$

$\therefore$

$$S_t = \pi r (g + r)$$

2. E, para o caso particular do cone equilátero, porque  $g = 2r$  (número 201), as relações gerais reduzem-se a:

$$S_{\ell} = 2\pi r^2$$

e

$$S_t = 3\pi r^2$$

## 204 – Volume do cone

1. Para os casos mais gerais, admitindo o cone como a posição limite ocupada por uma pirâmide inscrita, quando o gênero de sua base cresce indefinidamente, o volume do cone pode ser medido pela mesma expressão instituída para as pirâmides tal como indicado no número 157, isto é:

$$V = \frac{(B)h}{3}$$

2. Quando o cone é de revolução, temos:  $(B) = \pi r^2$   $\therefore$

$$V = \frac{\pi r^2 h}{3}$$

3. Finalmente, para o caso mais particular do cone equilátero, porque  $h = r\sqrt{3}$  (número 201), vem:

$$V = \frac{\pi r^2 (r\sqrt{3})}{3}$$

$\therefore$

$$V = \frac{\pi r^3 (\sqrt{3})}{3}$$

E, ainda para o cone equilátero, mas, agora, em função de sua altura  $h$ , como  $r = \frac{h}{\sqrt{3}}$  (número 201), podemos escrever:

$$V = \frac{\pi \left(\frac{h}{\sqrt{3}}\right)^3 \sqrt{3}}{3}$$

$$V = \frac{\pi h^3 (\sqrt{3})}{3 \cdot 3\sqrt{3}}$$

Simplificando, vem:

$$V = \frac{\pi h^3}{9}$$

## 205 – Troncos de cone

1. Tronco de cone de primeira espécie é o sólido limitado por uma superfície cônica fechada, de uma folha, e por dois planos (paralelos ou não) que cortam todas as geratrizes dessa folha e que não se cortam no interior da superfície (Figura 343).
2. Tronco de cone de segunda espécie é o sólido limitado por uma superfície cônica fechada, de duas folhas, e por dois planos (paralelos ou não) que cortam, cada um, todas as geratrizes de cada uma das folhas da superfície (Figura 344).
3. Quando os planos das bases são paralelos, a distância entre eles é denominada altura do tronco.

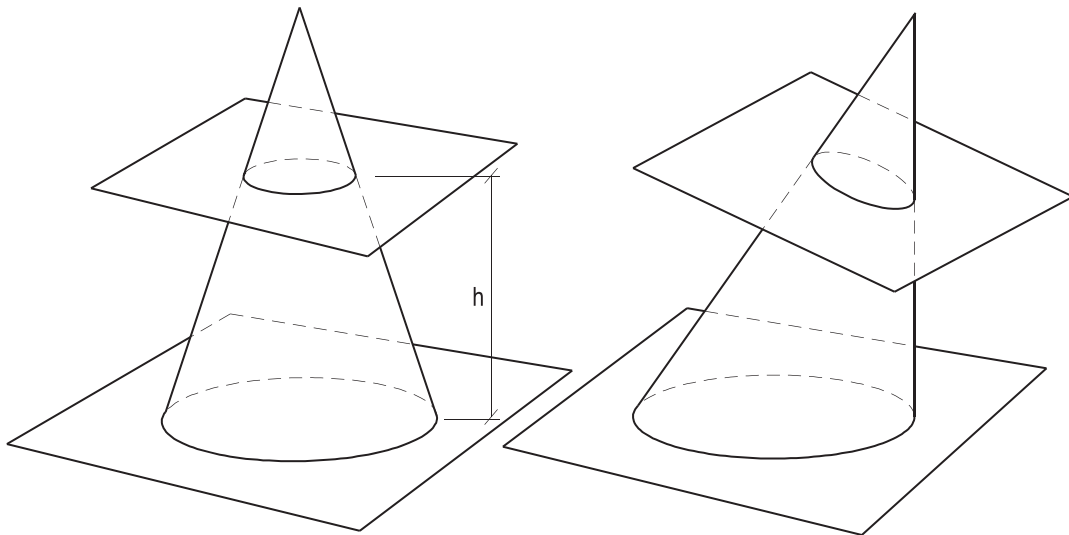


Figura 343

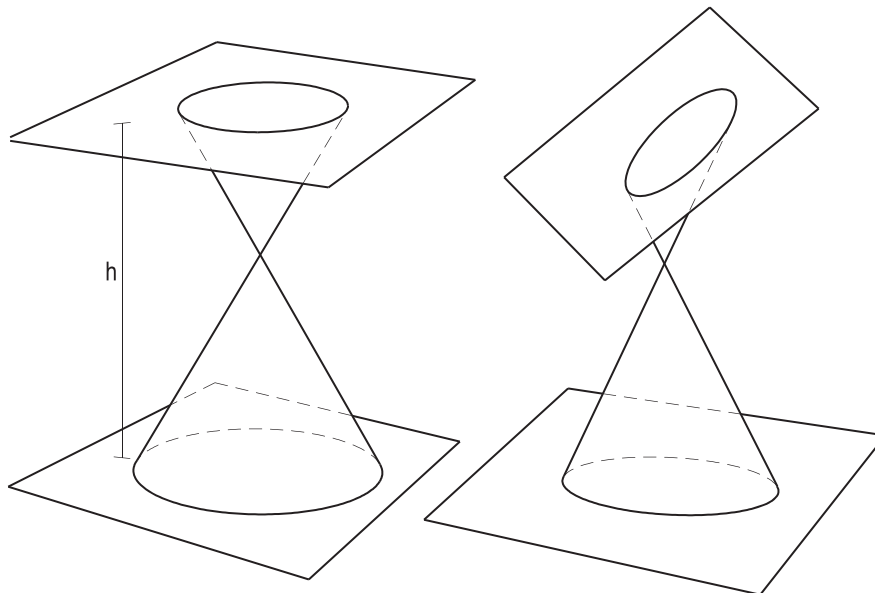


Figura 344

4. Tronco de cone de revolução de primeira espécie é o sólido gerado pela rotação completa de um trapézio retângulo, em torno do lado perpendicular às bases (Figura 345).

O lado fixo, que funciona como eixo, mede a altura do tronco; as bases e o lado oblíquo a elas medem, respectivamente, os raios das bases e a geratriz do sólido. Assim são, respectivamente,  $h$ ,  $R$ ,  $r$  e  $g$ , na Figura 345.

Naturalmente, todas as seções meridianas de um tronco de cone de revolução de primeira espécie são trapézios isósceles iguais, constituídos por duas posições axialmente opostas do trapézio retângulo gerador.

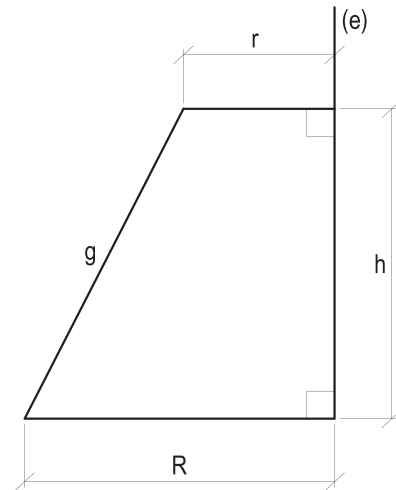


Figura 345

5. Consideremos dois triângulos retângulos,  $(V)(O)(A)$  e  $(V)(O')(A')$ , homotéticos em relação ao vértice  $(V)$ , oposto a um dos catetos (Figura 346), numa razão negativa qualquer.

Ao sólido gerado pela rotação completa da figura, em torno da reta  $(O)(O')$ , dá-se, por definição, o nome tronco de cone de revolução de segunda espécie.

Da própria definição, conclui-se que esse tronco é o sólido formado por dois cones de revolução homotéticos, em razão negativa, em relação ao vértice comum.

O segmento  $(O)(O')$  fixo (Figura 346), na rotação do quadrilátero entrecruzado  $(A)(O)(O')(A')$ , mede a altura do tronco; os segmentos móveis  $(O)(A)$ ,  $(O')(A')$  e  $(A)(A')$  medem, respectivamente, os raios das bases e a geratriz do sólido. O ponto fixo  $(V)$  (Figura 346) é o vértice do tronco.

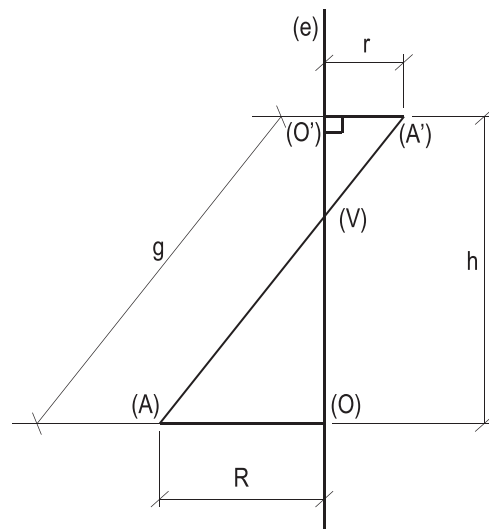


Figura 346

6. É claro, finalmente, que os troncos de cone de revolução de primeira ou de segunda espécie podem ser considerados como sólidos limitados por uma superfície cônica de revolução e por dois planos, perpendiculares ao seu eixo, que cortam, respectivamente, apenas uma ou as duas folhas da superfície.

## 206 – Volumens dos troncos de cones de revolução

Admitindo os troncos de cone de revolução como posições limites ocupadas por troncos de pirâmides regulares – de mesma espécie – inscritos, quando os gêneros de suas bases crescem indefinidamente e adaptando as relações instituídas para os troncos de pirâmide (número 176) aos casos presentes, temos:

1. Troncos de cone de revolução de primeira espécie (Figura 345):

$$V = \left[ (B) + (b) + \sqrt{(B)(b)} \right] \frac{h}{3}$$

$$V = (\pi R^2 + \pi r^2 + \sqrt{\pi R^2 \cdot \pi r^2}) \frac{h}{3} \quad \therefore$$

$$V = \frac{\pi h}{3} (R^2 + r^2 + Rr)$$

2. Troncos de cone de revolução de segunda espécie (Figura 346):

$$V = \left[ (B) + (b) - \sqrt{(B)(b)} \right] \frac{h}{3}$$

$$V = (\pi R^2 + \pi r^2 - \sqrt{\pi R^2 \cdot \pi r^2}) \frac{h}{3} \quad \therefore$$

$$V = \frac{\pi h}{3} (R^2 + r^2 - Rr)$$

## 207 – Desenvolvimento da superfície lateral

1. Os troncos de cones de revolução podem ser considerados como diferenças (os de primeira espécie) ou somas (os de segunda espécie) de dois cones de revolução homotéticos.
2. Assim, para o tronco de cone de revolução de primeira espécie, o desenvolvimento é um setor de coroa circular (Figura 347) de largura igual à geratriz do tronco, limitado por dois arcos cujas retificações são, respectivamente, iguais às das circunferências das bases do tronco (Figura 347).
3. No caso particular do tronco de primeira espécie ser proveniente de um cone equilátero, o desenvolvimento é uma semicoroa circular de largura igual à geratriz do tronco, limitada por dois arcos cujas retificações são, respectivamente, iguais às das circunferências de suas bases (Figura 348).

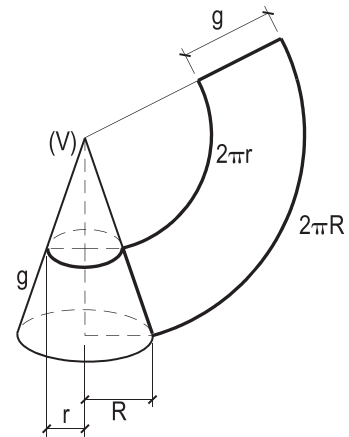


Figura 347

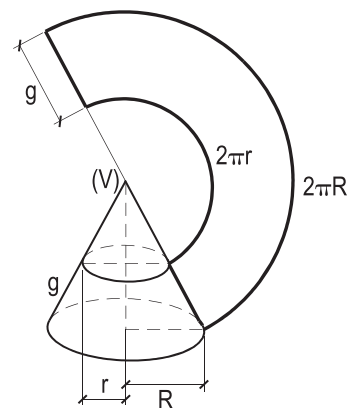


Figura 348

4. Para o tronco de cone de revolução de segunda espécie, o desenvolvimento se compõe de dois setores circulares homotéticos em razão negativa, em relação a seu centro comum, correspondentes, cada um, ao desenvolvimento da superfície lateral de cada um dos cones que formam o tronco (Figura 349).
5. No caso particular em que o tronco de segunda espécie é constituído por dois cones equiláteros, o desenvolvimento de sua superfície lateral é composto por dois semicírculos inversamente homotéticos em relação ao centro comum (Figura 350).

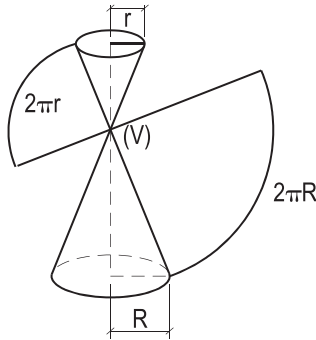


Figura 349

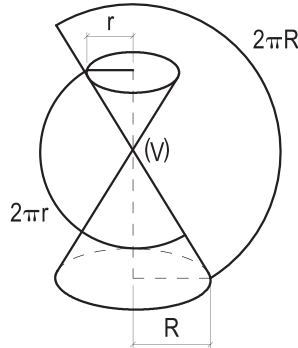


Figura 350

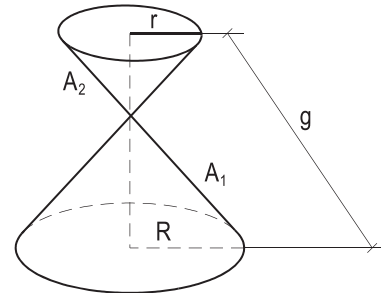


Figura 351

## 208 – Áreas dos troncos de cones de revolução

1. Para os de primeira espécie, tornando a admitir a extensão das relações instituídas para os troncos piramidais regulares de primeira espécie (número 172.1):

$$S_{\ell} = (p_B + p_b) A \quad \therefore \quad S_{\ell} = (\pi R + \pi r) g \quad \therefore \quad \boxed{S_{\ell} = \pi(R + r)g}$$

$$S_t = \pi (R + r) g + \pi R^2 + \pi r^2 \quad \therefore \quad \boxed{S_t = \pi[(R + r)g + R^2 + r^2]}$$

2. Para os de segunda espécie, analogamente (número 172.2), temos:

$$S_{\ell} = p_B A_1 + p_b A_2 = \pi R A_1 + \pi r A_2 \quad (1)$$

Da semelhança entre os dois cones que formam o tronco, podemos (Figura 351) escrever:

$$\frac{A_1}{R} = \frac{A_2}{r} = \frac{A_1 + A_2}{R + r} = \frac{g}{R + r} \quad \therefore \quad A_1 = \frac{gR}{R + r} \quad \text{e} \quad A_2 = \frac{gr}{R + r}$$

Assim, a relação (1) fornece:

$$S_{\ell} = \pi R \frac{gR}{R + r} + \pi r \frac{gr}{R + r} \quad \therefore \quad \boxed{S_{\ell} = \frac{\pi g (R^2 + r^2)}{R + r}}$$

E, para a área total  $S_t$ :

$$S_t = S_{\ell} + (B) + (b) \quad \therefore \quad \boxed{S_t = \frac{\pi g (R^2 + r^2)}{R + r} + \pi R^2 + \pi r^2}$$

## 209 – Teorema de Dandelin

Quando se secciona uma superfície cônica de revolução por um plano não pertencente ao vértice da superfície, nem perpendicular ao seu eixo, a seção produzida é uma elipse, uma hipérbole ou uma parábola conforme, respectivamente, o plano:

1. corte todas as geratrizes de uma só folha;
2. corte as duas folhas da superfície;
3. seja paralelo a apenas uma geratriz da superfície.

Demonstração:

1ª Parte: seção elítica

Estudemos uma superfície cônica de revolução e um plano ( $\alpha$ ) que, sendo exterior ao vértice ( $V$ ) da superfície e oblíquo ao seu eixo, corte todas as geratrizes de uma das folhas da superfície.

Consideremos, para tal, as duas esferas inscritas na superfície cônica e tangentes ao plano ( $\alpha$ ) respectivamente nos pontos ( $F$ ) e ( $F'$ ) (Figura 352), bem como os paralelos de contato de cada esfera com a superfície cônica.

Para estudar a seção, uma curva contínua e fechada, tomemos um qualquer de seus pontos ( $M$ ) e unamo-lo a ( $F$ ), a ( $F'$ ) e a ( $V$ ), criando, então, a geratriz ( $V$ )( $M$ ) da superfície, a qual encontra os paralelos de contato das superfícies esféricas com a cônica respectivamente nos pontos ( $R$ ) e ( $S$ ) (Figura 352).

Por pertencerem ao plano ( $\alpha$ ), tangente às duas esferas consideradas, os segmentos  $\overline{(M)(F)}$  e  $\overline{(M)(F')}$  são tangentes a cada uma delas. Também os segmentos  $\overline{(M)(R)}$  e  $\overline{(M)(S)}$ , pertencentes à geratriz ( $V$ )( $M$ ), são a elas, respectivamente, tangentes.

Como tangentes – respectivamente iguais – de ( $M$ ) a cada uma das esferas, temos:

$$\begin{aligned}\overline{(M)(F)} &= \overline{(M)(R)} \\ \overline{(M)(F')} &= \overline{(M)(S)}\end{aligned}$$

---

Somando membro a membro:  $\overline{(M)(F)} + \overline{(M)(F')} = \overline{(R)(S)}$

E como  $\overline{(R)(S)}$  é o valor constante da geratriz do tronco de cone de revolução de primeira espécie limitado, na superfície dada, pelos paralelos de contato das esferas consideradas (Figura 352), concluímos, da própria definição, que a seção é uma elipse de focos ( $F$ ) e ( $F'$ ) e eixo transversal igual a  $\overline{(R)(S)}$ .

Fica, assim, demonstrada a primeira parte do teorema.

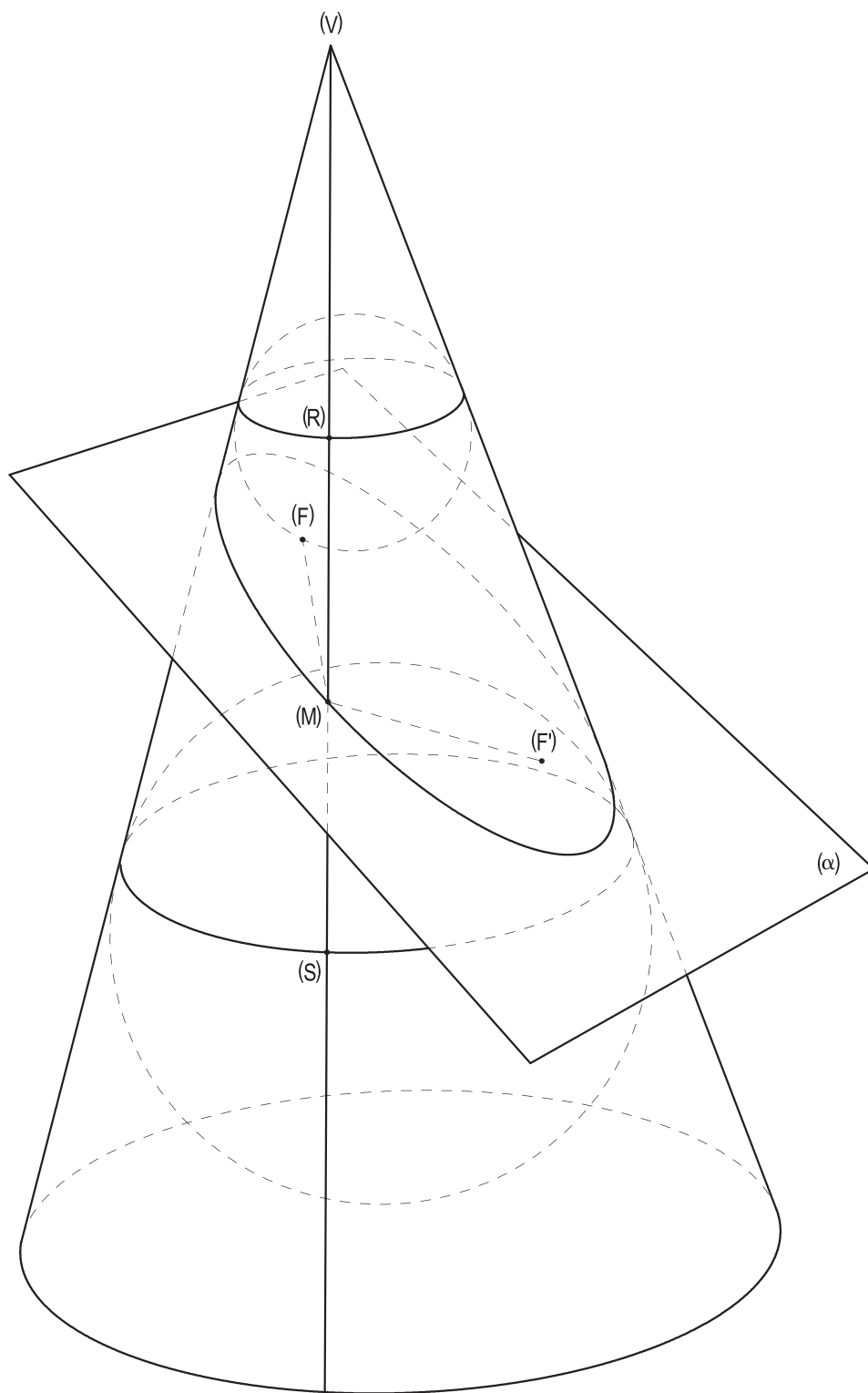


Figura 352

## 2ª Parte: seção hiperbólica

Analisemos, agora, uma superfície cônica de revolução e um plano ( $\alpha$ ) que, sendo exterior ao vértice (V) da superfície, corte suas duas folhas (Figura 353).

Consideremos, ainda, as duas esferas inscritas em cada uma das folhas da superfície e tangentes ao plano secante, respectivamente nos pontos (F) e (F'), bem como os paralelos de contato de cada uma dessas esferas com a superfície cônica (Figura 353).

Para estudar a seção – uma curva contínua, aberta e com dois ramos –, tomemos um qualquer de seus pontos (M) e unamo-lo a (F), a (F') e a (V), criando, então, a geratriz (V)(M) da superfície, a qual encontra os paralelos de contato das duas superfícies esféricas com a cônica, respectivamente nos pontos (R) e (S) (Figura 353).

Por pertencerem ao plano ( $\alpha$ ), tangente às duas esferas, os segmentos  $\overline{(M)(F)}$  e  $\overline{(M)(F')}$  são tangentes a cada uma das duas esferas. Também os segmentos  $\overline{(M)(R)}$  e  $\overline{(M)(S)}$ , pertencentes à geratriz considerada, são tangentes a essas esferas.

Como tangentes, respectivamente iguais, de (M) a cada uma das esferas, temos:

$$\begin{aligned}\overline{(M)(F)} &= \overline{(M)(R)} \\ \overline{(M)(F')} &= \overline{(M)(S)}\end{aligned}$$

---

Subtraindo membro a membro:  $\overline{(M)(F)} - \overline{(M)(F')} = \overline{(R)(S)}$

Como  $\overline{(R)(S)}$  é o valor constante da geratriz do tronco de cone de revolução de segunda espécie limitado, na superfície cônica, pelos paralelos de contato das duas esferas consideradas (Figura 353) e como o ponto (M) escolhido foi arbitrário, tal propriedade vale para todos os pontos da seção que, assim assegura, para todos eles, a diferença de distâncias aos pontos fixos (F) e (F') ser constante.

Ora, se o segmento  $\overline{(R)(S)}$  é constante e igual para todos os pontos (M) da curva seção que o plano considerado produz, da própria definição, conclui-se, então, que a seção é uma hipérbole de focos (F) e (F') e eixo transversal igual a  $\overline{(R)(S)}$ .

Naturalmente, tudo se passaria da mesma forma se o ponto (M), genérico da seção plana à superfície, houvesse sido tomado sobre o outro ramo da curva seção.

Fica, então, demonstrada a segunda parte do teorema.



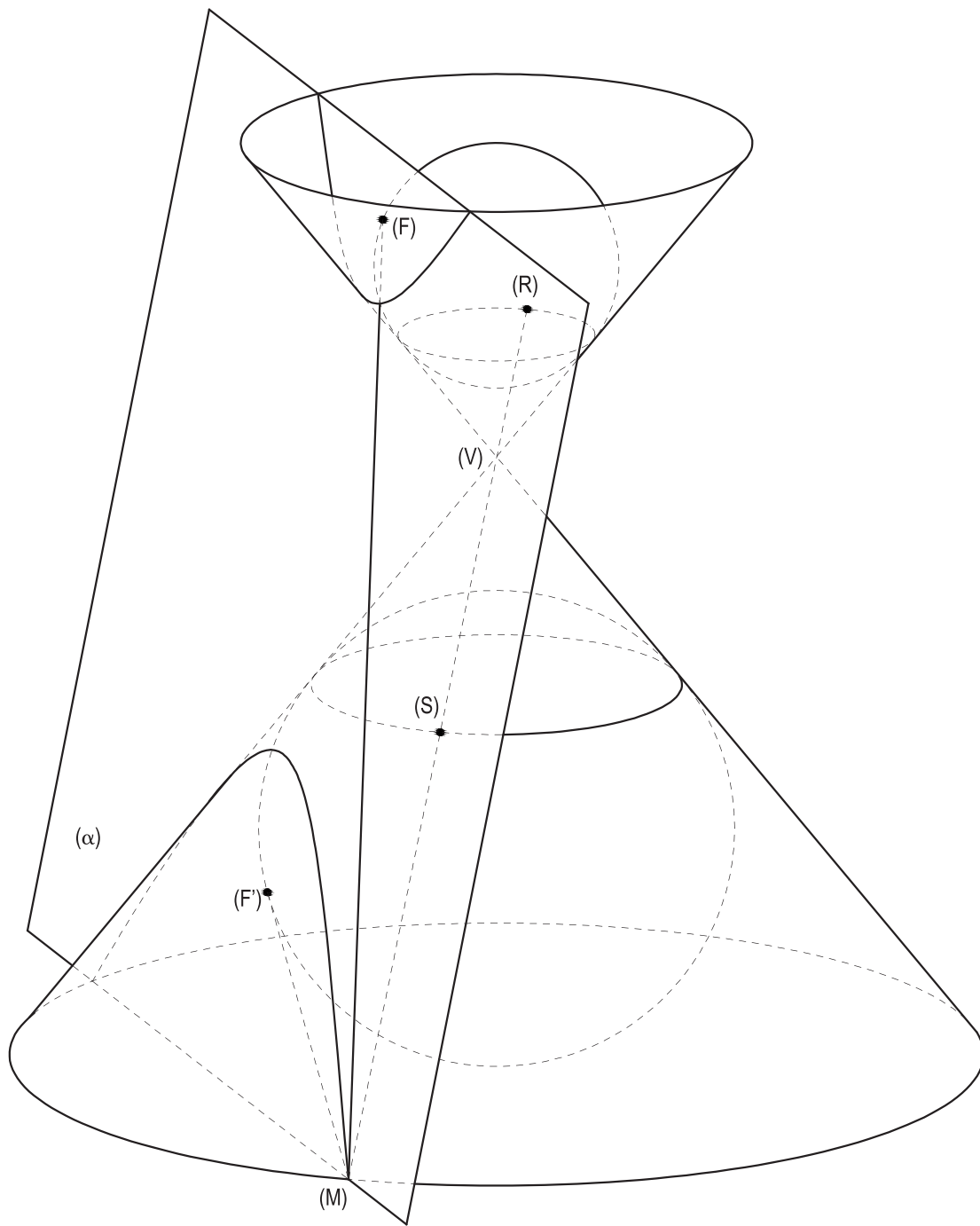


Figura 353

### 3ª Parte: seção parabólica

Analisemos, por fim, uma superfície cônica de revolução, de vértice (V), e o plano ( $\alpha$ ), secante à superfície e paralelo à sua geratriz (V)(J), e apenas a esta (Figura 354).

Consideremos, ainda, a esfera inscrita na superfície cônica e tangente ao plano secante no ponto (F), bem como o plano ( $\beta$ ), do paralelo de contato existente entre a superfície dessa esfera e a cônica (Figura 354), o qual corta o plano ( $\alpha$ ) segundo a reta (d). Observe-se que tal plano ( $\beta$ ) é, naturalmente, perpendicular ao eixo da superfície.

Para estudar a seção, uma curva contínua e aberta, tomemos um qualquer de seus pontos (M) e consideremos o plano ( $\gamma$ ), pertencente a (M) e perpendicular ao eixo da superfície, o qual corta o plano ( $\alpha$ ), secante, segundo a reta (t) (Figura 354).

Unamos (M) a (F) e a (V), criando, então, a geratriz (V)(M), da superfície cônica, que corta o paralelo de contato da superfície esférica considerada com a cônica no ponto (R) (Figura 354).

Consideremos, ainda, o plano meridiano ( $\varphi$ ) da superfície cônica, perpendicular a ( $\alpha$ ), dando-se origem ao quadrilátero (J)(S)(T)(U) (Figura 354) que é um paralelogramo, já que ( $\beta$ ) é paralelo a ( $\gamma$ ) e, por hipótese, ( $\alpha$ ) é paralelo à geratriz (V)(S)(J).

E porque as retas (d) e (t) são paralelas, como interseções dos planos paralelos ( $\beta$ ) e ( $\gamma$ ) com ( $\alpha$ ), a perpendicular (M)(E) à reta (d) dá origem ao retângulo (M)(E)(T)(U) (Figura 354).

Por pertencer ao plano ( $\alpha$ ), tangente à esfera considerada, o segmento  $\overline{(M)(F)}$  é a ela tangente. E, por pertencer à geratriz (V)(R)(M), o segmento  $\overline{(M)(R)}$  é, também, tangente a essa esfera.

Como tangentes de (M) à esfera inscrita, temos:

$$\overline{(M)(F)} = \overline{(M)(R)} \quad (1)$$

Como geratrizes do tronco de cone de revolução de primeira espécie limitado na superfície cônica pelos planos ( $\beta$ ) e ( $\gamma$ ), vem:

$$\overline{(M)(R)} = \overline{(J)(S)} \quad (2)$$

Como lados opostos do paralelogramo (J)(S)(T)(U) (Figura 354), temos:

$$\overline{(J)(S)} = \overline{(U)(T)} \quad (3)$$

E, como lados opostos do retângulo (M)(E)(T)(U):

$$\overline{(U)(T)} = \overline{(M)(E)} \quad (4)$$

Reunindo as relações (1), (2), (3) e (4), temos:

$$\overline{(M)(F)} = \overline{(M)(R)} = \overline{(J)(S)} = \overline{(U)(T)} = \overline{(M)(E)}$$

Ou, simplesmente:

$$\overline{(M)(F)} = \overline{(M)(E)}$$

Tal equidistância, a um ponto fixo (F) e a uma reta (d) fixa também, provada para um ponto genérico (M) da seção, valerá, então, para todos os seus pontos.

Assim, porque um ponto (M), qualquer, da seção equidista do ponto fixo (F) e da reta fixa (d), concluímos, pela própria definição (*Geometria Plana*, número 388), que a seção é uma parábola de foco (F) e diretriz (d) (Figura 354).

Fica, por isso, provada a terceira parte do teorema.

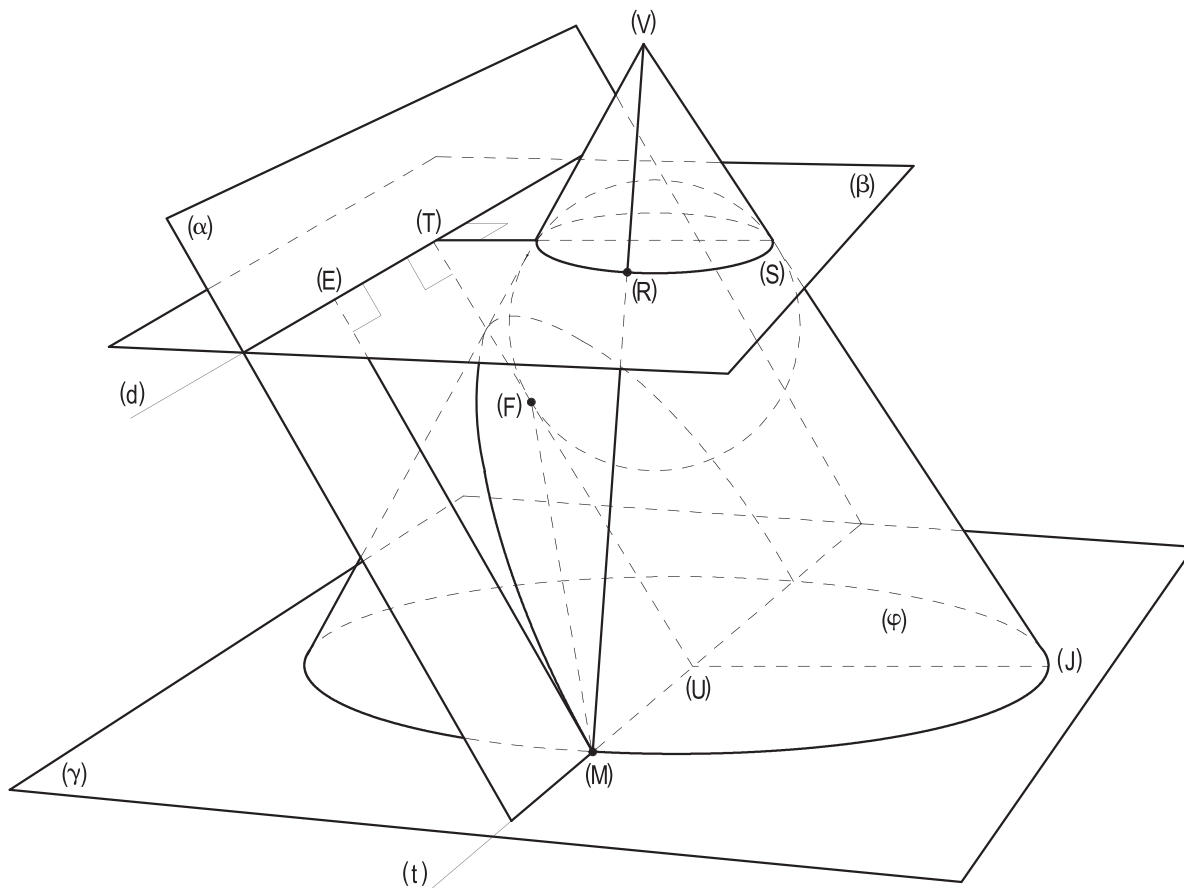


Figura 354

Então, quando se secciona uma superfície cônica de revolução por um plano não perpendicular ao vértice da superfície nem perpendicular ao seu eixo, a seção produzida é uma elipse, uma hipérbole ou uma parábola, conforme, respectivamente, o plano corte todas as geratrizes de uma só folha, corte as duas folhas da superfície, ou seja paralelo a apenas uma de suas geratrizes.

Temos, assim, demonstrado o teorema de Dandelin.

## 210 – Observações

1. Dados uma superfície cônica de revolução e um plano secante, não pertencente ao vértice da superfície nem perpendicular ao seu eixo, a seção que ele produz na superfície é uma elipse, uma hipérbole ou uma parábola, conforme, respectivamente, o ângulo que tal plano forma com o eixo (e) da superfície seja maior, menor, ou igual ao ângulo que as geratrizes da superfície formam com seu eixo.

De fato, ao considerarmos uma seção meridiana da superfície cônica e a reta  $r$  que o plano secante provoca em tal meridiano, fica fácil comparar os ângulos  $\hat{x}$ , que o plano secante forma com o eixo (e) da superfície, e  $\hat{y}$  que as geratrizes formam com o eixo (e) (Figuras 355 e 356). Para que o plano secante produza uma elipse, basta que ele atinja todas as geratrizes de uma só folha e, para que seja uma hipérbole a seção resultante, é suficiente que o plano corte as duas folhas da superfície.

Como ângulos externos (*Geometria Plana*, número 65.1), podemos escrever (Figura 355):

- para o triângulo (V)(1)(2),  $\hat{x} > \hat{y}$
- para o triângulo (V)(3)(4),  $\hat{x} < \hat{y}$

E, para que o plano secante origine uma parábola, vimos que é preciso que ele seja paralelo a uma – e apenas a uma – geratriz da superfície. Assim, como ângulos correspondentes, podemos (Figura 356) anotar:  $\hat{x} = \hat{y}$ .

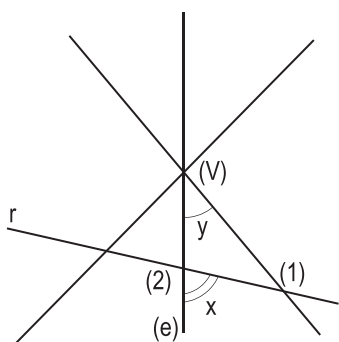


Figura 355

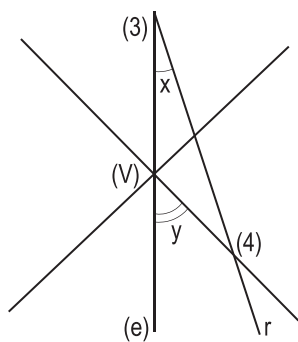
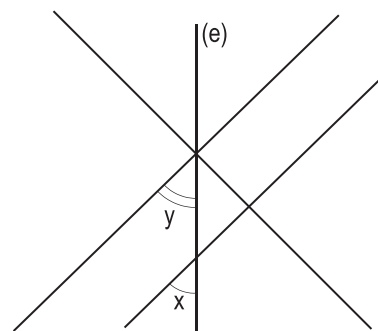


Figura 356



2. Quando um plano contém o vértice de uma superfície cônica de revolução, mas não corta nenhuma de suas geratrizes, não se produz qualquer figura seção, sendo, então, o vértice o único ponto comum ao plano e à superfície cônica.
3. Quando um plano que contém o vértice de uma superfície cônica a secciona, o resultado de tal interseção é um par de geratrizes da superfície.
4. Quando um plano exterior ao vértice de uma superfície cônica de revolução é perpendicular ao seu eixo, a seção produzida é, naturalmente, um círculo com centro no eixo da superfície.

# CAPÍTULO XX

## ESFERA

### 211 – Definições

1. Esfera é o sólido gerado pela revolução de um semicírculo em torno de seu diâmetro.
2. Raio, diâmetro e centro de uma esfera são os mesmos da superfície esférica que a limita (número 182.4).
3. Polos de um círculo de uma esfera são os extremos do diâmetro da esfera que é perpendicular ao plano do círculo considerado. Assim são os polos P e P' do círculo (c) da esfera (O) da Figura 357.
4. Distâncias polares de um círculo (c) de uma esfera (O) são as distâncias (d e d', na Figura 357) de qualquer de seus pontos (M) a cada um de seus polos.

A não ser que se faça clara menção contrária, usualmente, chama-se distância polar de um círculo de uma esfera a menor das duas (d, na Figura 357).

Evidentemente, entre as duas distâncias d e d' de um círculo de uma esfera (O), de raio R, existe sempre, para qualquer ponto (M), de sua superfície, a relação (Figura 357):

$$d^2 + d'^2 = (2R)^2$$

5. Distância esférica entre dois pontos (M) e (N) da superfície de uma esfera (O) é o comprimento do menor arco de círculo máximo (M)(N) limitado pelos dois pontos (Figura 358). A distância esférica entre dois pontos da superfície de uma esfera mede o menor percurso que se pode descrever entre os dois pontos sobre a superfície.

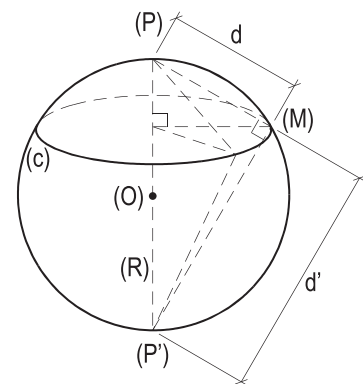


Figura 357

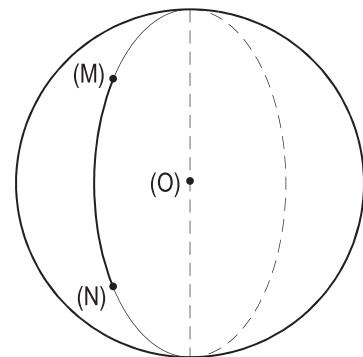


Figura 358

6. Zona esférica é a porção da superfície esférica limitada por dois planos que a cortam, paralelos entre si (Figura 359).

A distância entre esses planos é denominada altura da zona ( $h$ , na Figura 359).

7. Segmento esférico de duas bases é o sólido produzido numa esfera, entre dois planos paralelos que a seccionam.

O segmento esférico de duas bases é limitado por uma zona esférica e por dois círculos (Figura 359).

8. Calota esférica é cada uma das duas porções em que se divide uma superfície esférica pelo seccionamento de um plano qualquer.

A distância do polo do círculo base de uma calota ao plano deste círculo ( $h$ , na Figura 360) é denominada altura da calota.

9. Segmento esférico de uma base é cada uma das partes em que se divide uma esfera ao seccioná-la por um plano.

O segmento esférico de uma base é, então, limitado por uma calota esférica e por um círculo (Figura 360).

10. Fuso esférico é a porção da superfície esférica limitada entre as faces de um diedro, cuja aresta contém seu centro.

Assim, o fuso esférico é limitado, lateralmente, por dois semicírculos máximos da esfera, com diâmetro comum.

Denomina-se ângulo do fuso o retilíneo do diedro que o limita ( $\hat{\alpha}$ , na Figura 361).

11. Cunha esférica é o sólido limitado, numa esfera entre as duas faces de um diedro, cuja aresta contenha o centro da esfera.

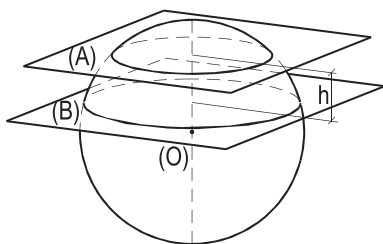


Figura 359

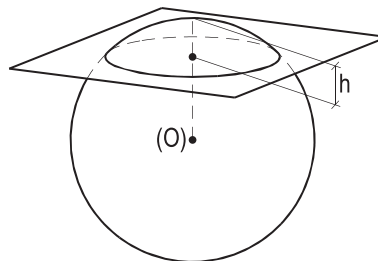


Figura 360

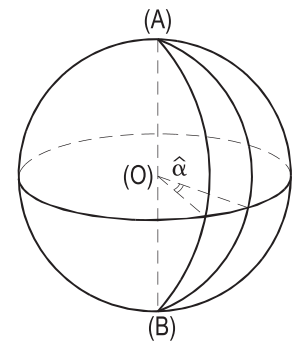


Figura 361

## 212 – Observações

1. Todo plano secante a uma esfera produz, por seção, um círculo (Figura 362) cujo centro é o pé da perpendicular baixada do centro da esfera ao plano secante e cujo raio  $r$  pode ser calculado, em função do raio  $R$  da esfera e da distância  $d$  do centro da esfera ao plano (Figura 362), pela expressão:  $r = \sqrt{R^2 - d^2}$ .
2. Assim, o raio da seção plana cresce quando seu plano se aproxima do centro da esfera, atingindo seu valor máximo quando o plano secante contém esse centro. E, naturalmente, diminui quando o plano se afasta do centro da esfera.
3. É claro, então, que todos os planos secantes a uma esfera e equidistantes de seu centro produzem seções circulares iguais.

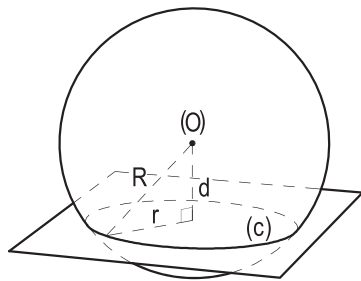


Figura 362

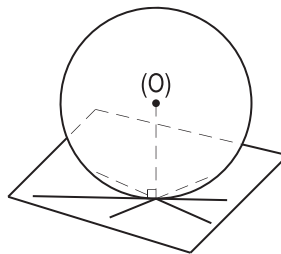


Figura 363

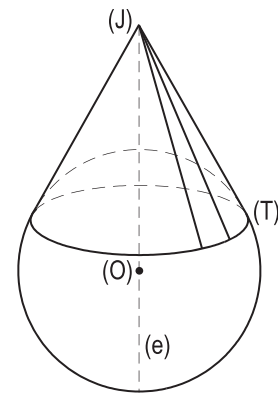


Figura 364

## 213 – Planos e retas tangentes

Como já foi visto (número 187), todo plano tangente a uma esfera é perpendicular ao raio relativo ao ponto de contato (Figura 363). E, reciprocamente, todo plano perpendicular a um raio, em sua extremidade, é tangente à esfera.

Por um ponto da superfície de uma esfera, pode-se traçar uma infinidade de retas tangentes à esfera, todas pertencentes ao plano tangente a ela, naquele ponto (Figura 363).

Por um ponto (J) exterior a uma esfera, pode-se, igualmente, traçar uma infinidade de tangentes a ela, todas geratrizes do cone de revolução cujo vértice é (J) e cuja base é o paralelo de contato entre as superfícies cônica e esférica (Figura 364). E, por isso mesmo, todos os segmentos limitados entre o ponto (J) considerado e os pontos de contato (T) das tangentes são iguais (Figura 364).

## 214 – Posições relativas entre duas esferas

Duas esferas podem ser exteriores, secantes, tangentes (interna ou externamente) ou uma interior à outra (Figuras 365, 366, 367, 368 e 369). Neste último caso, incluem-se as esferas concêntricas (Figura 370).

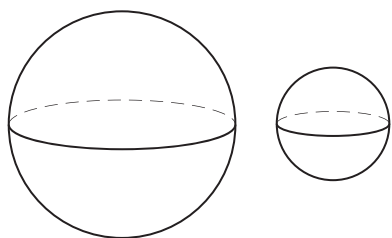


Figura 365

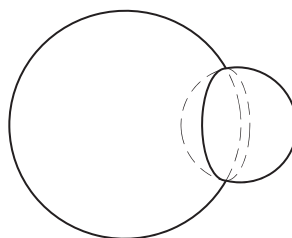


Figura 366

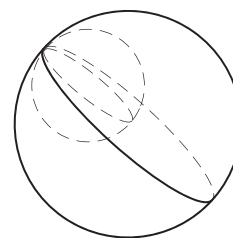


Figura 367

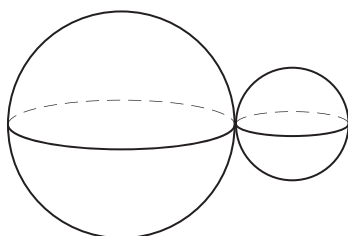


Figura 368

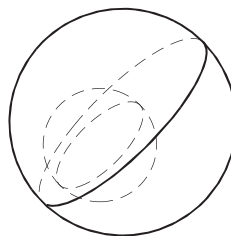


Figura 369

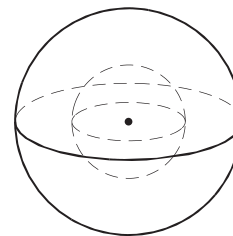


Figura 370

## 215 – Observações

1. Quando duas esferas são secantes, o círculo comum às duas tem seu centro colinear com os centros das duas esferas e pertence a um plano perpendicular à linha dos centros das duas (Figura 371).
2. Quando duas esferas são tangentes, o ponto de contato pertence à linha dos centros (Figuras 372 e 373).

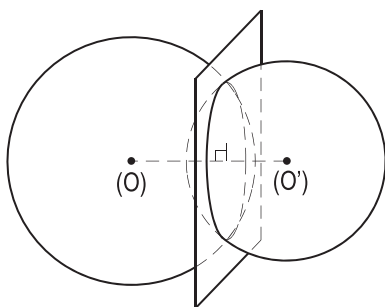


Figura 371

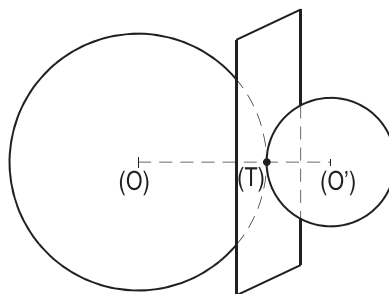


Figura 372

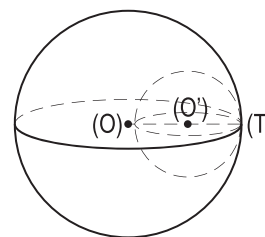


Figura 373



## 216 – Teorema

A área da superfície gerada pela revolução de um segmento de reta em torno de um eixo coplanar que não o atravessa, nem lhe é perpendicular, é igual ao produto da projeção ortogonal do segmento sobre o eixo pelo comprimento do círculo que tem raio igual à porção da mediatriz do segmento, compreendida entre ele e o eixo.

Demonstração: No caso mais geral em que o segmento girante  $\overline{(A)(B)}$  não encontra o eixo, porque em sua revolução ele gera a superfície lateral de um tronco de cone de revolução de primeira espécie (número 208.1), designando por  $h$  e  $z$ , respectivamente, a projeção ortogonal de  $\overline{(A)(B)}$  sobre o eixo e a porção da mediatriz de  $\overline{(A)(B)}$  compreendida entre ele e o eixo (Figura 374), e por  $R$ ,  $r$  e  $g$  os raios das bases e a geratriz  $\overline{(A)(B)}$  do tronco, a área  $S$  gerada será (número 208.1):

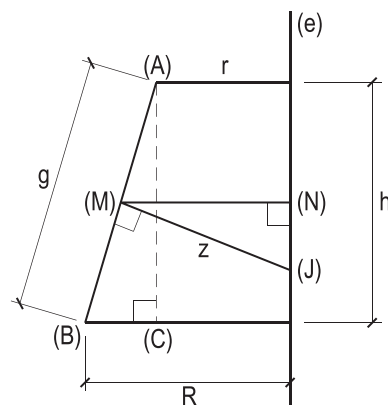


Figura 374

$$S = \pi (R + r) g = \pi [2 \cdot \overline{(M)(N)}] g = 2 \pi \overline{(M)(N)} \cdot g,$$

onde  $\overline{(M)(N)}$  é a base média do trapézio retângulo limitado entre  $\overline{(A)(B)}$  e o eixo.

Mas, da semelhança existente entre os triângulos  $(A)(B)(C)$  e  $(M)(N)(J)$  (lados respectivamente perpendiculares) (Figura 374), vem:

$$\frac{\overline{(M)(N)}}{\overline{(A)(C)}} = \frac{\overline{(M)(J)}}{\overline{(A)(B)}} \quad \therefore \quad \frac{\overline{(M)(N)}}{h} = \frac{z}{g} \quad \therefore \quad \overline{(M)(N)} g = zh$$

Substituindo esta relação na anterior, vem:  $S = 2 \pi z \cdot h$

No caso particular em que o segmento girante  $\overline{(A)(B)}$  tem um extremo (A) sobre o eixo, a superfície gerada é a lateral de um cone (número 201) de geratriz  $\overline{(A)(B)} = g$ , altura  $\overline{(A)(C)} = h$  e raio da base  $\overline{(B)(C)} = r$  (Figura 375).

Assim, pode-se (número 203.1) escrever:

$$S = \pi r g = \pi [2 \overline{(M)(N)}] g$$

onde (M) é o ponto médio de  $\overline{(A)(B)}$  e  $\overline{(M)(N)}$  é perpendicular ao eixo. E, da semelhança dos triângulos  $(A)(B)(C)$  e  $(M)(N)(J)$  (lados respectivamente perpendiculares), temos:

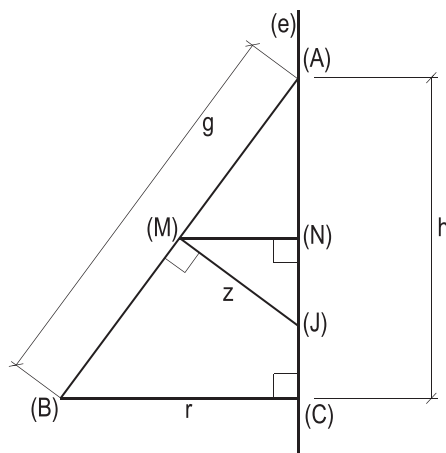


Figura 375

$$\frac{\overline{(M)(N)}}{\overline{(A)(C)}} = \frac{\overline{(M)(J)}}{\overline{(A)(B)}} \quad \therefore \frac{\overline{(M)(N)}}{h} = \frac{z}{g} \quad \therefore \overline{(M)(N)} g = zh$$

Substituindo esta relação na anterior, vem:

$$S = 2 \pi z \cdot h$$

No caso ainda mais particular em que o segmento girante é paralelo ao eixo (Figura 376), a superfície gerada é a lateral de um cilindro de revolução, podendo-se (número 190.3), pois, para a área gerada (S), escrever:

$$S = 2 \pi rh$$

Sendo  $z$  a porção da mediatriz de  $\overline{(A)(B)}$  limitada entre ele e o eixo, temos:

$$S = 2 \pi z \cdot h$$

Assim, analisadas todas as hipóteses possíveis para o segmento girante, fica demonstrado que a área da superfície gerada pela revolução de um segmento de reta em torno de um eixo coplanar que não o atravessa, nem lhe é perpendicular, é igual ao produto da projeção ortogonal do segmento sobre o eixo, pelo comprimento do círculo que tem raio igual à porção da mediatriz do segmento limitada entre ele e o eixo.

## 217 – Teorema de Arquimedes

A área da superfície gerada pela revolução de uma linha poligonal regular em torno de um eixo coplanar que não a atravessa e que contém o centro do círculo que a circunscreve é igual ao produto da projeção ortogonal da linha sobre o eixo pelo comprimento do círculo que tem raio igual ao apótema da linha.

Demonstração: Seja a revolução da linha poligonal regular  $(A)(B)(C) \dots$  em torno do eixo (e) de seu plano, que não a corta e que contém o centro (O) do círculo circunscrito (Figura 377).

Porque a área  $S$  gerada pela revolução da linha poligonal é igual à soma das geradas por seus lados  $(A)(B)$ ,  $(B)(C)$ , ... e porque, pela própria hipótese, nenhum destes lados é cortado pelo eixo – e, naturalmente, porque nenhum deles pode ser perpendicular ao eixo –, podemos (número 216) escrever:

$$S = 2\pi z_1 h_1 + 2\pi z_2 h_2 + 2\pi z_3 h_3 + \dots$$

Mas como a linha poligonal é regular,  $z_1 = z_2 = z_3 \dots = a$  (onde  $a$  é o apótema).

Logo:  $S = 2\pi a (h_1 + h_2 + h_3 + \dots)$

$$S = 2 \pi a \cdot h$$

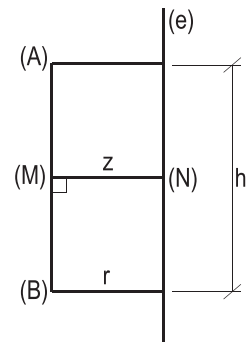


Figura 376

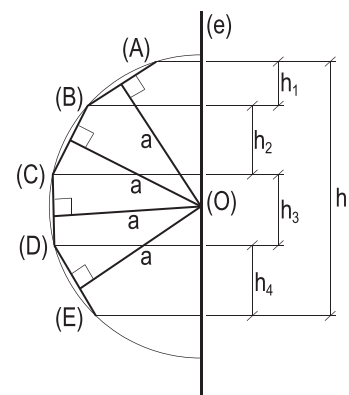


Figura 377

## 218 – Área da esfera

Consideremos (Figura 378) uma linha poligonal regular que tenha seus vértices extremos sobre um diâmetro do círculo que a circunscribe e que sofra revolução em torno desse diâmetro.

Porque, então, a projeção ortogonal da linha poligonal sobre o eixo é o próprio diâmetro  $2R$  considerado, a área gerada pela revolução da linha é obtida (número 217) pela relação:

$$S = 2\pi ah = 2\pi a(2R) = 4\pi Ra \quad (1)$$

Fazendo aumentar indefinidamente o gênero da linha poligonal regular – mas conservando seus vértices extremos sobre aquele diâmetro –, ela tende ao perímetro do semicírculo circunscrito e a área por ela gerada à da esfera. E porque, nessas condições, o apótema da linha poligonal tende ao raio  $R$  do semicírculo, a área  $S$  da esfera será:

$$S = 4\pi RR$$

∴

$$S = 4\pi R^2$$

## 219 – Observações

1. A área da esfera é igual ao quádruplo da área de um de seus círculos máximos.
2. A área da esfera, em função de seu diâmetro  $D$ , é:

$$S = 4\pi \left(\frac{D}{2}\right)^2 = 4\pi \frac{D^2}{4}$$

$$S = \pi D^2$$

3. A área da esfera é igual à área lateral do cilindro equilátero a ela circunscrito. De fato, sabe-se (número 190.4) que a área  $S_\ell$  do cilindro equilátero (Figura 379) é:

$$S = 4\pi R^2$$

## 220 – Área do fuso esférico

Porque o fuso é uma fração da superfície da esfera, sendo  $R$  o raio da esfera e  $\alpha$ , o ângulo do fuso, medido em graus (Figura 361), sua área  $S$  será:

$$S = \frac{\alpha}{360^\circ} 4\pi R^2$$

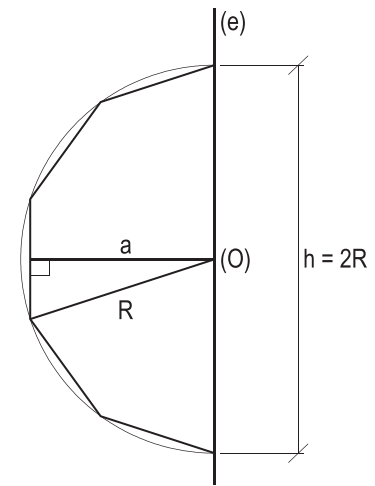


Figura 378

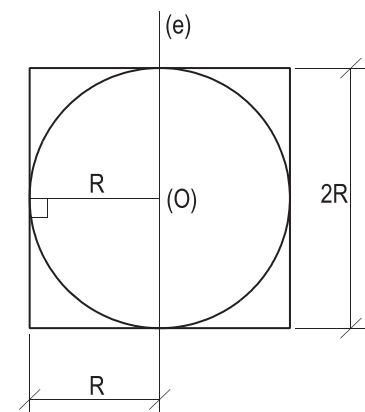


Figura 379

## 221 – Áreas da zona e da calota esférica

Consideremos uma linha poligonal regular, sofrendo revolução em torno de um eixo de seu plano, passando pelo centro do arco de círculo que a circunscreve, não atravessando a linha e fixemos seus vértices extremos (A) e (B), para as posições indicadas nas Figuras 380 e 381.

Aumentando indefinidamente o número de lados da linha poligonal, ela tende ao arco de círculo que a circunscreve. Assim, a superfície gerada, na revolução, será uma zona esférica (Figura 380) ou uma calota esférica (Figura 381), conforme, respectivamente, nenhum dos extremos, ou um deles, pertença ao eixo.

E, para os dois casos, porque o apótema  $a$  da linha poligonal tende ao raio  $R$  do arco e porque sua projeção  $h$  sobre o eixo é invariante, a área gerada  $S$  será (número 217):

$$S = 2 \pi R \cdot h$$

onde  $h$  é a altura da zona (ou da calota) e  $R$  o raio da esfera que a contém.

## 222 – Observações

1. Numa mesma esfera (ou em esferas iguais), a razão entre as áreas de duas zonas (ou de duas calotas, ou de uma zona e de uma calota) é igual à razão entre suas alturas. De fato, para suas áreas  $S$  e  $S'$  e para suas alturas  $h$  e  $h'$  (Figura 382), pode-se escrever:

$$\frac{S'}{S} = \frac{2 \pi R h'}{2 \pi R h} = \frac{S'}{S} = \frac{h'}{h}$$

2. Numa mesma esfera (ou em esferas iguais), todas as zonas e calotas de mesma altura são equivalentes.

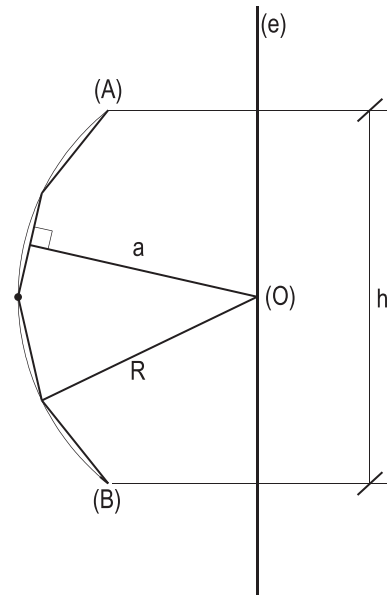


Figura 380

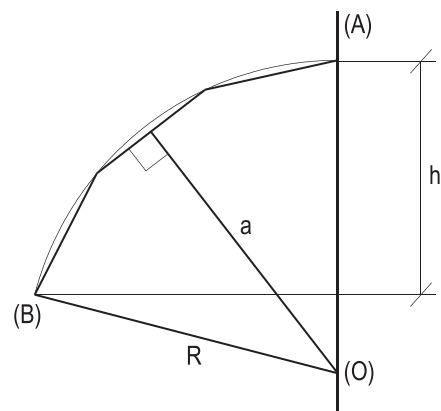


Figura 381

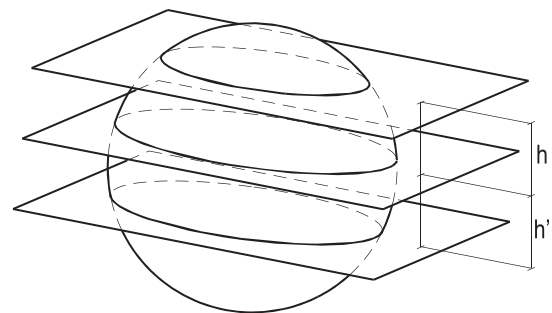


Figura 382

3. A razão entre as áreas de uma zona (ou calota) e da esfera que a contém é igual à razão entre a altura da zona (ou da calota) e o diâmetro da esfera. De fato (Figura 383):

$$\frac{S_z}{S_e} = \frac{2 \pi R h}{4 \pi R^2} \quad \therefore \quad \boxed{\frac{S_z}{S_e} = \frac{h}{2R}}$$

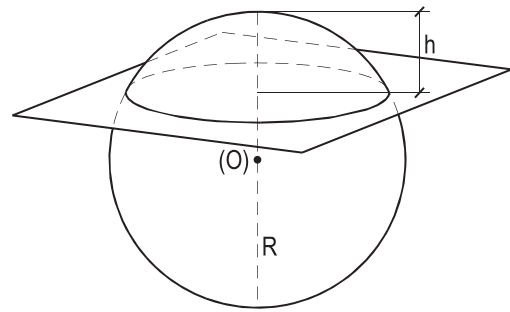


Figura 383

4. A área  $S$  de uma calota esférica pode ser calculada em função, apenas, da distância polar  $d$  de sua base.

De fato, considerando uma seção meridiana da calota em estudo, o triângulo retângulo  $(P)(A)(P')$  – sendo  $(P)$  e  $(P')$  os polos da base da calota – permite (Figura 384) escrever (*Geometria Plana*, número 197.1):

$$d^2 = 2 R \cdot h$$

$$\therefore S = 2 \pi R h = \pi (2 R h)$$

E, então,

$$\boxed{S = \pi d^2}$$

5. Como decorrência do item anterior, pode-se concluir que, em esferas quaisquer, iguais ou mesmo diferentes, são equivalentes calotas que tenham distâncias polares iguais.

De fato, basta observar que a área da calota esférica é função exclusiva do valor da distância polar de sua base.

6. Aliás, analisando a expressão acima instituída (número 222.4), conclui-se que a área de uma calota esférica qualquer é igual à do círculo que tem raio igual à distância polar de seu círculo base (Figura 385).

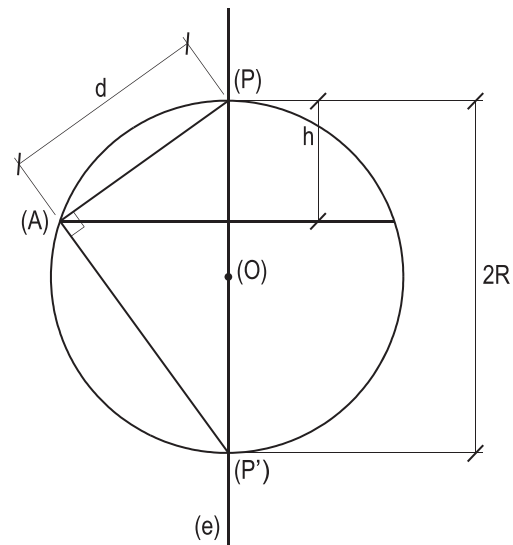


Figura 384

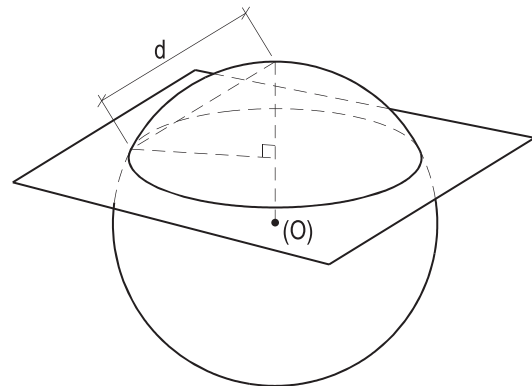


Figura 385

7. A área de uma zona esférica (Figura 386), ou de uma calota esférica (Figura 387), é igual à área lateral do cilindro de revolução de altura igual à da zona (ou da calota) e de raio igual ao da esfera à qual ela pertence.

De fato, as áreas de todas essas três figuras (números 221 e 190.3) se escrevem:  $S = 2 \pi R \cdot h$ .

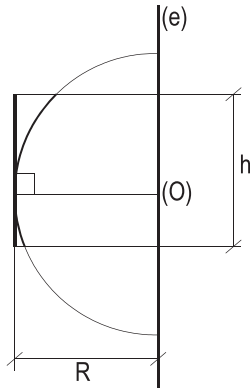


Figura 386

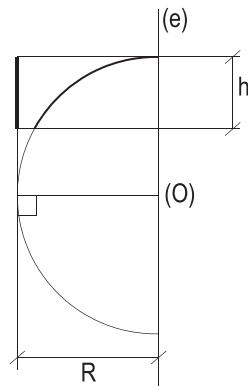


Figura 387

## 223 – Definições

1. Setor esférico é o sólido gerado pela revolução de um setor circular em torno de eixo coplanar que não o atravessa e que contém o centro do círculo ao qual ele pertence (Figuras 388, 389 e 390).

Conforme as posições ocupadas pelos raios que definem o setor circular, em relação ao eixo, o setor esférico pode ser limitado superficialmente por uma zona esférica e pelas superfícies laterais de dois cones de revolução (Figura 388); por uma calota esférica e pela superfície lateral de um cone de revolução (Figura 389); por uma zona esférica, por um círculo e pela superfície lateral de um cone de revolução (Figura 390).

Em todos os casos, denomina-se altura do setor esférico a altura da zona (ou calota) que limita o setor. Assim, a altura nada mais é que a projeção ortogonal do arco (A)(B) do setor circular girante sobre o eixo (Figuras 388, 389 e 390).

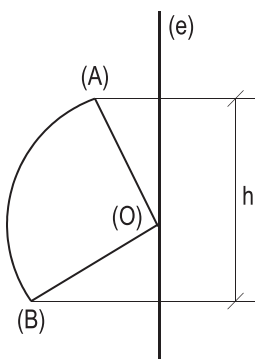


Figura 388

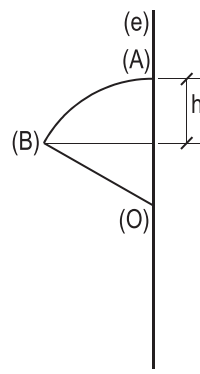


Figura 389

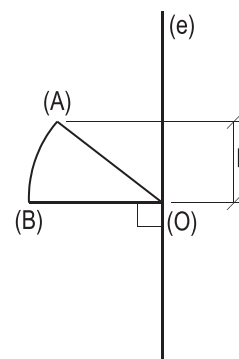


Figura 390

2. Anel esférico é o sólido gerado pela revolução de um segmento circular em torno de um eixo coplanar que não o atravessa e que contém o centro do círculo ao qual pertence o segmento (Figuras 391, 392 e 393).

Conforme a posição ocupada pelo segmento circular girante, em relação ao eixo, o anel esférico pode ser limitado superficialmente por uma zona esférica e pela superfície lateral de um tronco de cone de revolução de primeira espécie (Figura 391); por uma calota esférica e pela superfície lateral de um cone de revolução (Figura 392); por uma zona esférica e pela superfície lateral de um cilindro de revolução (Figura 393).

Em todos os casos, altura do anel é a altura  $h$  da zona (ou calota) que o limita (Figuras 391, 392 e 393).

O valor  $h$  dessa altura é, em verdade, o próprio valor da projeção ortogonal do arco girante  $AB$  sobre o eixo (Figuras 391, 392 e 393).

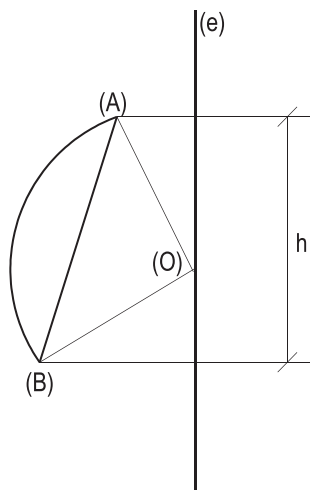


Figura 391

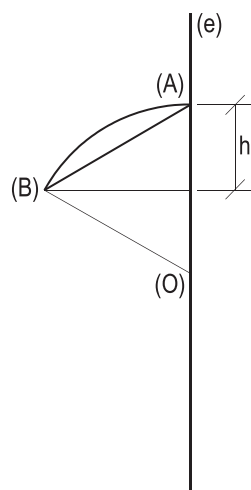


Figura 392

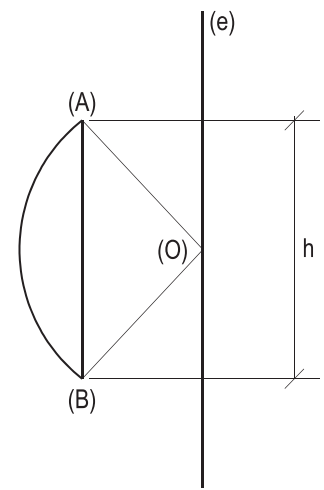


Figura 393

## 224 – Teorema

O volume do sólido gerado pela revolução de um triângulo em torno de um eixo coplanar, que contenha pelo menos um de seus vértices e que não o atravesse, é igual a um terço do produto da área da superfície gerada pelo lado oposto ao vértice fixo pela altura do triângulo relativa a esse vértice.

Demonstração: Consideremos, inicialmente, a revolução de um triângulo  $(A)(B)(C)$  em torno de um de seus lados,  $(A)(C)$ , em duas hipóteses possíveis, como as indicadas nas Figuras 394 e 395.

Porque o volume gerado  $V$  é igual à soma (Figura 394) ou à diferença (Figura 395) entre os volumes dos cones de revolução gerados pelos triângulos retângulos (A)(H)(B) e (B)(H)(C) (Figuras 394 e 395), podemos escrever, respectivamente:

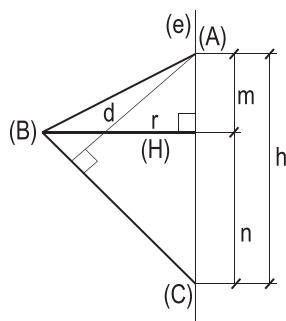


Figura 394

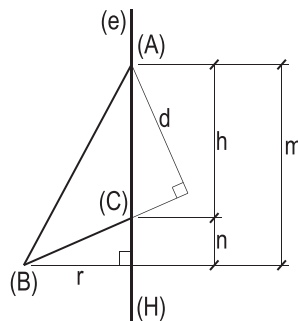


Figura 395

$$V = \frac{\pi r^2 m}{3} + \frac{\pi r^2 n}{3} = \frac{\pi r^2 (m + n)}{3} \quad (\text{Figura 394})$$

$$V = \frac{\pi r^2 m}{3} - \frac{\pi r^2 n}{3} = \frac{\pi r^2 (m - n)}{3} \quad (\text{Figura 395})$$

Observe-se que, na Figura 394,  $m + n = h$  e que, na Figura 395,  $m - n = h$ .

Logo, para ambos os casos:

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{1}{3} \pi r (h \cdot r) \quad (1)$$

Para a área  $S$  do triângulo (A)(B)(C), temos (*Geometria Plana*, número 311):

$$S = \frac{h \cdot r}{2} \quad \therefore \quad hr = 2S \quad (2)$$

$$S = \frac{\overline{(B)(C)} \cdot d}{2} \quad \therefore \quad \overline{(B)(C)} \cdot d = 2S \quad (3)$$

Reunindo as relações (1), (2) e (3), vem:

$$V = \frac{1}{3} (\pi r \overline{(B)(C)})d \quad (4)$$

Porque  $(\pi r \overline{(B)(C)})$  mede a área lateral do cone gerado pela revolução do triângulo (B)(H)(C) (número 203.1), ou seja, a área gerada pela revolução de  $\overline{(B)(C)}$ , e porque  $d$  é a altura do triângulo girante, relativa ao lado  $\overline{(B)(C)}$ , a relação (4) pode ser escrita, simbolicamente, sob a forma:

$$V = \frac{1}{3} \cdot S_{\overline{(B)(C)}} \cdot d_{\overline{(B)(C)}}$$

E como  $\overline{(B)(C)}$  é o lado oposto ao vértice fixo (A), nos dois casos analisados, e como  $d_{\overline{(B)(C)}}$  é a altura relativa a esse vértice fixo, tal relação atende ao teorema em estudo.



No caso mais geral em que apenas um vértice, (A), na Figura 396, do triângulo pertence ao eixo, basta prolongar o lado oposto (B)(C) até que ele encontre o eixo, num ponto (J) (Figura 396) e observar que o volume gerado por (A)(B)(C) é a diferença entre os volumes gerados pelos triângulos (A)(B)(J) e (A)(C)(J).

E porque estes dois triângulos têm o lado (A)(J) sobre o eixo, pelo que se provou acima, o volume  $V$  gerado pelo triângulo (A)(B)(C) será (Figura 396):

$$V = \frac{1}{3} \cdot S_{\overline{(B)(J)}} \cdot d - \frac{1}{3} S_{\overline{(C)(J)}} \cdot d$$

$$V = \frac{1}{3} \left( S_{\overline{(B)(J)}} - S_{\overline{(C)(J)}} \right) d$$

Mas como:

$$S_{\overline{(B)(J)}} - S_{\overline{(C)(J)}} = S_{\overline{(B)(C)}}$$

$$d = d_{\overline{(B)(C)}} \text{ (Figura 396), vem:}$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot S_{\overline{(B)(C)}} \cdot d_{\overline{(B)(C)}}$$

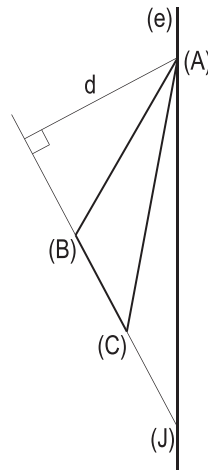


Figura 396

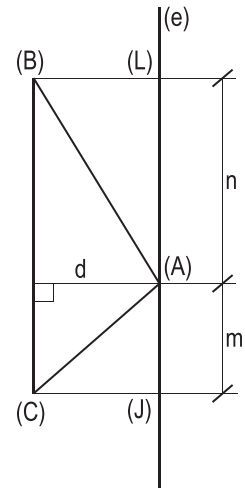


Figura 397

Finalmente, no caso particular em que o lado (B)(C) oposto ao vértice fixo (A) é paralelo ao eixo, o volume  $V$  gerado pelo triângulo se calcula em função dos volumes do cilindro e dos dois cones de revolução gerados respectivamente pelo retângulo (B)(C)(J)(L) e pelos triângulos retângulos (A)(B)(L) e (A)(C)(J) (Figuras 397 e 398).

Temos, então, para o caso da Figura 397:

$$V = \pi d^2 (m + n) - \frac{\pi d^2 m}{3} - \frac{\pi d^2 n}{3}$$

$$\therefore V = \frac{\pi d^2}{3} (3m + 3n - m - n)$$

$$\therefore V = \frac{2\pi d^2}{3} (m + n)$$

$$\therefore V = \frac{2}{3} \pi d^2 \overline{(B)(C)} \quad (1)$$

E, para o caso da Figura 398:

$$V = \pi d^2 (m - n) + \frac{\pi d^2 n}{3} - \frac{\pi d^2 m}{3}$$

$$\therefore V = \frac{\pi d^2}{3} (3m - 3n + n - m) = \frac{2\pi d^2}{3} (m - n)$$

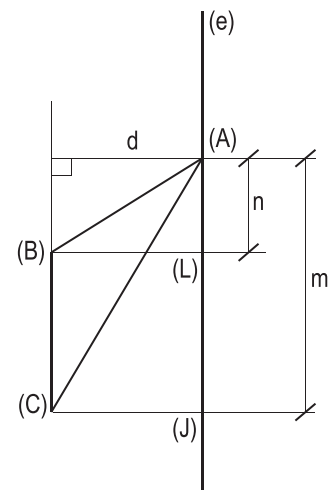


Figura 398

$$\therefore V = \frac{2}{3} \pi d^2 \overline{(B)(C)} \quad (2)$$

Então, as relações (1) e (2) se escrevem:

$$V = \frac{1}{3} \left( 2 \pi d \overline{(B)(C)} \right) d \quad (3)$$

Porque  $\left( 2 \pi d \overline{(B)(C)} \right)$  mede a área lateral do cilindro gerado pela revolução do retângulo  $(B)(C)(J)(L)$  (número 190.3), ou seja, a área gerada pela revolução de  $\overline{(B)(C)}$  e porque  $d$  é a altura do triângulo girante relativa ao lado  $\overline{(B)(C)}$ , a relação (3) pode ser escrita, simbolicamente, sob a forma:

$$V = \frac{1}{3} \cdot S_{\overline{(B)(C)}} \cdot d_{\overline{(B)(C)}}$$

Esta relação e as anteriormente instituídas, para as hipóteses estudadas nas Figuras 394, 395 e 396, demonstram o teorema.

## 225 – Teorema

O volume do sólido gerado pela revolução de um setor poligonal regular em torno de um eixo coplanar, que não o atravessa e que contém o centro do círculo circunscrito, é igual a um terço do produto da área gerada pela revolução da linha poligonal que limita o setor pelo seu apótema.

Demonstração: Basta observar que o volume  $V$  do sólido gerado pela revolução do setor é igual à soma dos gerados pelas revoluções dos triângulos  $(O)(A)(B)$ ,  $(O)(B)(C)$ , ... (Figura 399), podendo-se, pelo item anterior, escrever:

$$V = \frac{1}{3} \cdot S_{\overline{(A)(B)}} \cdot d_{\overline{(A)(B)}} + \frac{1}{3} S_{\overline{(B)(C)}} \cdot d_{\overline{(B)(C)}} + \\ + \frac{1}{3} S_{\overline{(C)(D)}} \cdot d_{\overline{(C)(D)}} + \dots$$

Mas, como, por hipótese, o setor poligonal é regular, temos:

$$d_{\overline{(A)(B)}} = d_{\overline{(B)(C)}} = d_{\overline{(C)(D)}} = \dots = a,$$

onde  $a$  é o apótema do setor.

$$\text{Logo: } V = \frac{1}{3} \left[ S_{\overline{(A)(B)}} + S_{\overline{(B)(C)}} + \dots \right] a,$$

ou, simbolicamente:

$$V = \frac{1}{3} S_{\overline{(A)(B)(C)(D)\dots}} \cdot a$$

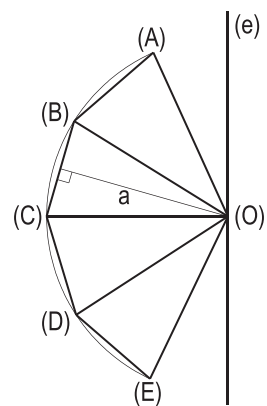


Figura 399

## 226 – Volume da esfera

Consideremos (Figura 400) um setor poligonal regular limitado por um diâmetro do círculo a ele circunscrito, girando em torno desse diâmetro.

Sabemos (número 225) que o volume do sólido obtido com cada rotação completa em torno do eixo (e) considerado é função apenas da área gerada, em tal revolução, pela linha poligonal (A)(B)(C)... que limita o setor e de seu apótema a (Figura 400).

Fixemos os vértices extremos (A) e (N) dessa linha poligonal regular sobre o eixo (e) e façamos aumentar indefinidamente seu gênero.

À medida em que cresce o número de lados do setor poligonal regular em estudo, ele tende ao semicírculo que o circunscribe e seu apótema a tende ao valor do raio R desse semicírculo (Figura 401), até que, na posição em que a linha poligonal regular chega a coincidir com a semicircunferência circunscrita (Figura 402), o setor poligonal regular considerado passa a se confundir com o semicírculo que o circunscribe e, nessa situação limite, o sólido gerado pela revolução em estudo é a esfera de centro (O) e raio R (Figura 402), enquanto que a área gerada pela revolução da linha poligonal regular tende à área dessa esfera.

Assim, aplicando a expressão instituída (número 218) para o cálculo da área S da esfera e o que foi demonstrado no item 225, anterior, o volume V da esfera será:

$$V = \frac{1}{3} S \cdot R$$

$$\therefore V = \frac{1}{3} 4 \pi R^2 \cdot R$$

$$\therefore \boxed{V = \frac{4}{3} \pi R^3}$$

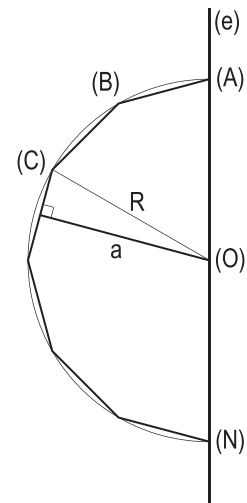


Figura 400

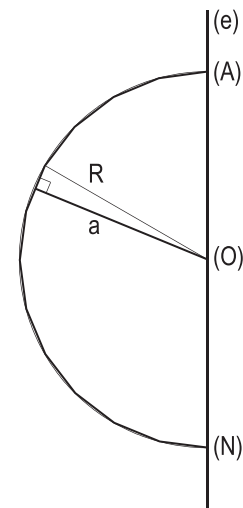


Figura 401

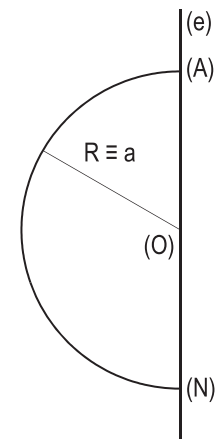


Figura 402

## 227 – Observações

1. O volume da esfera pode ser instituído diretamente a partir de sua área. Para tanto, basta considerar um poliedro convexo genérico circunscrito a uma esfera de raio  $R$  (Figura 403) e unindo-se todos os vértices do poliedro ao centro  $(O)$  da esfera, ele fica dividido em pirâmides cujas bases coincidem com cada uma das faces do poliedro e cujas alturas são todas iguais ao raio da esfera.

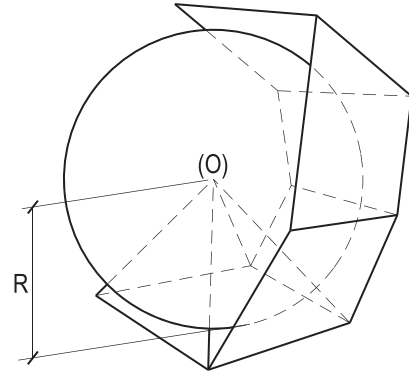


Figura 403

Porque o volume  $V$  do poliedro é, evidentemente, igual à soma dos volumes dessas pirâmides, designando por  $S_1, S_2, S_3$ , etc., as áreas de suas bases e por  $S_t$  a área total do poliedro, podemos escrever:

$$V = \frac{S_1 R}{3} + \frac{S_2 R}{3} + \frac{S_3 R}{3} + \dots$$

$$\therefore V = (S_1 + S_2 + S_3 + \dots) \cdot \frac{R}{3}$$

$$\therefore V = S_t \cdot \frac{R}{3}$$

Fazendo crescer indefinidamente o número de faces do poliedro circunscrito e as áreas de cada uma delas tender a zero, sua área total e seu volume tenderão aos da esfera inscrita.

Assim, na posição limite, o volume  $V$  da esfera será:

$$V = 4 \pi R^2 \frac{R}{3} \quad \therefore \quad \boxed{V = \frac{4}{3} \pi R^3}$$

2. Em função de seu diâmetro  $D$ , o volume da esfera é:

$$V = \frac{4}{3} \pi \left(\frac{D}{2}\right)^3 = \frac{4}{3} \pi \frac{D^3}{8} \quad \therefore \quad \boxed{V = \frac{\pi D^3}{6}}$$

## 228 – Volume da cunha esférica

Porque a cunha é uma fração da esfera (Figura 404), seu volume  $V$  – em função de seu ângulo  $\hat{\alpha}$ , medido em graus, e do raio  $R$  da esfera – será:

$$\boxed{V = \frac{\hat{\alpha}}{360^\circ} \cdot \frac{4}{3} \pi R^3}$$

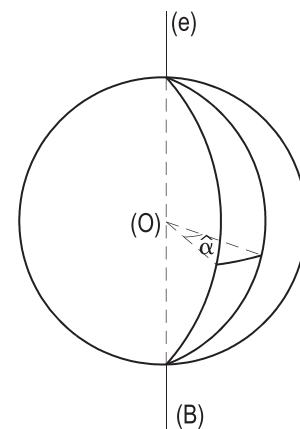


Figura 404

## 229 – Volume do setor esférico

Considerando o setor circular que gera, por revolução, o setor esférico, como a posição limite ocupada pelo setor poligonal regular inscrito, quando cresce indefinidamente seu gênero e observando que, nestas condições o apótema  $a$  do setor poligonal (Figura 405) tende ao raio  $R$  do setor esférico e que a área gerada pela linha poligonal tende à área da zona esférica gerada pelo arco (A)(B), podemos escrever (números 225 e 221) para o volume  $V$  do setor esférico:

$$V = \frac{1}{3} S_{(A)(B)} \cdot R = \frac{1}{3} 2 \pi R \cdot h \cdot R$$

Ou,

$$V = \frac{2}{3} \pi R^2 h$$

onde  $h$  é a altura do setor (Figura 405).

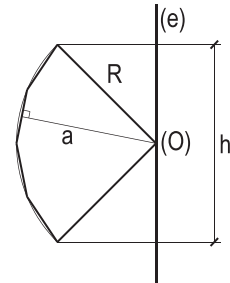


Figura 405

## 230 – Volume do anel esférico

Porque o volume  $V$  de um anel esférico é igual à diferença entre o volume de um setor esférico – gerado pela revolução do setor circular (O)(A)(B) – e o volume gerado pela revolução do triângulo isósceles (O)(A)(B) em torno do eixo (e) (Figura 403), podemos (números 229 e 224) escrever:

$$V = \frac{2}{3} \pi R^2 h - \frac{1}{3} S_{(A)(B)} \cdot z \quad (1)$$

E, pelo número 216,

$$S_{(A)(B)} = 2 \pi z \cdot h \quad (2)$$

As relações (1) e (2) fornecem:

$$V = \frac{2}{3} \pi R^2 h - \frac{2}{3} \pi z^2 h = \frac{2}{3} \pi (R^2 - z^2) h \quad (3)$$

Mas, do triângulo retângulo (O)(M)(A) (Figura 406) vem:

$$R^2 - z^2 = \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 = \frac{\ell^2}{4} \quad (4)$$

Reunindo as relações (3) e (4), temos:

$$V = \frac{2}{3} \pi \frac{\ell^2}{4} h \quad \therefore \quad V = \frac{\pi \ell^2 h}{6}$$

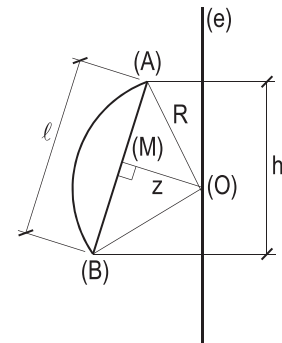


Figura 406

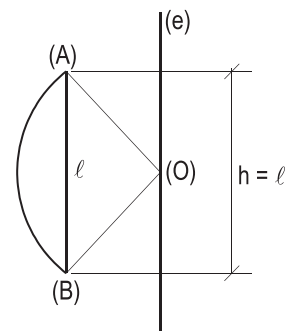


Figura 407

## 231 – Observações

1. No caso particular em que a corda (A)(B) que limita o segmento circular gerador do anel é paralela ao eixo (Figura 407), o volume  $V$  do anel tem expressão mais simples.

De fato, porque neste caso,  $h = \ell$  (Figura 408), temos (número 230):

$$V = \frac{\pi \ell^2 h}{6} = \frac{\pi h^3}{6}$$

2. Para o caso particular abordado acima, é imediato concluir que o volume do anel é função exclusiva de sua altura  $h$  (ou, o que neste caso é o mesmo, do comprimento da corda do segmento circular que o gera).

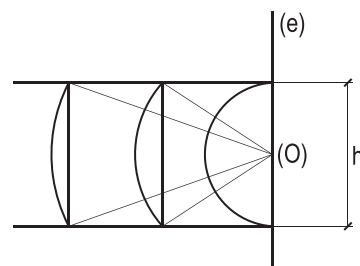


Figura 408

3. Daí concluirmos que todos os anéis esféricos, cujos segmentos circulares geradores têm cordas paralelas ao eixo e iguais (Figura 408), são equivalentes.

E mais (Figura 408), que o volume desses anéis é igual ao da esfera cujo diâmetro é igual àquelas cordas (ver número 227.2).

### 232 – Volume do segmento esférico de duas bases

No caso mais geral, o volume do segmento esférico de duas bases é igual à soma dos volumes de um anel esférico e de um tronco de cone de revolução de primeira espécie (Figura 409).

Assim, designando por  $R$ ,  $r$  e  $h$  os raios das bases e a altura do segmento e por  $\ell$  a corda do segmento circular que gera o anel (Figura 409), podemos (números 206.1 e 230), para o volume  $V$  do segmento, escrever:

$$V = \frac{\pi h}{3} (R^2 + r^2 + Rr) + \frac{\pi \ell^2 h}{6}$$

$$V = \frac{\pi h}{6} (2R^2 + 2r^2 + 2Rr + \ell^2) \quad (1)$$

O triângulo retângulo (A)(B)(C) (Figura 409) fornece:

$$\ell^2 = h^2 + (R - r)^2$$

$$\therefore \ell^2 = h^2 + R^2 + r^2 - 2Rr \quad (2)$$

Reunindo as relações (1) e (2), vem:

$$V = \frac{\pi h}{6} (2R^2 + 2r^2 + 2Rr + h^2 + R^2 + r^2 - 2Rr)$$

Ou, finalmente:

$$V = \frac{\pi h}{6} (3R^2 + 3r^2 + h^2)$$

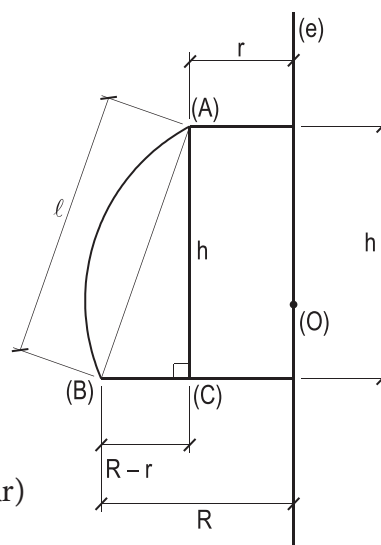


Figura 409

### 233 – Observação

No caso particular em que as duas bases do segmento esférico são iguais (Figura 410) (simétricas em relação ao centro da esfera), a expressão para o cálculo do volume se simplifica.

De fato, temos  $R = r$  e, em consequência:

$$V = \frac{\pi h}{6} (3r^2 + 3r^2 + h^2), \text{ ou: } \boxed{V = \frac{\pi h}{6} (6r^2 + h^2)}$$

### 234 – Volume do segmento esférico de uma base

O volume do segmento esférico de uma base é igual à soma dos volumes de um cone de revolução e de um anel esférico (Figura 411). Assim, designando por  $r$  e  $h$  o raio da base e a altura do segmento e por  $\ell$  a corda do segmento circular que gera o anel (Figura 411), podemos (números 204 e 230), para o volume  $V$  do segmento, escrever:

$$V = \frac{\pi r^2 h}{3} + \frac{\pi \ell^2 h}{6} = \frac{\pi h}{6} (2r^2 + \ell^2) \quad (1)$$

O triângulo retângulo (A)(B)(C) (Figura 411) fornece:

$$\ell^2 = r^2 + h^2$$

Assim, a relação (1) se escreve:

$$V = \frac{\pi h}{6} (2r^2 + r^2 + h^2) \quad \therefore \boxed{V = \frac{\pi h}{6} (3r^2 + h^2)}$$

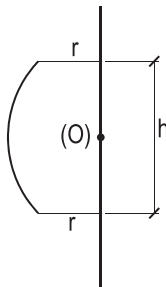


Figura 410

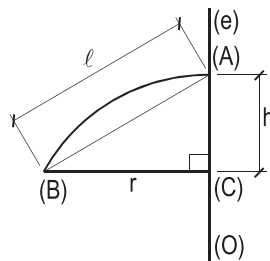


Figura 411

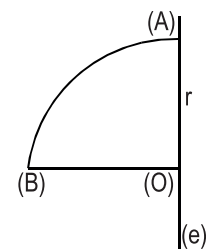


Figura 412

### 235 – Observações

1. O volume da esfera pode ser diretamente instituído a partir do volume do segmento esférico de uma base, analisado no item anterior. De fato, se considerarmos (Figura 412) o quadrante de círculo (O)(A)(B), sua revolução em torno do eixo (e), que contém seu raio (O)(A), gerará um hemisfério. E, assim, o volume  $V$  da esfera correspondente será (número 234):

$$V = 2 \cdot \frac{\pi h}{6} (3r^2 + r^2) \quad \therefore \boxed{V = \frac{4}{3} \pi r^3}$$

2. Da mesma forma, o volume da esfera pode ser obtido diretamente a partir do instituído para o do segmento esférico de duas bases iguais.

De fato, considerando o anel esférico gerado pelo segmento circular (A)(B), numa rotação completa em torno do eixo (e), que passa pelo centro (O) do círculo que o contém e assumindo a posição particular (Figura 413) em que a corda  $\overline{(A)(B)}$  é paralela a (e), pode-se (número 233), para o volume  $V$  do anel, escrever:

$$V = \frac{\pi h}{6} (6r^2 + h^2), \text{ onde} \quad (1)$$

$r$  é o raio das bases iguais e  $h$  a altura do segmento.

Fazendo crescer o arco (A)(B), sempre pertencendo ao círculo considerado e sempre mantendo sua corda  $\overline{(A)(B)}$  paralela ao eixo da rotação (Figura 413), o segmento circular considerado crescerá, como também crescerá a corda  $\overline{(A)(B)}$ , para  $\overline{(A')(B')}$  (Figura 414), tendendo a se confundir com o semicírculo que o contém, até que, na posição final, quando os pontos extremos do arco chegarem a ser (A'') e (B''), Figura 415, a revolução do segmento circular produzirá a esfera de centro (O) e raio  $R$ .

Nestas condições, a corda  $\overline{(A)(B)} = \ell = h$  do arco em estudo crescerá até atingir sua posição final  $\overline{(A'')(B'')}$ , quando se igualará ao diâmetro  $2R$  do círculo.

E, então, o volume  $V$  do anel assumirá o valor

$$V = \frac{\pi \overline{(A'')(B'')}}{6} \cdot (6r^2 + \overline{(A'')(B'')}^2) \quad (2)$$

Mas, em tal progressão, o valor  $r$  do raio das bases do segmento esférico tenderá a zero, o que proporciona, para a relação (2), anotar:

$$V = \frac{\pi}{6} \cdot 2R [0 + (2R)^2]$$

$$\therefore V = \frac{\pi}{6} \cdot 2R \cdot 4R^2 = \frac{8}{6} \pi R^3$$

$$\therefore \boxed{V = \frac{4}{3} \pi R^3}$$

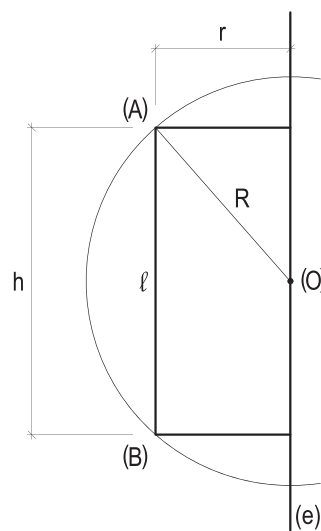


Figura 413

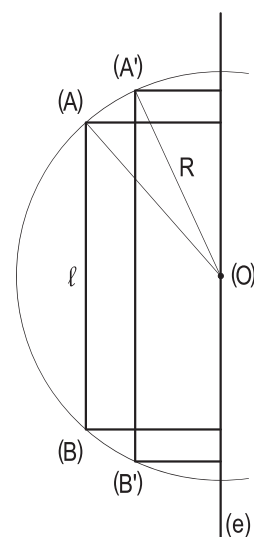


Figura 414

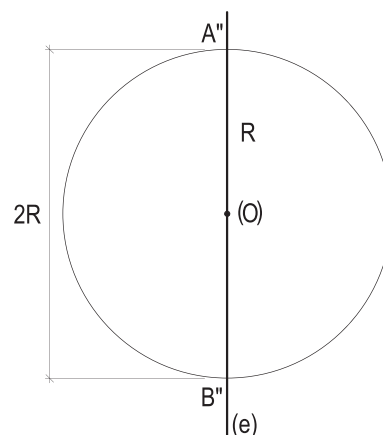


Figura 415



# CAPÍTULO XXI

## PROBLEMAS RESOLVIDOS

Nesta segunda edição, foi adicionado o presente capítulo, incluindo uma centena de problemas propostos e resolvidos, acompanhando o desenvolvimento de teoria antes apresentada, buscando exemplificar suas aplicações, assim como incluir algumas conclusões sob diferentes ângulos dos anteriormente estudados.

Em sua parte inicial, são listadas questões de posicionamento para, em seguida, serem focados exemplos métricos.

Tal como em toda a matéria teórica, vão continuamente numerados e, sempre que necessário em suas resoluções, são mencionados os princípios em que se apoiam.

**1. Estabelecer o lugar geométrico dos pontos (A), vértices dos triângulos isósceles (ABC) e (ARS), cujas bases (BC) e (RS), dadas, pertençam a retas reversas.**

Resolução: Sabe-se (número 33) que o lugar geométrico dos pontos equidistantes de dois pontos fixos é o plano mediador do segmento por eles formado.

Assim, os pontos (A), para equidistarem tanto dos pontos (B) e (C) quanto dos pontos (R) e (S), têm de pertencer simultaneamente ao plano  $(\alpha)$ , mediador do segmento (BC), e ao plano  $(\beta)$ , mediador do segmento (RS).

E, como (BC) e (RS) pertencem a retas reversas, tais planos  $(\alpha)$  e  $(\beta)$  têm de ser secantes, o que resulta que sua interseção  $(\alpha\beta)$  (Figura 416), atendendo às duas equidistâncias estipuladas, vem a ser o lugar geométrico pedido.

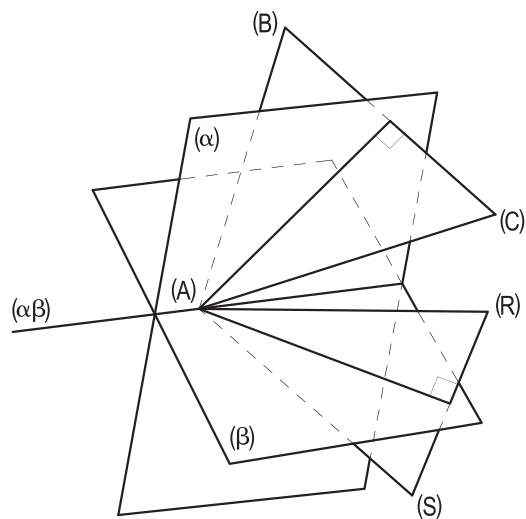


Figura 416

Então, o lugar geométrico dos pontos (A), vértices dos triângulos isósceles (ABC) e (ARS), de bases reversas (BC) e (RS), é a interseção  $(\alpha\beta)$  dos planos mediadores dessas duas bases.

2. Dados cinco pontos (A), (B), (C), (R) e (S), não coplanares, pede-se determinar o ponto (J) que, equidistando de (A), (B) e (C), guarde distâncias iguais aos pontos (R) e (S).

**Discutir.**

Resolução: Sabe-se (número 34.1) que o lugar geométrico dos pontos (J) equidistantes dos vértices de um triângulo (ABC) é a reta (r), pertencente ao seu circuncentro (O) e perpendicular ao seu plano (Figura 417).

E como (número 33) o ponto (J) procurado deve equidistar de (R) e de (S), ele tem de pertencer ao plano ( $\alpha$ ), medidor do segmento (RS) (Figura 417).

Assim (J) há de ser a interseção da reta (r) com o plano ( $\alpha$ ).

De um modo geral, o problema oferece apenas uma solução, tal como indicada na Figura 417, mas, em situação particular, quando os pontos (R) e (S) definem uma reta paralela ao plano ( $\gamma$ ), do triângulo (ABC), o medidor ( $\alpha$ ) de (RS) resta perpendicular a ( $\gamma$ ) e, então, ou resulta ser paralelo à reta (r) (Figura 418), tornando o problema impossível, ou, em caso ainda mais particular, contém a reta (r) (Figura 419), proporcionando uma infinidade de pontos (J), todos os de (r), como respostas ao problema.

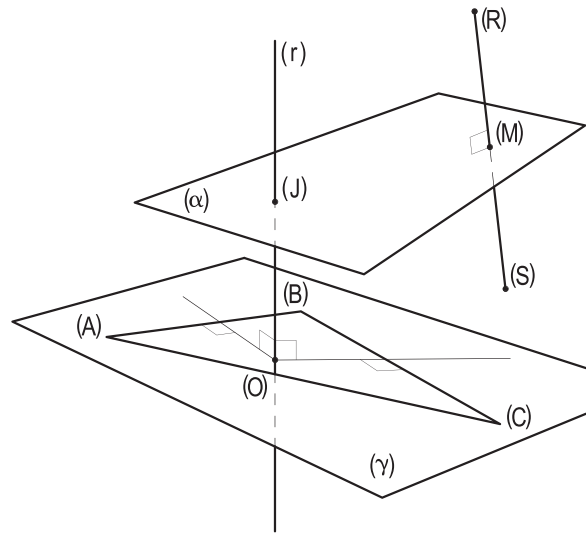


Figura 417

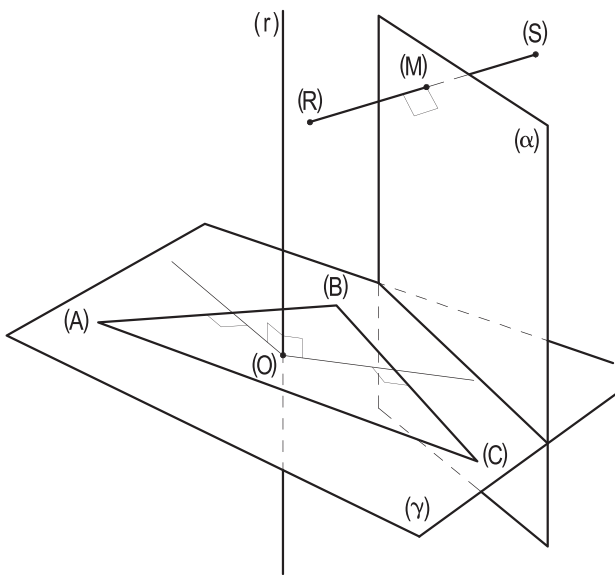


Figura 418

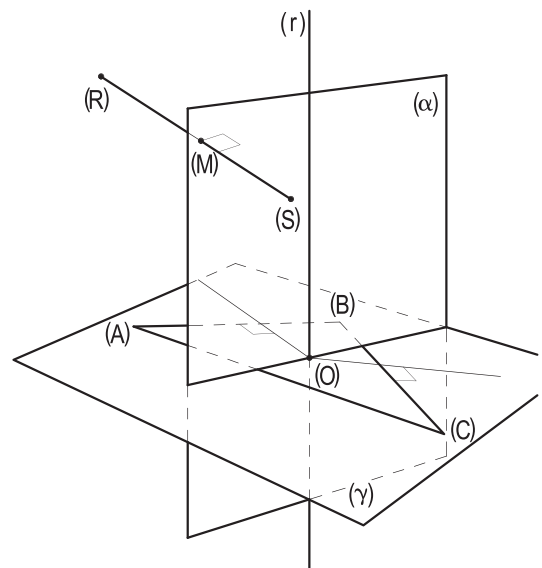


Figura 419

3. **Dados quatro pontos não coplanares (A), (B), (C) e (D), pede-se determinar o centro (O) da superfície esférica pertencente aos três primeiros (A), (B) e (C) e tangente ao plano ( $\alpha$ ), conduzido pelo quarto ponto (D) e paralelo ao plano do triângulo (A)(B)(C).**

Resolução: O centro (O) da superfície esférica pedida há de pertencer à reta (r), traçada pelo circuncentro do triângulo (ABC) e perpendicular ao seu plano (número 34.2).

Para ser tangente ao plano ( $\alpha$ ), pertencente ao quarto ponto (D) e paralelo ao plano do triângulo (ABC), a superfície esférica procurada deve ter seu ponto de contato (T) com ( $\alpha$ ) sobre a perpendicular baixada de seu centro (O) àquele plano (número 213), que nada mais é que a própria reta (r) já construída.

E, então, conhecido um quarto ponto (T) da superfície esférica, seu centro (O) tem de ser (número 34.3) a interseção de (r) com o plano ( $\gamma$ ), mediador de um dos segmentos organizados com (T) e com um dos vértices do triângulo dado, como (C), na Figura 420.

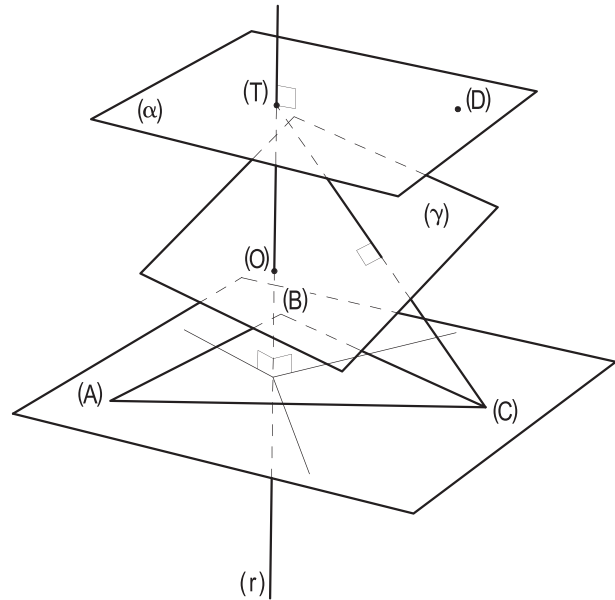


Figura 420

4. **Dados dois planos secantes ( $\alpha$ ) e ( $\beta$ ) e um ponto (J) a eles exterior, pede-se construir o plano ( $\gamma$ ), pertencente a (J) e perpendicular a ( $\alpha$ ), sabendo que ele corta ( $\alpha$ ) e ( $\beta$ ) segundo duas retas paralelas.**

Resolução: Para ser perpendicular ao plano ( $\alpha$ ), ( $\gamma$ ) deve conter uma perpendicular a ( $\alpha$ ) (número 40). E, para cortar os planos secantes dados ( $\alpha$ ) e ( $\beta$ ) segundo retas paralelas, deve possuir uma reta paralela à interseção ( $\alpha\beta$ ) desses dois planos (números 9 e 10.2).

Assim, o plano ( $\gamma$ ) pedido há de ser o formado pelas retas (r) e (s), pertencentes a (J), a primeira perpendicular a ( $\alpha$ ) e a segunda paralela à interseção de ( $\alpha$ ) e ( $\beta$ ) (Figura 421).

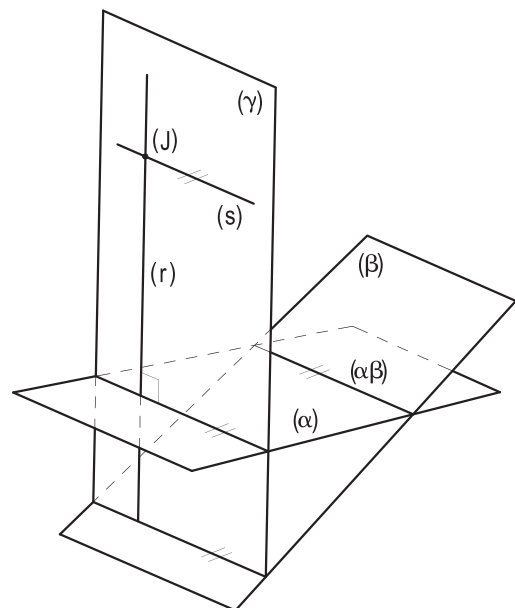


Figura 421

5. **Determinar o lugar geométrico dos pontos (O), centros de circunferências pertencentes a dois pontos dados (A) e (B), sabendo que são iguais as distâncias de (O) a duas retas concorrentes (r) e (s), também dadas.**

Resolução: Os centros (O) de todas as circunferências pertencentes aos pontos dados (A) e (B) têm de pertencer ao plano ( $\gamma$ ), mediador do segmento (AB) (número 33).

E, para equidistar das retas concorrentes dadas (r) e (s), tais pontos têm de pertencer a um dos bissetores dos ângulos formados por essas retas (número 63).

Assim, para definir o lugar geométrico em questão, basta construir os planos bissetores ( $\beta_1$ ) e ( $\beta_2$ ) dos ângulos formados pelas retas (r) e (s) e buscar suas interseções (x) e (y) com o plano ( $\gamma$ ), mediador do segmento (AB) (Figura 422).

Estas duas retas (x) e (y) constituem o lugar geométrico pedido.

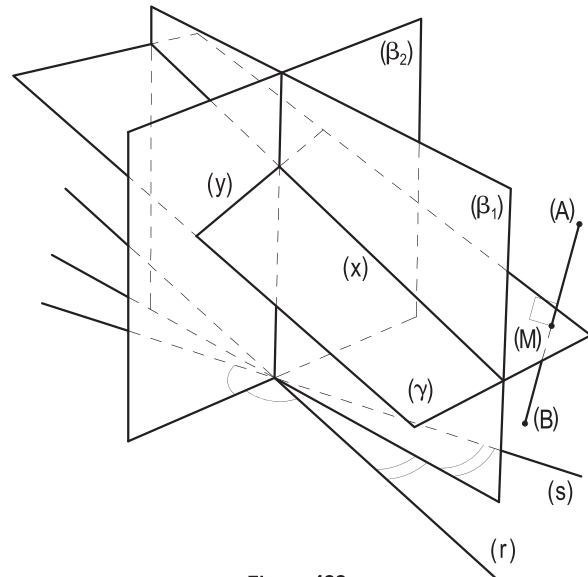


Figura 422

6. **Dadas duas retas concorrentes (r) e (s) e uma terceira (a), reversa àquelas duas, pede-se determinar o ponto (J), de (a), equidistante de (r) e de (s).**

Resolução: Sabe-se (número 63) que o lugar geométrico dos pontos equidistantes de duas retas concorrentes (r) e (s) é o par de planos bissetores ( $\beta_1$ ) e ( $\beta_2$ ) dos ângulos por elas formados.

Assim, os pontos procurados ( $J_1$ ) e ( $J_2$ ) são (Figura 423) os traços da reta (a) com cada um desses bissetores.

Naturalmente, em posições particulares, a reta (a) pode oferecer apenas um ponto equidistante de (r) e de (s), ou até nenhum, se for paralela a um, ou a ambos os bissetores ( $\beta_1$ ) e ( $\beta_2$ ).

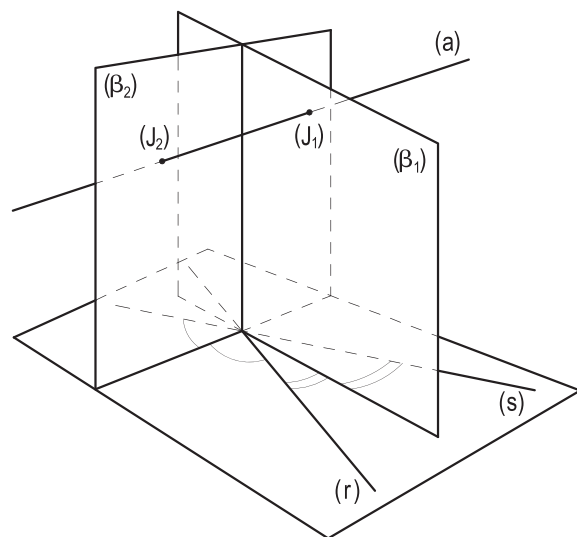


Figura 423

**7. Dadas três retas (a), (r) e (s), reversas duas a duas, pede-se construir o plano ( $\alpha$ ) que, contendo (a), forme ângulos iguais com (r) e com (s).**

Resolução: Sabe-se (número 69.2) que o plano ( $\alpha$ ) procurado, para formar ângulos iguais com as reversas dadas (r) e (s), deve ser paralelo a uma das bissetrizes ( $b_1$ ), ou ( $b_2$ ), dos ângulos formados por duas paralelas a (r) e a (s), que concorram num ponto qualquer (J).

Assim, traçadas, por um ponto arbitrado (J), as paralelas ( $r_1$ ) e ( $s_1$ ) às reversas dadas (r) e (s) e construídas essas duas bissetrizes, basta, por um ponto (A) qualquer da terceira reta (a), traçar as paralelas ( $\bar{b}_1$ ) e ( $\bar{b}_2$ ) a elas (Figura 424), para formar, respectivamente, os planos ( $\alpha_1$ ) e ( $\alpha_2$ ) que atendem ao proposto.

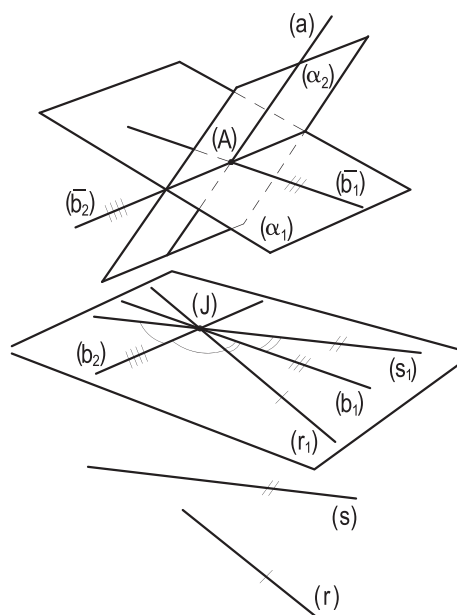


Figura 424

**8. Dados um plano ( $\alpha$ ) e dois pontos (J) e (L) a ele exteriores, pede-se determinar os pontos (P) de ( $\alpha$ ), distantes de (J) e de (L), respectivamente,  $k_1$  e  $k_2$ , dois valores dados maiores que as distâncias de cada ponto a ( $\alpha$ ).**

Resolução: Sabe-se (número 27) que o lugar geométrico dos pontos de ( $\alpha$ ) que distam um valor constante  $k_1$  de um ponto exterior (J) é a circunferência do círculo que tem por centro a projeção ortogonal ( $O_1$ ) de (J) sobre ( $\alpha$ ) e raio igual ao segundo cateto do triângulo retângulo de hipotenusa  $k_1$  e primeiro cateto ( $JO_1$ ) (Figura 425).

Da mesma forma, a circunferência ( $O_2$ ) (Figura 425) há de ser o lugar dos pontos de ( $\alpha$ ) distantes  $k_2$  de (L).

Por isso, os dois pontos (P), interseções dessas duas circunferências, solucionam a questão.

É claro que, eventualmente, poderia haver apenas uma solução, no caso particular em que essas duas circunferências viessem a ser tangentes, ou mesmo nenhuma, caso elas ficassem exteriores uma à outra.

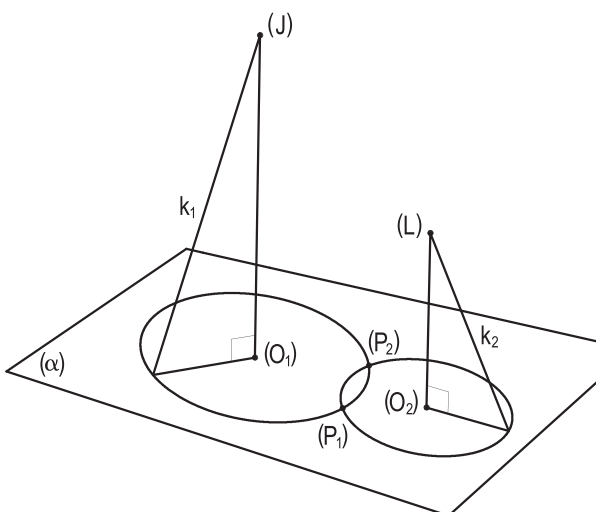


Figura 425

9. Dadas três retas  $(r)$ ,  $(s)$  e  $(t)$ , reversas, duas a duas, pede-se construir o segmento  $(AB)$ , apoiado por  $(A)$  em  $(r)$  e por  $(B)$  em  $(s)$ , de modo tal que seu ponto médio  $(M)$  pertença à reta  $(t)$ .

Resolução: Sabe-se (número 20.4) que o lugar geométrico dos pontos médios dos segmentos que se apoiam pelos extremos em duas retas reversas  $(r)$  e  $(s)$  é o plano  $(\alpha)$  paralelo às duas e delas equidistante.

É claro que é nesse plano  $(\alpha)$  que estará o ponto  $(M)$ , médio do segmento  $(AB)$ , procurado.

Para construí-lo, sabe-se, também, que basta tomar dois pontos quaisquer  $(P)$  e  $(Q)$ , um em  $(r)$ , o outro em  $(s)$ , determinar o ponto médio  $(N)$  do segmento  $(PQ)$  e traçar, por ele, as paralelas  $(r_1)$  e  $(s_1)$  a  $(r)$  e a  $(s)$ , respectivamente, compondo o plano  $(\alpha)$ , destas equidistante (Figura 426).

O próximo passo é determinar o ponto  $(M)$ , traço de  $(t)$  em  $(\alpha)$  (Figura 426).

Em seguida, tomando-se o plano  $(\gamma)$  formado por  $(M)$  e pela reta  $(s)$ , sua interseção com  $(r)$  é o extremo  $(A)$  do segmento  $(AB)$ , que se completa pela simples união de  $(A)$  a  $(M)$ ,  $(B)$  em  $(s)$  (Figura 427).

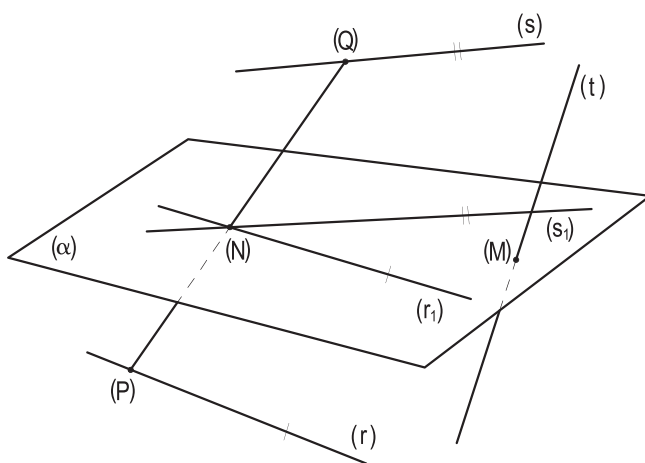


Figura 426

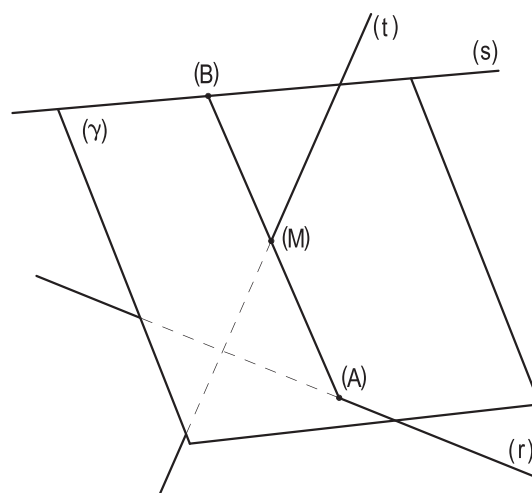


Figura 427

Observe-se que, eventualmente, o problema pode não ter solução, isto é, pode não ser possível apoiar em três retas reversas, duas a duas, um segmento que tenha seu ponto médio numa delas, o que acontece no caso particular em que a terceira reta  $(t)$ , a que deve conter o ponto médio  $(M)$ , venha a ser paralela ao plano  $(\alpha)$ , equidistante de  $(r)$  e de  $(s)$ .

E, ao contrário, resta indeterminado no caso ainda mais particular em que  $(t)$  pertença a esse plano  $(\alpha)$ , pois, então, todos os pontos de  $(t)$  constituem planos com  $(s)$ , produzindo uma infinidade de pontos  $(A)$  em  $(r)$  e, portanto, uma infinidade de retas  $(AB)$ .

**10. Dados um plano ( $\alpha$ ) e duas retas reversas ( $r$ ) e ( $s$ ), todos exteriores, pede-se apoiar nas reversas uma terceira reta ( $t$ ), paralela a ( $\alpha$ ), e igualmente inclinada com ( $r$ ) e com ( $s$ ).**

Resolução: Sabe-se (número 66.2) que a condição para que uma reta ( $t$ ) forme ângulos iguais com duas reversas ( $r$ ) e ( $s$ ) é que ela seja paralela a pelo menos um dos planos bissetores dos ângulos formados por duas retas concorrentes e respectivamente paralelas a ( $r$ ) e a ( $s$ ).

Assim, para obter a direção da reta procurada, deve-se, por um ponto ( $J$ ), arbitrariamente escolhido, traçar as retas ( $r_1$ ) e ( $s_1$ ), respectivamente, paralelas às dadas ( $r$ ) e ( $s$ ), construir os planos bissetores ( $\beta_1$ ) e ( $\beta_2$ ) dos ângulos que elas formam e determinar suas interseções ( $a$ ) e ( $b$ ) com o plano dado ( $\alpha$ ) (Figura 428). Tais retas, por se inclinarem igualmente com ( $r_1$ ) e com ( $s_1$ ) e, portanto, com ( $r$ ) e com ( $s$ ), e por pertencerem a ( $\alpha$ ), têm as direções procuradas para as retas ( $t$ ).

Para construir uma delas – ( $t_1$ ), na Figura 428 –, basta apoiar numa das retas ( $r$ ), dadas, uma paralela ( $\bar{t}_1$ ) a ( $a$ ), formando o plano ( $\gamma$ ), e buscar a interseção desse plano com a outra reversa dada, ( $s$ ), definindo o primeiro ponto ( $A$ ), da solução ( $t_1$ ), que se completa conduzindo, por ( $A$ ), a paralela ( $AB$ ) a ( $\bar{t}_1$ ), que é uma das soluções do problema (Figura 428).

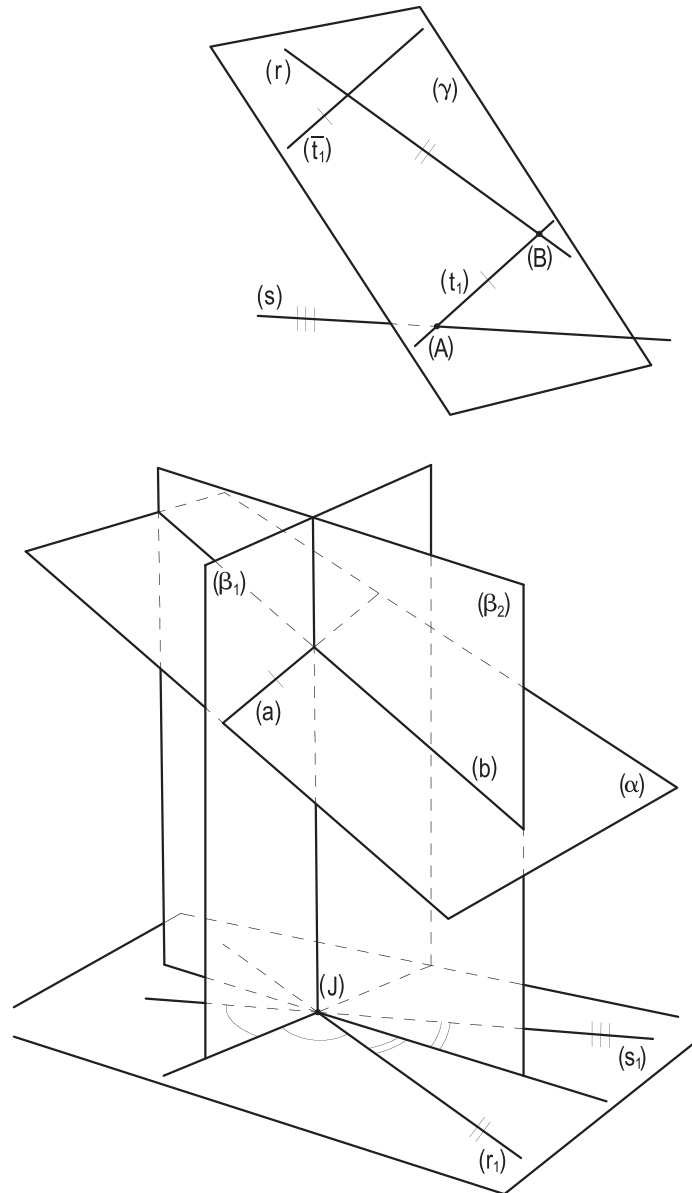


Figura 428

Há uma segunda solução, não incluída na Figura 428, que corresponde à interseção ( $b$ ) do plano ( $\alpha$ ) com o segundo bissetor ( $\beta_2$ ) dos ângulos formados por ( $r_1$ ) e ( $s_1$ ).

11. Dados um ponto (A) e dois planos oblíquos ( $\alpha$ ) e ( $\gamma$ ), pede-se construir o triângulo isósceles (ABC), cuja base (BC) pertença a ( $\alpha$ ) e cujos lados iguais meçam o dobro da distância de (A) a ( $\alpha$ ) e que sejam, ambos, paralelos ao plano ( $\gamma$ ).

**Discutir.**

Resolução: Conhecido o valor do comprimento dos lados iguais (AB) e (AC), sabe-se (número 27) que os vértices (B) e (C) hão de pertencer a uma circunferência, cujo centro é o ponto (O), projeção ortogonal de (A) sobre ( $\alpha$ ), e cujo raio é o segundo cateto do triângulo retângulo, que tem o primeiro cateto igual à distância de (A) a ( $\alpha$ ) e hipotenusa igual ao dobro desse valor.

Observe-se (Figura 431) que, pelos dados, as geratrizes do cone de revolução de vértice (A), com base nessa circunferência, formam  $30^\circ$  com o plano ( $\alpha$ ) (*Geometria Plana*, número 200.3), visto que a hipotenusa vale o dobro de um cateto.

E, para serem paralelos ao plano ( $\gamma$ ), os lados iguais (AB) e (AC) devem pertencer ao plano ( $\gamma_1$ ), paralelo a ( $\gamma$ ) e conduzido por (A).

Assim, os vértices (B) e (C) são os pontos de corte daquela circunferência com a interseção do plano ( $\gamma_1$ ) com o dado ( $\alpha$ ) (Figura 429).

O problema tem solução para os planos ( $\gamma$ ) que se inclinem mais que os  $30^\circ$  que as geratrizes do cone de vértice (A) construído formam com ( $\alpha$ ) (Figura 429), mas torna-se impossível quando o plano ( $\gamma$ ) forma  $30^\circ$  com ( $\alpha$ ) (Figura 431) porque, nesse caso, ( $\gamma_1$ ) tangencia o cone, obrigando que coincidam os pontos (B) e (C), transformando o triângulo num segmento de reta. Torna-se também impossível para todos os planos ( $\gamma$ ) que formem menos que  $30^\circ$  com ( $\alpha$ ) (Figura 430), porque, nessas situações, as interseções ( $\alpha\gamma_1$ ) ficam exteriores à base do cone.

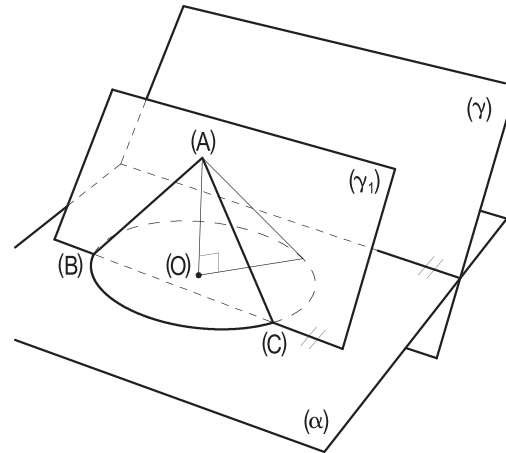


Figura 429

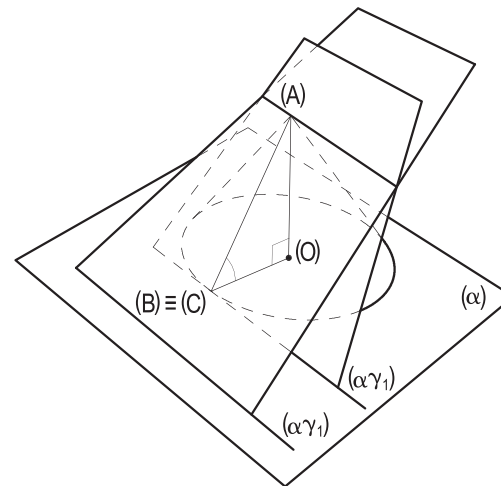


Figura 430

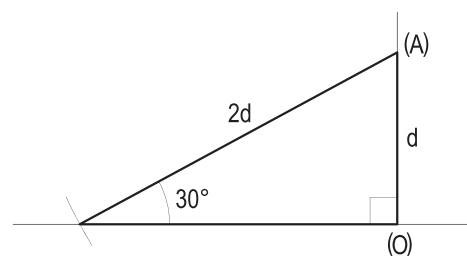


Figura 431



**12. Construir a reta (r), pertencente ao ponto dado (J) e ortogonal às retas reversas dadas (a) e (b).**

Resolução: Sabe-se (número 23.4) que, para ser ortogonal às retas (a) e (b), a reta (r) procurada, passando pelo ponto (J), deve pertencer aos planos ( $\alpha$ ) e ( $\gamma$ ), conduzidos por (J) e perpendiculares, respectivamente, a (a) e a (b), sendo, então, a interseção desses dois planos (Figura 432).

Outra resolução, até mais rápida, consiste em traçar pelo ponto (J) a perpendicular (r) ao plano ( $\theta$ ) formado por uma das retas dadas – (a), na Figura 433 – e por uma paralela ( $b_1$ ) à segunda, pois tal reta (r) terá, então, direção ortogonal às duas reversas dadas.

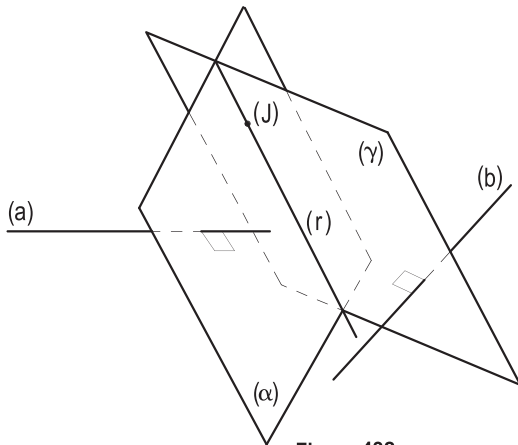


Figura 432

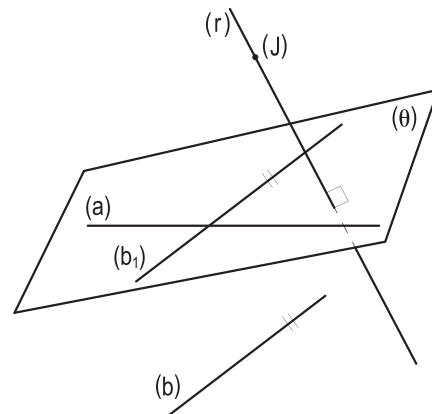


Figura 433

**13. Estabelecer o lugar geométrico dos pontos equidistantes de dois planos paralelos e distantes de um ponto fixo um valor igual à distância entre os dois planos.**

Resolução: Os pontos procurados não de estar sobre a interseção da superfície esférica de centro no ponto dado e raio igual à distância entre os dois planos com o plano equidistante dos dois planos paralelos dados. Conforme a posição do ponto dado (J), o lugar geométrico pode ser uma circunferência (Figura 434); reduzir-se a apenas um ponto, para o caso da superfície esférica ser tangente a tal plano equidistante (Figura 435); ou até inexistir, caso a superfície esférica reste exterior ao plano equidistante dos dois dados.

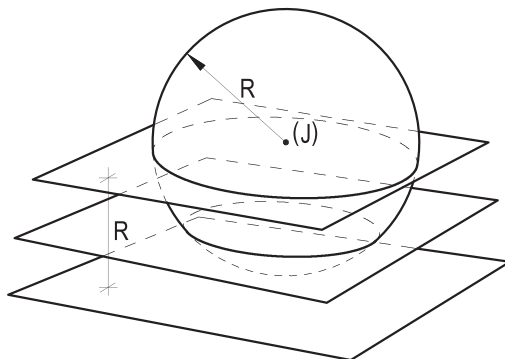


Figura 434

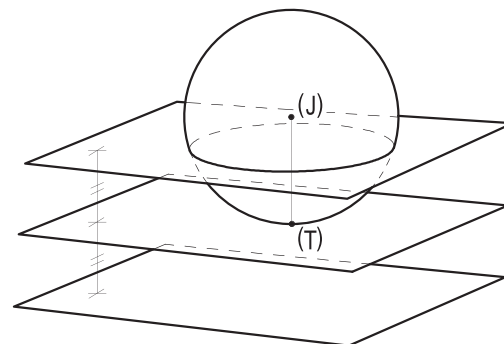


Figura 435

**14. Construir a reta (r) pertencente a um ponto dado (J), ortogonal à reta dada (s) e paralela ao plano dado ( $\alpha$ ).**

Resolução: Para ser ortogonal a (s), a reta procurada deve pertencer a um plano ( $\gamma$ ) perpendicular a (s) (número 23.4). E a um plano ( $\alpha_1$ ), paralelo a ( $\alpha$ ), para ser paralela a este plano, ambos, ( $\gamma$ ) e ( $\alpha_1$ ), pertencentes a (J).

Assim, (r) é a interseção de ( $\alpha_1$ ) e ( $\gamma$ ) (Figura 436).

Para o caso muito particular em que (s) e ( $\alpha$ ) são perpendiculares, o problema oferece uma infinidade de soluções: todas as retas de ( $\alpha_1$ ), salvo a que une (J) ao traço de (s) em ( $\alpha_1$ ), pois esta reta será perpendicular, e não ortogonal, a (s).

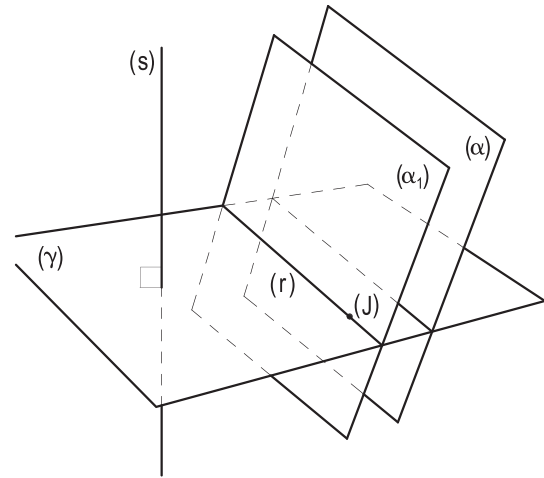


Figura 436

**15. Construir o plano ( $\alpha$ ) pertencente ao ponto (A), sabendo que ele é perpendicular ao plano ( $\gamma$ ) e paralelo à reta (r), oblíqua a ( $\gamma$ ), sendo dados (A), ( $\gamma$ ) e (r).**

Resolução: O plano pedido ( $\alpha$ ) é formado pela perpendicular (p) a ( $\gamma$ ) (número 40) e pela paralela ( $r_1$ ) a (r), ambas conduzidas pelo ponto dado (A) (Figura 437).

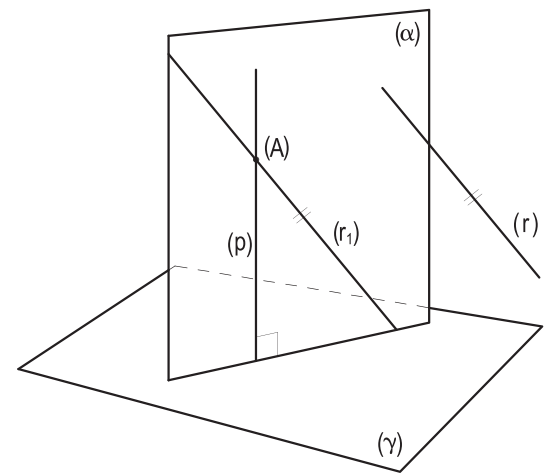


Figura 437

**16. Determinar o plano ( $\alpha$ ) que, passando pelo ponto dado (J), seja perpendicular aos planos secantes ( $\gamma$ ) e ( $\theta$ ) dados.**

Resolução: O plano ( $\alpha$ ) procurado é o constituído pelas retas (r) e (s), traçadas por (J) e perpendiculares, respectivamente, aos planos ( $\gamma$ ) e ( $\theta$ ) dados (Figura 438) (número 40).

O problema tem sempre uma, e uma só, solução, por serem secantes os dois planos dados.

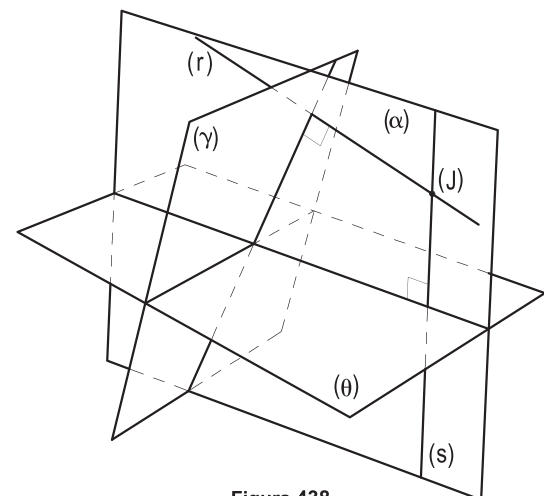


Figura 438

17. Considere todos os triângulos isósceles que tenham o vértice (A) fixo e que se apoiem por suas bases num plano horizontal ( $\alpha$ ), também fixo.

Fazendo com que os planos desse triângulos se inclinem desde  $30^\circ$  até  $45^\circ$  e em todas as possíveis posições intermediárias com o plano horizontal escolhido, pede-se instituir o lugar geométrico dos baricentros de todos esses triângulos, em função da distância  $d$  de (A) a ( $\alpha$ ).

Resolução: Porque todos os triângulos considerados são isósceles, as medianas relativas às suas bases são também alturas, operando como retas de maior declive de seus planos, em relação a ( $\alpha$ ), trazendo, por isso, os ângulos formados com o plano ( $\alpha$ ).

Nas posições limites, as das inclinações de  $30^\circ$  e de  $45^\circ$ , os raios das bases dos cones de revolução a que são tangentes medem  $d\sqrt{3}$  e  $d$ , respectivamente (Figura 440).

Assim, para essas duas inclinações extremas, os pés ( $M_1$ ) e ( $M_2$ ) das alturas relativas às bases de todos os triângulos isósceles considerados ocupam as circunferências de centro (O), projeção ortogonal de (A) sobre ( $\alpha$ ) e raios respectivamente iguais a  $d\sqrt{3}$  e  $d$  (Figuras 439 e 440). E, para as posições intermediárias, correspondentes às inclinações entre  $30^\circ$  e  $45^\circ$ , esses pés de alturas, ou medianas, serão pontos da coroa circular limitada por aquelas duas circunferências.

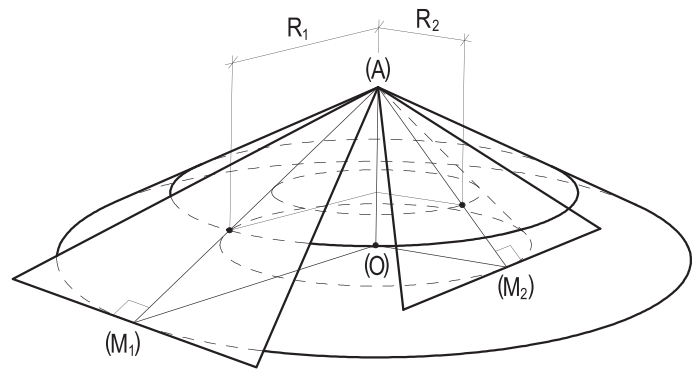


Figura 439

Ora, como os baricentros de todos esses triângulos são homotéticos dos pés das medianas, na razão  $2/3$ , para o polo (A), o lugar geométrico procurado é a coroa circular homotética daquela, para o polo (A), na razão  $2/3$ , ou seja, a coroa circular pertencente a um plano paralelo a ( $\alpha$ ), situado a  $2/3$  da distância de (A) a ( $\alpha$ ), com centro sobre a perpendicular de (A) a ( $\alpha$ ) (Figura 439) e raios limítrofes respectivamente iguais a  $\frac{2d\sqrt{3}}{3}$  e  $\frac{2d}{3}$ .

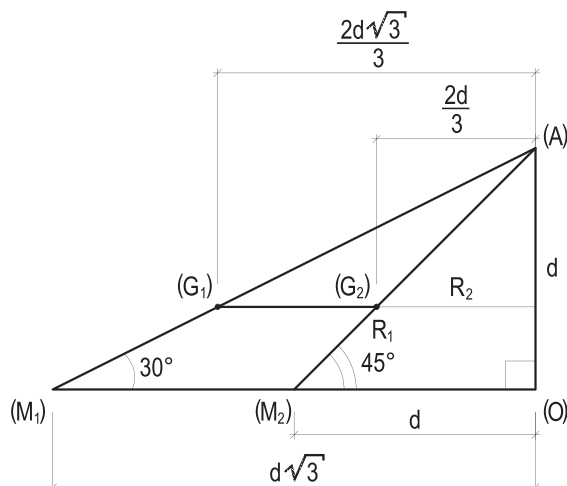


Figura 440

**18. O vértice (A) dos triângulos isósceles (ABC) e (APQ) equidista dos planos secantes  $(\alpha)$  e  $(\gamma)$ .**

**Sabendo que suas bases (BC) e (PQ), dadas, são reversas e que também os planos  $(\alpha)$  e  $(\gamma)$  são dados, pede-se determinar a posição do ponto (A).**

Resolução: Tal como detalhado no primeiro problema deste capítulo, o lugar geométrico dos pontos (A), vértices de dois triângulos isósceles que tenham bases reversas, é a reta interseção dos planos mediadores dessas bases.

Assim é a reta (r) (Figura 441), à qual deve pertencer o vértice (A) procurado.

E, para equidistar dos planos  $(\alpha)$  e  $(\gamma)$ , (A) deve pertencer a um dos planos bissetores  $(\beta_1)$  ou  $(\beta_2)$  de  $(\alpha)$  e  $(\gamma)$  (número 55.4).

Há, então, duas soluções (A) e  $(\bar{A})$  para o vértice comum aos dois triângulos isósceles: os traços de (r) com cada um desses bissetores (Figura 441).

Observe-se que, para posições particulares dos dados, o problema poderia oferecer apenas uma solução, caso (r) restasse paralela a um dos bissetores; nenhuma, se fosse paralela à interseção deles; ou até, em caso ainda mais particular, uma infinidade de soluções se viesse a pertencer a  $(\beta_1)$  ou a  $(\beta_2)$ .

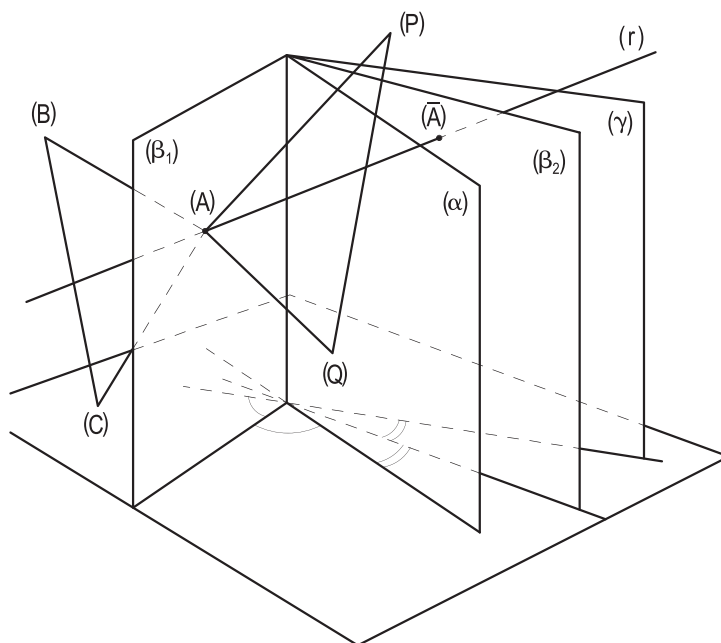


Figura 441

**19. Dados um ponto (A), uma reta (r) e um plano  $(\alpha)$ , exteriores, pede-se construir o plano  $(\gamma)$ , pertencente a (A) e paralelo a (r), sabendo que  $(\gamma)$  forma com  $(\alpha)$  um ângulo dado  $\hat{x}$ .**

**Discutir.**

Resolução: Sabe-se (número 186) que todos os planos que passam por um ponto (A) e que formam o mesmo ângulo  $\hat{x}$  com um plano  $(\alpha)$  tangenciam um cone de revolução de vértice (A), base em  $(\alpha)$ , com semiângulo no vértice igual ao complemento de  $\hat{x}$ .

E que, para ser paralelo à reta dada (r), o plano pedido  $(\gamma)$  deve conter uma reta (s), paralela a (r) e pertencente a (A).

Assim, construído o cone de revolução de vértice (A), base em  $(\alpha)$ , com geratrizes inclinadas de  $\hat{x}$  em relação a  $(\alpha)$  e traçada, por (A), uma paralela (s) à reta dada (r), pelo traço (H) de (s) em  $(\alpha)$ , a tangente à base do cone, define, com (s), o plano  $(\gamma)$  pedido (Figura 442).

Observe-se que, para retas (r) que formem ângulos menores que  $\hat{x}$ , tal traço (H) é exterior à base do cone, proporcionando duas soluções para  $(\gamma)$ , correspondentes a cada uma das duas tangentes que, dele, se pode traçar à base do cone (Figura 442); quando o ângulo que a reta dada (r) iguala o valor  $\hat{x}$  do ângulo que o plano solução deve fazer com o dado  $(\alpha)$ , resta apenas uma solução para o problema: a reta (s), paralela a (r), traçada pelo ponto (A) vindo a ser uma reta de maior declive de  $(\gamma)$  em relação a  $(\alpha)$  (Figura 443). E, quando o ângulo que (r) forma com  $(\alpha)$  supera  $\hat{x}$ , o problema resta impossível, já que o traço (H), em estudo, se dá no interior da base do cone, não permitindo tangentes a ela (Figura 444).

Como detalhe, note-se que, no caso particular de (r) ser paralela a  $(\alpha)$ , a questão oferece duas soluções, correspondentes às duas tangentes, paralelas, à base do cone e que, então, os dois planos que resolvem o problema cortam-se segundo a reta (t), paralela à dada (r) e pertencente ao vértice (A) do cone (Figura 445).

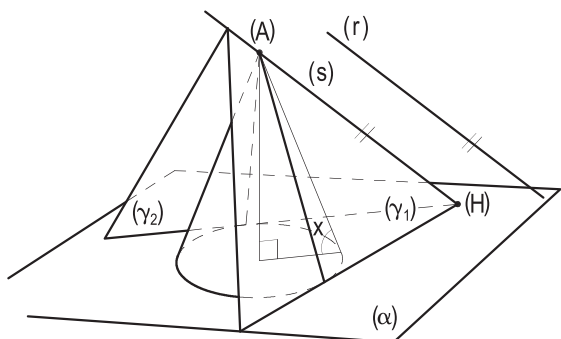


Figura 442

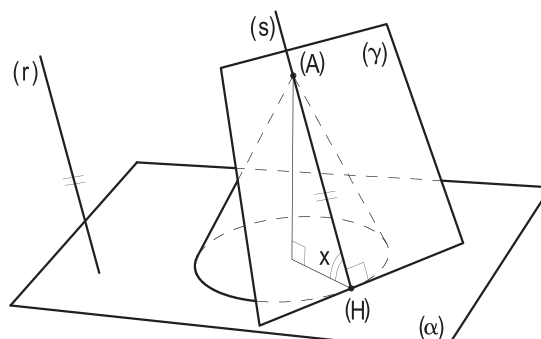


Figura 443

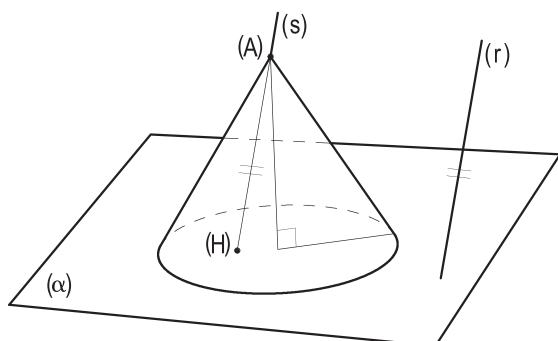


Figura 444

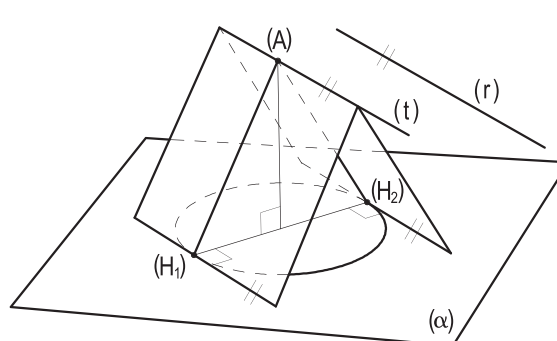


Figura 445

Como resumo, fica, então, que o problema oferece duas, uma ou nenhuma solução, conforme, respectivamente, o ângulo que a reta dada seja menor, igual ou maior que o ângulo que o plano procurado forme com o dado.

20. Dados quatro pontos (A), (B), (C) e (D), não coplanares, pede-se construir um feixe de quatro planos paralelos e equidistantes, o primeiro passando por (A), o segundo por (B), o terceiro por (C) e o último por (D).

Resolução: Aproveitando a propriedade que garante que qualquer transversal a um feixe de planos paralelos e equidistantes seja por eles dividida em partes iguais (número 19), basta unir os pontos extremos (A) e (D), dividir em três partes iguais o segmento (A)(D), obtendo os pontos (R) e (S), para organizar, com as retas (B)(R) e (C)(S) e com suas paralelas pelos pontos dados, os quatro planos paralelos (Figura 446) que irão formar o feixe pedido.

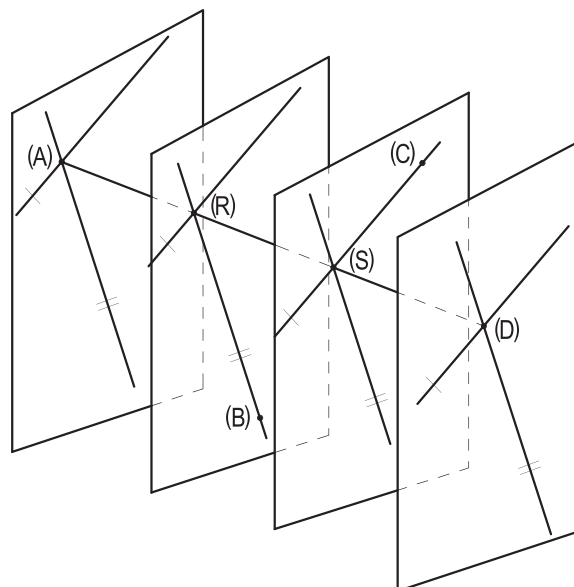


Figura 446

21. Dados quatro pontos (A), (B), (C), (D), não coplanares, pede-se construir um feixe de quatro planos paralelos, cada um pertencendo a cada um desses pontos, guardando entre eles distâncias proporcionais a valores  $k_1$ ,  $k_2$  e  $k_3$  estabelecidos.

Resolução: Este é uma generalização do problema anterior, baseado na mesma propriedade das secantes a um feixe de planos paralelos, guardando a mesma proporção das distâncias entre eles.

Assim, dividindo-se o segmento formado pelos pontos extremos (A) e (D) pelos pontos (R) e (S), tais que a proporção  $\frac{(A)(R)}{k_1} = \frac{(R)(S)}{k_2} = \frac{(S)(D)}{k_3}$  estabelecida seja obedecida, e traçando as retas com as direções de (B)(R) e de (C)(S), determina-se o feixe de planos pedido (Figura 447).

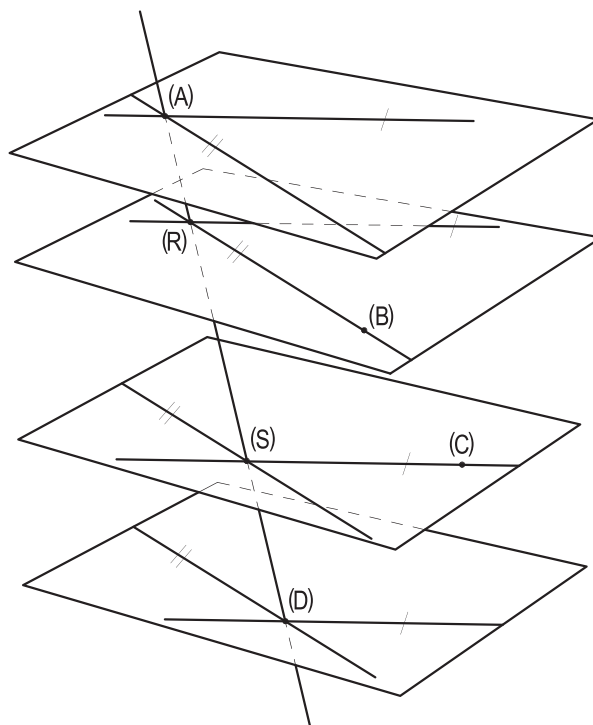


Figura 447

22. Um tridecaedro convexo possui uma face hexagonal e as demais, em quantidades iguais, são triangulares e quadrangulares. Pede-se calcular suas quantidades A, V e D de arestas, vértices e diagonais e provar que ele é conjugado de si mesmo.

$$\text{Resolução: } A = \frac{6 + 6 \cdot 4 + 6 \cdot 3}{2} = \frac{6 + 24 + 18}{2} \quad \therefore \quad \boxed{A = 24}$$

$$A + 2 = F + V \text{ (número 91)} \quad \therefore \quad 24 + 2 = 13 + V \quad \therefore \quad \boxed{V = 13}$$

O número D de diagonais se faz após observar que a única face hexagonal tem 9 diagonais e que as seis faces quadrangulares contam com 12 diagonais:

$$D = C_v^2 - A - S_{df} = \frac{13 \cdot 12}{2} - 24 - 21 \text{ (número 94)} \quad \therefore \quad \boxed{D = 33}$$

E a simples observação que a quantidade  $V = 13$  de vértices do poliedro em estudo iguala a de suas faces comprova ser ele conjugado de si mesmo (número 97).

23. Um dodecaedro convexo tem todas as suas faces com gêneros iguais. Calcular suas quantidades A, V e D, de arestas, vértices e diagonais, respectivamente, sabendo que é igual a  $24r$  a diferença entre as somas dos ângulos internos e externos de suas faces.

Resolução: Dos próprios dados, temos (números 92 e 93):

$$S_i = (A - F) 4r = (A - 12) 4r \quad \text{e} \quad S_e = F \cdot 4r = 12 \cdot 4r$$

$$S_i - S_e = 24r \quad \therefore \quad (A - 12) 4r - 12 \cdot 4r = 24r \quad \therefore \quad \boxed{A = 30}$$

$$\text{Logo (número 91), } A + 2 = F + V \quad \therefore \quad 30 + 2 = 12 + V \quad \therefore \quad \boxed{V = 20}$$

Para calcular a quantidade de diagonais do poliedro, vamos, inicialmente, definir o gênero  $n$  de suas faces. Para tanto, anotemos (número 99):

$$A = \frac{n \cdot F}{2} \quad \therefore \quad 30 = \frac{n \cdot 12}{2} \quad \therefore \quad 60 = n \cdot 12 \quad \therefore \quad n = 5$$

$$D = C_v^2 - A - S_{df} = \frac{20 \cdot 19}{2} - 30 - 12 \cdot 5 = 190 - 90 \quad \therefore \quad \boxed{D = 100}$$

24. Um poliedro convexo tem uma face octogonal, oito faces triangulares e dezesseis faces quadrangulares. Calcular suas quantidades A de arestas e V de vértices.

Resolução: Consideradas separadamente cada uma das 25 faces do poliedro, o total de arestas encontradas é:  $8 + 8 \cdot 3 + 16 \cdot 4 = 96$

Mas, assim fazendo, teremos contado cada aresta duas vezes, por pertencerem todas, naturalmente, a duas faces. Assim, o número A de arestas é  $\boxed{A = 48}$

E, pelo teorema de Euler (número 91):

$$A + 2 = F + V \quad \therefore \quad 48 + 2 = 25 + V \quad \therefore \quad \boxed{V = 25}$$

25. Um poliedro convexo tem um decágono por face, além de dez faces triangulares e dez faces quadrangulares.

Pede-se calcular as quantidades  $A$  de arestas,  $V$  de vértices e  $D$  de diagonais do poliedro.

Resolução: Consideradas separadamente cada uma das 21 faces do poliedro, o total de arestas encontradas é:  $10 + 10 \cdot 3 + 10 \cdot 4 = 80$

Mas, assim fazendo, teremos contado cada aresta duas vezes, por pertencerem todas, naturalmente, a duas faces. Assim, o número  $A$  de arestas é

$$\boxed{A = 40}$$

E, pelo teorema de Euler (número 91):

$$A + 2 = F + V \quad \therefore \quad 40 + 2 = 21 + V \quad \therefore \quad \boxed{V = 21}$$

Para o cálculo da quantidade  $D$  de diagonais, observe-se que a face decagonal tem 35 diagonais (*Geometria Plana*, número 24) e que as 10 faces quadrangulares oferecem 20 delas.

Assim, podemos (número 94) anotar:

$$D = C_v^2 - A - S_{df} = \frac{21 \cdot 20}{2} - 40 - 55 \quad \boxed{D = 115}$$

26. Um plano corta as três arestas de um triedro trirretângulo produzindo três pontos, todos distando 6 cm do vértice do triedro. No triângulo seção assim formado, inscreve-se um círculo.

Pede-se calcular as áreas das projeções ortogonais desse círculo sobre cada uma das faces do triedro.

Resolução: A seção plana no triedro é um triângulo equilátero de lado igual a  $6\sqrt{2}$  cm (*Geometria Plana*, número 200.2). E o círculo nele inscrito tem, então (*Geometria Plana*, número 217), raio  $r$ :

$$r = \frac{1}{3} \cdot \frac{6\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}}{2} = \sqrt{6}$$

Logo, a área do círculo inscrito é

$$S = \pi r^2 = 6\pi$$

Por ser equilátera a seção, conclui-se que são iguais as áreas  $S'$  de suas projeções sobre as faces do triedro. Pode-se, então (número 78), anotar:  $S^2 = 3S'^2 \quad \therefore \quad S'^2 = \frac{S^2}{3}$

$$\therefore \quad S' = \frac{S}{\sqrt{3}} = \frac{6\pi}{\sqrt{3}} = \frac{6\pi\sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} \quad \therefore \quad \boxed{S' = 2\pi\sqrt{3} \text{ cm}^2}$$

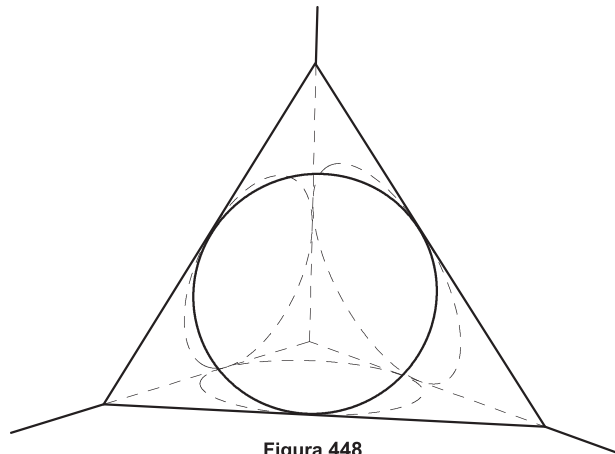


Figura 448



27. Um tetraedro regular de 12 m de aresta é seccionado por quatro planos que contêm os pontos terços das arestas mais próximos de cada vértice.

Retiradas as quatro pirâmides assim formadas, resta, do poliedro original, um octaedro convexo.

Pede-se identificar as naturezas e as dimensões de cada face desse octaedro, bem como calcular sua área total  $S$ , seu volume  $V$  e a razão  $k$  entre esse volume  $V$  e o volume  $V'$  do tetraedro original.

Resolução: Os pontos terços das arestas que convergem em cada vértice do tetraedro definem planos que seccionam o poliedro segundo triângulos equiláteros, produzindo quatro novos tetraedros regulares, com arestas iguais à terça parte da aresta do original (Figura 449).

E, por estarem inscritos nas faces equiláteras do sólido dado, os hexágonos que restam nessas faces são regulares, com lados iguais a 4 m.

Assim, as faces do octaedro irregular resultante são quatro triângulos equiláteros e quatro hexágonos regulares, todos com 4 m de lado.

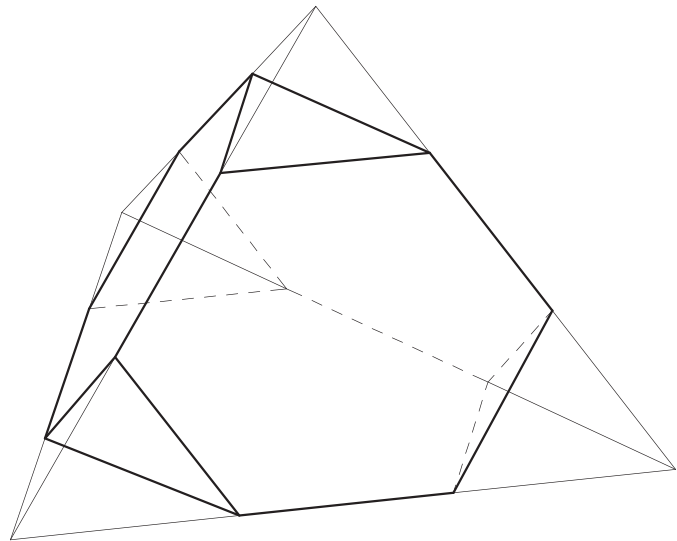


Figura 449

A área  $S$  desse octaedro é, pois, igual ao quádruplo da soma das áreas de cada um desses triângulos e de cada um desses hexágonos, o que permite anotar:

$$S = 4 \left( \frac{4^2 \sqrt{3}}{4} + 6 \cdot \frac{4^2 \sqrt{3}}{4} \right) = 16 \sqrt{3} + 96 \sqrt{3} \quad \therefore \quad \boxed{S = 112\sqrt{3} \text{ m}^2}$$

Para calcular o volume  $V$  do octaedro, basta subtrair do volume do tetraedro original o quádruplo do volume de cada um dos tetraedros suprimidos, ou seja (número 106.7):

$$V = \frac{12^3 \sqrt{2}}{12} - 4 \cdot \frac{3^3 \sqrt{2}}{12} = 144 \sqrt{2} - 9 \sqrt{2} \quad \therefore \quad \boxed{V = 135\sqrt{2} \text{ m}^3}$$

A razão  $k$ , pedida, se escreve (número 115.7):

$$k = \frac{V}{V'} = \frac{135\sqrt{2}}{12^3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{3}} = \frac{135 \cdot 3}{1.728} = \frac{405}{1.728}$$

$$\therefore k = \frac{27 \cdot 15}{27 \cdot 64} \quad \therefore \quad \boxed{k = \frac{15}{64}}$$

28. Calcular as razões  $k_1$  e  $k_2$ , entre as áreas totais e os volumes, respectivamente, de um cubo e do tetraedro regular nele inscrito.

Resolução: Como as arestas do tetraedro regular inscrito no cubo são (número 111.14) diagonais faciais do cubo (Figura 450), designando por  $a$  a aresta deste, podemos escrever:

$$k_1 = \frac{S_c}{S_t} = \frac{6a^2}{\frac{4(a\sqrt{2})^2\sqrt{3}}{4}} = \frac{6a^2}{2a^2\sqrt{3}} \quad \therefore \quad \boxed{k_1 = \sqrt{3}}$$

$$k_2 = \frac{V_c}{V_t} = \frac{a^3}{\frac{(a\sqrt{2})^3\sqrt{2}}{12}} = \frac{12a^3}{4a^3} \quad \therefore \quad \boxed{k_2 = 3}$$

E, por simples comparação:

$$\boxed{k_1^2 = k_2}$$

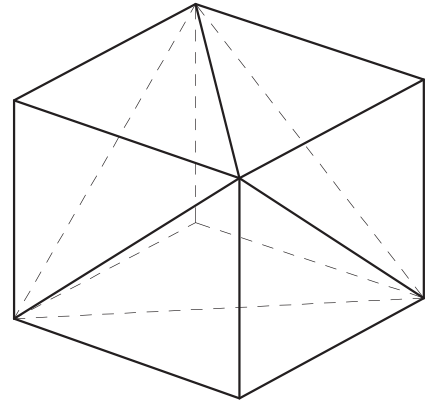


Figura 450

29. Dois planos pertencentes a uma aresta de um cubo de 6 cm de aresta dividem o ângulo reto das duas faces do cubo que a formam em três partes iguais.

Calcular a área total  $S$  do sólido criado, no interior do cubo, entre esses dois planos.

Resolução: Simples calcular as arestas básicas do prisma reto formado pelos dois planos secantes (Figura 451):

$$\overline{(B)(P)} = \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$$

$$\therefore \quad \overline{(P)(C)} = 6 - 2\sqrt{3} = 2(3 - \sqrt{3})$$

$$\overline{(A)(P)} = 2 \cdot \overline{(B)(P)} = 4\sqrt{3}$$

Então, as áreas das faces laterais do prisma são:

$$S_{(APQR)} = S_{(AJLR)} = 4\sqrt{3} \cdot 6 = 24\sqrt{3}$$

$$S_{(PCTQ)} = S_{(JCTL)} = 2(3 - \sqrt{3}) \cdot 6 = 12(3 - \sqrt{3})$$

Como as áreas  $(B)$  de cada base são facilmente calculadas pela subtração das áreas de dois triângulos iguais, como  $(A)(B)(P)$ , da área do quadrado face do cubo, temos:

$$(B) = 36 - 2 \cdot \frac{6 \cdot 2\sqrt{3}}{2} = 12(3 - \sqrt{3})$$

Então, a área  $S$  pedida será:

$$S = 2 \cdot 12(3 - \sqrt{3}) + 2 \cdot 24\sqrt{3} + 2 \cdot 12(3 - \sqrt{3}) = 48(3 - \sqrt{3}) + 48\sqrt{3}$$

$$S = 144 - 48\sqrt{3} + 48\sqrt{3} \quad \therefore \quad \boxed{S = 144 \text{ cm}^2}$$

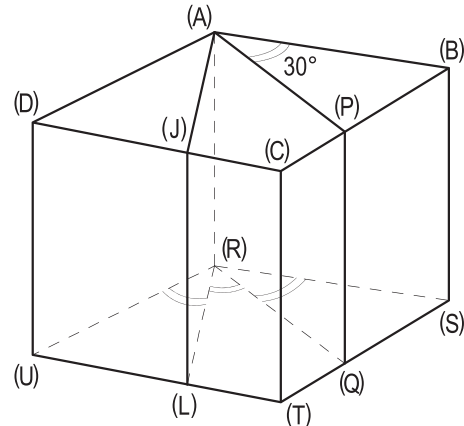


Figura 451

30. Um cubo de bases (A)(B)(C)(D) e (R)(S)(T)(U) tem área total igual a  $384 \text{ m}^2$ . Sobre a aresta (A)(R) são marcados os pontos (I), (J), (K) e (L), tais que:  $\overline{(A)(I)} = \overline{(I)(J)} = \overline{(J)(K)} = \overline{(K)(L)} = 1 \text{ m}$ .

Considere os planos formados pelos pontos (M) e (N), médios das arestas (B)(S) e (D)(U) e, respectivamente, por cada um dos pontos (I), (J), (K) e (L) e calcule as áreas das seções que cada um desses quatro planos produz no sólido.

Resolução: Inicialmente deve-se calcular o valor da aresta  $a$  do cubo:

$$384 = 6a^2 \quad \therefore \quad a^2 = 64 \quad \therefore \quad a = 8$$

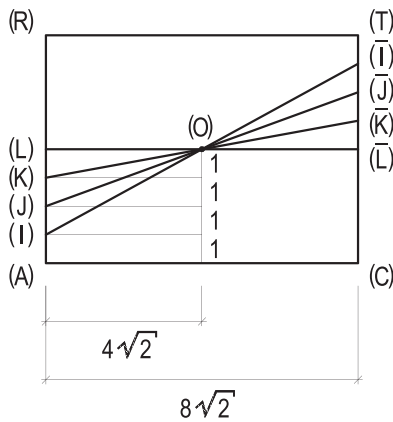


Figura 452

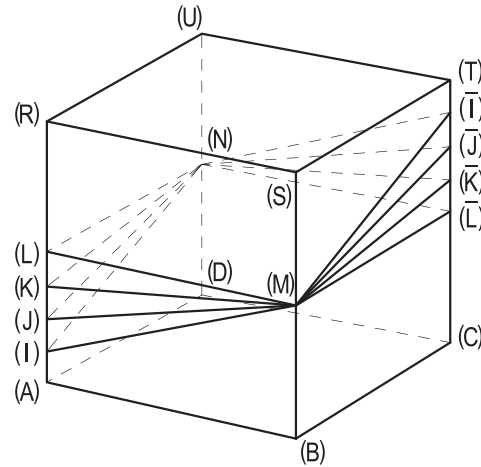


Figura 453

As quatro seções em estudo são losangos (número 111.4), pois os planos que as produzem são paralelos às diagonais faciais (B)(D) e (S)(U) (Figura 453).

Para chegar às suas áreas, bastará, então, calcular suas diagonais maiores, pois a menor, comum às quatro seções, é (M)(N), igual àquelas diagonais faciais.

E, para tal, analisando o retângulo (A)(C)(T)(R), seção diagonal no cubo, e os diversos triângulos retângulos indicados na Figura 452, fica simples anotar:

$$\overline{(I)(O)}^2 = (4\sqrt{2})^2 + 3^2 \quad \therefore \quad \overline{(I)(O)} = \sqrt{41} \quad \therefore \quad \overline{(I)(\bar{I})} = 2\sqrt{41}$$

$$\overline{(J)(O)}^2 = (4\sqrt{2})^2 + 2^2 \quad \therefore \quad \overline{(J)(O)} = \sqrt{36} = 6 \quad \therefore \quad \overline{(J)(\bar{J})} = 12$$

$$\overline{(K)(O)}^2 = (4\sqrt{2})^2 + 1^2 \quad \therefore \quad \overline{(K)(O)} = \sqrt{33} \quad \therefore \quad \overline{(K)(\bar{K})} = 2\sqrt{33}$$

$$\text{E, por ser igual à diagonal facial } \overline{(A)(C)}, \quad \overline{(L)(\bar{L})} = 8\sqrt{2}$$

Assim, as áreas  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_3$  e  $S_4$ , pedidas, são:

$$S_1 = \frac{8\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{41}}{2} \quad \therefore \quad \boxed{S_1 = 8\sqrt{82} \text{ m}^2} \quad S_3 = \frac{8\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{33}}{2} \quad \therefore \quad \boxed{S_3 = 8\sqrt{66} \text{ m}^2}$$

$$S_2 = \frac{8\sqrt{2} \cdot 12}{2} \quad \therefore \quad \boxed{S_2 = 48\sqrt{2} \text{ m}^2} \quad S_4 = \frac{8\sqrt{2} \cdot 8\sqrt{2}}{2} \quad \therefore \quad \boxed{S_4 = 64 \text{ m}^2}$$

31. Num cubo  $C$ , de aresta  $a$ , inscreve-se outro cubo, que tem sua face inferior sobre a face inferior de  $C$ , suas arestas laterais em cada uma das faces laterais de  $C$ , com faces laterais igualmente inclinadas em relação às faces laterais de  $C$ .

Um terceiro cubo é assente, por sua base, na base superior do segundo cubo, com os vértices básicos sobre as arestas básicas superiores do segundo cubo e faces laterais paralelas às faces laterais de  $C$ . Este terceiro cubo ultrapassa o plano da face superior de  $C$  de um valor  $d$ .

Pede-se calcular  $d$ , em função de  $a$  e, também em função de  $a$ , a área total  $S$  e o volume  $V$  do prisma exterior ao cubo  $C$ .

Resolução: Seja a Figura 454 construída conforme os dados. Observe-se a seção diagonal do cubo  $C$ , que produz um retângulo de lados iguais a  $a$  e a  $a\sqrt{2}$  (Figura 455). O segundo cubo, inscrito em  $C$ , conforme os dados, tem aresta  $b$  igual à metade da diagonal facial de  $C$ .

$$\text{Assim, } b = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

Da mesma forma, o terceiro cubo tem aresta  $c$  igual à metade da diagonal facial do segundo cubo.

Por isso, temos:

$$c = \frac{b\sqrt{2}}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{a}{2}$$

Assim, o valor  $d$  da altura do sólido que aflora acima da face do cubo original (Figura 455) é:

$$d = b + c - a = \frac{a\sqrt{2}}{2} + \frac{a}{2} - a$$

$$\therefore d = \frac{a}{2} (\sqrt{2} + 1 - 2) \quad \therefore \boxed{d = \frac{a(\sqrt{2} - 1)}{2}}$$

Então, a área total  $S$  e o volume  $V$  da parte do terceiro cubo que aflora o primeiro são:

$$S = 4 \cdot c \cdot d + 2c^2 = 4 \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a(\sqrt{2} - 1)}{2} + 2 \left( \frac{a}{2} \right)^2$$

$$S = a^2 (\sqrt{2} - 1) + \frac{a^2}{2} \quad \therefore \boxed{S = \frac{a^2 (2\sqrt{2} - 1)}{2}}$$

$$V = \frac{a^2}{4} \cdot \frac{a}{2} (\sqrt{2} - 1) \quad \therefore$$

$$V = \left( \frac{a}{2} \right)^3 \cdot (\sqrt{2} - 1) \quad \therefore \boxed{V = \frac{a^3 (\sqrt{2} - 1)}{8}}$$

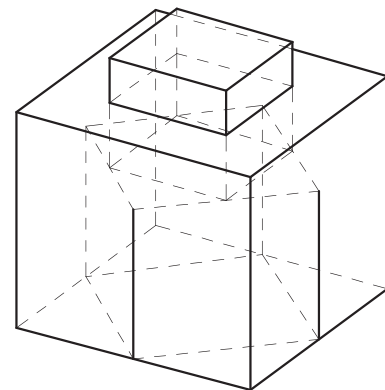


Figura 454

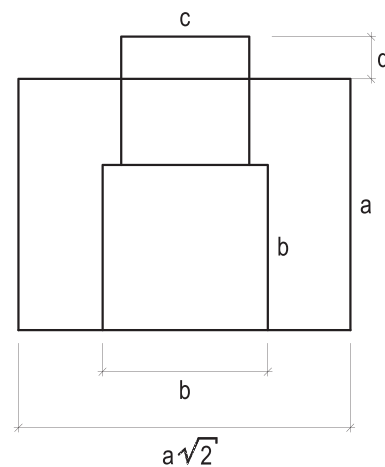


Figura 455

32. Um cubo  $C$ , com 16 cm de aresta, está assente por sua base, num plano horizontal. Considere diversos conjuntos de cubos, todos com 1 cm de aresta, dispostos, todos, no interior de  $C$ , da seguinte forma:

- uma primeira camada cobre toda a face inferior de  $C$ ;
- uma segunda camada é colocada sobre a primeira, deixando livre apenas a primeira fila, tal como indicado nas Figuras 456 e 457;
- uma terceira camada repete a segunda, deixando livre a primeira fila da camada inferior (Figuras 456 e 457), e assim sucessivamente, até que se complete a altura de  $C$ .

Completada tal “escadaria”, dois cubos maiores, iguais, são colocados no interior de  $C$ , apoiados numa das fileiras, situados à frente dos degraus e encostados lateralmente cada um em duas faces laterais de  $C$  e ambos na face superior de  $C$  (Figuras 456 e 457).

Pede-se calcular o volume da porção interna a  $C$  e exterior a todos os cubos colocados em seu interior.

Resolução: Observando-se as Figuras 456 e 457, construídas conforme os dados, nota-se que é a meia altura do cubo  $C$ , isto é, após oito camadas, que se consegue colocar os dois cubos iguais que se encostam lateralmente em faces de  $C$  e na face superior de  $C$ , apoiando-se na oitava camada.

Por isso, esses dois cubos têm arestas medindo 8 cm e, então, o volume pedido  $V$ , igual à diferença entre o volume de  $C$  e o correspondente à soma dos volumes de todos os cubos colocados no interior de  $C$ , é:

$$V = 16^3 - 16(16 + 15 + \dots + 3 + 2 + 1) - 2 \cdot 8^3$$

$$\therefore V = 16^3 - 16(136) - 16 \cdot 8^2$$

$$\therefore V = 16 [16^2 - (136) - 8^2]$$

$$\therefore V = 16(256 - 136 - 64) = 16(56)$$

$$\therefore \boxed{V = 896 \text{ cm}^3}$$

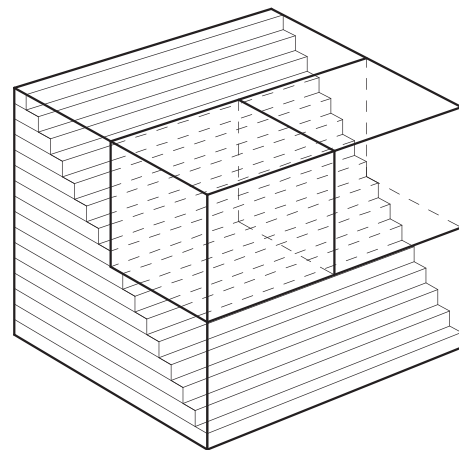


Figura 456

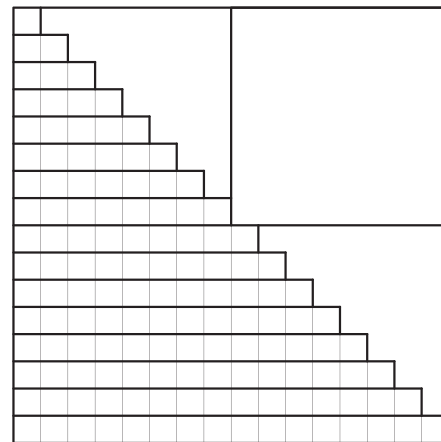


Figura 457

33. Calcular a razão entre os volumes de um octaedro regular e do cubo nele inscrito, tendo por vértices os centros das faces do octaedro.

Resolução: Sendo  $a$  a aresta do octaedro, a aresta  $b$  do cubo valerá (número 114.20):

$$b = \frac{a\sqrt{2}}{3}$$

Assim, para os volumes em estudo, temos:

$$V_O = \frac{a^3\sqrt{2}}{3}$$

$$V_C = b^3 = \left(\frac{a\sqrt{2}}{3}\right)^3 = \frac{2a^3\sqrt{2}}{27}$$

Então, a razão  $k$  pedida é:

$$k = \frac{a^3(\sqrt{2}/3)}{a^3(2\sqrt{2}/27)} = \frac{1/3}{2/27} \quad \therefore \quad \boxed{k = \frac{9}{2}}$$

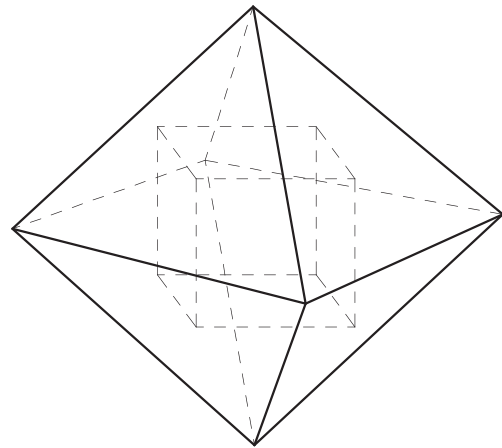


Figura 458

34. Calcular a área total do icosaedro regular de volume igual a  $90(3 + \sqrt{5}) \text{ cm}^3$ .

Solução: Sendo  $a$  a aresta do sólido, podemos (número 123) escrever:

$$\frac{5}{12}(3 + \sqrt{5})a^3 = 90(3 + \sqrt{5}) \quad \therefore \quad a^3 = \frac{90}{5} \cdot 12 = 18 \cdot 12 = 216 \quad \therefore \quad a = 6$$

Como sua área total  $S$  corresponde à soma das áreas dos vinte triângulos equiláteros que são suas faces, temos:

$$S = 20 \cdot \frac{6^2\sqrt{3}}{4} = 5 \cdot 36\sqrt{3} \quad \therefore \quad \boxed{S = 180\sqrt{3} \text{ cm}^2}$$

35. A seção diagonal (A)(C)(T)(R) do ortoedro de bases (A)(B)(C)(D) e (R)(S)(T)(U) é quadrada. Calcular seu volume, sabendo que suas arestas básicas medem, respectivamente, 3 m e 4 m.

Resolução: Por ser um ortoedro (números 129 e 130.5), o triângulo (A)(B)(C) é retângulo (Figura 459), tendo catetos 3 e 4, e então, hipotenusa (A)(C) = 5.

Sendo quadrada a seção (A)(C)(T)(R) (Figura 459), resulta que a altura do ortoedro é igual a 5.

Assim, seu volume  $V$  (número 137) será:

$$V = abc = 3 \cdot 4 \cdot 5 \quad \therefore \quad \boxed{V = 60 \text{ m}^3}$$

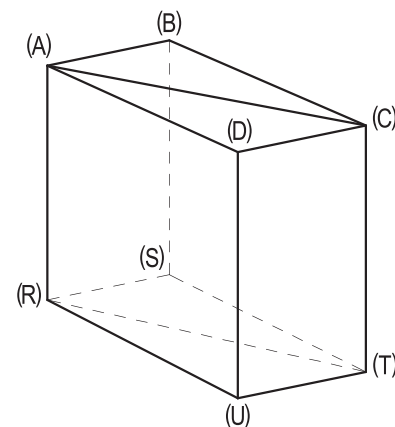


Figura 459

36. A aresta de um diedro reto serve de suporte a uma das diagonais de um octaedro convexo regular de 4 cm de aresta.

Sabendo que as faces desse diedro contêm as duas outras semidiagonais do octaedro, pede-se calcular a área total e o volume do sólido pertencente ao octaedro e exterior ao diedro e a razão  $k$  entre as áreas totais desse poliedro e do próprio octaedro dado.

Resolução: O diedro reto considerado (Figura 460) tem por aresta a reta suporte da diagonal (VS) do octaedro e suas faces contêm as semidiagonais (OA) e (OB), produzindo no sólido, pelas seções de suas faces, uma dupla pirâmide (V)-(O)(A)(B)-(S)-(O)(A)(B), o que equivale, em volume, a uma quarta parte do volume do octaedro.

O poliedro em estudo, exterior a esse diedro, tem, então, seis faces triangulares equiláteras (VAD), (VDC), (VCB), (SAD), (SDC) e (SCB), faces também do octaedro dado e outras duas que são duas semiseções diagonais (VSA) e (VSB), que, somadas, completam um quadrado de lado igual à aresta do octaedro (Figura 460).

Então, a área  $S$  e o volume  $V$  do poliedro parte do octaedro e exterior ao diedro se escrevem:

$$S = 6 \cdot S_{(VAD)} + S_{(VASC)}$$

$$\therefore S = 6 \cdot \frac{4^2 \sqrt{3}}{4} + 4^2$$

$$\therefore S = 24\sqrt{3} + 16 \quad \therefore \boxed{S = 8(3\sqrt{3} + 2) \text{ cm}^2}$$

$$V = \frac{6}{8} \cdot \frac{4^3 \sqrt{2}}{3} \quad \therefore \boxed{V = 16\sqrt{2} \text{ cm}^3}$$

E a razão  $k$ , pedida, se anota:

$$k = \frac{S}{S_{\text{OCT}}} = \frac{8(3\sqrt{3} + 2)}{8 \cdot \frac{4^2 \sqrt{3}}{4}} = \frac{3\sqrt{3} + 2}{4\sqrt{3}}$$

$$\therefore k = \frac{(3\sqrt{3} + 2)\sqrt{3}}{(4\sqrt{3})\sqrt{3}} \quad \therefore \boxed{k = \frac{9 + 2\sqrt{3}}{12}}$$

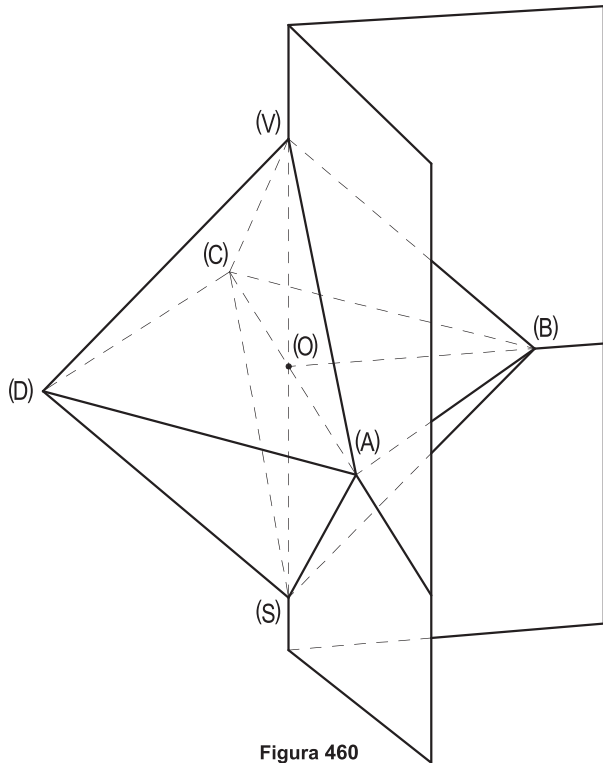


Figura 460

37. Dois planos paralelos a duas das três diagonais de um octaedro regular seccionam a terceira diagonal a 1 m e a 2 m de seus extremos.

Calcule o volume do sólido limitado no interior do octaedro entre esses dois planos, conhecendo o valor  $4\sqrt{2}$  cm da aresta do octaedro. Escolher a solução de maior volume.

Resolução: O valor da diagonal do octaedro é:

$$D = a\sqrt{2} = 4\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 8$$

Os planos secantes produzem (número 114.9) seções quadradas de lados  $\sqrt{2}$  e  $2\sqrt{2}$  e podem deixar o centro (O) do sólido entre eles, como indica a Figura 461, ou, ao contrário, podem deixar tal centro (O) fora do intervalo que formam, ou seja, neste caso, podem atingir o sólido em apenas uma das pirâmides quadrangulares que o constituem.

Assim, o volume procurado corresponderá à subtração do volume do octaedro original e de duas pirâmides quadrangulares formadas pelos seccionamentos, com arestas básicas iguais a  $\sqrt{2}$  e  $2\sqrt{2}$  (Figura 461), devendo ser escolhida a hipótese que corresponde à solução de maior volume, conforme imposto ao problema, aquela que deixa (O) entres os dois planos secantes.

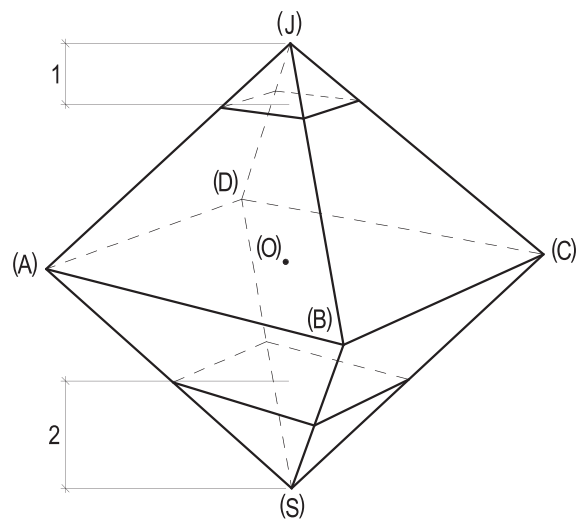


Figura 461

Logo, o volume  $V$  pedido é:

$$V = (4\sqrt{2})^3 \frac{\sqrt{2}}{3} - \frac{1}{3} (\sqrt{2})^2 \cdot 1 - \frac{1}{3} (2\sqrt{2})^2 \cdot 2$$

$$V = 128\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{3} - \frac{2}{3} - \frac{8}{3} \cdot 2 = \frac{256}{3} - \frac{2}{3} - \frac{16}{3} \quad \therefore \quad \boxed{V = \frac{238}{3} \text{ m}^3}$$

38. Calcular o volume do dodecaedro convexo regular, cuja área total vale  $12\sqrt{25 + 10\sqrt{5}} \text{ m}^2$

Solução: Sendo  $a$  a aresta do sólido, temos (números 118 e 119):

$$3 \cdot \sqrt{25 + 10\sqrt{5}} \cdot a^2 = 12\sqrt{25 + 10\sqrt{5}} \quad \therefore \quad a^2 = 4 \quad \therefore \quad a = 2$$

$$\text{Assim, } V = \frac{(15 + 7\sqrt{5})}{4} \cdot a^3 = \frac{(15 + 7\sqrt{5})}{4} \cdot 8 \quad \therefore \quad \boxed{V = 2(15 + 7\sqrt{5}) \text{ m}^3}$$



39. Calcule a área total do ortoedro inscrito numa esfera de 13 cm de raio, sabendo que ele tem bases quadradas e que suas arestas laterais medem 10 cm.

Resolução: O triângulo retângulo (A)(R)(T) (Figura 462) fornece:

$$\overline{(R)(T)} = \sqrt{26^2 - 10^2} = \sqrt{676 - 100} = 24$$

Por serem quadradas as bases, as arestas básicas medem  $\frac{24}{\sqrt{2}} = 12\sqrt{2}$ .

E, então, a área total  $S_t$  do ortoedro é:

$$S_t = 4 \cdot 12\sqrt{2} \cdot 10 + 2 \cdot (12\sqrt{2})^2$$

$$S_t = 480\sqrt{2} + 576$$

$$\therefore \boxed{S_t = 96(5\sqrt{2} + 6) \text{ cm}^2}$$

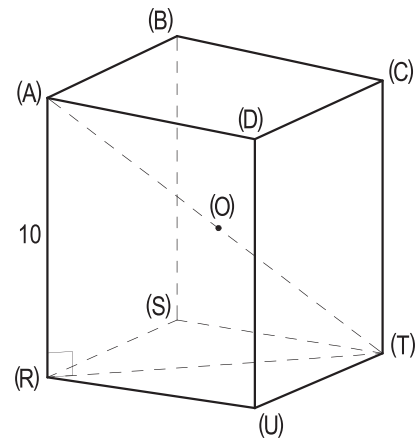


Figura 462

40. Um paralelepípedo reto tem faces laterais quadradas e losangos por bases. Sabendo que duas de suas faces laterais formam ângulo de  $60^\circ$  e que sua área lateral vale  $144 \text{ dm}^2$ , pede-se calcular os comprimentos de suas diagonais, bem como sua área total e seu volume.

Resolução: Por ser reto, o paralelepípedo (A)(B)(C)(D)–(R)(S)(T)(U) é tal que sua altura  $h$  é igual aos lados das faces laterais quadradas (Figura 463).

Assim, a área lateral é:

$$4ah = 4a^2 = 144 \quad \therefore \quad a = h = 6$$

E, a existência do ângulo de  $60^\circ$  proporciona (Figura 463):

$$\overline{(B)(D)} = a = 6 \quad \text{e}$$

$$\overline{(A)(C)} = a\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$$

Então:

$$\overline{(B)(U)}^2 = a^2 + a^2 = 72$$

$$\therefore \boxed{\overline{(B)(U)} = 6\sqrt{2} \text{ dm}}$$

$$\overline{(A)(T)}^2 = a^2 + (a\sqrt{3})^2 = 144$$

$$\therefore \boxed{\overline{(A)(T)} = 12 \text{ dm}}$$

$$S_t = 4a^2 + 2 \cdot \frac{a \cdot a\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore \boxed{S_t = 36(4 + \sqrt{3}) \text{ dm}^2}$$

$$V = \frac{a \cdot a\sqrt{3}}{2} \cdot a = \frac{a^3\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore \boxed{V = 108\sqrt{3} \text{ dm}^3}$$

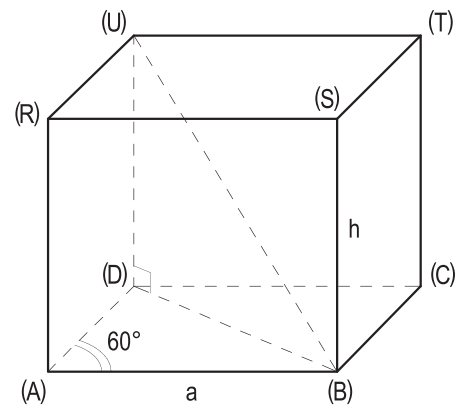


Figura 463

41. Calcular o volume do prisma hexagonal regular de aresta básica igual a 4 cm, inscritível numa esfera de 5 cm de raio.

Resolução: Por ser inscritível numa esfera, a diagonal (AU) do prisma (Figura 464) é um de seus diâmetros e, então, o triângulo retângulo (A)(D)(U) fornece:

$$\overline{(A)(U)}^2 = \overline{(A)(D)}^2 + \overline{(D)(U)}^2$$

$$\therefore 10^2 = 8^2 + h^2 \quad \therefore h = 6$$

Assim, o volume  $V$  pedido é (número 141):

$$V = (B) h = 6 \cdot \frac{4^2 \sqrt{3}}{4} \cdot 6 = 6 \cdot 4 \sqrt{3} \cdot 6$$

$$\therefore \boxed{V = 144 \sqrt{3} \text{ cm}^3}$$

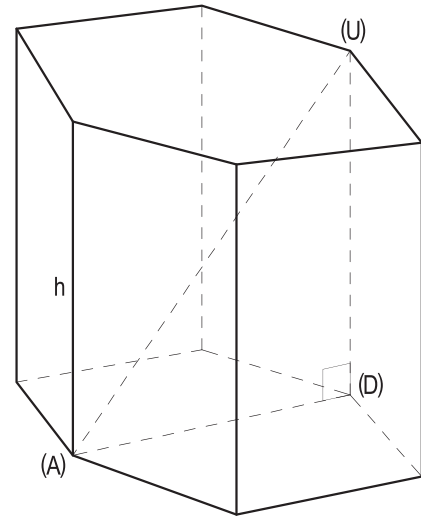


Figura 464

42. Um prisma hexagonal regular tem altura  $h$ . Sobre sua base (A)(B)(C)(D)(E)(F) constrói-se outro prisma regular, este triangular, com base (A)(C)(E), situado no exterior do primeiro, com altura  $h'$ .

Sabendo que os dois prismas são equivalentes, pede-se calcular a razão  $k = \frac{h}{h'}$ .

Resolução: Nas condições estabelecidas, sendo  $a$  a aresta básica do prisma hexagonal regular dado, a aresta básica do prisma triangular será  $a\sqrt{3}$  (Figura 465).

Assim, os volumes  $V$  e  $V'$  dos prismas hexagonal e triangular, respectivamente, se escrevem:

$$V = 6 \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \cdot h$$

$$V' = \frac{(a\sqrt{3})^2 \sqrt{3}}{4} \cdot h'$$

E, por serem equivalentes os dois prismas:

$$V = V' \quad \therefore \frac{6a^2 \sqrt{3}}{4} h = \frac{3a^2 \sqrt{3}}{4} h'$$

$$\therefore 2 \cdot \frac{3a^2 \sqrt{3}}{4} h = \frac{3a^2 \sqrt{3}}{4} h'$$

$$\therefore 2h = h' \quad \therefore \boxed{k = \frac{h}{h'} = \frac{1}{2}}$$

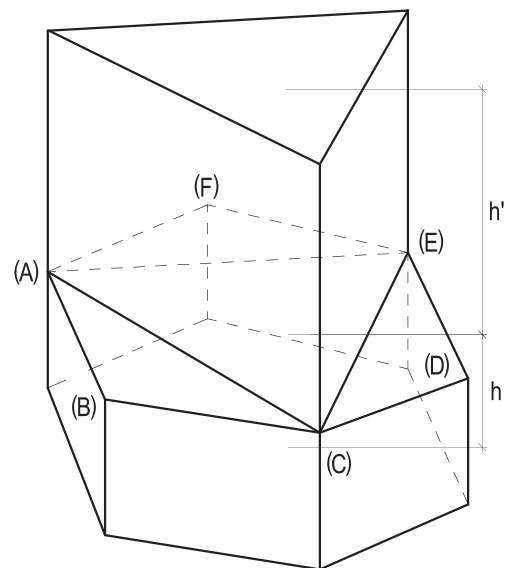


Figura 465

43. A base (ABC) de um prisma triangular reto (ABC)-(RST) inscreve-se num semicírculo de diâmetro (BC).

Conhecendo os valores 3 cm e 4 cm das arestas básicas (AB) e (AC), respectivamente, e sabendo que as maiores diagonais faciais do prisma medem 13 cm, pede-se calcular a área lateral  $S_\ell$ , a área total  $S_t$  e o volume  $V$  do prisma.

Além disso, considere a pirâmide triangular reta (J)-(RST), construída no exterior do prisma dado, com altura igual à do prisma e calcule seu volume  $V'$ .

Resolução: Pelos dados, o triângulo (ABC), base do prisma, é retângulo, por se inscrever num semicírculo. E, mais ainda, é pitagórico, o que dá para sua hipotenusa:

$$(B)(C) = 5 \text{ cm}$$

A maior das faces laterais do prisma, que há de possuir as maiores diagonais, é, naturalmente, a relativa a essa hipotenusa. Assim, uma de suas diagonais se calcula pela utilização do triângulo retângulo (BCS) (Figura 466), que permite anotar:

$$(B)(S) = h = \sqrt{13^2 - 5^2}$$

$$\therefore h = \sqrt{169 - 25} = 12$$

Assim:

$$S_\ell = 3h + 4h + 5h = 12h$$

$$\therefore S_\ell = 12 \cdot 12 \quad \therefore \boxed{S_\ell = 144 \text{ cm}^2}$$

$$\text{e } S_t = S_\ell + 2(B) = 144 + 2 \cdot \frac{3 \cdot 4}{2}$$

$$\therefore S_t = 144 + 12 \quad \therefore \boxed{S_t = 156 \text{ cm}^2}$$

$$\text{e } V = (B) h = 6 \cdot 12 \quad \therefore \boxed{V = 72 \text{ cm}^3}$$

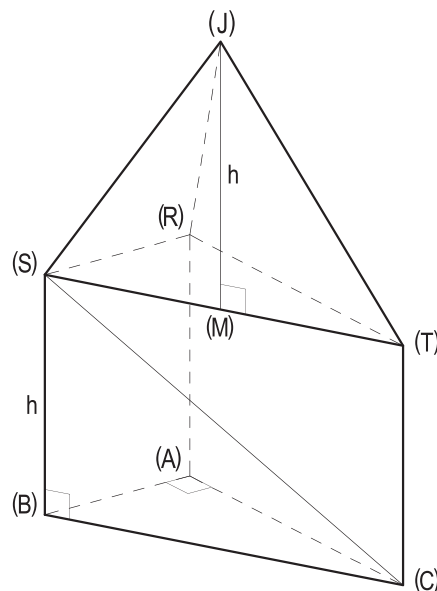


Figura 466

Sendo reta a pirâmide (J)-(RST), o pé de sua altura tem de ser o circuncentro (M) da base (RST), o que implica em que o plano (JST) assim como a altura facial (JM) sejam perpendiculares ao plano dessa base (Figura 466).

E, então, seu volume  $V'$  será:

$$V' = \frac{(B) h}{3} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3 \cdot 4}{2} \cdot 12$$

$$\therefore V' = \frac{144}{6} \quad \therefore \boxed{V' = 24 \text{ cm}^3}$$

44. Com bases nas faces de um cubo de aresta  $a$ , são construídas seis pirâmides quadrangulares regulares iguais, todas para o exterior do cubo.

Sabendo que o sólido assim formado, composto pelo cubo e pelas seis pirâmides, tem volume igual ao quádruplo do volume do cubo, pede-se calcular o valor da altura  $h$  dessas pirâmides, em função da aresta  $a$  do cubo e, então, a área  $S$ , também em função de  $a$ , desse sólido de 24 faces.

Resolução: Para o cálculo de  $h$ , em função de  $a$ , basta anotar que o volume do sólido composto conforme os dados valha cinco vezes o volume do cubo, ou seja:

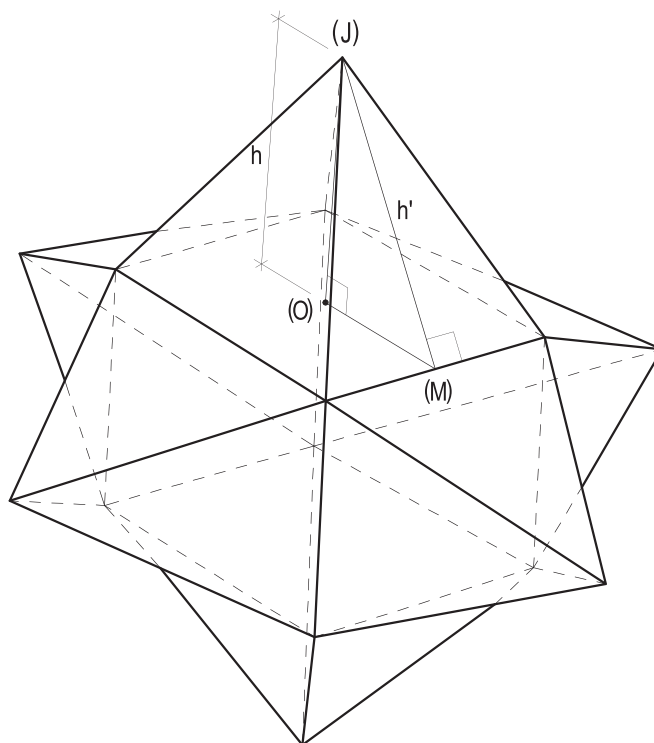


Figura 467

$$6 \cdot \frac{a^2 h}{3} + a^3 = 5a^3 \quad \therefore \quad 2a^2 h = 4a^3 \quad \therefore \quad \boxed{h = 2a}$$

Para o cálculo da área  $S$ , o triângulo retângulo (J)(O)(M) (Figura 467) dá:

$$(J)(M) = h' = \sqrt{h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{(2a)^2 + \frac{a^2}{4}} = \sqrt{\frac{16a^2 + a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{17}}{2}$$

E como  $S$  vale 24 vezes a área de um triângulo face do poliedro, temos:

$$S = 24 \cdot \frac{ah'}{2}$$

$$S = 24 \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a\sqrt{17}}{2} = 6a \cdot a\sqrt{17} \quad \therefore \quad \boxed{S = 6a^2\sqrt{17}}$$

45. Um prisma oblíquo tem por base um hexágono regular de 4 m de lado. Suas arestas laterais inclinam-se de  $45^\circ$  em relação aos planos das bases.

Calcule o comprimento dessas arestas, sabendo que o volume do prisma vale  $96\sqrt{6} \text{ m}^3$ .

Resolução: Para o volume do prisma pode-se escrever:

$$V = (B) h \quad \therefore \quad 96\sqrt{6} = 6 \cdot \frac{4^2\sqrt{3}}{4} \cdot h$$

$$\therefore \quad 96\sqrt{6} = 24\sqrt{3} h$$

$$\therefore \quad h = \frac{96}{24} \cdot \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}} = 4\sqrt{2}$$

E o triângulo retângulo e isósceles (A)(H)(R) (Figura 468) dá:

$$\ell = h\sqrt{2} \quad \therefore \quad \ell = 4\sqrt{2}\sqrt{2} \quad \therefore \quad \boxed{\ell = 8\text{m}}$$

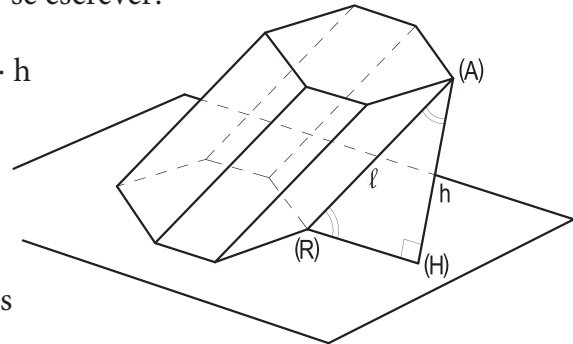


Figura 468

46. Calcular o volume  $V$  do octaedro regular circunscrito a uma esfera de  $\sqrt{6} \text{ m}$  de raio e os volumes  $V_1$  e  $V_2$  das esferas circunscrita e tangente às arestas do octaedro, respectivamente.

Resolução: Sabe-se (número 115.6) que o raio  $R_i$  da esfera inscrita num octaedro regular de aresta  $a$  se escreve:

$$R_i = \frac{a\sqrt{6}}{6} \quad \therefore \quad \sqrt{6} = \frac{a\sqrt{6}}{6} \quad \therefore \quad a = 6$$

Assim, o volume  $V$  do octaedro é (número 115.7):

$$V = \frac{a^3\sqrt{2}}{3} = \frac{6^3\sqrt{2}}{3} \quad \therefore \quad \boxed{V = 72\sqrt{2} \text{ m}^3}$$

Para os volumes  $V_1$  e  $V_2$  da esfera circunscrita ao poliedro e da tangente às suas arestas, respectivamente, temos (número 115.6):

$$V_1 = \frac{4}{3} \pi (3\sqrt{2})^3 \quad \therefore \quad \boxed{V_1 = 72\sqrt{2} \pi \text{ m}^3}$$

$$V_2 = \frac{4}{3} \pi 3^3 \quad \therefore \quad \boxed{V_2 = 36\pi \text{ m}^3}$$

47. Calcular a área total do icosaedro regular de volume igual a  $90(3 + \sqrt{5}) \text{ cm}^3$ .

Resolução: Sendo  $a$  a aresta do sólido, podemos (número 123) escrever:

$$\frac{5}{12} (3 + \sqrt{5}) a^3 = 90(3 + \sqrt{5}) \quad \therefore \quad a^3 = \frac{90}{5} \cdot 12 = 18 \cdot 12 = 216 \quad \therefore \quad a = 6$$

Como sua área total  $S$  corresponde à soma das áreas dos vinte triângulos equiláteros faces:

$$S = 20 \cdot \frac{6^2\sqrt{3}}{4} = 5 \cdot 36\sqrt{3} \quad \therefore \quad \boxed{S = 180\sqrt{3} \text{ cm}^2}$$

48. Uma pirâmide hexagonal regular tem sua base inscrita num círculo de  $128\pi \text{ cm}^2$  de área. Sabendo que o apótema da pirâmide mede 10 cm, pede-se calcular sua área lateral  $S_\ell$ , sua área total  $S_t$  e seu volume  $V$ .

Resolução: O cálculo da aresta básica  $a$ , igual ao raio do círculo circunscrito ao hexágono base, é simples:

$$\pi r^2 = \pi a^2 = 128\pi \quad \therefore a^2 = 128 \quad \therefore a = 8\sqrt{2}$$

Como o apótema do hexágono base (O)(M) vale (Geometria Plana, número 290)  $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ , temos:

$$\overline{(O)(M)} = 8\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{6}$$

E o triângulo retângulo (V)(O)(M) (Figura 469) dá:

$$\overline{(V)(O)}^2 = \overline{(V)(M)}^2 - \overline{(O)(M)}^2$$

$$\therefore h^2 = 10^2 - (4\sqrt{6})^2 = 100 - 96 \quad \therefore h = 2$$

Daí temos:

$$S_\ell = 6 \frac{a \cdot 10}{2} = 30a \quad \therefore \boxed{S_\ell = 240\sqrt{2} \text{ cm}^2}$$

$$S_t = 6 \frac{a\sqrt{3}}{4} + 6 \frac{a \cdot 10}{2} = 6 \cdot \frac{64 \cdot 2 \cdot \sqrt{3}}{4} + 6 \cdot \frac{8\sqrt{2} \cdot 10}{2}$$

$$\therefore S_t = 192\sqrt{3} + 240\sqrt{2} \quad \therefore \boxed{S_t = 48(4\sqrt{3} + 5\sqrt{2}) \text{ cm}^2}$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot 6 \frac{a\sqrt{3}}{4} \cdot h \quad \therefore V = \frac{6}{12} (8\sqrt{2})^2 \cdot \sqrt{3} \cdot 2 = \frac{64 \cdot 2 \cdot \sqrt{3} \cdot 2}{2}$$

$$\therefore V = 64 \cdot 2 \cdot \sqrt{3} \quad \therefore \boxed{V = 128\sqrt{3} \text{ cm}^3}$$

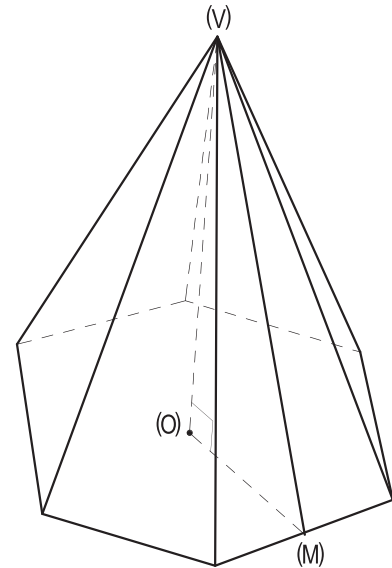


Figura 469

49. Calcular o volume do tetraedro regular inscrito numa esfera de área igual a  $\frac{27\pi}{2} \text{ m}^2$ .

Resolução: O cálculo do raio  $R$  da esfera em que se inscreve o tetraedro é (número 106.6):

$$4\pi R^2 = \frac{27\pi}{2} \quad \therefore R^2 = \frac{27}{8} \quad \therefore R = \frac{3}{2} \left( \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \right)$$

A aresta  $a$  e o volume  $V$  do tetraedro regular nela inscrito, valem, então:

$$\frac{3}{2} \left( \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \right) = \frac{a\sqrt{6}}{4} \quad \therefore \frac{3}{4} \sqrt{6} = \frac{a\sqrt{6}}{4} \quad \therefore a = 3$$

$$V = \frac{a^3 \sqrt{2}}{12} = \frac{3^3 \sqrt{2}}{12} \quad \therefore \boxed{V = \frac{9\sqrt{2}}{4} \text{ m}^3}$$

50. Dado um triedro trirretângulo, considere, sobre a aresta (Ox), os pontos (A) e (A'), tais que  $\overline{(O)(A)} = 3 \text{ cm}$  e  $\overline{(O)(A')} = 6 \text{ cm}$ , sobre a aresta (Oy), os pontos (B) e (B'), tais que  $\overline{(O)(B)} = 4 \text{ cm}$  e  $\overline{(O)(B')} = 8 \text{ cm}$  e, sobre a aresta (Oz), o ponto (C), tal que  $\overline{(O)(C)} = 5 \text{ cm}$ . Calcule o volume V e a área lateral S do pentaedro (A)(B)(C)(A')(B'), que tem por bases os triângulos (A')(B')(C) e (A)(B)(C).

Resolução: O volume do pentaedro em estudo nada mais é que a subtração entre os volumes das pirâmides triangulares (O)-(A')(B')(C) e (O)-(A)(B)(C) (Figura 470).

Assim (número 163):

$$V = \frac{6 \cdot 8 \cdot 5}{6} - \frac{3 \cdot 4 \cdot 5}{6}$$

$$\therefore V = 40 - 10$$

$$\therefore \boxed{V = 30 \text{ cm}^3}$$

Para a área lateral S temos:

$$S_{(CAA')} = \frac{5 \cdot 6}{2} - \frac{5 \cdot 3}{2} = 15 - \frac{15}{2} = \frac{15}{2}$$

$$S_{(CBB')} = \frac{5 \cdot 8}{2} - \frac{5 \cdot 4}{2} = 20 - 10 = 10$$

$$S_{(ABB'A')} = \frac{8 \cdot 6}{2} - \frac{4 \cdot 3}{2} = 24 - 6 = 18 \quad \therefore S = \frac{15}{2} + 10 + 18$$

$$\therefore \boxed{S = \frac{61}{2} \text{ cm}^2}$$

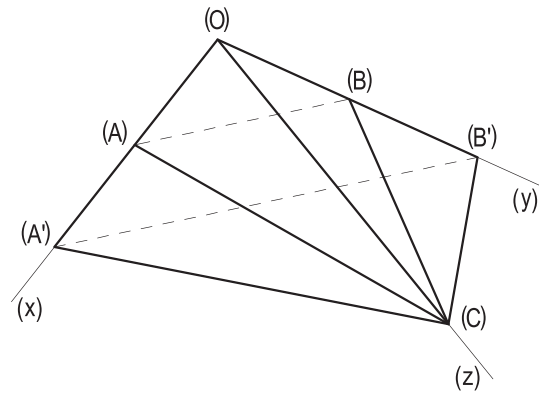


Figura 470

51. Dado um tetraedro regular de aresta a, considere a esfera tangente às suas arestas e calcule a área da porção da superfície do tetraedro exterior a essa esfera.

Resolução: Sabe-se (número 105.12) que a esfera tangente às arestas de um tetraedro regular secciona as faces do sólido, produzindo em cada uma delas o círculo nela inscrito (Figura 471).

Assim, a área S pedida, por considerar da superfície do tetraedro apenas as porções exteriores à esfera que tangencia suas arestas, há de ser o quádruplo da diferença entre a área do triângulo equilátero face do poliedro e a do círculo nela inscrito.

$$S = 4 \left[ \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} - \pi \left( \frac{a\sqrt{3}}{6} \right)^2 \right]$$

$$\therefore S = a^2 \sqrt{3} - \frac{a^2 \pi}{3}$$

$$\therefore \boxed{S = \frac{a^2}{3} (3\sqrt{3} - \pi)}$$

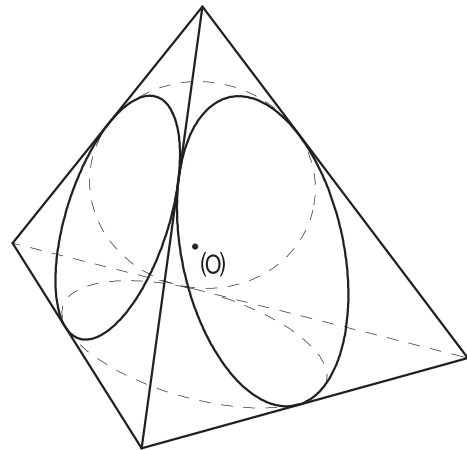


Figura 471

52. Dado um cubo de aresta  $a$ , considere a esfera tangente às suas arestas e calcule a área da superfície do cubo que fica no exterior dessa esfera.

Resolução: Sabe-se (número 111.8) que a esfera tangente às arestas do cubo é concêntrica com o poliedro e é seccionada pelos planos das faces do cubo segundo os círculos inscritos nesses quadrados faces.

Então, a área  $S$  procurada há de ser igual ao sêxtuplo da diferença entre a área da face do cubo e a área do círculo nela inscrito (Figura 472).

Como os raios dos círculos inscritos nas faces do cubo valem a metade da aresta  $a$ , a área  $S$  pedida se escreve:

$$S = 6 \left[ a^2 - \pi \left( \frac{a}{2} \right)^2 \right] = 6a^2 - \frac{3\pi a^2}{2} \quad \therefore \quad S = \frac{3a^2}{2} (4 - \pi)$$

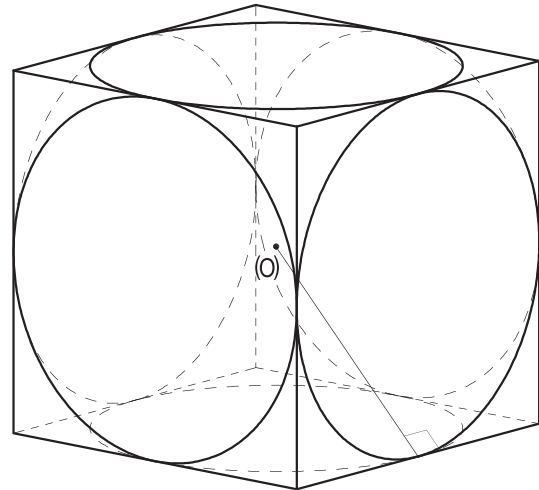


Figura 472

53. Dado um octaedro convexo regular de aresta  $a$ , considere a esfera tangente às suas arestas e calcule a área da porção da superfície do poliedro exterior a essa esfera.

Resolução: Sabe-se (número 114.8) que a esfera tangente às arestas de um octaedro regular secciona suas faces produzindo nelas círculos inscritos nesses triângulos faces (Figura 473).

Assim, a área pedida há de corresponder a oito vezes a diferença entre as áreas dos triângulos equiláteros faces do poliedro e as dos círculos neles inscritos, ou seja:

$$S = 8 \left[ \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} - \pi \left( \frac{a\sqrt{3}}{6} \right)^2 \right]$$

$$S = 2a^2 \sqrt{3} - 2\pi \frac{a^2}{3} = 2a^2 \left( \sqrt{3} - \frac{\pi}{3} \right) \quad \therefore \quad S = \frac{2a^2}{3} (3\sqrt{3} - \pi)$$

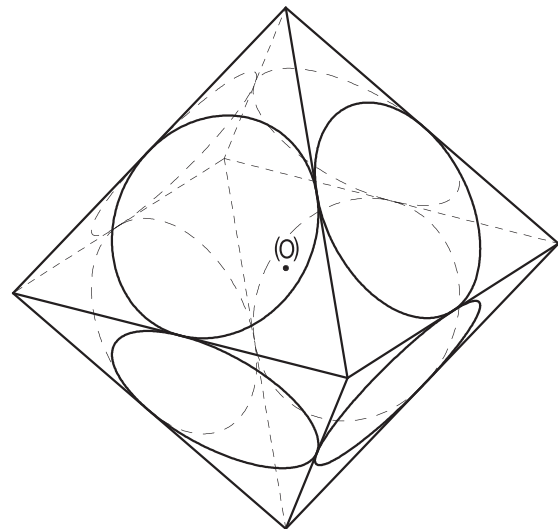


Figura 473



54. O triângulo escaleno (A)(B)(C), cujos lados medem 12 cm, 10 cm e 8 cm, é base de uma pirâmide triangular oblíqua (J)-(A)(B)(C), que tem  $15\sqrt{7}$  cm de altura.

Sobre uma aresta lateral (J)(A), são marcados dois pontos (P) e (Q), tais que  $\overline{(J)(P)} = 6$  cm,  $\overline{(P)(Q)} = 3$  cm e  $\overline{(Q)(A)} = 9$  cm.

Pede-se calcular o volume do tetraedro de vértices (B), (C), (P) e (Q).

Resolução: Inicialmente, analisemos a pirâmide (J)-(A)(B)(C).

A área de sua base (A)(B)(C) se calcula (*Geometria Plana*, número 321) pela expressão:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$S = \sqrt{15 \cdot (3)(5)(7)} = 15\sqrt{7}$$

Embora se conheça o valor da altura dessa pirâmide, é impossível determinar precisamente a posição do vértice (J), pois sua altura (J)(H) não tem posição definida, já que, embora conhecidos os lados do triângulo retângulo (J)(H)(A) (Figura 474), ainda assim ele pode girar, em torno do vértice (A), proporcionando inúmeras posições dos catetos (A)(H) e (H)(J).

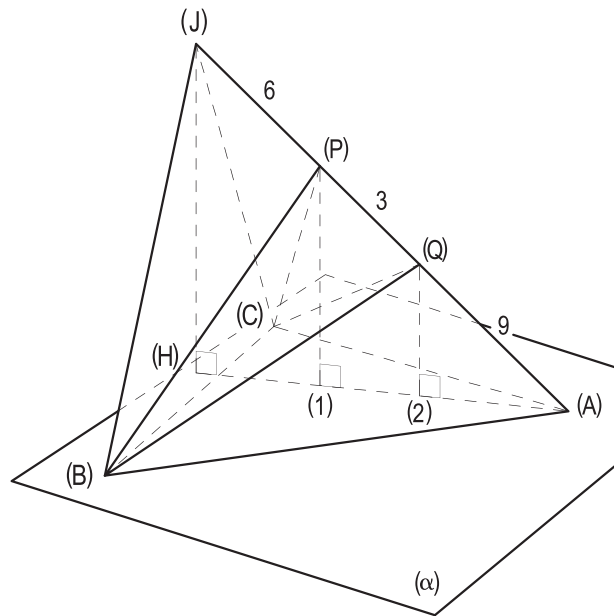


Figura 474

Mas, observando-se que os triângulos retângulos (J)(H)(A), (P)(1)(A) e (Q)(2)(A), por terem lados de mesmas direções, são, aos pares, semelhantes, temos:

$$\frac{(P)(1)}{(J)(H)} = \frac{(P)(A)}{(J)(A)} = \frac{12}{18} = \frac{2}{3} \quad \therefore \quad (P)(1) = \frac{2}{3} \cdot 15\sqrt{7}$$

e 
$$\frac{(Q)(2)}{(J)(H)} = \frac{(Q)(A)}{(J)(A)} = \frac{9}{18} = \frac{1}{2} \quad \therefore \quad (Q)(2) = \frac{1}{2} \cdot 15\sqrt{7}$$

Então, o volume  $V$  do tetraedro em estudo, por corresponder à diferença entre os volumes  $V_1$  e  $V_2$  das pirâmides (P)-(A)(B)(C) e (Q)-(A)(B)(C), respectivamente, vale:

$$V = V_1 - V_2 = \frac{15\sqrt{7}}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot 15\sqrt{7} - \frac{15\sqrt{7}}{3} \cdot \frac{15\sqrt{7}}{3} = \left(\frac{2}{9} - \frac{1}{9}\right) (15\sqrt{7})^2$$

$$V = \frac{225 \cdot 7}{9} \quad \therefore \quad V = 25 \cdot 7 \quad \therefore \quad \boxed{V = 175 \text{ cm}^3}$$

55. Uma pirâmide de volume  $V$  sofre secionamento por um plano que contém os pontos médios de suas arestas laterais.

Pede-se calcular, em função de  $V$ , o volume  $X$  do tronco de pirâmide assim formado.

Resolução: O secionamento considerado cria, além do tronco em estudo, uma outra pirâmide semelhante à primeira na razão  $\frac{1}{2}$  e, por isso (número 161), com volume  $V'$ :

$$V' = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot V = \frac{V}{8}$$

Então, por diferença, temos:  $X = V - V' = V - \frac{V}{8} \quad \therefore \quad \boxed{X = \frac{7}{8} \cdot V}$

56. O octaedro regular (J)-(A)(B)(C)(D)-(S) é secionado por dois planos que contém sua diagonal (J)(S) e que passam, cada um, por um dos pontos terços (P) e (Q) da aresta (A)(B). Calcular, em função da aresta  $a$  do octaedro, a área  $S$  do tetraedro convexo irregular (J)(S)(P)(Q) assim formado.

Resolução: O tetraedro em estudo é (Figura 475) a soma de duas pirâmides iguais (J)-(O)(P)(Q) e (S)-(O)(P)(Q), onde (O) é o centro do octaedro. Para o cálculo dos segmentos iguais  $\overline{(O)(P)}$  e  $\overline{(O)(Q)}$ , os triângulos retângulos iguais  $(O)(M)(P)$  e  $(O)(M)(Q)$  (Figura 476) fornecem:

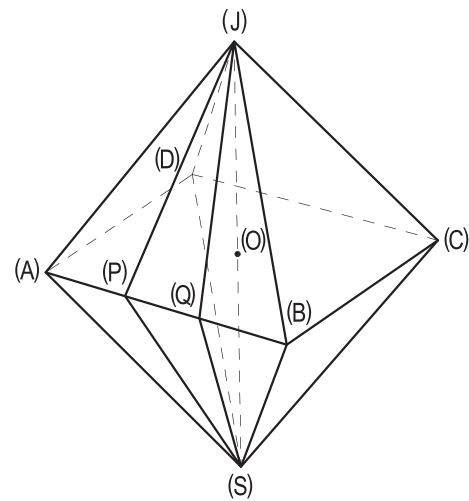


Figura 475

$$\begin{aligned} \overline{(O)(P)} &= \overline{(O)(Q)} = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{6}\right)^2} = \\ &= \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{36}} = \sqrt{\frac{10a^2}{36}} = \frac{a\sqrt{10}}{6} \end{aligned}$$

Então, as áreas das faces do tetraedro são:

$$\begin{aligned} S_{(J)(P)(Q)} &= S_{(S)(P)(Q)} = \frac{1}{2} \overline{(P)(Q)} \cdot \overline{(J)(M)} = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{12} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_{(J)(P)(S)} &= S_{(J)(Q)(S)} = \frac{1}{2} \cdot \overline{(J)(S)} \cdot \overline{(O)(P)} = \\ &= \frac{1}{2} \cdot a\sqrt{2} \cdot \frac{a\sqrt{10}}{6} = \frac{a^2\sqrt{5}}{6} \end{aligned}$$

Logo, a área  $S$  pedida, soma dessas, se anota:

$$S = 2 \left( \frac{a^2\sqrt{3}}{12} + \frac{a^2\sqrt{5}}{6} \right) = \frac{2a^2}{12} (\sqrt{3} + 2\sqrt{5}) \quad \therefore \quad \boxed{S = \frac{a^2}{6} \cdot (\sqrt{3} + 2\sqrt{5})}$$

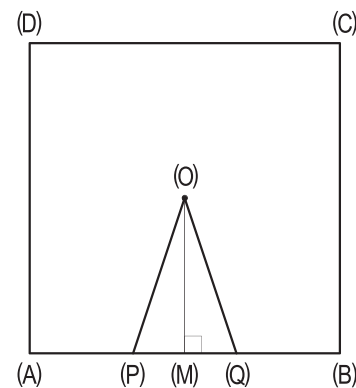


Figura 476

57. Um prisma hexagonal regular tem todas as suas arestas medindo 2 cm e está assente por uma de suas bases (A)(B)(C)(D)(E)(F) num plano horizontal.

Considere o quadrado (X)(Y)(Z)(W) inscrito naquele hexágono, tendo os lados (X)(Y) e (Z)(W) paralelos a (A)(B), com vértices sobre os lados (B)(C), (C)(D), (E)(F) e (F)(A).

Tendo por base esse quadrado, considere outro prisma regular, com 4 cm de altura, situado parte dentro do primeiro prisma, mas aflorando acima da segunda base deste.

Pede-se calcular os volumes  $V_1$  e  $V_2$ , respectivamente, do sólido que resta no interior do prisma hexagonal, mas externo ao segundo prisma e do paralelepípedo formado no prisma quadrangular e situado no exterior do hexagonal.

Resolução:

Para calcular o lado  $x$  do quadrado (XYZW) inscrito no hexágono (ABCDEF), observemos o triângulo retângulo (XJF) (Figura 477) que, por ter um ângulo de  $60^\circ$ , permite escrever:

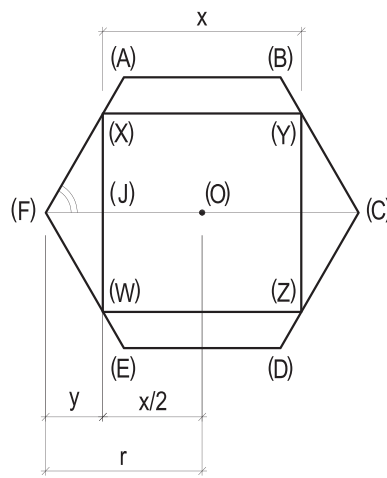


Figura 477

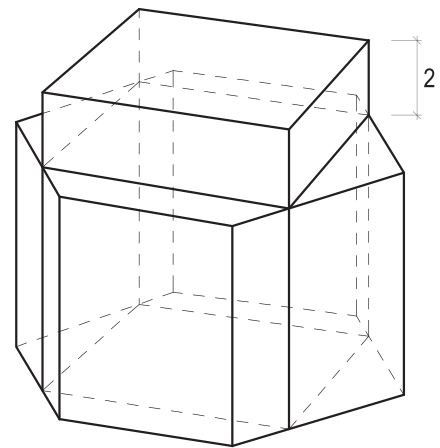


Figura 478

$$\overline{(X)(J)} = \overline{(F)(J)} \cdot \sqrt{3}$$

$$\therefore \frac{x}{2} = \left(r - \frac{x}{2}\right) \sqrt{3} \quad \therefore x = (2r - x) \sqrt{3} \quad \therefore x = \frac{2r \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}} = r(3 - \sqrt{3})$$

E como o raio  $r$  do círculo circunscrito ao hexágono é igual ao seu lado, temos:

$$(X)(Y) = x = 2(3 - \sqrt{3})$$

$$V_1 = 6 \cdot \frac{2^2 \sqrt{3}}{4} \cdot 2 - x^2 \cdot 2 = 12 \sqrt{3} - 4(3 - \sqrt{3})^2 \cdot 2$$

$$\therefore V_1 = 12 \sqrt{3} - 48(2 - \sqrt{3}) = 12 \sqrt{3} - 96 + 48 \sqrt{3}$$

$$\therefore V_1 = 60 \sqrt{3} - 96 \quad \therefore \boxed{V_1 = 12(5\sqrt{3} - 8) \text{ cm}^3}$$

$$V_2 = x^2(4 - 2) = 4(3 - \sqrt{3})^2 \cdot 2$$

$$\therefore V_2 = 4(12 - 6\sqrt{3}) \cdot 2 \quad \therefore \boxed{V_2 = 48(2 - \sqrt{3}) \text{ cm}^3}$$

**58. Instituir uma expressão que relacione a área total  $S$  e o volume  $V$  de um tetraedro regular, referidos a uma mesma unidade.**

Resolução: Sabe-se (números 106.3 e 106.7) que, para um tetraedro regular de aresta  $a$ :

$$S = a^2 \sqrt{3} \quad \text{e} \quad V = \frac{a^3 \sqrt{2}}{12}$$

$$\therefore S^3 = a^6 (\sqrt{3})^3 \quad \text{e} \quad V^2 = \frac{a^6 (\sqrt{2})^2}{144}$$

Por divisão, estas duas relações proporcionam:

$$\frac{S^3}{V^2} = \frac{a^6 (\sqrt{3})^3}{\frac{a^6 (\sqrt{2})^2}{144}} \quad \therefore \quad \frac{S^3}{V^2} = \frac{144 \cdot 3\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore \frac{S^3}{V^2} = 72 \cdot 3 \sqrt{3} \quad \therefore \quad \boxed{S^3 = 216 \sqrt{3} V^2}$$

**59. Instituir uma expressão que relacione a área total  $S$  e o volume  $V$  de um cubo, referidos a uma mesma unidade.**

Resolução: Para um cubo de aresta  $a$ , pode-se (números 112.3 e 112.6) anotar:

$$S = 6a^2 \quad \text{e} \quad V = a^3$$

$$\therefore S^3 = 216a^6 \quad \text{e} \quad V^2 = a^6 \quad \therefore \quad \boxed{S^3 = 216 V^2}$$

**60. Instituir uma expressão que relacione a área total  $S$  e o volume  $V$  de um octaedro convexo regular, referidos a uma mesma unidade.**

Resolução: Para um octaedro convexo regular de aresta  $a$ , temos (números 115.3 e 115.7):

$$S = 2a^2 \sqrt{3} \quad \text{e} \quad \frac{a^3 \sqrt{2}}{3}$$

$$\therefore S^3 = 8a^6 (3 \sqrt{3}) \quad \text{e} \quad V^2 = \frac{a^6 \cdot 2}{9}$$

Por divisão, vem:  $\frac{S^3}{V^2} = \frac{24\sqrt{3} \cdot 9}{2} \quad \therefore \quad \boxed{S^3 = 108 \sqrt{3} V^2}$

**61. Designando, respectivamente, por  $k_T$ ,  $k_C$  e  $k_O$  as três razões entre  $S^3$  e  $V^2$  instituídas nos três problemas anteriores, pede-se relacionar essas três razões.**

Resolução: Como  $k_T = 216 \sqrt{3}$ ,  $k_C = 216$  e  $k_O = 108 \sqrt{3}$

temos:  $k_T = k_C \cdot \sqrt{3} = 2 k_O \quad \therefore \quad \boxed{k_T^2 = 3k_C^2 = 4k_O^2}$

62. Dado um triângulo equilátero, utilizando os pontos terços de seus lados, considere o hexágono regular assim formado e, levantando perpendiculares, por todos esses nove pontos ao plano do triângulo, marcando sobre as perpendiculares traçadas pelos vértices do hexágono segmentos de valor  $h$ , pergunta-se qual o valor  $x$  que deve ser marcado sobre as perpendiculares levantadas por aqueles nove pontos, para obter três prismas triangulares regulares cujos volumes somados restitua o volume do prisma hexagonal regular antes construído.

Resolução: Designando por  $a$  o lado do hexágono regular, e, portanto, por  $3a$  o lado do triângulo equilátero circunscrito ao hexágono (Figura 479), para o volume  $V_h$  do prisma hexagonal construído, conforme os dados, e por  $V_x$  os valores de cada um dos três prismas triangulares regulares formados, pode-se anotar:

$$V_h = 6 \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} h$$

$$V_x = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \cdot x$$

Para atender ao proposto, temos:

$$3V_x = V_h \quad \therefore \quad 3 \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \cdot x = 6 \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \cdot h$$

$$\therefore \quad 3x = 6h \quad \therefore \quad \boxed{x = 2h}$$

63. Calcular o volume  $V$  do tronco de pirâmide triangular regular construído no interior de um tetraedro regular limitado por uma de suas faces e pelo plano paralelo a esta face, pertencente aos baricentros das outras três faces, sabendo que o tetraedro tem aresta medindo 6 cm.

Resolução: Por serem semelhantes, na razão  $\left(\frac{2}{3}\right)$ , o tetraedro formado e o dado, podemos (números 106.7, 158 e 161) escrever:

$$V = \left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^3\right] \cdot \frac{6^3 \sqrt{2}}{12} = \left(1 - \frac{8}{27}\right) \cdot 18 \sqrt{2}$$

$$\therefore \quad V = \frac{19}{27} \cdot 18 \sqrt{2} = \frac{19}{3} \cdot 2 \sqrt{2}$$

$$\therefore \quad \boxed{V = \frac{38\sqrt{2}}{3} \text{ cm}^3}$$

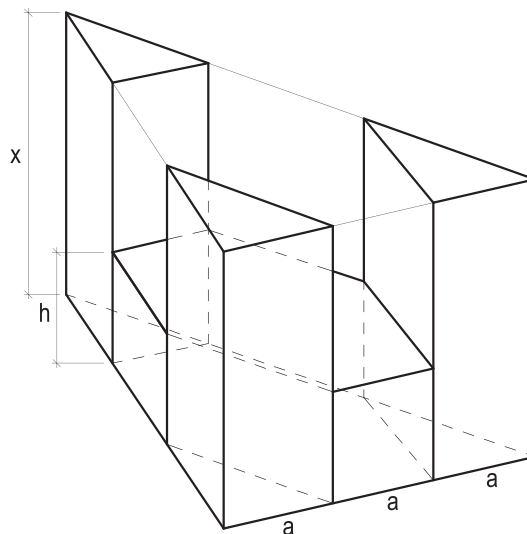


Figura 479

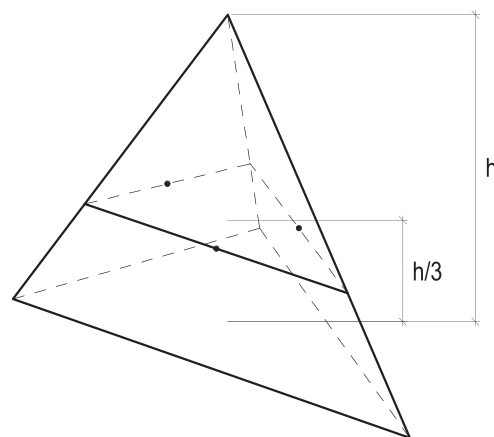


Figura 480

64. Prolongadas as arestas (J)(A), (J)(B), (J)(C) e (J)(D) do octaedro regular (J)-(A)(B)(C)(D)-(S) de aresta  $a$ , além do vértice (J), elas produzem, respectivamente, os traços (A'), (B'), (C') e (D') num plano perpendicular à diagonal (J)(S).

Sabendo que a seção (A')(B')(C')(D'), assim criada, tem área  $4a^2$ , pede-se calcular a área total  $S$  e o volume  $V$  do tronco de pirâmide de segunda espécie (J)-(A)(B)(C)(D)-(A')(B')(C')(D').

Resolução: Tal como no problema anterior, a pirâmide formada (J)-(A')(B')(C')(D') é semelhante a (J)-(A)(B)(C)(D) e a razão entre as áreas  $4a^2$ , da seção formada, e  $a^2$  da seção diagonal (A)(B)(C)(D) mostra ser 2 tal razão de semelhança.

Assim (Figura 481), para o tronco de pirâmide de segunda espécie formado, por soma, a área  $S$  e o volume  $V$  pedidos são (números 161 e 162):

$$S = (4 + 1) S_{(J)-(A)(B)(C)(D)}$$

$$\therefore S = 5 \cdot \left[ 4 \cdot \left( \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \right) + a^2 \right] \quad \therefore S = 5a^2 (\sqrt{3} + 1)$$

$$V = (8 + 1) V_{(J)-(A)(B)(C)(D)}$$

$$\therefore V = 9 \cdot \frac{1}{3} a^2 \frac{a\sqrt{2}}{2} \quad \therefore V = \frac{3}{2} a^3 \sqrt{2}$$

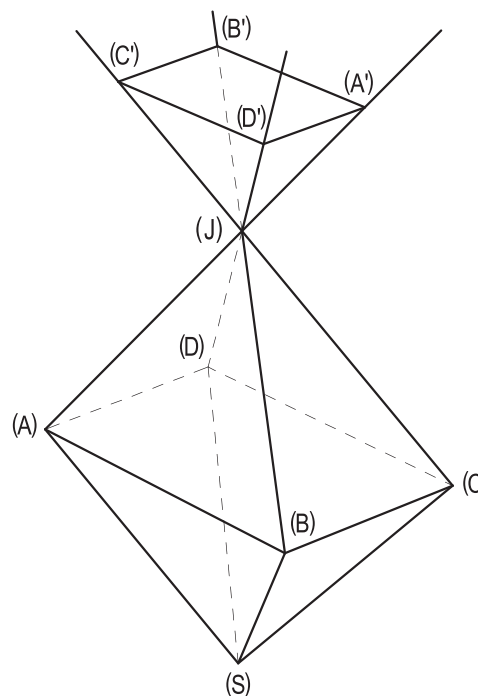


Figura 481

65. Um prisma oblíquo tem arestas laterais medindo 4 cm cada.

A projeção ortogonal do prisma sobre um plano perpendicular às suas arestas laterais é um hexágono regular de 2 cm de lado. Calcule a área lateral do prisma.

Resolução: Porque a projeção considerada é igual a uma seção reta do prisma, sua área lateral se calcula em função do perímetro  $2p_{SR}$  de sua seção reta e do valor  $\ell$  de sua aresta lateral e se mede (número 143.2) pela expressão:

$$S_{\ell} = 2p_{SR} \cdot \ell \quad \therefore S_{\ell} = 6 \cdot 2 \cdot 4 \quad \therefore S_{\ell} = 48 \text{ cm}^2$$

**66. Calcular as razões  $k_1$  e  $k_2$  entre as áreas totais e entre os volumes de um tetraedro regular e do octaedro regular nele inscrito.**

Resolução: Os vértices do octaedro regular inscrito num tetraedro regular são (número 114.1) os pontos médios das arestas do tetraedro.

Para os cálculos pedidos, sendo  $2a$  a aresta do tetraedro e  $a$  a do octaedro, podemos escrever:

$$S_T = 4 (2a)^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = 4a^2 \sqrt{3} \quad (1)$$

$$S_O = 8 a^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = 2a^2 \sqrt{3} \quad (2)$$

$$V_T = (2a)^3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{12} = \frac{2}{3} a^3 \sqrt{2} \quad (3)$$

$$V_O = \frac{a^3}{3} \sqrt{2} \quad (4)$$

$$\text{As relações (1) e (2) dão: } k_1 = \frac{S_T}{S_O} = \frac{4a^2 \sqrt{3}}{2a^2 \sqrt{3}} \quad \therefore \boxed{k_1 = 2}$$

$$\text{E as (3) e (4): } k_2 = \frac{V_T}{V_O} = \frac{(2/3)a^3 \sqrt{2}}{(1/3)a^3 \sqrt{2}} \quad \therefore \boxed{k_2 = 2}$$

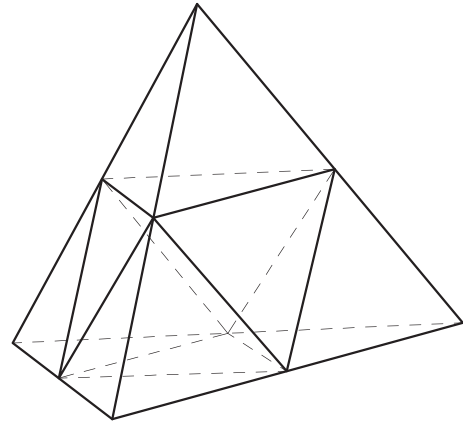


Figura 482

**67. Seis planos perpendiculares às diagonais de um octaedro convexo regular de 6 m de aresta atingem suas arestas em seus pontos terços. Pede-se calcular a área total  $S$  e o volume  $V$  do poliedro convexo formado com tais seccionamentos, após as retiradas das seis pirâmides quadrangulares criadas.**

Resolução: Sabemos (número 114.9) que os planos perpendiculares a uma diagonal de um octaedro regular produzem seções quadradas.

Então, o poliedro formado tem seis faces quadradas, duas para cada diagonal do octaedro, e oito faces hexagonais regulares, cada uma inscrita em cada face do octaedro, todas as arestas medindo 2 m, a terça parte da aresta do octaedro (Figura 483).

Assim, para a área procurada, temos:

$$S = 6 \cdot 2^2 + 8 \cdot 6 \cdot \frac{2^2 \sqrt{3}}{4} = 24 + 48 \sqrt{3}$$

$$\boxed{V = 24(1 + 2\sqrt{3}) \text{ m}^2}$$

E o volume será a diferença entre o do octaedro e os das seis pirâmides quadrangulares:

$$V = \frac{6^3 \sqrt{2}}{3} - 6 \cdot \frac{1}{3} \cdot 2^2 \cdot \sqrt{2} = 72 \sqrt{2} - 8 \sqrt{2}$$

$$\boxed{V = 64 \sqrt{2} \text{ m}^3}$$

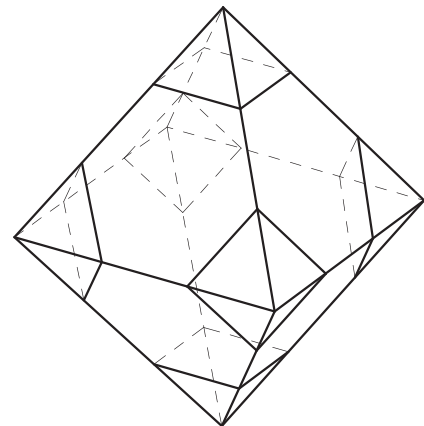


Figura 483

68. Calcular o volume de uma pirâmide reta, sabendo que suas faces laterais formam  $45^\circ$  com o plano da base e que esta é um polígono convexo de 24 cm de perímetro, circunscrito a um círculo de  $12\pi \text{ cm}^2$  de área.

Resolução: A inclinação especial de  $45^\circ$  das faces laterais, em relação ao plano de base, assegura que a altura da pirâmide seja igual ao raio do círculo inscrito em sua base, já que o triângulo retângulo (V)(O)(M) (Figura 484), representativo de uma das faces laterais da pirâmide, resta isósceles.

Pelos dados, esse raio  $r$  é:

$$\pi r^2 = 12\pi \quad \therefore r^2 = 12 \quad \therefore r = 2\sqrt{3}$$

Como (*Geometria Plana*, número 315) a área (B) da base da pirâmide se calcula por seu perímetro  $2p$  e pelo raio  $r$  do círculo nela inscrito, independentemente de se poder precisá-la em forma e posição, o volume  $V$  procurado se escreve:

$$V = \frac{(B)h}{3} = \frac{(B)r}{3} = \frac{p \cdot r \cdot r}{3}$$

$$\therefore V = \frac{12 \cdot 2\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3}}{3}$$

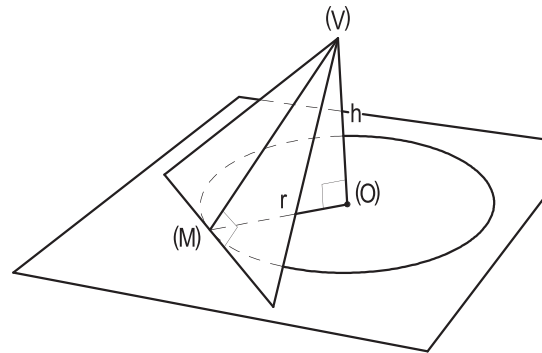


Figura 484

$$\therefore \boxed{V = 48 \text{ cm}^3}$$

69. Uma pirâmide oblíqua de altura  $h$  é seccionada por dois planos paralelos ao da sua base, distantes 2 m um do outro, sendo produzidas seções de áreas respectivamente iguais a  $18 \text{ m}^2$  e  $32 \text{ m}^2$ . Calcular o valor da altura  $h$  da pirâmide.

Resolução: Sabe-se (número 152) que as duas seções produzidas são semelhantes à base da pirâmide dada e que, designando por  $d$  a distância do plano mais próximo do vértice da pirâmide a esse vértice e por (B) a área da base da pirâmide, pode-se anotar, entre as áreas das seções e a da base da pirâmide:

$$V = \frac{18}{(B)} = \left(\frac{d}{h}\right)^2 \quad \text{e} \quad \frac{32}{(B)} = \left(\frac{d+2}{h}\right)^2$$

E, por divisão, membro a membro, vem:

$$\therefore \frac{18}{32} = \left(\frac{d}{d+2}\right)^2 \quad \therefore \frac{9}{16} = \left(\frac{d}{d+2}\right)^2 \quad \therefore \frac{3}{4} = \frac{d}{d+2}$$

$$\therefore 3d + 6 = 4d \quad \therefore d = 6 \quad \therefore h = d + 2 \quad \therefore \boxed{h = 8 \text{ m}}$$



70. Uma pirâmide quadrangular regular está inscrita num cubo de aresta  $a$ , tendo por base uma das faces do cubo e por vértice o centro da face oposta do cubo.

Na pirâmide, inscreve-se outro cubo, com uma face na base da pirâmide e os quatro vértices da face oposta sobre as arestas laterais da pirâmide.

Pede-se calcular a área  $S$  e o volume  $V$  deste segundo cubo, em função de  $a$ .

Resolução: Consideremos a seção diagonal do cubo, que produz um retângulo de lados  $a$  e  $a\sqrt{2}$ , incluindo o triângulo isósceles  $(V)(A)(C)$ , por secionamento da pirâmide inscrita, além do retângulo  $(1)(3)(7)(5)$  no cubo inscrito na pirâmide, com dimensões  $x$  e  $x\sqrt{2}$ , onde  $x$  mede a aresta deste cubo (Figuras 485 e 486).

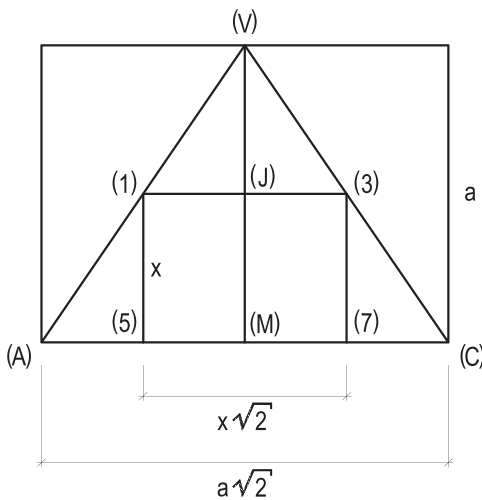


Figura 485

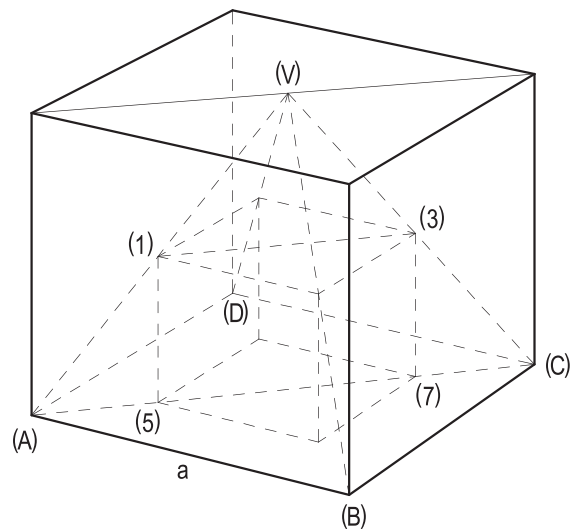


Figura 486

Os triângulos semelhantes  $(V)(1)(3)$  e  $(V)(A)(C)$  dão:

$$\frac{(V)(J)}{(V)(M)} = \frac{(1)(3)}{(A)(C)}$$

$$\therefore \frac{a-x}{a} = \frac{x\sqrt{2}}{a\sqrt{2}} \quad \therefore \frac{a-x}{a} = \frac{x}{a} \quad \therefore a-x=x \quad \therefore x = \frac{a}{2}$$

Assim, a área  $S$  e o volume  $V$  do cubo inscrito na pirâmide são:

$$S = 6x^2 = 6 \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2 \quad \therefore \boxed{S = \frac{3a^2}{2}}$$

$$\text{e } V = x^3 = \left(\frac{a}{2}\right)^3 \quad \therefore \boxed{V = \frac{a^3}{8}}$$

71. Um prisma triangular oblíquo (A)(B)(C)–(R)(S)(T) e uma pirâmide triangular reta (V)–(X)(Y)(Z) são equivalentes.

A base (X)(Y)(Z) da pirâmide é um triângulo retângulo cujos catetos (X)(Y) e (X)(Z) medem, respectivamente, 24 m e 7 m e sua face lateral de maior área é um triângulo equilátero.

Calcular o volume da pirâmide (A)–(C)(R)(S), parte do prisma dado.

Resolução: Analisando a pirâmide (V)–(X)(Y)(Z), o cálculo da hipotenusa básica (Y)(Z) dá:

$$\overline{(Y)(Z)} = \sqrt{24^2 + 7^2} = \sqrt{625} = 25$$

E como a face lateral de maior área tem de ser aquela que corresponde à hipotenusa, por ser reta a pirâmide, sua altura  $\overline{(V)(O)}$  (Figura 487) é:

$$\overline{(V)(O)} = h = \frac{25\sqrt{3}}{2}$$

Com isso, o volume  $V$  da pirâmide, e também o do prisma dado a ela equivalente (Figuras 487 e 488), se anota:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \left( \frac{24 \cdot 7}{2} \right) \cdot \frac{25\sqrt{3}}{2} \quad \therefore V = 350\sqrt{3}$$

Apreciando, agora, o prisma dado (Figura 488), e, em especial, a pirâmide (A)–(C)(R)(S), observa-se que a translação do seu vértice (S), sobre a aresta (S)(B), para a posição (B), porque sua altura relativa à base (A)(R)(C) se mantém inalterada, tal como a área dessa face, transforma a pirâmide em estudo na pirâmide (R)–(A)(B)(C) (Figura 489), cujo volume vale a terça parte do volume do prisma.

Com isso, o volume  $X$  da pirâmide (A)–(C)(R)(S) é:

$$X = \frac{V}{3} \quad \therefore \quad \boxed{X = \frac{350\sqrt{3}}{3} \text{ m}^3}$$

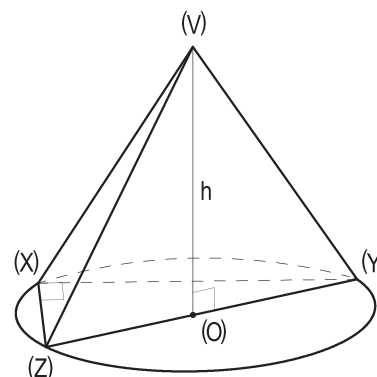


Figura 487

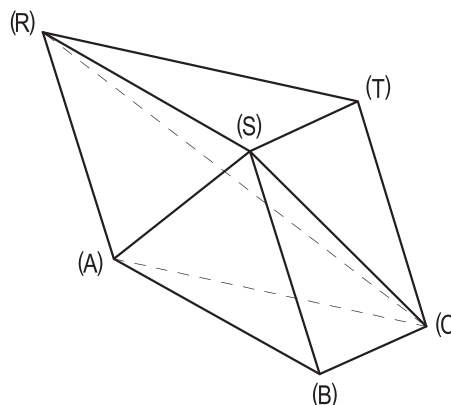


Figura 488

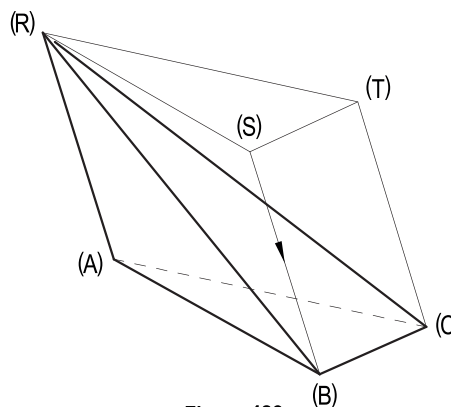


Figura 489

72. Calcular o volume  $V$  e a área  $S$  do cubo inscrito num octaedro regular de área igual a  $72\sqrt{3}\text{ cm}^2$ , sabendo que os vértices do cubo pertencem às arestas que convergem nos extremos de uma diagonal do octaedro.

Resolução: Consideremos os dois sólidos, conforme os dados, além da seção diagonal (J)(A)(S)(C) no octaedro e a correspondente no cubo inscrito (Figuras 490 e 491).

Seja  $a$  a aresta do octaedro e  $x$  a do cubo, a semelhança dos triângulos, (J)( $\bar{A}$ )( $\bar{C}$ ) e (J)(A)(C) dá:

$$\frac{x\sqrt{2}}{a\sqrt{2}} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2} - \frac{x}{2}}{\frac{a\sqrt{2}}{2}}$$

$$\therefore \frac{x}{a} = \frac{a\sqrt{2} - x}{a\sqrt{2}} \quad \therefore x = \frac{a\sqrt{2} - x}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore x\sqrt{2} = a\sqrt{2} - x \quad \therefore x(\sqrt{2} + 1) = a\sqrt{2}$$

$$\therefore x = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{2} + 1} = \frac{a(\sqrt{2} - 1)\sqrt{2}}{(\sqrt{2} + 1)(\sqrt{2} - 1)} = a(2 - \sqrt{2})$$

Além disso, pelos dados, temos, para a área  $S$  do octaedro regular:

$$S = 8 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 2a^2\sqrt{3}$$

$$\therefore 2a^2\sqrt{3} = 72\sqrt{3} \quad \therefore a^2 = 36 \quad \therefore a = 6$$

Assim, levando este valor de  $a$  à expressão estabelecida para  $x$ , temos:

$$x = 6(2 - \sqrt{2})$$

$$\therefore V = x^3 = 6^3(2 - \sqrt{2})^3$$

$$\therefore V = 216(20 - 14\sqrt{2})$$

$$\therefore \boxed{V = 432(10 - 7\sqrt{2})\text{ cm}^3}$$

$$\therefore S = 6x^2 = 6^2(2 - \sqrt{2})^2 = 36(6 - 4\sqrt{2})$$

$$\therefore \boxed{S = 72(3 - 2\sqrt{2})\text{ cm}^2}$$

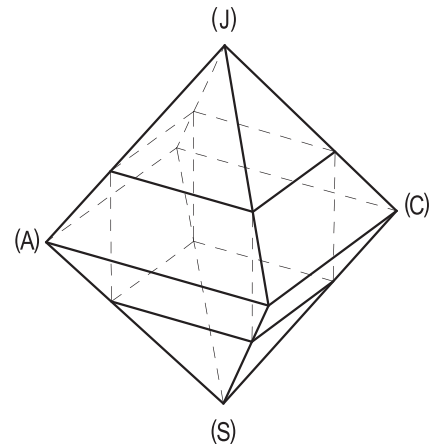


Figura 490

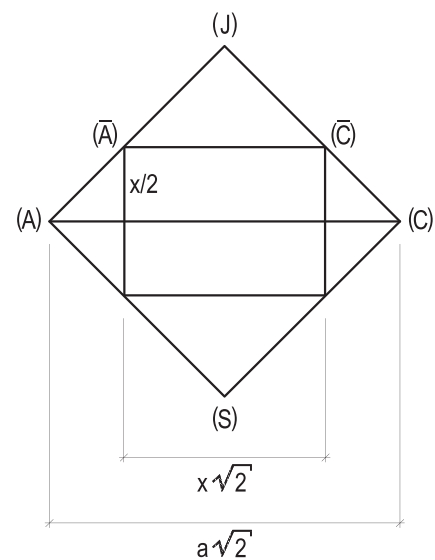


Figura 491

73. Dois triângulos equiláteros (A)(B)(C) e (J)(B)(C) pertencem a planos perpendiculares.

Conduzindo por (A) uma paralela à altura (J)(H) do segundo e, por (J), uma paralela à altura (A)(H) do primeiro, obtém-se, por interseção dessas duas retas, o ponto (K).

Observe o poliedro convexo de vértices (A), (B), (C), (J) e (K) e informe:

- seu gênero;
- as naturezas de todas as suas faces;
- as dimensões de suas arestas (K)(A) e (K)(B), em função do valor  $a$  do lado dos triângulos equiláteros dados;
- a área total  $S$  do poliedro convexo formado, em função de  $a$ ;
- o volume  $V$  desse poliedro, também em função de  $a$ .

Resolução: Consideremos, conforme os dados, os triângulos equiláteros (A)(B)(C) e (J)(B)(C), pertencentes aos planos  $(\pi')$  e  $(\pi)$ , perpendiculares entres si (Figura 492), e obtenhamos o ponto (K), interseção das retas (r) e (s), respectivamente, paralelas às alturas (J)(H) e (A)(H) daqueles triângulos.

Tais retas são concorrentes por pertencerem, ambas, ao plano mediador do lado comum (B)(C) (Figura 492).

O poliedro convexo (K)-(A)(B)(C)-(J), um hexaedro, tem, além das duas faces dadas, os triângulos equiláteros (A)(B)(C) e (J)(B)(C), outras quatro, iguais entre si, que são os triângulos retângulos (K)(A)(B), (K)(A)(C), (K)(J)(B) e (K)(J)(C), todos tendo catetos respectivamente iguais aos lados dos triângulos equiláteros dados e às alturas (A)(H) e (J)(H) desses triângulos (Figura 492).

Assim, designando por  $a$  os lados dos triângulos equiláteros dados e por  $h$  suas alturas, temos:

$$\overline{(A)(B)} = \overline{(A)(C)} = \overline{(J)(B)} = \overline{(J)(C)} = \overline{(B)(C)} = a$$

$$\overline{(K)(A)} = \overline{(K)(J)} = h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$\overline{(K)(B)} = \overline{(K)(C)} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + a^2} = \frac{a\sqrt{7}}{2}$$

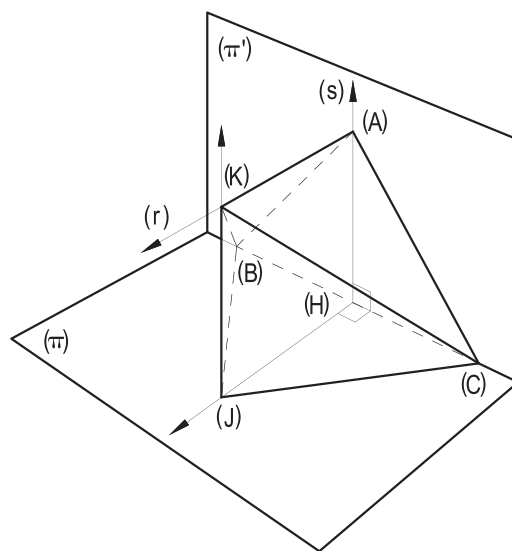


Figura 492

A área total  $S$  desse hexaedro é, então, igual à soma do dobro da área de cada triângulo equilátero dado com o quádruplo das áreas dos triângulos retângulos faces, ou seja:

$$S = 2 \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} + 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{7}}{2}$$

$$S = \frac{a^2 \sqrt{3}}{2} + \frac{a^2 \sqrt{21}}{2} \quad \therefore \quad \boxed{S = \frac{a^2 \sqrt{3}}{2} (\sqrt{7} + 1)}$$

O volume  $V$  do hexaedro (K)-(A)(B)(C)-(J) é (Figura 492) igual ao dobro do volume das pirâmides iguais (K)-(A)(B)(C) e (K)-(J)(B)(C), obtidas pelo seccionamento do hexaedro pelo plano (K)(B)(C).

$$V = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \quad \therefore \quad \boxed{V = \frac{a^3}{4}}$$

74. Considere um ponto qualquer interior a um cubo e as duas pirâmides que tenham tal ponto por vértice e por bases cada uma de duas faces paralelas do cubo e analise a variação da soma dos volumes dessas duas pirâmides, em função do volume  $V$  do cubo, com mudanças de posição desse vértice.

Resolução: Sejam (J) um ponto qualquer interior ao cubo (A)(B)(C)(D)-(R)(S)(T)(U) e (J)-(A)(B)(C)(D) e (J)-(R)(S)(T)(U) as duas pirâmides propostas pelo enunciado da questão, com volumes respectivamente iguais a  $V_1$  e  $V_2$ , cuja soma queremos estudar.

Sejam, ainda,  $x$  e  $y$  (Figura 493), as alturas dessas duas pirâmides, e  $a$  o valor da aresta do cubo.

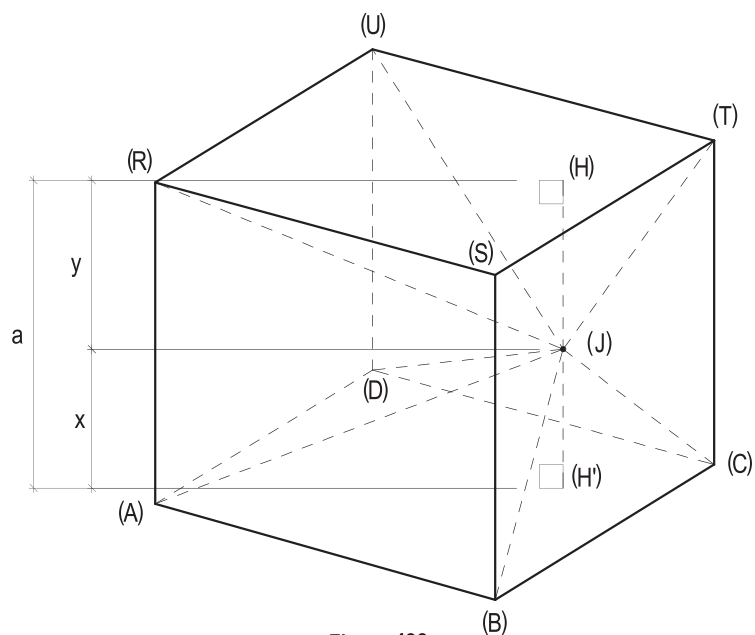


Figura 493

Podemos, então, escrever:

$$V_1 + V_2 = \frac{1}{3} a^2 \cdot x + \frac{1}{3} a^2 \cdot y = \frac{a^2}{3} (x + y) = \frac{a^2}{3} \cdot a = \frac{a^3}{3} = \frac{V}{3}$$

Conclui-se, assim, que é constante – e igual à terça parte do volume  $V$  do cubo – a soma dos volumes das duas pirâmides consideradas, independentemente da posição do ponto (J).

75. Calcular a área lateral  $S_\ell$ , a área total  $S_t$  e o volume  $V$  do cilindro circular reto circunscrito a um prisma hexagonal regular, que tenha todas as suas arestas iguais a 4 cm.

Resolução: O círculo da base do cilindro, por ter raio igual a 4 cm, igual, é claro, à aresta básica do prisma, tem área:  $B = \pi 4^2 = 16\pi$ .

E como a altura do cilindro é igual à do prisma, pode-se (números 190 e 191) escrever:

$$S_\ell = 2\pi r h = 2\pi \cdot 4 \cdot 4 \quad \therefore \boxed{S_\ell = 32\pi \text{ cm}^2}$$

$$S_t = S_\ell + 2(B) = 32\pi + 32\pi \quad \therefore \boxed{S_t = 64\pi \text{ cm}^2}$$

$$V = \pi r^2 h = \pi \cdot 16 \cdot 4 \quad \therefore \boxed{V = 64\pi \text{ cm}^3}$$

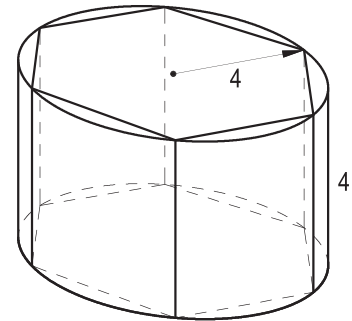


Figura 494

76. Considere um cilindro equilátero e a esfera nele inscrita e institua expressões que relacionem:

- as áreas  $S_\ell$  e  $S_t$ , respectivamente, lateral e total do cilindro;
- as áreas  $S_t$  e  $S_e$ , respectivamente, total do cilindro e da esfera;
- os volumes  $V_c$  e  $V_e$  do cilindro e da esfera.

Resolução: Por ser equilátero, o cilindro considerado tem altura igual ao seu diâmetro (número 189). Assim, sendo  $r$  o valor de seu raio, pode-se anotar:

$$S_\ell = 2\pi r \cdot 2r \quad \therefore S_\ell = 4\pi r^2 \quad (1)$$

$$e \quad S_t = S_\ell + 2\pi r^2 \quad \therefore S_t = 6\pi r^2 \quad (2)$$

$$\text{Para a esfera inscrita,} \quad S_e = 4\pi r^2 \quad (3)$$

As associações das relações (1) e (2) e (2) e (3) fornecem:

$$S_\ell = 4\pi r^2 = \left(\frac{2}{3}\right) 6\pi r^2 \quad \therefore \boxed{S_\ell = \frac{2}{3} S_t}$$

$$S_t = 6\pi r^2 = \left(\frac{3}{2}\right) 4\pi r^2 \quad \therefore \boxed{S_t = \frac{3}{2} S_e}$$

Para os volumes:

$$V_c = \pi r^2 \cdot 2r = 2\pi r^3 \quad e \quad V_e = \frac{4}{3} \pi r^3$$

$$V_c = 2\pi r^3 = \left(\frac{3}{2}\right) \cdot \frac{4}{3} \pi r^3 \quad \therefore \boxed{V_c = \frac{3}{2} V_e}$$

77. Um cilindro de revolução tem 6 cm de raio e 124 cm de altura. Dois planos, respectivamente, inclinados de  $30^\circ$  e de  $45^\circ$  em relação às bases de cilindro cortam seu eixo nos pontos  $(O_1)$  e  $(O_2)$ , tais que:  $\overline{(O_1)(O_2)} = 12$  cm, atingindo todas as geratrizes do cilindro.

Pede-se calcular a área lateral  $S_\ell$ , a área total  $S_t$  e o volume  $V$  do tronco de cilindro limitado, no cilindro dado, entre os dois planos secantes.

Resolução: As duas seções produzidas no cilindro são (número 192) elipses, com eixos menores iguais ao seu diâmetro 12 cm e com eixos maiores  $\overline{(A)(B)}$  e  $\overline{(C)(D)}$  respectivamente iguais às hipotenusas de triângulos retângulos com ângulos de  $30^\circ$  e de  $45^\circ$  (Figuras 495, 496 e 497).

Assim, as áreas dessas elipses são (Cônicas, número 40):

$$S_1 = \pi \frac{12}{\sqrt{3}} \cdot 6 = 24\pi\sqrt{3}$$

$$S_2 = \pi \frac{12\sqrt{2}}{2} \cdot 6 = 36\pi\sqrt{2}$$

Assim, podemos (números 197, 198 e 199) escrever para as áreas  $S_\ell$  e  $S_t$  e para o volume  $V$  pedidos:

$$S_\ell = 2\pi r e = 2\pi 6 \cdot 12$$

$$\therefore S_\ell = 144\pi \text{ cm}^2$$

$$S_t = S_\ell + S_1 + S_2$$

$$\therefore S_t = 144\pi + 24\pi\sqrt{3} + 36\pi\sqrt{2}$$

$$\therefore S_t = 12(12 + 2\sqrt{3} + 3\sqrt{2})\pi \text{ cm}^2$$

$$V = \pi r^2 e = \pi 6^2 \cdot 12$$

$$\therefore V = 432\pi \text{ cm}^3$$

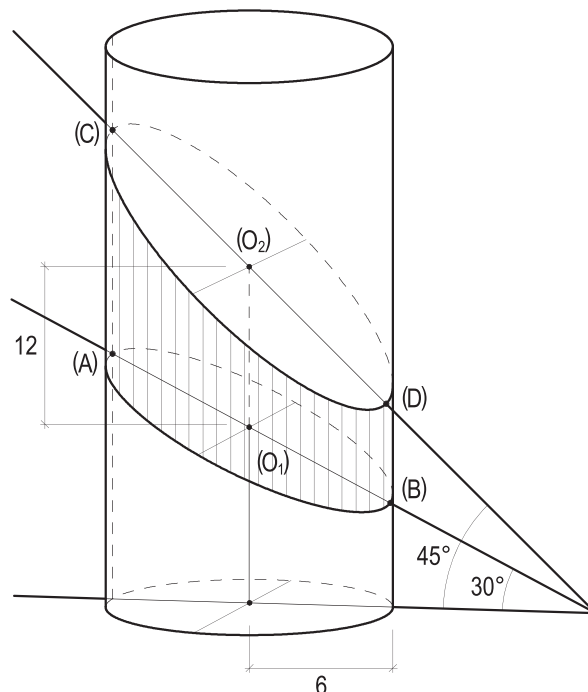


Figura 495

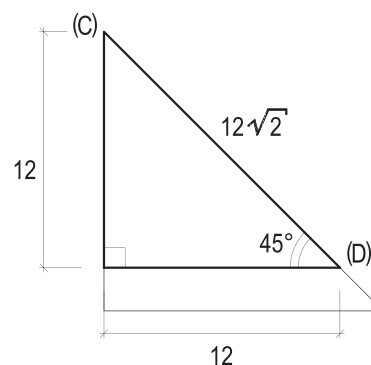


Figura 496

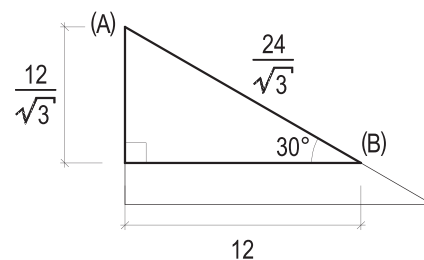


Figura 497

78. Três retângulos A, B e C, coplanares, têm, cada um, um de seus lados sobre uma reta (r), medindo, respectivamente, a, 2a e 4a. Designando por x, b e c, respectivamente, suas segundas dimensões, considere as rotações dos três retângulos, em torno de (r), com amplitudes angulares, respectivamente, de 240°, 120° e 60°.

Sabendo que os três sólidos assim gerados são equivalentes, pede-se calcular x, em função de b e de c, assim como as áreas lateral  $S_\ell$  e total  $S_t$  do sólido gerado na revolução parcial considerada do retângulo A.

Calcule ainda a área total S do cilindro gerado pela revolução completa do retângulo C.

Resolução: Os três sólidos gerados, todos com mesmo volume V, são porções angulares de três cilindros de revolução, o que permite (número 191) escrever:

$$V = \frac{240^\circ}{360^\circ} \pi x^2 a = \frac{2}{3} \pi a x^2 \quad (1)$$

$$V = \frac{120^\circ}{360^\circ} \pi b^2 \cdot 2a = \frac{2}{3} \pi a b^2 \quad (2)$$

$$V = \frac{60^\circ}{360^\circ} \pi c^2 \cdot 4a = \frac{2}{3} \pi a c^2 \quad (3)$$

Comparando as relações (1), (2) e (3), temos:

$$V = \frac{2}{3} \pi a x^2 = \frac{2}{3} \pi a b^2 = \frac{2}{3} \pi a c^2 \quad \therefore \quad \boxed{x = b = c}$$

E, para as áreas do sólido gerado pela revolução parcial do retângulo A:

$$S_\ell = \frac{2}{3} 2\pi x \cdot a + 2ax = \left(\frac{4}{3} \pi + 2\right) ax \quad \therefore \quad \boxed{S_\ell = \left(\frac{4\pi}{3} + 2\right) ab = \left(\frac{4\pi}{3} + 2\right) ac}$$

$$e \quad S_t = S_\ell + 2 \cdot \frac{2}{3} \pi x^2 = \frac{4}{3} \pi ba + \frac{4}{3} \pi b^2 + 2 \cdot ab$$

$$S_t = \frac{4}{3} \pi b(a + b) + \frac{6}{3} ab \quad \therefore \quad \boxed{S_t = \frac{2}{3} b[2\pi(a + b) + 3a]}$$

Enfim, na revolução completa do retângulo C, a área total S gerada é:

$$S = 2\pi r \cdot \ell + 2\pi r^2$$

$$S = 2\pi c \cdot 4a + 2\pi c^2$$

$$S = 8\pi ac + 2\pi c^2 \quad \therefore \quad \boxed{S = 2\pi c(4a + c)}$$

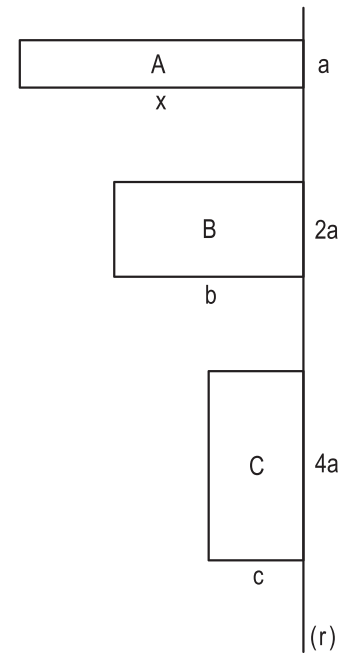


Figura 498



79. Um cone de revolução tem altura igual a 12 cm.

Sabendo que suas geratrizes formam  $45^\circ$  com seu eixo, pede-se calcular a área total  $S$  e o volume  $V$  do sólido.

Resolução: Devido ao ângulo particular de  $45^\circ$ , o cone tem raio da base  $r$  igual à altura  $h$ , dada e, então:

$$S = \pi r g + \pi r^2 = \pi r r \sqrt{2} + \pi r^2 = \pi \cdot 12^2 \sqrt{2} + \pi 12^2$$

$$\therefore \boxed{S = 144\pi(\sqrt{2} + 1) \text{ cm}^2}$$

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{1}{3} \pi r^3 = \frac{1}{3} 12^3 \pi = 4 \cdot 144\pi$$

$$\therefore \boxed{V = 576\pi \text{ cm}^3}$$

80. Um cone equilátero está assente, por sua base, numa das faces de um cubo de  $216 \text{ cm}^3$  de volume, de modo tal que sua base se inscreva nessa face e que ele fique no exterior do cubo.

Calcular a área lateral  $S$  e o volume  $V$  do cone.

Resolução: Sendo  $a$  a aresta do cubo:

$$a^3 = 216 \quad \therefore \quad a^3 = 6^3 \quad \therefore \quad a = 6$$

Como o cone é equilátero, o triângulo (V)(O)(M) (Figura 499) dá:

$$h = r \sqrt{3} = \frac{a}{2} \sqrt{3} = 3 \sqrt{3} \quad \text{e} \quad g = 2r = a = 6$$

$$\therefore \quad S = \pi r g = \pi r \cdot 2r = 2\pi r^2 \quad \therefore \quad \boxed{S = 72\pi \text{ cm}^2}$$

$$\therefore \quad V = \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{1}{3} \pi 3^3 \sqrt{3} \quad \therefore \quad \boxed{V = 9\pi\sqrt{3} \text{ cm}^3}$$

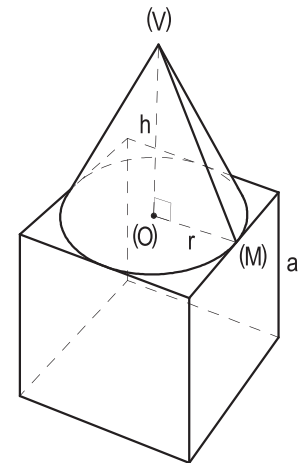


Figura 499

81. Num cone de revolução de 12 cm de raio de base e 16 cm de altura inscreve-se um cilindro equilátero.

Calcular a área lateral  $S$  desse cilindro.

Resolução: Considerada uma seção meridiana dos dois sólidos (Figura 500), os triângulos semelhantes (V)(M)(P) e (V)(O)(B) dão:

$$\frac{16 - 2x}{16} = \frac{x}{12} \quad \therefore \quad \frac{16 - 2x}{4} = \frac{x}{3}$$

$$\therefore \quad 48 - 6x = 4x \quad \therefore \quad 10x = 48 \quad \therefore \quad x = \frac{24}{5}$$

$$\text{Assim, } S = 2\pi x (2x) = 4\pi x^2 \quad \therefore \quad \boxed{S = \frac{2304\pi}{25} \text{ cm}^2}$$

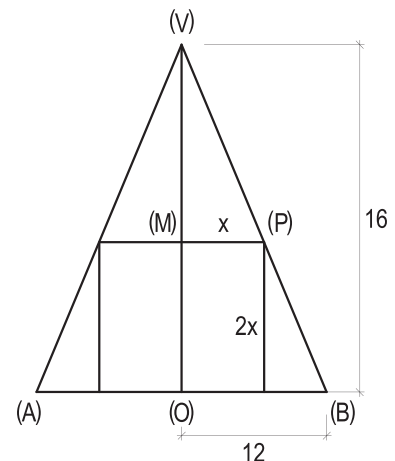


Figura 500

82. Um cone de revolução circunscribe uma esfera de 3 cm de raio.

Pede-se calcular o volume do cone, sabendo que sua altura mede 8 cm.

Resolução: Considerando a seção meridiana dos dois sólidos (Figura 501), os triângulos semelhantes (V)(O)(T) e (V)(M)(B) fornecem:

$$\frac{\overline{(V)(O)}}{\overline{(O)(T)}} = \frac{\overline{(V)(B)}}{\overline{(M)(B)}} \quad \therefore \quad \frac{5}{3} = \frac{\overline{(V)(B)}}{\overline{(M)(B)}}$$

Tal relação assegura que os triângulos retângulos em questão sejam pitagóricos (*Geometria Plana*, número 200.1), o que permite anotar:

$$\overline{(V)(O)} = 5 \quad \therefore \quad \overline{(V)(T)} = 4$$

$$e \quad \overline{(M)(B)} = \frac{3}{5} \cdot \overline{(V)(B)} \quad \therefore \quad r = \frac{3}{5} (4 + r) \quad \therefore \quad 5r = 12 + 3r \quad \therefore \quad r = 6$$

Assim, o volume  $V$  é:

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{1}{3} \pi 6^2 \cdot 8 \quad \therefore \quad \boxed{V = 96\pi \text{ cm}^3}$$

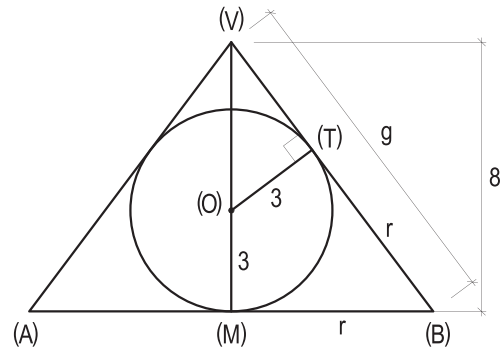


Figura 501

83. Um cilindro de revolução, cuja altura vale o dobro do diâmetro, está inscrito num cone de revolução de 5 m de raio de base e de 13 m de geratriz.

Calcular o volume  $V$  e a área lateral  $S$  do cilindro.

Resolução: Pelos próprios dados, observando-se uma seção meridiana dos dois sólidos (Figura 502), conclui-se (*Geometria Plana*, número 200.1) que o triângulo (V)(O)(B) é pitagórico e que, então,  $\overline{(V)(O)} = 12$ .

E os triângulos semelhantes (V)(M)(P) e (V)(O)(B) dão:

$$\frac{\overline{(V)(M)}}{\overline{(V)(O)}} = \frac{\overline{(M)(P)}}{\overline{(O)(B)}} \quad \therefore \quad \frac{12 - 4r}{12} = \frac{r}{5}$$

$$\therefore \quad 60 - 20r = 12r \quad \therefore \quad 32r = 60 \quad \therefore \quad r = \frac{15}{8}$$

$$\text{Então, } S = 2\pi r g = 2\pi \cdot 4r = 8\pi r^2 \quad \therefore \quad \boxed{S = \frac{225\pi}{8} \text{ m}^2}$$

$$e \quad V = \pi r^2 h = \pi r^2 (4r) = 4\pi r^3 \quad \therefore \quad \boxed{V = \frac{3375\pi}{128} \text{ m}^3}$$

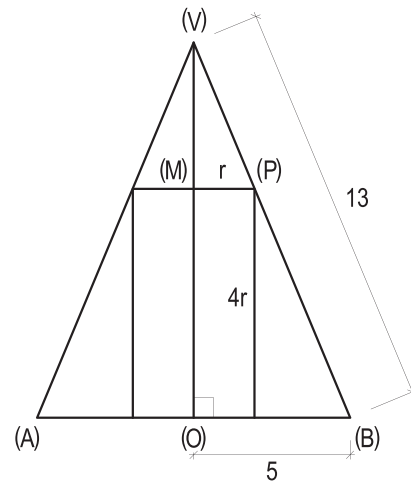


Figura 502

84. Os raios das bases de um tronco de cone de revolução de primeira espécie medem, respectivamente, 11 dm e 5 dm.

Calcule o volume do tronco, sabendo que sua geratriz é igual ao diâmetro da base menor.

Resolução: Analisando uma seção meridiana de tronco, nota-se que, pelos valores dados, o triângulo retângulo ABC (Figura 503) é pitagórico (*Geometria Plana*, número 200.1), o que dá:

$$h = 8$$

$$e \quad V = \frac{\pi h}{3} (R^2 + r^2 + Rr) \text{ (número 206.1)}$$

$$V = \frac{\pi \cdot 8}{3} (121 + 25 + 55) \quad \therefore \quad \boxed{V = 536\pi \text{ dm}^3}$$

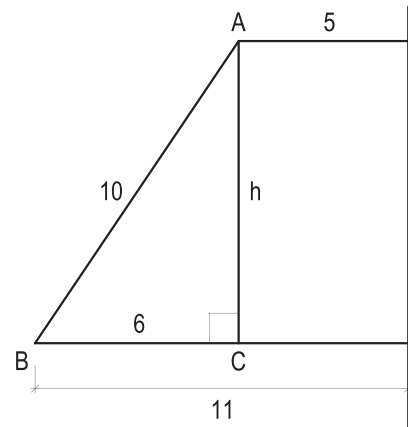


Figura 503

85. Um cone de revolução tem 4 cm de raio de base e 12 cm de altura. Considere o cilindro de revolução de altura igual à do cone, cuja superfície lateral produza, na superfície lateral do cone, um círculo de 2 cm de raio e calcule a área lateral  $S$  e o volume  $V$  do sólido limitado entre o plano da base do cone, o plano paralelo a esse que contém o vértice do cone e as superfícies laterais externas dos dois sólidos que não se penetram.

Resolução: Mais uma vez, uma seção meridiana resolve a questão, já que o sólido em estudo é o resultante de revolução do pentágono côncavo VABCD, em torno do eixo que contém VD (Figura 504).

Sua área lateral  $S$  é a soma das áreas laterais do cilindro gerado pelo retângulo VABM e do tronco de cone de primeira espécie gerado pelo trapézio MBCD (Figura 504).

E seu volume  $V$  é a soma dos dois sólidos limitados lateralmente por aquelas duas superfícies.

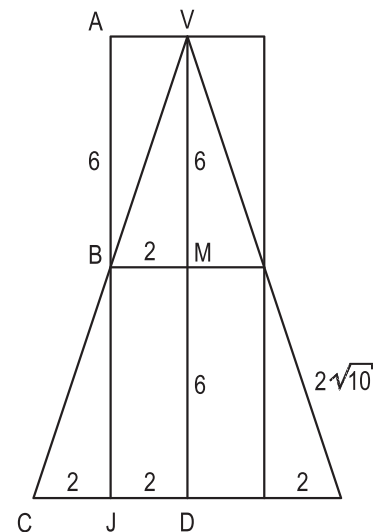


Figura 504

Ainda do triângulo BCJ:

$$BC = \sqrt{2^2 + 6^2} = 2\sqrt{10}$$

$$S = 2\pi \cdot 2 \cdot 6 + \pi (4 + 2) 2\sqrt{10} \quad \therefore \quad \boxed{S = 12(2 + \sqrt{10})\pi \text{ cm}^2}$$

$$V = \pi 2^2 \cdot 6 + \frac{\pi}{3} (16 + 4 + 8)6 \quad \therefore \quad \boxed{V = 80\pi \text{ cm}^3}$$

86. Calcular a área  $S$  de uma esfera e o raio  $r$  da seção nela produzida por um plano secante, que determina, nela, duas calotas de distâncias polares iguais a 6 cm e a 8 cm, respectivamente.

Resolução: Por ser inscrever num semicírculo, o triângulo  $(P)(A)(P')$ , que inclui os dois polos  $(P)$  e  $(P')$  e as duas distâncias polares  $\overline{(A)(P)}$  e  $\overline{(A)(P')}$  dadas (Figura 505), é retângulo. E, pelos valores dados, é pitagórico (*Geometria Plana*, número 200.1), o que dá:

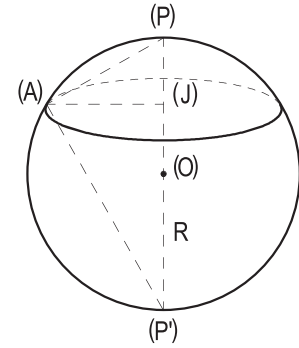


Figura 505

$$\overline{(P)(P')} = 10 \quad \therefore R = 5 \quad \therefore S = 4\pi R^2 \quad \therefore \boxed{S = 100\pi \text{ cm}^2}$$

$$\overline{(A)(J)} = \frac{4}{5} \overline{(A)(P)} = \frac{4 \cdot 6}{5} \quad \boxed{r = \frac{24}{5} \text{ cm}}$$

87. Dois planos paralelos distam, respectivamente,  $6\sqrt{3}$  cm e 6 cm do centro de uma esfera de 12 cm de raio, deixando o centro da esfera entre eles. Sendo  $(M)$  e  $(N)$  dois pontos pertencentes, cada um, a cada uma das circunferências produzidas pelos seccionamentos daqueles dois planos na superfície da esfera, considere o menor arco  $(M)(N)$  que se possa construir sobre a superfície dessa esfera e calcule o comprimento da corda  $x$  que subtende tal arco  $(M)(N)$ .

Resolução: Sabe-se (número 211.5) que a menor distância possível de ser construída sobre uma superfície esférica entre dois de seus pontos  $(M)$  e  $(N)$  é o menor arco  $(M)(N)$  dessa superfície pertencente a um de seus círculos máximos (Figura 506). Tão particulares são as distâncias dos planos paralelos  $(\alpha)$  e  $(\beta)$  ao centro da esfera, que conclui-se que as cordas  $(N)(N')$  e  $(M)(M')$  da seção meridiana considerada medem, respectivamente, os lados do hexágono regular e do triângulo equilátero nela inscritos (Figura 507). Com isso, a corda  $(M)(N) = x$ , procurada, há de ser o lado do quadrado inscrito nessa seção.

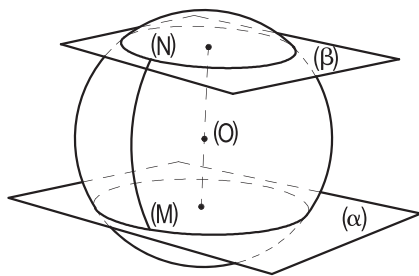


Figura 506

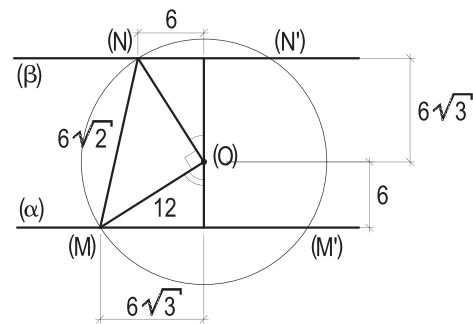


Figura 507

Por isso, temos:

$$\boxed{x = 6\sqrt{2} \text{ cm}}$$

88. De uma circunferência de centro  $O$  e raio igual a 4 cm, considere um arco  $AB$ , de  $120^\circ$ , e calcule a área  $S$  da superfície gerada pela rotação completa do arco  $AB$ , em torno do eixo  $OA$ .

Resolução: Como aplicação imediata do teorema de Arquimedes (número 217), temos que a área pedida se mede pelo produto da projeção ortogonal  $AB'$  do arco dado  $AB$  sobre o eixo  $AO$  da rotação pelo comprimento da circunferência de raio igual ao próprio raio do arco  $AB$ .

Pelo valor de seu ângulo central –  $120^\circ$  – conclui-se que a corda  $AB$  é igual ao lado do triângulo equilátero inscrito no círculo dado (Figura 508). Então:

$$\overline{AB} = 4\sqrt{3} \text{ e } \overline{AB'} = 6 \therefore S = 6 \cdot 2\pi \cdot 4 \therefore \boxed{S = 48\pi \text{ cm}^2}$$

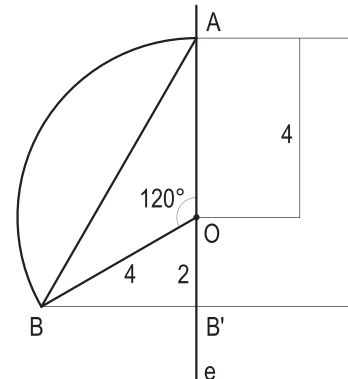


Figura 508

89. Numa circunferência de 6 cm de raio, são traçadas duas cordas paralelas  $AB$  e  $A'B'$  distantes entre si desse mesmo valor 6 cm, de modo tal que os extremos  $A$  e  $A'$  fiquem num mesmo semicírculo. Pede-se calcular a área da superfície gerada pela rotação do arco  $AA'$ , em torno do diâmetro que é perpendicular à corda  $AB$ , numa amplitude de  $240^\circ$ .

Resolução: Tal como no problema anterior, a área  $S$  procurada se calcula pela aplicação do teorema de Arquimedes (número 217). Assim:  $S = \frac{240^\circ}{360^\circ} \cdot \overline{MN} \cdot 2\pi \cdot 6$

$$\therefore S = \frac{2}{3} (6) 12\pi \therefore \boxed{S = 48\pi \text{ cm}^2}$$

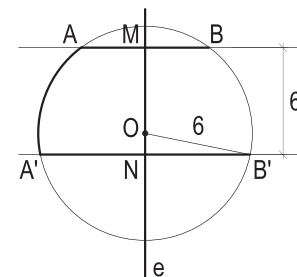


Figura 509

Observe-se que a área calculada vale para todos os arcos  $AA'$  que atendam aos dados, embora possam mudar as posições das cordas  $AB$  e  $A'B'$ , afastadas, sempre, 6 cm uma da outra.

90. Calcular a área gerada pelo arco  $BC$  do quadrante do círculo de centro  $O$  e 6 cm de raio em torno do diâmetro que forme  $30^\circ$  com o raio  $OB$ , sem atravessar o quadrante.

Resolução: Pelos dados (Figura 510):

$$AB = OQ = 3 \text{ e } OP = 3\sqrt{3}$$

Assim, a área  $S$  pedida será (número 217):

$$S = AQ \cdot 2\pi \cdot OB = (3\sqrt{3} + 3) 2\pi \cdot 6$$

$$\therefore S = 3(\sqrt{3} + 1) \cdot 2\pi \cdot 6 \therefore \boxed{S = 36(\sqrt{3} + 1)\pi \text{ cm}^2}$$

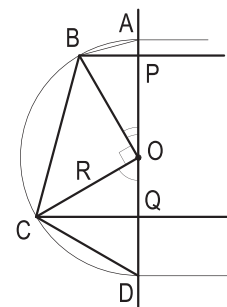


Figura 510

91. A aresta de um diedro de  $120^\circ$  é suporte do diâmetro (A)(B) = 6 cm de uma esfera.

No interior desse diedro são construídos dois semiplanos, tais que um forme  $30^\circ$  com uma das faces do diedro e o outro  $45^\circ$  com a outra face.

Pede-se calcular as áreas dos 3 fusos esféricos consecutivos assim formados, bem como os volumes das cunhas esféricas correspondentes.

Resolução: Como as áreas dos 3 fusos e os volumes das 3 cunhas esféricas formadas são funções diretas de seus ângulos diedros, podemos (números 220 e 228) escrever:

$$S_1 = \frac{30^\circ}{360^\circ} 4\pi r^2 = \frac{4\pi 9}{12} \quad \therefore \quad S_1 = 3\pi \text{ cm}^2$$

$$S_2 = S_3 = \frac{45^\circ}{360^\circ} 4\pi r^2 = \frac{4\pi 9}{8}$$

$$\therefore \quad S_2 = S_3 = \frac{9\pi}{2} \text{ cm}^2$$

$$V_1 = \frac{30^\circ}{360^\circ} \cdot \frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{4 \cdot \pi \cdot 27}{36} \quad \therefore \quad V_1 = 3\pi \text{ cm}^3$$

$$V_2 = V_3 = \frac{45^\circ}{360^\circ} \cdot \frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{4 \cdot \pi \cdot 27}{24} \quad \therefore \quad V_2 = V_3 = \frac{9\pi}{2} \text{ cm}^3$$

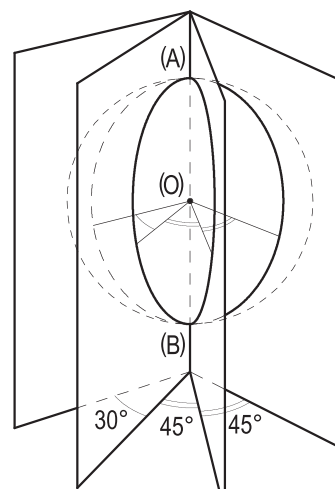


Figura 511

92. Um quadrante de círculo gira em torno de uma reta que contém seu centro, não o atravessa e que forma  $30^\circ$  com um dos raios que o limita. Pede-se calcular o volume do setor esférico assim gerado, sabendo que a área do quadrante dado é igual a  $4\pi \text{ m}^2$ .

Resolução: O cálculo do raio R do setor é imediato (*Geometria Plana*, número 317):

$$4\pi = \frac{\pi R^2}{4} \quad \therefore \quad R^2 = 16 \quad \therefore \quad R = 4$$

Pela posição particular do quadrante, em relação ao eixo da revolução, temos (número 229) (Figura 512):

$$OM = \frac{R\sqrt{3}}{2} \quad \text{e} \quad ON = \frac{R}{2}$$

E, então, por soma:

$$MN = h = \frac{R}{2} (\sqrt{3} + 1) = 2(\sqrt{3} + 1)$$

$$\therefore \quad V = \frac{2}{3} \pi R^2 h = \frac{2}{3} \pi \cdot 16 \cdot 2(\sqrt{3} + 1)$$

$$\therefore \quad V = \frac{64\pi (\sqrt{3} + 1)}{3} \text{ m}^3$$

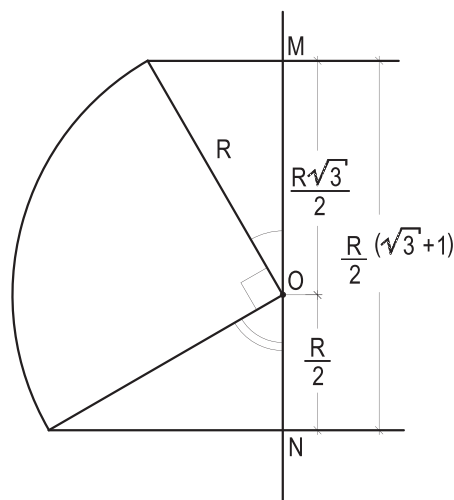


Figura 512

93. No interior de um cubo de aresta  $a$  são colocadas cinco esferas iguais, as quatro primeiras apoiadas em sua base, tangentes consecutivamente, duas a duas, e tangentes, cada uma, a um par de faces verticais consecutivas do cubo e a quinta tangente exteriormente às quatro primeiras.

Pede-se calcular o volume da porção do cubo exterior às cinco esferas, bem como as distâncias do centro da quinta esfera a cada face do cubo.

Resolução: Porque as esferas são todas iguais, os centros das quatro primeiras pertencem a um plano paralelo ao da base do cubo, distante desta base um valor  $r$ , igual aos seus raios (Figura 514).

Assim, a seção meridiana nessas quatro esferas (Figura 513) permite anotar:

$$\begin{aligned} a = 4r \quad \therefore \quad r &= \frac{a}{4} \\ d + 2r = 2r\sqrt{2} \quad \therefore \quad d &= 2r(\sqrt{2} - 1) \\ \therefore \quad d &= \frac{a}{2}(\sqrt{2} - 1) \end{aligned}$$

Apreciando, agora, a seção pelo plano diagonal do cubo que é o meridiano para duas esferas opostas das quatro primeiras e para a quinta (Figura 514), temos, para a altura  $h$  do triângulo  $(O_1)(O_3)(O_5)$ :

$$\begin{aligned} h^2 &= (2r)^2 - \left(r + \frac{d}{2}\right)^2 \\ \therefore \quad h^2 &= 4r^2 - \left[r + r(\sqrt{2} - 1)\right]^2 \\ \therefore \quad h^2 &= 4r^2 - r^2(1 + \sqrt{2} - 1)^2 \\ \therefore \quad h^2 &= 4r^2 - 2r^2 = 2r^2 \quad \therefore \quad h = r\sqrt{2} \end{aligned}$$

Então, as distâncias do centro  $(O_5)$  às faces do cubo são:

- $\frac{a}{2}$  a cada face lateral
- $h + r = r\sqrt{2} + r = r(\sqrt{2} + 1) = \frac{a}{4}(\sqrt{2} + 1)$  à base inferior
- $a - \frac{a}{4}(\sqrt{2} + 1) = \frac{a}{4}(4 - \sqrt{2} - 1) = \frac{a}{4}(3 - \sqrt{2})$  à base superior

E como todas as esferas são interiores ao cubo (Figuras 513 e 514), o volume  $V$  pedido se mede pela subtração do volume do cubo e o da soma dos volumes das cinco esferas.

$$\text{Logo, } V = a^3 - 5 \cdot \frac{4}{3} \pi r^3 = a^3 - \frac{20}{3} \pi \left(\frac{a}{4}\right)^3$$

$$V = a^3 - \frac{20}{3} \cdot \pi \frac{a^3}{64} = a^3 - \frac{5}{48} \pi a^3 \quad \therefore$$

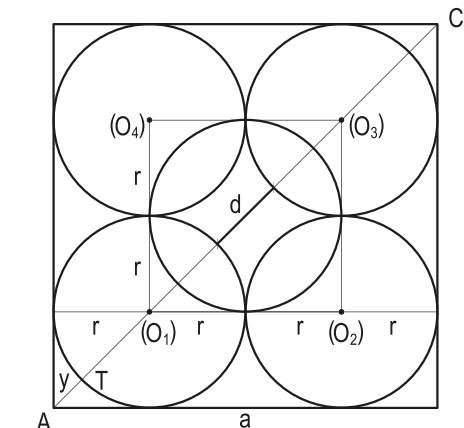


Figura 513

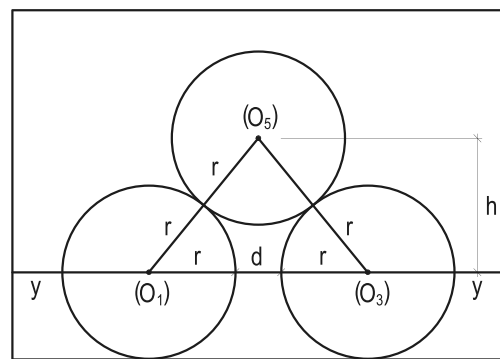


Figura 514

$$V = \left(\frac{48 - 5\pi}{48}\right) a^3$$

94. Num cubo de 6 cm de aresta, inscreve-se uma esfera e, em seguida, insere-se outras oito esferas iguais, todas tangentes exteriormente à primeira e, cada qual, tangente às três faces que convergem em cada vértice do cubo.

Pede-se calcular o volume de cada uma dessas oito esferas iguais.

Resolução: Consideremos, numa seção por um plano diagonal do cubo, a esfera (O), nele inscrita, e uma das oito esferas (O'), conforme proposto, o que permite, observando a diagonal (A)( $\bar{A}$ ) do cubo (Figura 516), anotar:

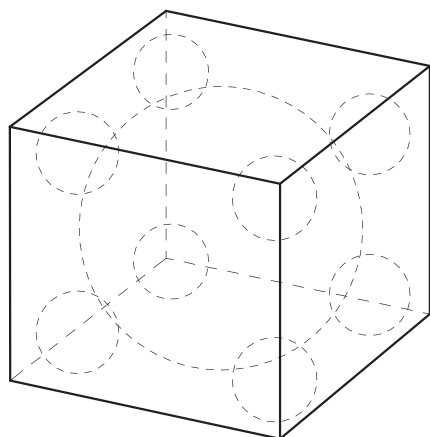


Figura 515

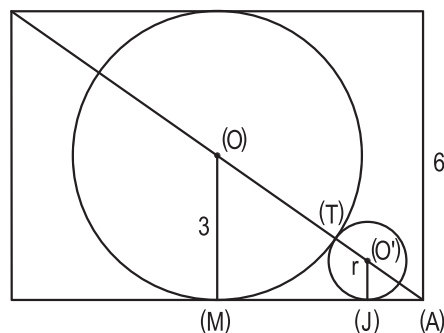


Figura 516

$$(O)(A) = (O)(\bar{T}) + (T)(O') + (O')(A)$$

Como  $(O)(A) = 3\sqrt{3}$ , para o valor  $r$  do raio de cada uma das oito esferas menores, observando a semelhança entre os triângulos retângulos  $(O)(M)(A)$  e  $(O')(J)(A)$ , e a relação (1), temos:

$$3\sqrt{3} = 3 + r + r\sqrt{3} \quad \therefore \quad r(\sqrt{3} + 1) = 3\sqrt{3} - 3 = 3(\sqrt{3} - 1)$$

$$\therefore \quad r = \frac{3(\sqrt{3} - 1)}{(\sqrt{3} + 1)} = \frac{3(\sqrt{3} - 1)(\sqrt{3} - 1)}{(\sqrt{3} + 1)(\sqrt{3} - 1)} = \frac{3(3 + 1 - 2\sqrt{3})}{3 - 1} = 3(2 - \sqrt{3})$$

Assim, o volume  $V$  procurado se escreve:

$$V = \frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{4}{3} \pi 3^3 (2 - \sqrt{3})^3$$

$$\therefore \quad V = 36\pi(2 - \sqrt{3})^3$$

$$\therefore \quad \boxed{V = 36(26 - 15\sqrt{3})\pi \text{ cm}^3}$$



95. Um cone de revolução e um cilindro de revolução, de alturas respectivamente iguais a 45 m e 36 m, apoiados por suas bases num plano horizontal, têm seus eixos situados sobre uma mesma reta.

Sabendo que o raio do cilindro é igual a 12 m e que as superfícies laterais dos dois sólidos cortam-se a meia altura do cilindro, pede-se calcular o volume da porção do cone exterior ao cilindro.

Resolução: As semelhanças dos triângulos retângulos pertencentes a uma seção meridiana dos dois sólidos (Figura 517) permitem anotar:

$$\frac{r}{12} = \frac{9}{9 + 18} = \frac{9}{27} \quad \therefore r = 4$$

$$\frac{R}{12} = \frac{45}{9 + 18} = \frac{45}{27} \quad \therefore R = 20$$

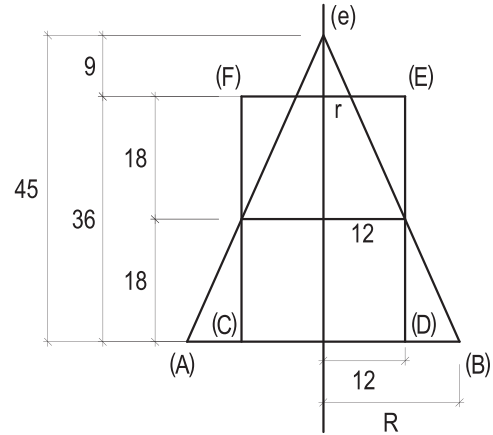


Figura 517

Então, dimensionados os dois sólidos de revolução e observando-se que o volume  $V$  procurado corresponde à soma do volume do cone de revolução superior e exterior ao cilindro com o volume do tronco de cone de revolução situado abaixo da circunferência de interseção das duas superfícies laterais, subtraída do volume da metade do cilindro inferior a esta curva (Figura 518), pode-se escrever:

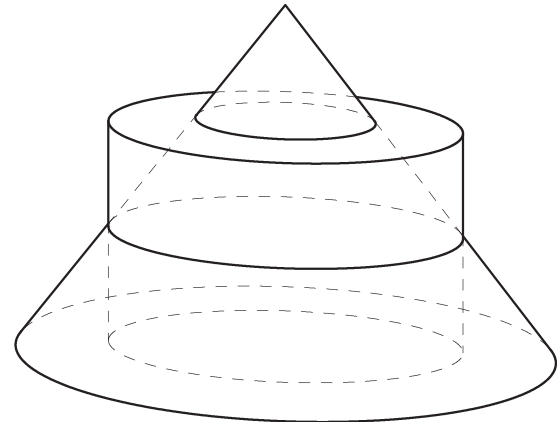


Figura 518

$$V = \frac{\pi 4^2 \cdot 9}{3} + \frac{\pi 18}{3} (20^2 + 12^2 + 20 \cdot 12) - \pi 12^2 \cdot 18$$

$$V = 48\pi + 6\pi (400 + 144 + 240) - \pi 144 \cdot 18$$

$$V = 48\pi + 6\pi (784) - \pi (2.592)$$

$$V = (48 + 4.704 - 2.592)\pi \quad \therefore \boxed{V = 2.160\pi \text{ m}^3}$$

96. Dois pontos (A) e (B) coincidem sobre a periferia da base de um cilindro de revolução, de grande altura. Tais pontos são postos em movimento sobre a superfície lateral do cilindro, durante um intervalo central de  $120^\circ$ , em torno de seu eixo e no mesmo sentido, de modo tal que, a cada intervalo infinitesimal de tal ângulo, o ponto (A) sofra um translação, sobre a geratriz em que esteja, igual à metade do comprimento do arco de base do cilindro que haja percorrido e que o ponto (B), com movimento semelhante, sofra translações iguais às metades daquelas.

Pede-se calcular a área da porção limitada, na superfície do cilindro, entre as duas hélices descritas por (A) e por (B) e a última geratriz considerada, em função do raio  $r$  da base do cilindro.

Resolução: Construídos os dois trechos de hélice descritos pelos pontos (A) e (B), conforme os dados (Figura 519), basta planificá-los, sobre um plano ( $\gamma$ ), tangente à base do cilindro dado, no ponto (A)  $\equiv$  (B), e observar os triângulos retângulos  $(A)(\bar{K})(\bar{A}')$  e  $(A)(\bar{K})(\bar{B}')$  (Figura 520), cujo cateto  $(A)(\bar{K})$  há de corresponder à retificação do arco  $(A)(K)$  do círculo da base do cilindro e cujos catetos  $(\bar{K})(\bar{A}')$  e  $(\bar{K})(\bar{B}')$  valham, respectivamente, a metade e a quarta parte daquela retificação.

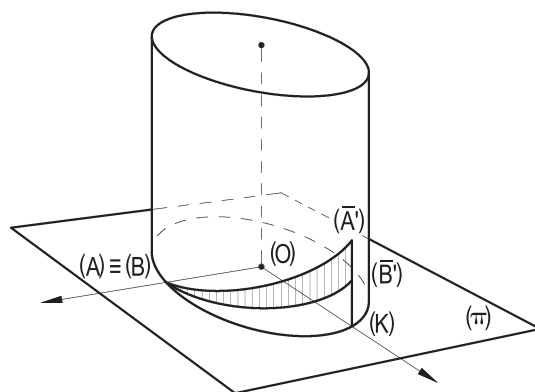


Figura 519

Assim, a área  $S$  procurada se calcula pela expressão:

$$S = \frac{1}{2} \cdot \overline{(A)(\bar{K})} \cdot \overline{(\bar{K})(\bar{A}')} - \frac{1}{2} \cdot \overline{(A)(\bar{K})} \cdot \overline{(\bar{K})(\bar{B}')}$$

E, como  $\overline{(A)(\bar{K})} = \frac{120^\circ}{360^\circ} 2\pi r = \frac{2\pi r}{3}$ , vem:

$$S = \frac{1}{2} \cdot \frac{2\pi r}{3} \cdot \frac{2\pi r}{6} - \frac{1}{2} \cdot \frac{2\pi r}{3} \cdot \frac{2\pi r}{12}$$

$$\therefore S = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} (\pi r)^2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{6} (\pi r)^2$$

$$\therefore S = \left( \frac{1}{9} - \frac{1}{18} \right) (\pi r)^2 \quad \therefore$$

$$S = \frac{\pi^2 r^2}{18}$$

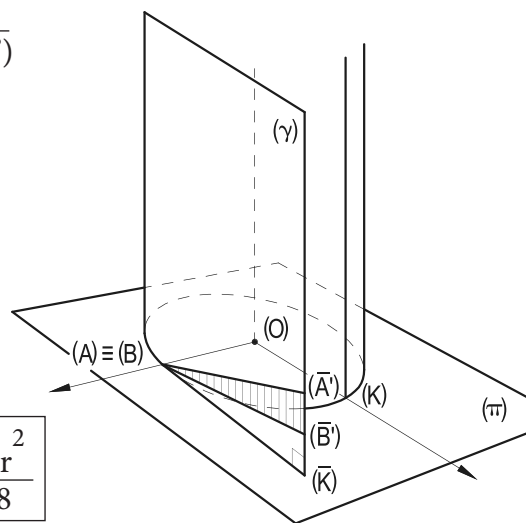


Figura 520

97. Dado um octaedro regular de aresta  $a$ , considere as seis esferas, cujos centros sejam os vértices do poliedro e cujos raios valham, todos, a metade de  $a$ .

Incluindo outras duas esferas tangentes concomitantemente a todas aquelas seis, interna e externamente, calcule, em função de  $a$ , o volume da porção do espaço exterior à menor destas duas esferas e interior à outra, a maior delas.

Resolução: Analisando uma seção diagonal do octaedro (Figura 521), fica imediato concluir que o raio da esfera que circunscreve as seis dadas, ou seja, que as tangencia internamente, é igual à soma das metades da aresta e da diagonal do octaedro. E que o raio da esfera tangente externamente às seis dadas vale a diferença entre as metades desses valores.

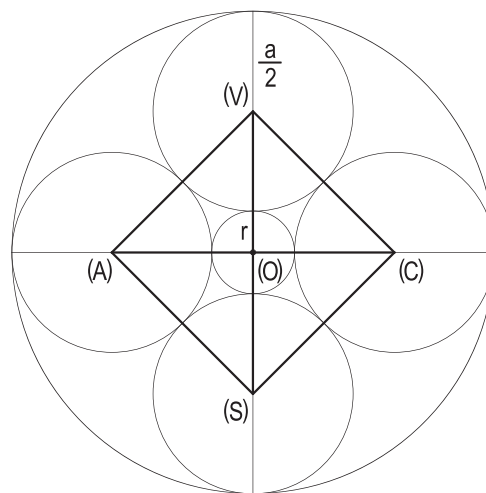


Figura 521

Sejam, então,  $R$  o raio da maior esfera e  $r$  o raio da menor.

Com isso, o volume  $V$  do espaço pedido, diferença entre os volumes dessas duas esferas (Figura 521), se escreve:

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3 - \frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{4}{3} \pi (R^3 - r^3) = \frac{4\pi}{3} \left[ \left( \frac{a\sqrt{2}}{2} + \frac{a}{2} \right)^3 - \left( \frac{a\sqrt{2}}{2} - \frac{a}{2} \right)^3 \right]$$

$$\therefore V = \left( \frac{4\pi}{3} \right) \left( \frac{a^3}{8} \right) \left[ (\sqrt{2} + 1)^3 - (\sqrt{2} - 1)^3 \right] \quad \therefore V = \frac{\pi a^3}{6} (5\sqrt{2} + 7 - 5\sqrt{2} + 7)$$

$$\therefore V = \frac{\pi a^3}{6} (14) \quad \therefore \boxed{V = \frac{7\pi a^3}{3}}$$

98. Calcular a diferença entre os volumes das esferas circunscrita e inscrita num octaedro regular de volume igual a  $9\sqrt{2} \text{ m}^3$ .

Resolução: Designando por  $a$  a aresta do octaedro, temos (números 115.7 e 115.6):

$$\frac{a^3 \sqrt{2}}{3} = 9\sqrt{2} \quad \therefore a^3 = 27 \quad \therefore a = 3$$

$$\therefore R_c = \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2} \quad \text{e} \quad R_i = \frac{a\sqrt{6}}{6} = \frac{3\sqrt{6}}{6}$$

$$V_c - V_i = \frac{4}{3} \pi (R_c^3 - R_i^3) = \frac{4\pi}{3} \left[ \left( \frac{3\sqrt{2}}{2} \right)^3 - \left( \frac{3\sqrt{6}}{6} \right)^3 \right] = \frac{4\pi}{3} \left( \frac{27\sqrt{2}}{4} - \frac{27\sqrt{6}}{36} \right)$$

$$\therefore V_c - V_i = \frac{4\pi}{3} \cdot \frac{27}{4} \left( \sqrt{2} - \frac{\sqrt{6}}{9} \right) \quad \therefore \boxed{V_c - V_i = (9\sqrt{2} - \sqrt{6})\pi \text{ m}^3}$$

99. Calcular a área  $S$  e o volume  $V$  da esfera inscrita numa pirâmide hexagonal regular de 8 cm de altura, sabendo que a área da base da pirâmide vale  $72\sqrt{3}\text{ cm}^2$ .

Anote, ainda, o valor da razão  $k$  entre essas duas medidas,  $S$  e  $V$ , referidas à mesma unidade.

Resolução: Pelos dados, a aresta básica  $a$  da pirâmide se calcula assim:

$$6a^2 \frac{\sqrt{3}}{4} = 72\sqrt{3} \quad \therefore \quad 3a^2 \sqrt{3} = 144\sqrt{3}$$

$$a^2 = 48 \quad \therefore \quad a = \sqrt{16 \cdot 3} \quad \therefore \quad a = 4\sqrt{3}$$

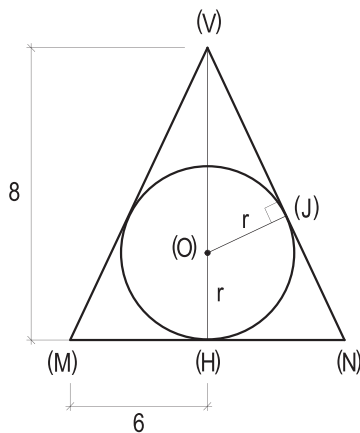


Figura 522

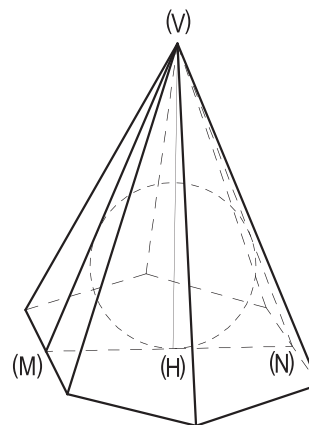


Figura 523

Para o cálculo do raio  $r$  da esfera inscrita na pirâmide, a observação da seção nela produzida pelo plano mediador de duas arestas básicas opostas, o triângulo isósceles  $(V)(M)(N)$  (Figura 522), proporciona:

$$\overline{(M)(N)} = 2 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3} = 4\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 12$$

Então, o triângulo retângulo  $(V)(H)(M)$ , pitagórico, pelos dados, assim como o triângulo  $(V)(O)(J)$ , a ele semelhante, permitem anotar:

$$\overline{(O)(J)} = \frac{3}{5} \overline{(V)(O)} \quad \therefore \quad r = \frac{3}{5} (8 - r)$$

$$\therefore \quad 5r = 24 - 3r \quad \therefore \quad 8r = 24 \quad \therefore \quad r = 3$$

$$\text{Logo, } S = 4\pi r^2 \quad \therefore \quad \boxed{S = 36\pi \text{ cm}^2}$$

$$\text{e } V = \frac{4}{3} \pi r^3 \quad \therefore \quad \boxed{V = 36\pi \text{ cm}^3}$$

Por último, a razão  $k$ , pedida, se escreve:

$$k = \frac{S}{V} = \frac{36\pi}{36\pi} \quad \therefore \quad \boxed{k = 1}$$

100. Um prisma hexagonal regular tem todas as suas arestas medindo 6 cm. Três cilindros de revolução são acoplados ao prisma, tendo por eixos as interseções dos planos de pares de faces laterais alternadas do prisma, de modo tal que, com alturas iguais à do prisma, se ajustam a três dessas faces, restando, parcialmente, no exterior do poliedro, tal como indica a Figura 524.

Pede-se calcular as áreas lateral  $S_\ell$  e total  $S_t$  e o volume  $V$  do sólido constituído pelo prisma e pelas porções a ele exteriores dos três cilindros.

Resolução: As interseções dos planos das faces laterais alternadas do prisma dado são retas paralelas às suas arestas laterais (Figura 524) e, pela observação da projeção ortogonal dos sólidos sobre o plano de suas bases, nota-se que tais planos formam um prisma triangular regular, representado, nessa projeção, pelo triângulo equilátero  $(O_1)(O_2)(O_3)$  (Figura 525), o que implica em que os raios dos três cilindros sejam iguais às arestas básicas do prisma e que as amplitudes angulares das superfícies laterais dos três cilindros correspondam, todas, a  $360^\circ - 60^\circ$ , ou seja, a  $300^\circ$ .

Por isso, o sólido em estudo é a soma do prisma hexagonal dado com três setores de cilindro, com alturas iguais à do prisma, todos com raios iguais à aresta básica do prisma e todos correspondendo a porções angulares iguais a  $300^\circ / 360^\circ$ , de cada cilindro (Figura 525).

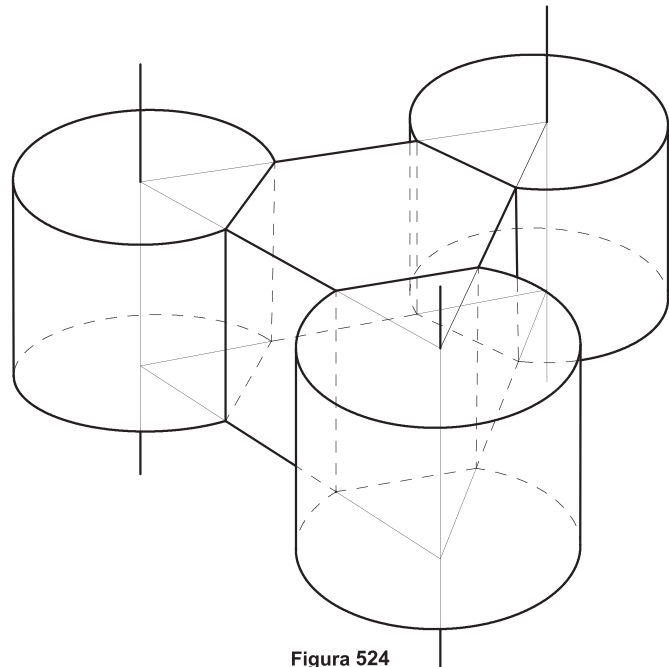


Figura 524

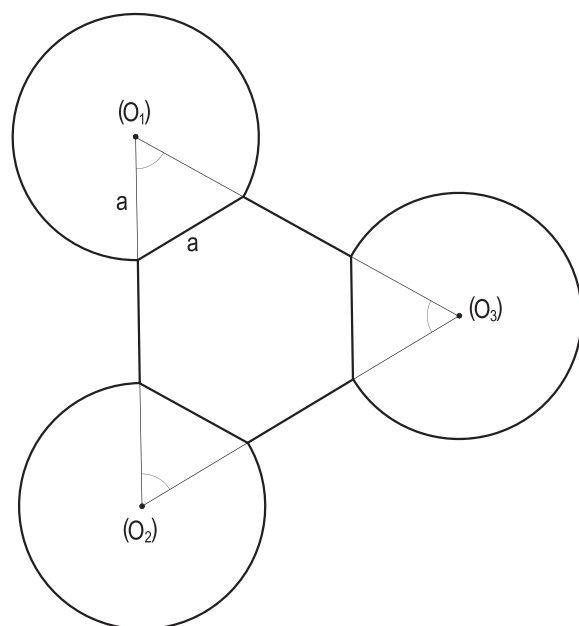


Figura 525

Assim, pode-se passar aos cálculos das áreas e do volume pedidos:

- Área  $S_1$  de cada face lateral do prisma:

$$S_1 = 6 \cdot 6 = 36$$

- Área  $S_2$  da superfície lateral de cada setor de cilindro:

$$S_2 = \frac{300^\circ}{360^\circ} 2\pi \cdot 6 \cdot 6 = \frac{5}{6} \pi \cdot 72 = 60\pi$$

- Área  $S_3$  da base de cada setor de cilindro, obtida pela soma das áreas de um setor circular de  $300^\circ$  e de um triângulo equilátero (Figura 525):

$$S_3 = \frac{300^\circ}{360^\circ} \pi \cdot 6^2 + \frac{6^2 \sqrt{3}}{4} = 30\pi + 9\sqrt{3} = 3(10\pi + 3\sqrt{3})$$

- Área  $S_4$  de cada base do prisma:

$$S_4 = 6 \cdot \frac{6^2 \sqrt{3}}{4} = 54\sqrt{3}$$

- $S_\ell = 3S_1 + 3S_2 = 3(36 + 60\pi) = 108 + 180\pi$

$$\therefore \boxed{S_\ell = 36(3 + 5\pi) \text{ cm}^2}$$

- $S_t = S_\ell + 6S_3 + 2S_4 = 108 + 180\pi + 6(30\pi + 9\sqrt{3}) + 2 \cdot 54\sqrt{3}$

$$\therefore S_t = 108 + 180\pi + 180\pi + 54\sqrt{3} + 108\sqrt{3}$$

$$\therefore S_t = 108 + 360\pi + 162\sqrt{3}$$

$$\therefore \boxed{S_t = 18(6 + 20\pi + 9\sqrt{3}) \text{ cm}^2}$$

- $V = 6 \cdot \frac{6^2 \sqrt{3}}{4} \cdot 6 + 3 \left( \frac{5}{6} \cdot \pi 6^2 \cdot 6 \right) + 3 \cdot \frac{6^2 \sqrt{3}}{4} \cdot 6$

$$V = 3 \cdot 6^2 \sqrt{3} \cdot 3 + 3 \cdot 5\pi \cdot 6^2 + 3 \cdot 3 \cdot 6 \sqrt{3} \cdot 3$$

$$\therefore V = 324\sqrt{3} + 540\pi + 162\sqrt{3}$$

$$\therefore V = 486\sqrt{3} + 540\pi$$

$$\therefore \boxed{V = 54(9\sqrt{3} + 10\pi) \text{ cm}^3}$$

DADOS INTERNACIONAIS PARA CATALOGAÇÃO NA  
PUBLICAÇÃO (CIP)

---

A447g

Almeida, Célio Pinto de, 1937-  
Geometria espacial / Célio Pinto de Almeida. – 2. ed. rev. e  
ampl. – Rio de Janeiro :  
G. Ermakoff, 2021.  
272 p. : il. ; 28 cm.

ISBN - 978-65-87730-02-8

1. Geometria espacial. I. Título.

CDD - 516.23

---

ROBERTA MARIA DE O. V. DA COSTA – Bibliotecária CRB7 5587

Este livro foi composto na tipografia Minion pro em  
corpo 12,5/17,3, impresso em papel offset 90g/m<sup>2</sup>,  
na gráfica Santa Marta – São Paulo.