

GEOMETRIA
PLANA

Célio Pinto de Almeida

GEOMETRIA PLANA

— 2ª Edição —

G.Ermakoff CASA EDITORIAL
RIO DE JANEIRO | 2020

2ª edição – 2020

Geometria Plana

Copyright © 2018, 2020 by Célio Pinto de Almeida

Coordenação editorial:

George Ermakoff

Capa:

Miriam Lerner e Marcelo Domingues

Diagramação:

Marcelo Domingues

Desenhos:

Michelle Bulhões

Imagem da capa:

Homotetia

Segunda edição

Tiragem: 500 exemplares – Distribuição Gratuita

A GEOMETRIA EUCLIDIANA

Euclides de Alexandria, reconhecido como o Pai da Geometria, é o principal nome nesta bela parte da Matemática.

Tendo vivido no terceiro século antes da era cristã, foi, além de matemático, escritor, filósofo e, sobretudo, professor, muito elogiada sua capacidade de explicar seus pensamentos e suas teorias, com inigualável clareza.

Euclides escreveu a famosa obra *Os Elementos*, além de serem a ele creditados importantes estudos sobre ótica, perspectiva, teoria dos números, astrologia, astronomia e mecânica. Foi a Geometria sua principal área de interesse.

A importância de todo o raciocínio euclidiano consiste em desenvolver cadeias lógicas de pensamento, de modo a chegar a conclusões a partir de verdades anteriormente demonstradas, além do rigor no trato de tais demonstrações.

A Geometria Euclidiana se desenvolve em espaço imutável e simétrico. A sistematização, a lógica, a dedução, a necessidade de comprovação irretocável para cada propriedade estudada e proposta formam a estrutura do que se conhece como Geometria Euclidiana.

SEGUNDA EDIÇÃO

Minhas primeiras anotações, ainda dos anos da década de 1960, época do Curso Vetor e dos pesados vestibulares para Engenharia e Arquitetura, anteriores às múltiplas escolhas que tanto vulgarizaram aqueles exames, serviram de base para esta segunda edição, especialmente pela inclusão, ao final, de um capítulo dedicado a problemas resolvidos, que percorreram toda a teoria já apresentada na edição inicial e, agora, apenas revista.

Os problemas escolhidos, uma centena no total, ocupam-se de questões métricas, em que comprimentos e ângulos são devidamente apreciados, mas, também, de construções gráficas e da instituição conceitual de novas propriedades geométricas, tudo, naturalmente, apoiado na teoria antes desenvolvida e mencionada sempre que necessário.

O capítulo que reúne esses problemas resolvidos vai incluído no final, cuidando que, tal como em todo o desenvolvimento conceitual, esteja ordenadamente apresentado, com o natural desejo que agrade aos leitores, complementando toda a teoria antes elaborada e apresentando novas nuances.

LISTAGEM DE ASSUNTOS

A listagem abaixo apresenta, em cada capítulo, os principais assuntos, definições e teoremas, ao invés do habitual sumário de títulos, tais as quantidades de conceituações e demonstrações.

Introdução	Axioma e teorema	15
	Teorema, hipótese e tese	15
	Corolário e escólio	15
	Recíproca, contrário e contraditório	16
	Elementos fundamentais	16
	Conceito de lugar geométrico	17
Capítulo I – Ângulos	Adição, subtração e comparação de ângulos	19
	Bissetriz	20
	Ângulo reto	20
	Complemento, suplemento e replemento	20
	Ângulos opostos pelo vértice	22
	Sistemas de unidades angulares	24
	Grau, grado	24
	Radiano	24
Capítulo II – Polígonos	Linha poligonal	25
	Perímetro	25
	Polígono	25
	Polígono convexo e côncavo	25
	Gênero	26
	Cálculo do número de diagonais	26
	Envolventes e envolvidas	27
Capítulo III – Triângulos	Cevianas	29
	Classificações dos triângulos	30
	Casos de igualdade dos triângulos	31
	Mediatriz	32
Capítulo IV – Paralelas	Postulado de Euclides	37
	Ângulos alternos, internos e externos	38
	Ângulos colaterais, internos e externos	38
	Ângulos correspondentes	38
	Paralelas entre paralelas	40
	Ângulos com lados paralelos	41
	Ângulos com lados perpendiculares	41
	Lei angular de Thales	42
	Soma dos ângulos internos de um polígono convexo ..	43
	Soma dos ângulos externos de um polígono convexo ..	43

Capítulo V – Paralelogramos e trapézios

Paralelogramo	45
Retângulo	45
Losango ou rombo	45
Quadrado	45
Trapézio	45
Propriedades gerais dos paralelogramos	46
Propriedades dos retângulos	48
Propriedades dos losangos	48
Propriedades dos quadrados	48
Propriedade exclusiva dos triângulos retângulos	49
Centro de uma figura	50
Propriedades dos trapézios isósceles	51
Base média do trapézio	51
Mediana de Euler do trapézio	51
Valor da base média do trapézio	53
Valor da mediana de Euler do trapézio	53

Capítulo VI – Círculo

Círculo	57
Raio	57
Arco, corda, flecha e diâmetro	57
Ângulo central	58
Setor circular	58
Segmento circular	58
Coroa circular	58
Setor de coroa circular	58
Distância de um ponto a um círculo	59
Tangentes	65
Círculos ortogonais	69
Posições relativas entre dois círculos	70

Capítulo VII – Ângulos no círculo

Ângulo inscrito	71
Ângulo de segmento	71
Cálculo do ângulo inscrito	72
Arco capaz	73
Cálculo do ângulo de segmento	74
Construção do arco capaz	76
Ângulos formados por duas secantes	78

Capítulo VIII – Pontos notáveis dos triângulos

Círculo circunscrito	79
Círculo inscrito	79
Círculos exinscritos	79
Circuncentro	79
Incentro	80
Exincentros	80
Ortocentro	81
Triângulo órtico	82
Baricentro	82

Capítulo IX – Linhas proporcionais	Definições	89
	Feixe de retas paralelas	90
	Divisão harmônica	92
	Propriedades da divisão harmônica	92
	Média harmônica	93
	Teorema das bissetrizes	94
	Círculo de Apollonius	95
Capítulo X – Semelhança	Triângulos semelhantes	97
	Casos de semelhança de triângulos	100
	Razão entre segmentos homólogos	101
	Feixe de retas concorrentes	102
	Polígonos semelhantes	102
	Casos de semelhança de polígonos	104
	Figuras semelhantes	104
Capítulo XI – Homotetia	Modificações planas	105
	Translação	105
	Rotação	105
	Simetrias axial e central	106
	Homotetia	107
	Figuras homotéticas	109
Capítulo XII – Relações métricas nos triângulos	Triângulos retângulos	111
	Triângulos retângulos particulares	113
	Triângulos obliquângulos	115
	Soma dos quadrados de dois lados	116
	Diferença dos quadrados de dois lados	116
	Teorema de Stewart	117
	Cálculo das medianas	118
	Cálculo das bissetrizes internas	119
	Cálculo das bissetrizes externas	120
	Cálculo das alturas	121
	Cevianas isogonais	122
	Cálculo do raio do círculo circunscrito	123
	Cálculo do raio do círculo inscrito	124
	Cálculos dos raios dos círculos exinscritos	124
	Triângulos isósceles	125
	Triângulos equiláteros	127
	Triângulos retângulos	128
Capítulo XIII – Relações métricas nos quadriláteros	Teorema de Euler	129
	Teorema de Pitot	131
	Teoremas de Ptolomeu e Hiparco	133
	Diagonais do quadrilátero inscrito	134
	Corda do arco soma	134
	Corda do arco duplo	135
	Corda do arco metade	135
	Corda do arco diferença	136

Capítulo XIV – Relações métricas nos círculos

Cordas secantes	137
Retas secantes ao círculo	138
Potência	139
Cálculo do valor da potência	140
Teorema de Faure	143
Eixo radial de dois círculos	145
Propriedades do eixo radical	146
Centro radical de três círculos	148
Propriedades do centro radical	149
Construção do eixo radical	150
Construção do centro radical	151

Capítulo XV – Polígonos regulares

Polígonos entrecruzados	155
Espécie de um polígono	157
Obtenção dos polígonos regulares	161
Segmentos áureos	165
Média e extrema razão	165
Divisão em média e extrema razão	167
Cálculo do apótema	169
Duplicação do gênero	169
Gêneros da forma 2.2^n	170
Quadrado	170
Octógonos regulares	170
Lado do polígono regular de gênero 2.2^n	171
Gêneros da forma 3.2^n	172
Triângulo equilátero	172
Hexágono regular	172
Dodecágonos regulares	173
Lado do polígono regular de gênero 3.2^n	173
Pentágonos regulares	174
Decágonos regulares	174
Pentadecágonos regulares	176
Comprimento da circunferência de círculo	180
Comprimento de um arco de círculo	181
Radiano	182
Cálculo de π	182

Capítulo XVI – Áreas

Equivalência	185
Polígonos equicompostos	185
Área do retângulo	187
Área do quadrado	187
Área do paralelogramo	187
Área do triângulo	188
Área do losango	188
Área do trapézio	189
Área do polígono convexo regular	189
Área do setor poligonal convexo regular	189
Área do círculo	190
Área do setor circular	190

	Área do segmento circular	191
	Área da coroa circular	191
	Área do setor de coroa circular	192
	Área do triângulo equilátero	194
	Equivalências usuais	194
	Áreas de figuras semelhantes	198
	Teorema de Pitágoras	199
	Lúnulas de Hipócrates	202
Capítulo XVII – Elipse		
	Eixos, vértices, focos, distância focal	203
	Relações métricas	204
	Corda focal e parâmetro	205
	Excentricidade	206
	Círculos diretores, principal e auxiliar	207
	Tangente e normal	208
	Teorema de La Hire	210
	Teoremas de Poncelet	211
	Círculo de Monge	213
	Afinidade plana	214
	Diâmetros da elipse	217
	Diâmetros conjugados	218
Capítulo XVIII – Hipérbole		
	Focos e distância focal	221
	Eixos, vértices e centro	222
	Corda focal e parâmetro	223
	Excentricidade	224
	Hipérbole equilátera	225
	Círculos diretores e principal	226
	Tangente e normal	226
	Teorema de La Hire	229
	Teoremas de Poncelet	230
	Círculo de Monge	232
	Assíntotas	232
	Hipérboles conjugadas	235
	Hipérbole equilátera	235
	Diâmetros da hipérbole	239
	Diâmetros conjugados	240
Capítulo XIX – Parábola		
	Foco e diretriz	241
	Eixo e vértice	242
	Corda focal e parâmetro	242
	Tangente e normal	244
	Teorema de La Hire	246
	Teoremas de Poncelet	246
	Limite da elipse ou da hipérbole	248
	Subtangente e subnormal	251
	Diâmetros	253
Capítulo XX – Problemas resolvidos	257

ITENS DESTACADOS

A seguir, por ordem alfabética, vão listados os itens habitualmente mais procurados.

Afinidade plana	214
Arco capaz	73
Assíntotas da hipérbole	232
Base média do trapézio	51
Cálculo de π	182
Centro radical de três círculos	148
Cevianas isogonais	122
Círculo de Apollonius	95
Círculo de Monge – elipse	213
Círculo de Monge – hipérbole	232
Círculos ortogonais	69
Conceito de lugar geométrico	17
Diâmetros conjugados – elipse	218
Diâmetros conjugados – hipérbole	240
Divisão harmônica	92
Eixo radical de dois círculos	145
Hipérbolas conjugadas	235
Homotetia	107
Lei angular de Thales	42
Lúnulas de Hipócrates	202
Média e extrema razão	165
Média harmônica	93
Mediana de Euler do trapézio	51
Postulado de Euclides	37
Potência	139
Radiano	182
Segmentos aúreos	165
Teorema das bissetrizes	94
Teorema de Euler	129
Teorema de Faure	143
Teorema de La Hire – elipse	210
Teorema de La Hire – hipérbole	229
Teorema de La Hire – parábola	246
Teorema de Pitágoras	199
Teorema de Pitot	131
Teorema de Stewart	117
Teoremas de Poncelet – elipse	211
Teoremas de Poncelet – hipérbole	230
Teoremas de Poncelet – parábola	246
Teoremas de Ptolomeu e Hiparco	133
Triângulo órtico	82

INTRODUÇÃO

1 – Axioma e teorema

Geometria é o ramo da Matemática que estuda as propriedades de extensão, forma e posição das figuras, podendo se ocupar das figuras bidimensionais pertencentes a um plano, ou daquelas que se desenrolam no espaço de três dimensões.

O presente trabalho é dedicado à Geometria Plana. Desenvolve-se dedutivamente por meio de raciocínios encadeados, necessitando, pois, de alguns conceitos iniciais e de algumas afirmativas primárias para a conclusão de novas propriedades.

As afirmativas adotadas como iniciais em cada um dos compartimentos da matéria não podem, por isso mesmo, ser concluídas a partir de outras, devendo apenas ser escolhidas, em quantidade mínima, cada uma independentemente, mas não contrariando, cada uma das demais. Tais assertivas – verdades inquestionáveis e evidentes, elas próprias indemonstráveis, mas fundamentais para outras demonstrações – denominam-se axiomas e têm, como companheiros, na base da estrutura dedutiva da Geometria, os postulados, proposições que, embora por vezes não evidentes, são consideradas verdadeiras, sem discussões.

As relações entre conhecimentos prévios e outros concluídos dedutivamente a partir daqueles expressam-se sob a forma de proposições, denominadas teoremas, e os encadeamentos de raciocínios que permitem chegar dos primeiros aos segundos, sempre obedecendo à lógica, são as suas demonstrações.

Hipótese e tese de um teorema são, respectivamente, os conjuntos de fatos previamente conhecidos e os concluídos ao fim de sua demonstração.

Quando um teorema precede um outro, visando facilitar sua demonstração, ele é denominado lema e, quando sucede um outro, dependendo apenas deste a sua demonstração, denomina-se corolário.

Toda observação feita sobre uma proposição demonstrada denomina-se escólio.

Dois teoremas são ditos recíprocos, contrários ou contraditórios, conforme respectivamente:

- a. a hipótese de um deles é formada total ou parcialmente da tese do outro e vice-versa;
- b. a hipótese e a tese de um deles negam, respectivamente, hipótese e tese do outro;
- c. a hipótese de um deles nega total ou parcialmente a tese do outro e vice-versa.

Assim, a todo teorema – que chamaremos, então, direto – podemos associar um ou mais recíprocos, um contrário e um ou mais contraditórios, o que não quer dizer, no entanto, que estes teoremas devam ser verdadeiros.

E mais, simbolizando por D , R , C e C' , respectivamente, o teorema direto, um de seus recíprocos, seu contrário e um de seus contraditórios é fácil concluir que:

- a. R e C são contraditórios;
- b. R e C' são contrários;
- c. C e C' são recíprocos.

Sendo verdadeiros um teorema direto de hipótese H e tese T , assim como seu recíproco (ou, o que é o mesmo, seu contrário), diz-se que H é condição necessária e suficiente para que T seja verdadeiro.

2 – Elementos fundamentais

2.1 – Assim como algumas afirmativas não podem ser demonstradas, por serem iniciais no sistema dedutivo da Geometria (axiomas), também alguns elementos são aceitos independentemente de definições. São aqueles fundamentais a partir dos quais definem-se os demais. Assim são o ponto, a reta, o plano e o espaço.

2.2 – Sobre estes elementos utilizam-se os seguintes postulados:

a. Para o ponto:

- O ponto não possui dimensão.

b. Para a reta:

- Toda reta é ilimitada.
- Toda reta possui uma infinidade de pontos, de modo tal que entre dois quaisquer deles sempre existe um terceiro.
- Por dois pontos distintos passa uma reta e apenas uma (ou seja, uma reta fica determinada, em posição, por dois quaisquer de seus pontos).
- Duas retas sempre podem ser levadas a coincidir por superposição, de modo tal que cada ponto de uma venha a coincidir com cada ponto da outra.
- Se A , B e C são três pontos de uma reta, tais que A antecede B e B antecede C (segundo um certo sentido em que se percorre a reta), A antecede C .

c. Para o plano:

- Todo plano é ilimitado, dividindo o espaço em duas regiões, de modo tal que tomados dois pontos situados cada um em cada uma dessas regiões, não se pode passar de um ao outro sem atravessar o plano.
- Por três pontos não colineares sempre passa um plano e somente um (ou seja, um plano fica determinado, em posição, por três pontos não colineares).
- Toda reta determinada por dois pontos pertencentes a um plano pertencente a ele.
- Dois planos sempre podem ser levados a coincidir por superposição, de modo tal que cada reta de um deles venha a coincidir com cada reta do outro.

3 – Definições

A partir dos elementos fundamentais e dos postulados citados, temos as seguintes definições:

- a. Semirreta é cada uma das duas porções em que fica dividida uma reta por um qualquer de seus pontos. O ponto de divisão denomina-se origem das semirretas.
- b. Segmento de reta é toda porção de uma reta limitada por dois quaisquer de seus pontos. Tais pontos são as extremidades do segmento.
- c. Semiplano é cada uma das duas porções em que fica dividido um plano por uma qualquer de suas retas, a qual é denominada reta origem de cada um dos semiplanos.
- d. Semiespaço é cada uma das duas porções em que fica dividido o espaço por um plano qualquer.
- e. Volume é toda porção limitada do espaço.

4 – Conceito de lugar geométrico

Lugar geométrico é o conjunto de pontos que obedecem a uma certa condição (ou a um conjunto de condições) exclusiva(s) deles.

Assim, uma figura é o lugar geométrico dos pontos que atendem a certa propriedade, quando todos os seus pontos, e apenas eles, são capazes dessa propriedade.

Então, para estabelecer um lugar geométrico, será preciso demonstrar o teorema direto que traduz a condição imposta e seu recíproco (ou, o que é o mesmo, seu contrário).

O conceito de lugar geométrico é extensível à Geometria Espacial, sendo, então, proposto para pontos, retas ou curvas.

Em termos de Geometria Plana, os lugares geométricos são retas, curvas ou conjuntos dessas figuras, enquanto na Espacial, além dessas possibilidades, as superfícies podem constituir lugares geométricos referentes a determinadas condições.

Na Geometria Plana, os lugares geométricos mais presentes são a circunferência do círculo, a mediatriz de um segmento de reta e a bissetriz de um ângulo. Serão eles detalhadamente estudados e aplicados adiante.

São também de especial importância, na imensa família de lugares geométricos da Geometria Plana, o par de arcos capazes (ver número 131) e as cônicas – elipse, hipérbole e parábola – aqui apresentadas com suas principais propriedades (Capítulos XVII, XVIII e XIX) e mais aprofundadas em obra separada (*Cônicas*) deste mesmo autor.

5 – Estrutura

Todo o trabalho que a seguir será desenvolvido apoiar-se-á nas afirmativas e nas definições iniciais e, mediante raciocínios lógicos, apresentará conclusões e novas propriedades, necessitando, por diversas vezes, de outras definições.

Devido ao encadeamento dos raciocínios, sempre apoiados em conclusões anteriores, o presente trabalho, para facilitar as consultas de seus leitores, está estruturado segundo claras ordenações das propriedades enunciadas e demonstradas, obedecendo a uma numeração sequencial, sempre referida, quando decorrente de definição ou de conclusão anterior. Além disso, todas as figuras utilizadas para ilustrar demonstrações ou para representar novas definições ou propriedades vão, também, sequencialmente numeradas, sendo citadas tais referências sempre que a consulta se fizer necessária.

Cabe, a respeito deste trabalho, clara advertência de que se trata de um estudo clássico, em que cada propriedade, por mais óbvia que possa parecer, é demonstrada, tudo bem ao contrário do expediente simplista que tanto vem sendo adotado no ensino da Geometria no Brasil, e não só aqui..., que substitui as demonstrações por “constatações práticas” tão pobres conceitualmente quanto limitadoras do desenvolvimento do raciocínio geométrico.

Complementando o sumário inicial, o leitor poderá encontrar, para consultas, uma listagem de elementos, temas e propriedades mais habituais, com claras referências às suas localizações ao longo da obra.

CAPÍTULO I

ÂNGULOS

6 – Definições

Ângulo é a figura formada por duas semirretas de mesma origem (Figura 1). As semirretas são os lados e sua origem o vértice do ângulo.

Um ângulo de lados OA e OB (Figura 1) será representado por um dos seguintes símbolos:

$$\widehat{AOB}, AOB, \widehat{O}, \text{ ou } \alpha, \text{ ou } \hat{\alpha}$$

Dois ângulos são adjacentes quando possuem o mesmo vértice e um lado comum, pertencendo a semiplanos opostos em relação ao lado comum. Assim são os ângulos \widehat{AOB} e \widehat{BOC} da Figura 2.

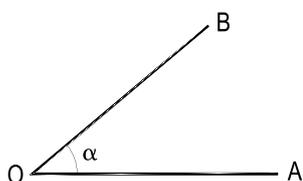


Figura 1

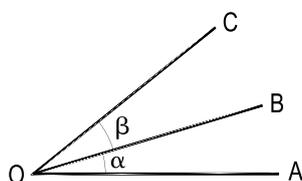
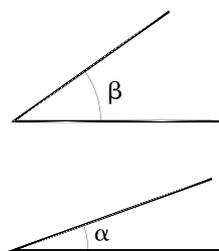


Figura 2



7 – Adição, subtração e comparação de ângulos

Dados dois ângulos α e β , consideremos dois outros adjacentes e respectivamente iguais àqueles (Figura 3). Ao ângulo γ formado pelos lados não comuns dos adjacentes dá-se o nome de ângulo soma dos dois primeiros. Pode-se, pois, escrever:

$$\gamma = \alpha + \beta$$

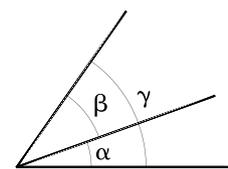


Figura 3

Para somar três ou mais ângulos, basta utilizar reiteradamente a operação descrita para dois ângulos.

Dados dois ângulos γ e α (Figura 3) diz-se que γ é maior que α quando γ é igual à soma de α com um outro ângulo β . α é, então, menor do que γ e β é a diferença entre γ e α .

8 – Bissetriz de um ângulo

Bissetriz de um ângulo é a semirreta que tem para origem o vértice do ângulo e que o divide em dois outros adjacentes iguais (Figura 4).

Postula-se que um ângulo qualquer possui apenas uma bissetriz.

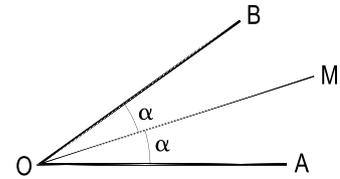


Figura 4

9 – Definições

Por definição, duas retas são perpendiculares quando formam quatro ângulos iguais (Figura 5). Daí decorre que, dos quatro ângulos por elas formados, dois adjacentes quaisquer são iguais.

Cada um desses quatro ângulos iguais denomina-se, então, ângulo reto ou, simplesmente, reto. O símbolo adotado para um ângulo reto é $1r$.

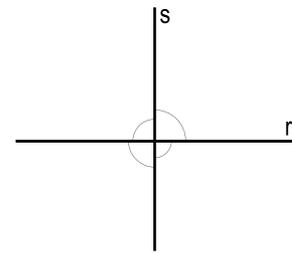


Figura 5

Dois ângulos são complementares, suplementares ou replementares conforme, respectivamente, sua soma seja igual a um, dois ou quatro retos. Cada um dos ângulos é, então, denominado complemento, suplemento ou replemento do outro, respectivamente.

Um ângulo é agudo ou obtuso conforme seja menor ou maior que um ângulo reto.

10 – Teorema

Por um ponto de uma reta sempre se pode traçar uma perpendicular a ela, e apenas uma.

Demonstração: Sejam a reta r e O um de seus pontos. Tracemos, num dos semiplanos formados por r , duas semirretas OA e OB que formem com r ângulos iguais α , de valor arbitrado, e consideremos a bissetriz s do ângulo \widehat{AOB} (Figura 6).

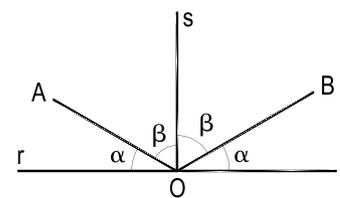


Figura 6

Porque s e r formam dois ângulos adjacentes iguais $(\alpha + \beta)$, conclui-se que s é perpendicular a r (número 9).

E, porque o ângulo \widehat{AOB} só possui uma bissetriz (número 8), fica também provado que é única essa perpendicular.

Então, por um ponto de uma reta, sempre se pode traçar uma perpendicular a ela, e apenas uma, como se queria demonstrar.

11 – Teorema

Dois ângulos adjacentes que têm os lados não comuns colineares são suplementares.

Demonstração: Sejam os ângulos α e β segundo a hipótese (Figura 7). Tracemos, por O, a perpendicular s a AC. Temos:

$$\alpha = 1r - \gamma$$

$$\beta = 1r + \gamma$$

Somando membro a membro: $\alpha + \beta = 2r$

Então, os dois ângulos considerados α e β são suplementares, como se queria demonstrar.

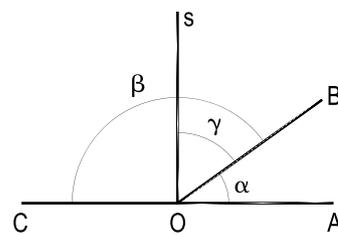


Figura 7

12 – Corolários

1. A soma de todos os ângulos consecutivos de mesmo vértice situados num dos semiplanos formados por uma reta que contenha o vértice comum (Figura 8) é igual a dois retos:

$$\alpha + \beta + \gamma + \theta + \delta = 2r$$

Porque são suplementares os ângulos $(\alpha + \beta + \gamma + \theta)$ e δ .

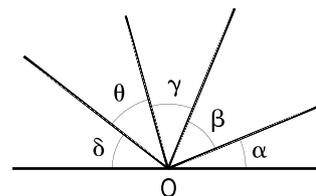


Figura 8

2. A soma de todos os ângulos consecutivos traçados em torno de um ponto (Figura 9) é igual a quatro retos:

$$\alpha + \beta + \gamma + \theta + \delta = 4r$$

De fato, considerando a semirreta Or' , prolongamento de Or , para além do ponto O, é imediato constatar que a soma dos ângulos em estudo equivale ao dobro da considerada no corolário anterior.

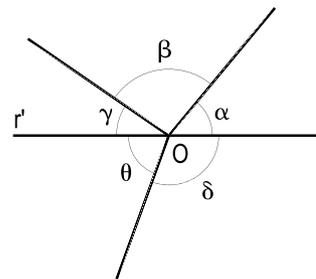


Figura 9

3. As bissetrizes de dois ângulos adjacentes e suplementares são perpendiculares entre si (Figura 10). Porque (número 12.1) para os ângulos \widehat{AOB} e \widehat{BOC} , suplementares, pode-se escrever:

$$2\alpha + 2\beta = 2r \quad \therefore \quad \alpha + \beta = 1r,$$

o que garante a perpendicularidade das bissetrizes r e s .

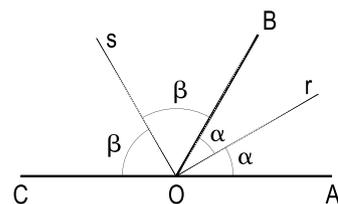


Figura 10

13 – Recíproca

Dois ângulos adjacentes e suplementares têm os lados não comuns colineares.

Demonstração: Sejam os ângulos $\widehat{A\hat{O}B}$ e $\widehat{B\hat{O}C}$ segundo a hipótese (Figura 11). Prolonguemos OA além de O, obtendo o ângulo $\widehat{A'\hat{O}B}$.

A hipótese fornece $\alpha + \beta = 2r$.

Mas (número 11), $\alpha + \gamma = 2r$.

Portanto, $\beta = \gamma$.

Assim, OC e OA' devem coincidir.

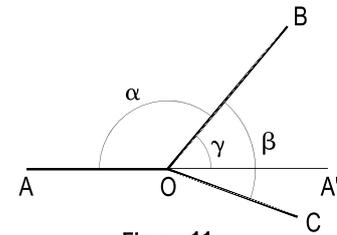


Figura 11

Então, dois ângulos adjacentes e suplementares têm os lados não comuns colineares, como se queria demonstrar.

14 – Ângulos opostos pelo vértice

Por definição, dois ângulos são opostos pelo vértice quando os lados de um são os prolongamentos dos lados do outro. Assim são os ângulos $\widehat{A\hat{O}B}$ e $\widehat{A'\hat{O}B'}$ da Figura 12.

Então, quando duas retas se cortam, os quatro ângulos por elas formados são, dois a dois, opostos pelo vértice.

15 – Teorema

Dois ângulos opostos pelo vértice são iguais.

Demonstração: Sejam dois ângulos opostos pelo vértice $\widehat{A\hat{O}B}$ e $\widehat{A'\hat{O}B'}$ que designamos, respectivamente, por α e β (Figura 12).

Por serem adjacentes com lados não comuns colineares, para os pares de ângulos $\widehat{B\hat{O}A}$ e $\widehat{A\hat{O}B'}$ e $\widehat{A'\hat{O}B}$ e $\widehat{B'\hat{O}A}$ podemos (número 11) escrever:

$$\alpha + \gamma = 2r$$

$$\beta + \gamma = 2r$$

Logo, $\alpha = \beta$.

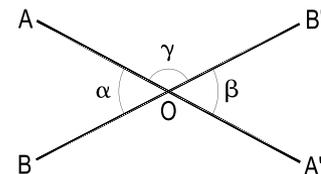


Figura 12

Assim, dois ângulos opostos pelo vértice são iguais, como se queria demonstrar.

16 – Recíproca

Dois ângulos iguais que têm o vértice comum, um par de lados colineares e que pertencem a semiplanos opostos em relação à reta formada por aquele par de lados comuns são opostos pelo vértice.

Demonstração: Sejam os ângulos $\widehat{A\hat{O}B}$ e $\widehat{A'\hat{O}B'}$, segundo a hipótese (Figura 13).

Prolonguemos OB além de O, formando o ângulo $\widehat{A'\hat{O}B''}$, oposto pelo vértice a $\widehat{A\hat{O}B}$.

A própria hipótese fornece $\alpha = \beta$.

Mas (número 15), $\alpha = \gamma$.

Logo, $\beta = \gamma$.

Assim, OB' e OB'' devem coincidir.

Então, dois ângulos iguais que têm o vértice comum, um par de lados colineares e que pertencem a semiplanos opostos em relação à reta formada por aquele par de lados comuns são opostos pelo vértice, como se queria provar.

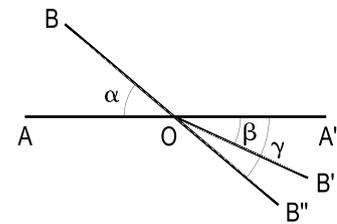


Figura 13

17 – Teorema

As bissetrizes de dois ângulos opostos pelo vértice são colineares.

Demonstração: Sejam OM e OM' as bissetrizes dos ângulos $\widehat{A\hat{O}B}$ e $\widehat{A'\hat{O}B'}$, opostos pelo vértice (Figura 14).

Façamos $\widehat{A\hat{O}B} = 2\alpha$ e $\widehat{A'\hat{O}B'} = 2\beta$

Porque $2\alpha = 2\beta$ (número 15),

vem: $\alpha = \beta$

Assim, os ângulos iguais $\widehat{A\hat{O}M}$ e $\widehat{A'\hat{O}M'}$, por terem um par de lados colineares OA e OA' e por pertencerem a semiplanos opostos em relação à reta AA', serão opostos pelo vértice (número 16).

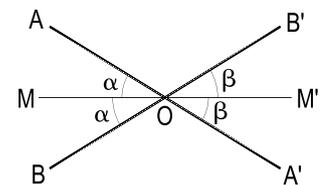


Figura 14

Por isso, as semirretas OM e OM' pertencerão à mesma reta MM' (Figura 14).

Então, as bissetrizes de dois ângulos opostos pelo vértice são colineares, conforme se queria demonstrar.

18 – Sistemas de unidades angulares

1. Sistema sexagesimal

Consta da unidade (o grau) e de seus submúltiplos (o minuto e o segundo).

- Grau ($^{\circ}$) – é o ângulo igual a $1/90$ do ângulo reto.
- Minuto ($'$) – é o ângulo igual a $1/60$ do grau.
- Segundo ($''$) – é o ângulo igual a $1/60$ do minuto.

Decorrem, então, as seguintes relações:

$$1^{\circ} = \frac{1r}{90} \quad \text{ou} \quad 1r = 90^{\circ} \quad \text{e} \quad 1^{\circ} = 60' = 3600''$$

2. Sistema decimal

Consta da unidade (o grado) e de seus submúltiplos (o decigrado, o centigrado e o miligrado).

- Grado (gr) – é o ângulo igual a $1/100$ do ângulo reto.
- Decigrado (dgr) – é o ângulo igual a $1/10$ do grado.
- Centigrado (cgr) – é o ângulo igual a $1/100$ do grado.
- Miligrado (mgr) – é o ângulo igual a $1/1000$ do grado.

Decorrem, então, as seguintes relações:

$$1gr = \frac{1r}{100} \quad \text{ou} \quad 1r = 100gr \quad \text{e} \quad 1gr = 10dgr = 100cgr = 1000mgr$$

19 – Observação

A relação básica entre os dois sistemas acima apresentados decorre das próprias definições de suas unidades:

$$1r = 90^{\circ} = 100gr$$

20 – Radiano

Uma outra unidade angular é o radiano (rad). É o ângulo central de um círculo correspondente a um arco de mesmo comprimento que o raio.

Assim é o ângulo α da Figura 15, onde têm iguais comprimentos o raio OA e o arco AB.

As relações entre o radiano, o grau e o grado serão detalhadas adiante (ver número 301).

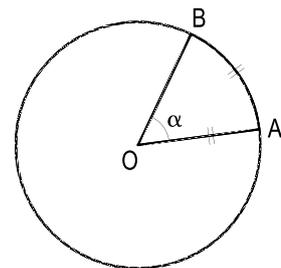


Figura 15

CAPÍTULO II

POLÍGONOS

21 – Linha poligonal

Linha poligonal é a figura formada por vários segmentos de reta não colineares que possuem, dois a dois, um extremo comum (Figura 16). Os segmentos denominam-se lados e seus extremos vértices da linha poligonal.

Perímetro de uma linha poligonal é a soma dos comprimentos de seus lados. Seu símbolo é $2p$.

Em cada vértice, o ângulo interno é o compreendido entre os dois lados que o formam.

Os ângulos internos de uma linha poligonal são ditos salientes ou reentrantes conforme, respectivamente, sejam menores ou maiores que 180° . Como, respectivamente, os ângulos B da Figura 16 e D da Figura 17.

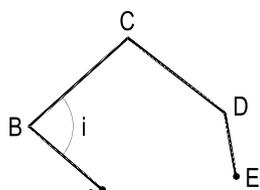


Figura 16

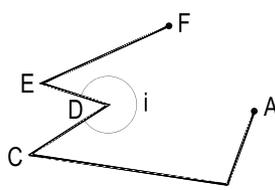


Figura 17

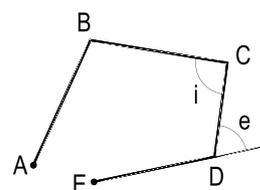


Figura 18

Uma linha poligonal é convexa quando todos os seus ângulos internos são salientes (Figura 16) e não convexa (ou côncava) quando pelo menos um de seus ângulos internos é reentrante (Figura 17).

Nas poligonais convexas, em cada vértice, o ângulo externo é formado por um dos lados e pelo prolongamento do seguinte (Figura 18).

22 – Polígono

Polígono é toda linha poligonal fechada.

Do próprio conceito de convexidade estabelecido para as linhas poligonais, válido, naturalmente, para os polígonos, é imediato concluir que:

1. Toda reta secante a um polígono convexo o corta em dois pontos (Figura 19).
2. Todo polígono convexo se situa inteiramente num dos dois semiplanos limitados pelas retas que servem de suporte a cada um de seus lados (Figura 19).
3. Quando um polígono é não convexo, existem retas que o cortam em mais de dois pontos (Figura 20).
4. Quando um polígono é não convexo, pelo menos dois de seus lados são tais que prolongados cortam o polígono (Figura 20). Os responsáveis pela(s) reentrância(s).

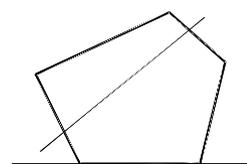


Figura 19

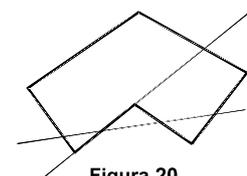


Figura 20

23 – Classificação

Gênero de um polígono é o número de lados que ele possui. Os polígonos classificam-se por seus gêneros. Assim, triângulos, quadriláteros, pentágonos, hexágonos, heptágonos, octógonos, eneágonos, decágonos, pentadecágonos, icoságonos, etc. são os polígonos de gêneros respectivamente iguais a 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 15, 20, etc.

Um polígono é dito equilátero quando todos os seus lados são iguais (Figura 21) e equiângulo quando são iguais todos os seus ângulos internos (Figura 22). Um polígono é regular quando é simultaneamente equilátero e equiângulo (Figura 23).

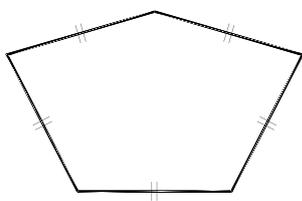


Figura 21

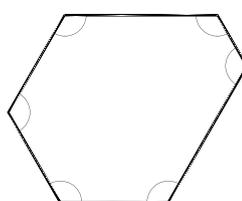


Figura 22

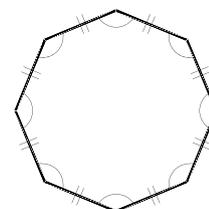


Figura 23

24 – Diagonais de um polígono

Diagonal de um polígono é todo segmento de reta formado por dois vértices não consecutivos (Figura 24).

O número de diagonais D de um polígono é função exclusiva de seu gênero. Para o cálculo de D , consideremos um polígono com um número n qualquer de lados e tracemos todas as diagonais que partem de um de seus vértices (Figura 24).

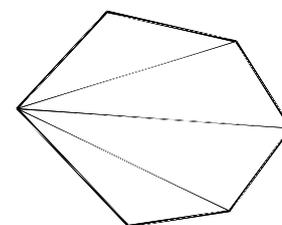


Figura 24

De todos os n vértices do polígono, apenas três não podem formar diagonais com o vértice considerado: ele próprio e os dois que lhe são consecutivos (que formam, com aquele, lados e não diagonais).

Assim, de cada vértice, partem $(n - 3)$ diagonais.

Dos n vértices partirão, então, $n(n - 3)$ diagonais.

Mas, como cada diagonal terá sido considerada duas vezes – primeiro a partir de uma extremidade, depois a partir da outra –, a quantidade $n(n - 3)$ representará o dobro do número D de diagonais do polígono.

Logo, a expressão que fornece D em função de n é:

$$D = \frac{n(n - 3)}{2}$$

25 – Envoltentes e envolvidas

Quando duas linhas poligonais abertas possuem seus extremos respectivamente coincidentes e uma delas fica situada inteiramente no interior da outra, a mais externa é denominada envolvente e a mais interna envolvida (Figura 25).

26 – Axioma

O menor percurso entre dois pontos é dado pelo segmento de reta por eles formado.

27 – Corolário

Um lado qualquer de um polígono é menor que a soma dos demais.

28 – Teorema

Entre duas linhas poligonais convexas, uma envolvente e outra envolvida, o perímetro da envolvente é maior que o da envolvida.

Demonstração: Sejam $ABCDEF$ e $ARSTUVF$ duas linhas poligonais convexas, a primeira envolvendo a segunda (Figura 25).

Prolonguemos os lados da envolvida até que eles encontrem os lados da envolvente nos pontos L, M, N, O e P (Figura 25). Temos (número 27):

$$\begin{aligned} AL < AB + BL & \quad \therefore \quad AB + BL > AR + RL \\ RM < RL + LC + CM & \quad \therefore \quad RL + LC + CM > RS + SM \\ SN < SM + MN & \quad \therefore \quad SM + MN > ST + TN \\ TO < TN + ND + DO & \quad \therefore \quad TN + ND + DO > TU + UO \\ UP < UO + OE + EP & \quad \therefore \quad UO + OE + EP > UV + VP \\ VF < VP + PF & \quad \therefore \quad VP + PF > VF \end{aligned}$$

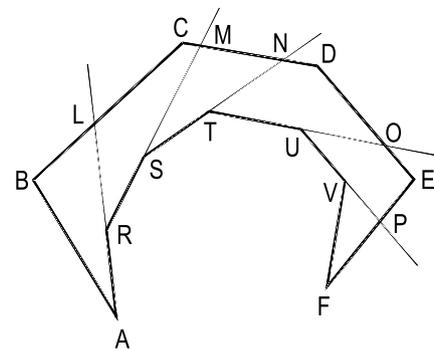


Figura 25

Somando membro a membro e simplificando, vem:

$$AB+BL+LC+CM+MN+ND+DO+OE+EP+PF > AR+RS+ST+TU+UV+VF$$

Ou seja, $AB+BC+CD+DE+EF > AR+RS+ST+TU+UV+VF$

Então, entre duas linhas poligonais convexas, uma envolvente e outra envolvida, o perímetro da envolvente é maior que o da envolvida.

29 – Observações

1. Quando a envolvida é convexa e a envolvente côncava, esta ainda é maior que aquela.

De fato, se substituirmos um trecho CXYZD da envolvente por um segmento CD (Figura 26) de modo tal que a nova envolvente ABCDEF venha a ser convexa, esta nova poligonal terá perímetro maior que o da envolvida (número 28).

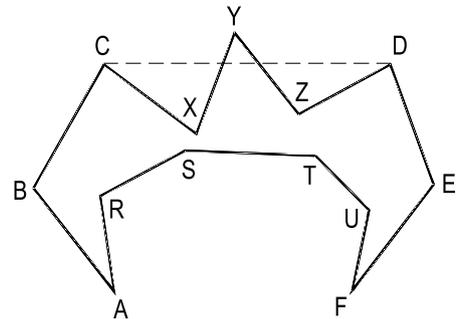


Figura 26

E, como o trecho CXYZD é maior que o segmento CD (número 26), a envolvente côncava é ainda maior que a envolvente convexa. E, conseqüentemente, maior que a envolvida.

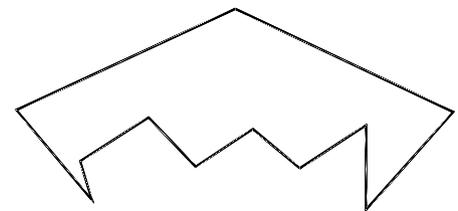


Figura 27

2. Quando a linha poligonal envolvida é côncava, seja a envolvente convexa (Figura 27) ou não (Figura 28), nada se pode afirmar sobre seus perímetros.

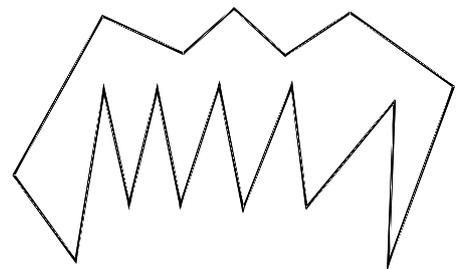


Figura 28

30 – Conclusão

Dadas duas linhas poligonais (uma envolvente, outra envolvida), desde que a envolvida seja convexa, pode-se afirmar que o perímetro da envolvente é maior que o da envolvida (Figura 29), independentemente de como seja aquela.

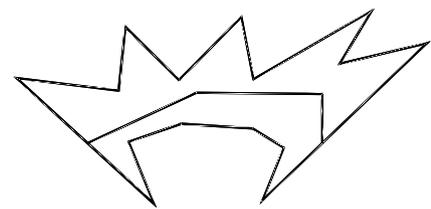


Figura 29

CAPÍTULO III

TRIÂNGULOS

31 – Definições

Triângulo é o polígono de três lados.

Convencionou-se simbolizar os vértices de um triângulo por letras maiúsculas; o triângulo por essas três letras; seus ângulos internos pelas próprias maiúsculas dos vértices respectivos e seus lados pelas letras minúsculas relativas aos vértices opostos, tal como indica a Figura 30, para o triângulo ABC (ΔABC).

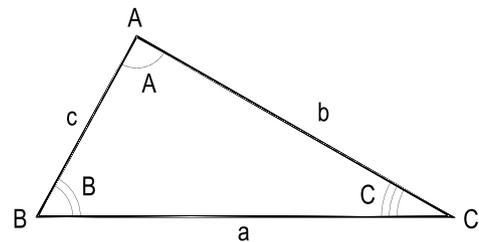


Figura 30

Ceviana de um triângulo é toda reta que passa por um qualquer de seus vértices. Dentre as cevianas relativas a um dos vértices A de um triângulo qualquer ABC , cumpre destacar (Figura 31):

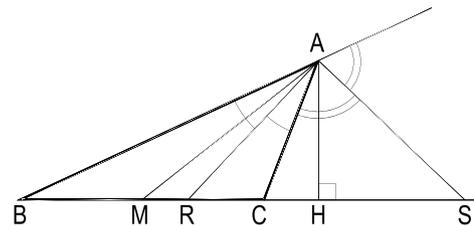


Figura 31

- a mediana AM , que passa pelo ponto médio M do lado oposto BC ;
- a altura AH , que é perpendicular ao lado oposto BC ;
- as bissetrizes AR e AS dos ângulos interno e externo relativos ao vértice considerado que, adiante veremos, são perpendiculares entre si.

32 – Observação

Tal como indicado graficamente na Figura 31, especialmente por questões métricas, é habitual considerar as cevianas pelos segmentos limitados pelo vértice em questão e pelos seus pés, na reta suporte do lado oposto.

33 – Classificações

1. Um triângulo é equilátero (Figura 32), isósceles (Figura 33) ou escaleno (Figura 34) conforme, respectivamente, possua os três lados iguais, dois apenas iguais ou todos desiguais.

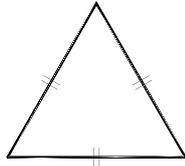


Figura 32



Figura 33

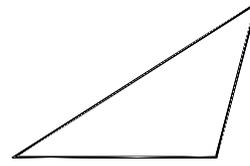


Figura 34

2. Um triângulo é acutângulo (Figura 35), retângulo (Figura 36) ou obtusângulo (Figura 37) conforme, respectivamente, o maior de seus ângulos internos seja agudo, reto ou obtuso. Adiante (número 65.4), provaremos, completando esta classificação, que um triângulo só pode ter, no máximo, um ângulo interno reto ou obtuso.

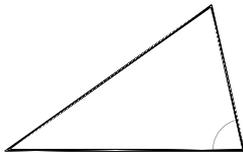


Figura 35

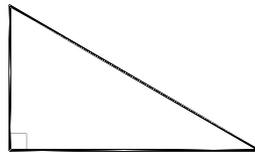


Figura 36

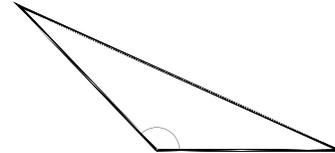


Figura 37

34 – Observações

1. Ao lado diferente de um triângulo isósceles comumente dá-se o nome base do triângulo. Para os demais triângulos, a base pode ser um qualquer dos lados.
2. Os lados que formam o ângulo reto de um triângulo retângulo são denominados catetos e o terceiro hipotenusa do triângulo.

35 – Condição de existência

Para que exista um triângulo é necessário e suficiente que cada um de seus lados seja menor que a soma dos outros dois (número 26).

36 – Observação

Sejam a o maior e c o menor dentre os lados de um triângulo qualquer ABC , podemos (número 35) escrever: $a < b + c$ e, então, $c > a - b$.

Assim, se o maior lado a é menor que a soma dos outros dois, esta propriedade vale para todos e, se o menor lado c é maior que a diferença entre os outros dois, o mesmo se dá para os demais.

Então, para que exista um triângulo é suficiente que qualquer um de seus lados seja menor que a soma e maior que a diferença dos outros dois.

37 – Casos de igualdade de triângulos

Segundo o conceito geral, dois triângulos são iguais quando possuem lados e ângulos respectivamente iguais. Três recíprocas parciais verdadeiras, denominadas casos de igualdade, podem ser formadas. Tais casos, que postulamos, são os seguintes:

Dois triângulos são iguais quando possuem:

1. um lado igual compreendido por dois ângulos respectivamente iguais (Figura 38);

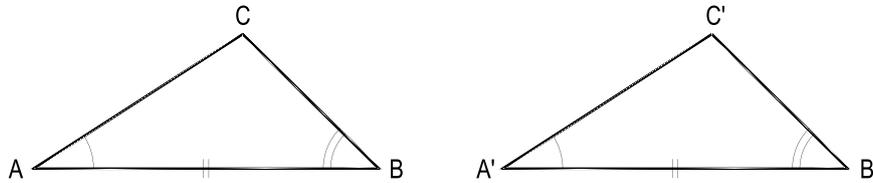


Figura 38

2. um ângulo igual compreendido por dois lados respectivamente iguais (Figura 39);

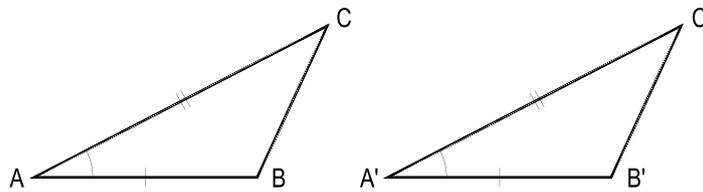


Figura 39

3. os três lados respectivamente iguais (Figura 40).

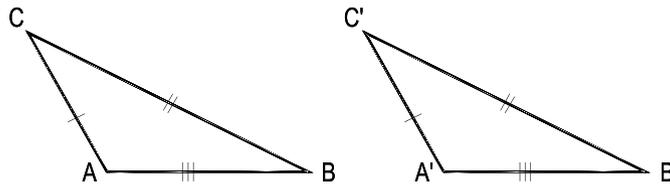


Figura 40

Para os triângulos retângulos, há três casos de igualdade:

1. a hipotenusa e um ângulo agudo respectivamente iguais (Figura 41);

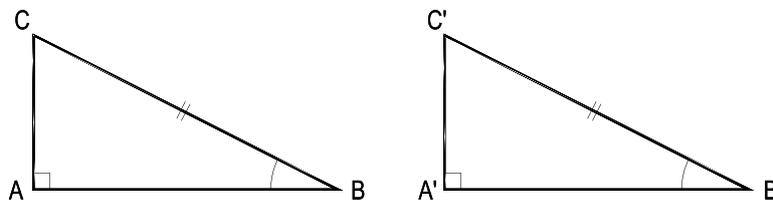


Figura 41

2. a hipotenusa e um dos catetos respectivamente iguais (Figura 42).

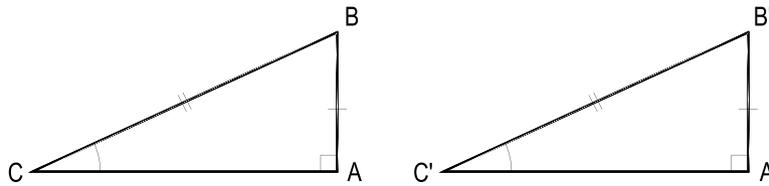


Figura 42

3. um cateto e um ângulo agudo respectivamente iguais (Figura 42).

38 – Mediatriz de um segmento de reta

Por definição, mediatriz de um segmento de reta é a perpendicular ao segmento contendo seu ponto médio.

Na Figura 43, a reta r é a mediatriz do segmento AB.

39 – Teorema

A mediatriz de um segmento de reta é o lugar geométrico dos pontos equidistantes dos extremos do segmento.

Demonstração: Para demonstrar o teorema teremos de provar que todos os pontos da mediatriz, e apenas eles, possuem a propriedade citada.

Sejam, então, um segmento qualquer AB, sua mediatriz r e dois pontos genéricos J e P, o primeiro pertencente e o segundo exterior a r (Figuras 43 e 44).

Porque os triângulos JMA e JMB são iguais (2º caso), podemos escrever:

$$JA = JB \quad (1)$$

Seja T o ponto em que PB corta a mediatriz de AB (Figura 44), temos:

$$TA = TB$$

E como: $PA < PT + TA$ (número 26)

$$PA < PT + TB$$

Logo, $PA \neq PB$ (2)

As relações (1) e (2) demonstram o teorema.

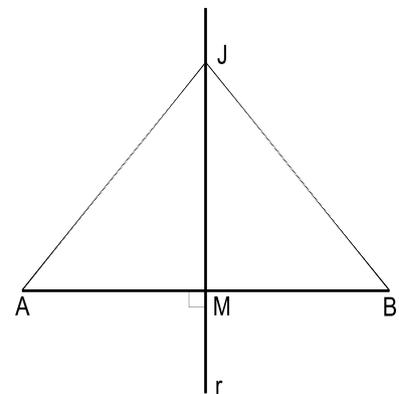


Figura 43

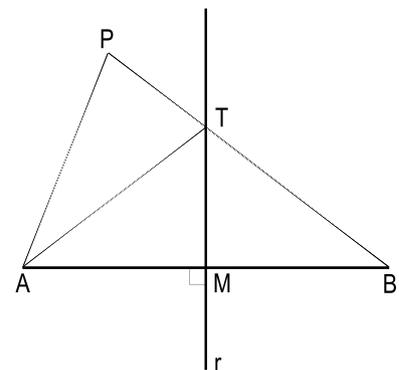


Figura 44

40 – Teorema

Se, de um ponto exterior a uma reta, se traçam a perpendicular e várias oblíquas à reta, limitando-as a seus pés sobre a reta:

1. a perpendicular é menor que qualquer oblíqua;
2. oblíquas que se afastam igualmente do pé da perpendicular são iguais;
3. oblíquas que se afastam desigualmente do pé da perpendicular são desiguais, sendo maior a que mais se afasta.

Demonstração: Sejam A e r o ponto e a reta dados.

Consideremos a perpendicular AM e as oblíquas AB , AC e AD a r , tais que $MB = MC$ e $MD > MC$ (Figura 45).

Prolonguemos AM de um comprimento $MA' = AM$.

Assim, r será mediatriz do segmento AA' e, pelo teorema anterior, temos:

$$AC = CA' \text{ e } AD = DA'$$

Mas, $AA' < AC + CA'$ (número 26).

$$\text{Ou seja: } 2AM < 2AC \quad \therefore \quad AM < AC$$

Igualmente teríamos: $AM < AD$, etc.

O que prova a primeira parte do teorema.

Por outro lado, da própria hipótese, a reta AA' é mediatriz de BC e, por isso mesmo, $AB = AC$ (número 39), ficando, então, demonstrada a segunda parte.

Finalmente, como envolvente e envolvida (número 28), podemos escrever:

$$AD + DA' > AC + CA'$$

$$\text{ou seja, } 2AD > 2AC$$

$$\text{Logo, } AD > AC.$$

O que prova a última parte do teorema.

41 – Observação

As recíprocas são verdadeiras, tendo demonstrações análogas à demonstração do teorema direto.

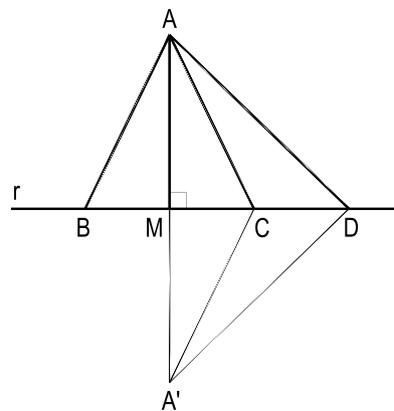


Figura 45

42 – Teorema

A bissetriz de um ângulo é o lugar geométrico dos pontos interiores ao ângulo e equidistantes de seus lados.

Demonstração: Temos de provar que todos os pontos da bissetriz, e apenas eles, possuem a propriedade citada.

Consideremos, então, um ângulo AOB de bissetriz OX e dois pontos genéricos J e P, interiores ao ângulo, o primeiro pertencente e o segundo exterior a OX (Figura 46).

Sejam as perpendiculares JE e JF aos lados de AOB. Os triângulos iguais JOE e JOF (1º caso de triângulos retângulos) fornecem:

$$JE = JF \quad (1)$$

Sejam as perpendiculares PR e PS aos lados de AOB e T o ponto em que PS corta OX.

Temos: $TQ = TS$, decorrente da igualdade dos triângulos retângulos TOQ e TOS (1º caso de triângulos retângulos).

$$\text{Como } PQ > PR \quad (\text{número 40.1})$$

$$\text{e } PT + TQ > PQ \quad (\text{número 26}),$$

$$\text{vem } PT + TQ > PR$$

$$\text{Ou seja: } PT + TS > PR \quad \therefore \quad PS > PR \quad \therefore \quad PS \neq PR \quad (2)$$

As relações (1) e (2) demonstram o teorema.

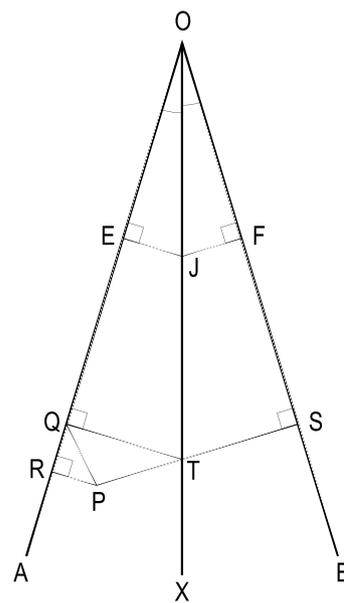


Figura 46

43 – Escólio

O lugar geométrico dos pontos equidistantes de duas retas que se cortam é constituído por duas retas suportes das bissetrizes dos quatro ângulos formados pelas retas secantes.

Cabe observar que essas duas bissetrizes são perpendiculares, já que (Figura 47) pode-se escrever (números 12.2 e 15):

$$4\alpha + 4\beta = 4r \quad \text{ou} \quad \alpha + \beta = 1r$$

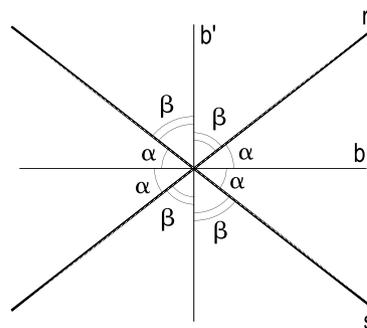


Figura 47

44 – Teorema

Se dois triângulos possuem dois lados respectivamente iguais e os ângulos por eles compreendidos desiguais, seus terceiros lados são diferentes, sendo que ao maior destes ângulos corresponde o maior lado oposto.

Demonstração: Consideremos os triângulos ABC e ABD segundo a hipótese, isto é, tais que dois de seus lados sejam respectivamente iguais ($AC = AD$ e AB comum) e que os ângulos \widehat{BAC} e \widehat{BAD} por eles compreendidos sejam diferentes ($\widehat{BAC} > \widehat{BAD}$).

Tracemos a bissetriz AJ do ângulo \widehat{CAD} e unamos J a D (Figura 48).

Porque os triângulos AJC e AJD são iguais (2º caso), temos:

$$JD = JC \quad (1)$$

Do triângulo BJD vem (número 26):

$$BJ + JD > BD \quad (2)$$

As relações (1) e (2) fornecem:

$$BJ + JC > BD \quad \therefore \quad BC > BD$$

Logo, se dois triângulos...

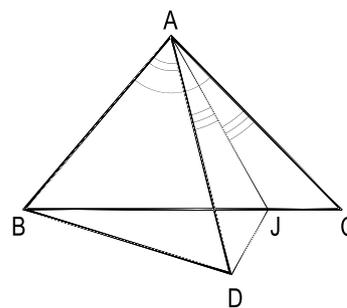


Figura 48

45 – Teorema

Os ângulos internos opostos aos lados iguais de um triângulo isósceles são iguais.

Demonstração: Consideremos o triângulo isósceles ABC, de base BC, e sua altura AH (Figura 49).

Os triângulos retângulos ABH e ACH são iguais por terem hipotenusas iguais e o cateto AH comum (2º caso de triângulos retângulos). E, dessa igualdade, vem:

$$\widehat{B} = \widehat{C}$$

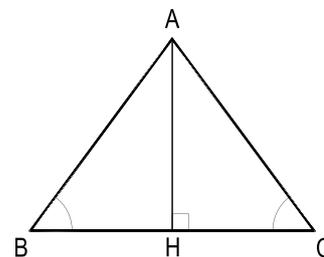


Figura 49

46 – Recíproca

O teorema recíproco é verdadeiro, isto é, todo triângulo que possui dois dos três ângulos internos iguais é isósceles e seus lados iguais são os opostos aos ângulos iguais.

Porque (Figura 49) os triângulos retângulos ABH e ACH, tendo um cateto igual (o comum AH) e um ângulo agudo igual, serão iguais (3º caso de triângulos retângulos). Logo, $AB = AC$.

47 – Corolários (dos teoremas direto e recíproco)

1. Os ângulos externos adjacentes à base de um triângulo isósceles são iguais (Figura 50).
2. Todo triângulo que possui dois dos três ângulos externos iguais é isósceles.
3. Todo triângulo equilátero é equiângulo e reciprocamente (Figura 51).

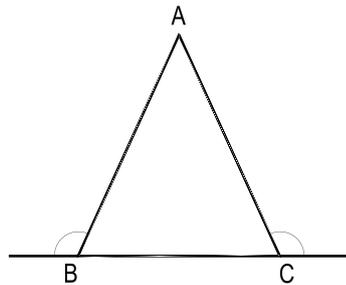


Figura 50

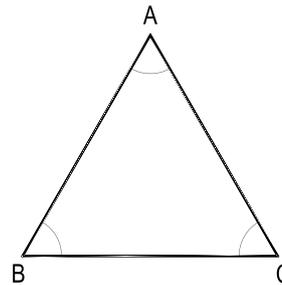


Figura 51

48 – Escólios

1. Em todo triângulo isósceles coincidem a mediatriz, a altura e a mediana relativas à base e a bissetriz interna do ângulo oposto à base (Figura 52).

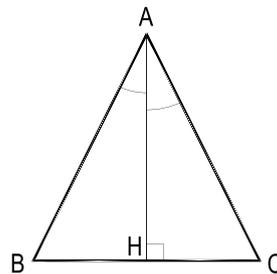


Figura 52

2. Em todo triângulo equilátero coincidem a mediatriz, a altura, a mediana e a bissetriz interna relativas a cada um dos três lados (Figura 53).

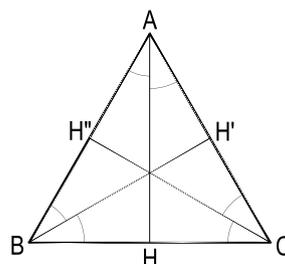


Figura 53

3. Quando, num triângulo, coincidem duas destas cevianas, as demais (relativas a esse mesmo lado) também coincidem e o triângulo é isósceles; quando a coincidência se repete para um segundo lado, repete-se também para o terceiro lado e o triângulo é equilátero.

CAPÍTULO IV

PARALELAS

49 – Definição

Duas retas coplanares são paralelas quando não têm ponto comum.

50 – Teorema

Duas retas coplanares perpendiculares a uma terceira são paralelas.

Demonstração: Duas perpendiculares a uma reta não podem ter ponto comum porque, se o possuísem, teríamos, por ele, duas perpendiculares distintas a uma única reta, o que é absurdo (número 10).

Logo, duas retas...

51 – Postulado de Euclides

Por um ponto exterior a uma reta só se pode traçar uma paralela a ela.

52 – Observação

Decorre, prontamente, que, dadas duas paralelas, toda reta que corta a primeira corta também a segunda. De fato, se assim não fosse, teríamos pelo primeiro ponto de corte duas paralelas distintas à segunda reta dada.

53 – Teorema

Se duas retas são paralelas, toda perpendicular a uma é também perpendicular à outra.

Demonstração: Consideremos as paralelas r e s e a reta t , por hipótese, perpendicular a r .

Pelo ponto em que t corta s , tracemos a perpendicular s' a t . Por serem ambas perpendiculares a t , r e s' serão paralelas (número 50). Mas, então, pelo postulado de Euclides, s' e s devem ser uma única reta.

Logo, se duas retas...

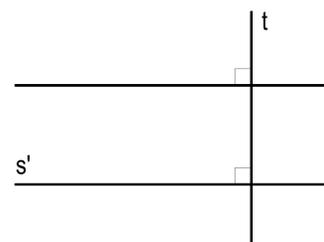


Figura 54

54 – Escólio

Todas as perpendiculares coplanares a uma reta são paralelas entre si.

55 – Definições

Consideremos um sistema de três retas r , s e t , sendo duas retas quaisquer r e s e uma secante, t , a elas (Figura 55).

Dos oito ângulos formados por t e cada uma das outras duas retas (Figura 55) dizemos que são internos os quatro situados entre estas (a , b , m e n) e externos os demais (c , d , p e q).

São colaterais os pares de ângulos situados num dos semiplanos formados pela secante, sendo ambos internos ou externos. Há, assim, dois pares de ângulos colaterais internos (a e m ; b e n) e dois pares de colaterais externos (c e p ; d e q).

São alternos os pares de ângulos não colaterais, sendo ambos internos ou externos. Há, assim, dois pares de alternos internos (a e n ; b e m) e dois pares de alternos externos (c e q ; d e p).

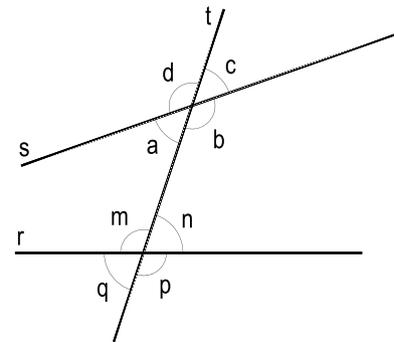


Figura 55

São correspondentes os quatro pares de ângulos não colaterais nem adjacentes situados num dos semiplanos formados pela secante (a e q ; b e p ; c e n ; d e m).

56 – Teorema

Quando duas paralelas são cortadas por uma reta:

1. são iguais os pares de ângulos correspondentes e alternos (internos ou externos);
2. são suplementares os pares de ângulos colaterais (internos ou externos).

Demonstração: Consideremos as paralelas r e s e a secante t que as corta nos pontos A e B (Figura 56).

Os oito ângulos a estudar são, aos pares, iguais como opostos pelo vértice (número 15).

Tracemos pelo ponto M , médio de AB , a perpendicular JL às retas r e s , formando os triângulos AMJ e BML , iguais, por terem hipotenusas e um par de ângulos iguais AMJ e BML (opostos pelo vértice).

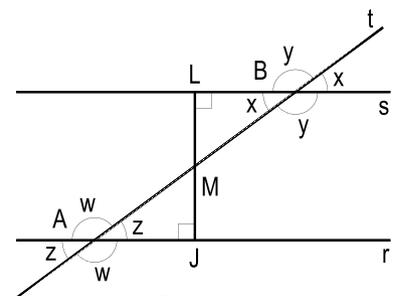


Figura 56

Dessa igualdade decorre que $x = z$

E, como suplementos de x e de z , $y = w$

Logo, como $x + y = 2r$ (número 11), temos:

$$x + w = 2r \quad \text{e} \quad z + y = 2r$$

Conclusões:

1. São iguais os diversos pares de ângulos correspondentes e os alternos, internos ou externos (como x e z ou y e w).
2. São suplementares os diversos pares de ângulos colaterais, internos ou externos (como x e w ou z e y).

57 – Recíprocas

Duas retas são paralelas quando uma secante qualquer a elas dá formação a um par de ângulos:

1. correspondentes iguais;
2. alternos internos iguais;
3. alternos externos iguais;
4. colaterais internos suplementares;
5. colaterais externos suplementares.

Demonstração da primeira recíproca:

Consideremos as retas r e s cortadas pela secante t , de modo tal que os ângulos correspondentes x e z sejam iguais (Figura 57).

Tracemos, por A , r' paralela a s . Como, pelo teorema direto, os ângulos correspondentes x e x' são iguais, concluímos que são iguais z e x' e que, em consequência, as retas r e r' são uma única.

E como r' é paralela a s , fica demonstrada a proposição.

As demais recíprocas parciais, por terem suas demonstrações análogas à da primeira, são, também, verdadeiras.

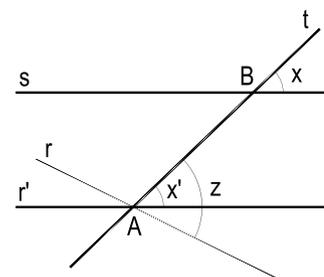


Figura 57

58 – Teorema

Segmentos de retas paralelos compreendidos entre retas paralelas são iguais.

Demonstração: Sejam AB e $A'B'$ os segmentos paralelos situados entre as paralelas r e s (Figura 58).

Unamos os pontos A e B' .

Como alternos internos, respectivamente para as paralelas AB e $A'B'$ e r e s , temos:

$$\alpha = \alpha'$$

$$\beta = \beta'$$

Assim, os triângulos $AB'B$ e $A'B'A$ são iguais (1º caso) e, por isso, AB e $A'B'$ são, também, iguais.

Logo, segmentos de retas paralelos compreendidos entre retas paralelas são iguais.

Abreviadamente, diz-se que paralelas entre paralelas são iguais.

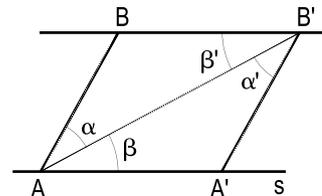


Figura 58

59 – Corolários

1. Dadas duas retas paralelas, todos os pontos de uma delas distam igualmente da outra.

De fato, basta traçar, pelos pontos A, B, C , etc. de uma delas, as perpendiculares AA', BB', CC' , etc. à outra (Figura 59), e observar que, por paralelas entre paralelas, teremos $AA' = BB' = CC' = \dots$

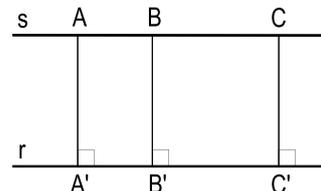


Figura 59

A distância constante dos pontos de uma das paralelas à outra chama-se, então, distância entre as paralelas ou distância de uma à outra.

2. O lugar geométrico dos pontos equidistantes de duas retas paralelas r e s é uma terceira reta t paralela àquelas, situada entre elas, distando igualmente de cada uma delas (Figura 60).
3. O lugar geométrico dos pontos que distam um valor constante d de uma reta fixa r é constituído por duas retas t e t' paralelas a r , distantes de r um valor igual a d (Figura 61).

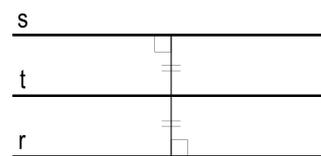


Figura 60



Figura 61

60 – Teorema

Dois ângulos que possuem lados respectivamente paralelos são iguais ou suplementares.

Demonstração: Consideremos os ângulos agudos α e β cujos lados sejam respectivamente paralelos (Figura 62).

Como alternos internos, temos:

$$\alpha = \gamma \text{ e } \gamma = \beta \quad \therefore \quad \alpha = \beta \quad (1)$$

Prolonguemos OA e JC para OA' e JC', formando os ângulos obtusos α' e β' , ainda com lados respectivamente paralelos (Figura 62).

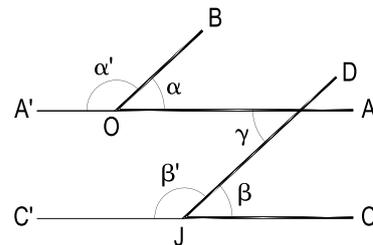


Figura 62

Porque estes ângulos são os suplementos de α e de β , a relação (1) fornece:

$$\alpha' = \beta' \quad (2)$$

Se, finalmente, considerarmos um ângulo agudo α e um obtuso β' , com lados respectivamente paralelos (Figura 62), eles serão suplementares. De fato, basta ver que:

$$\begin{aligned} \alpha + \alpha' &= 2r \quad \text{e} \quad \alpha' = \beta \\ \therefore \quad \alpha + \beta' &= 2r \quad (3) \end{aligned}$$

As relações (1), (2) e (3) demonstram o teorema.

61 – Escólio

Dois ângulos que possuem lados respectivamente paralelos são iguais se são ambos agudos ou ambos obtusos e são suplementares se um é agudo e o outro obtuso.

62 – Teorema

Dois ângulos que possuem lados respectivamente perpendiculares são iguais ou suplementares.

Demonstração: Consideremos, inicialmente, os ângulos agudos $\widehat{A\hat{O}B}$ (α) e $\widehat{C\hat{J}D}$ (β) cujos lados sejam respectivamente perpendiculares (Figura 63) e construamos o ângulo $\widehat{R\hat{J}S}$ (γ) cujos lados sejam perpendiculares aos de CJD. Em consequência, os lados do ângulo agudo γ serão paralelos aos de α . E, por isso (número 61), temos $\alpha = \gamma$. Mas, como $\gamma = \beta$, por terem o mesmo complemento λ , concluímos que $\alpha = \beta$.

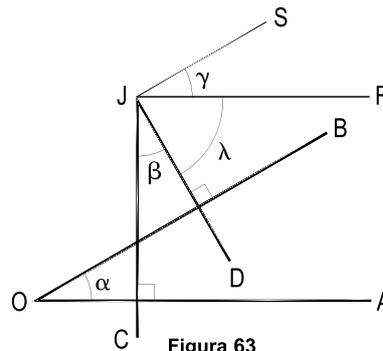


Figura 63

Voltemos a considerar dois ângulos $\widehat{A\hat{O}B}$ e $\widehat{C'\hat{J}D}$, ainda com lados respectivamente perpendiculares, pelo simples prolongamento do lado CJ do segundo para além do vértice, obtendo-se a semirreta JC' (Figura 64).

Sabemos (número 11) que β e θ são suplementares.

E, como acima demonstramos a igualdade entre α e β , fica provado que α e θ são suplementares.

Então, dois ângulos que possuem lados respectivamente perpendiculares são iguais ou suplementares, como se queria demonstrar.

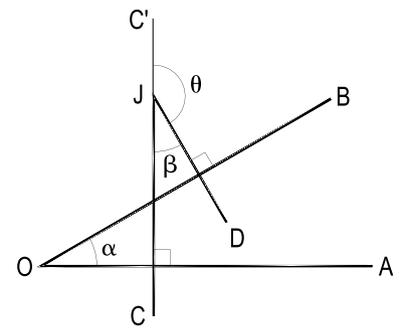


Figura 64

63 – Escólios

1. Dois ângulos que possuem lados respectivamente perpendiculares são iguais se são ambos agudos ou obtusos e são suplementares se um é agudo e o outro obtuso.
2. Quando, de um ponto interior a um ângulo são baixadas as perpendiculares aos seus lados (Figura 65), forma-se outro ângulo, suplementar do primeiro.

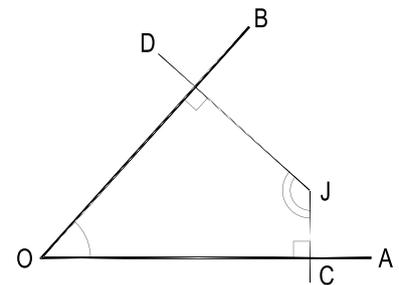


Figura 65

64 – Lei angular de Thales

A soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a dois retos.

Demonstração: Consideremos um triângulo qualquer ABC e tracemos, por seu vértice A, a reta r paralela ao lado oposto (Figura 66).

Como alternos internos, temos:

$$B = B' \quad \text{e} \quad C = C'$$

Mas (número 12.1), $A + B' + C' = 2r$

Logo,

$$A + B + C = 2r$$

Assim, a soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer é igual a dois retos.

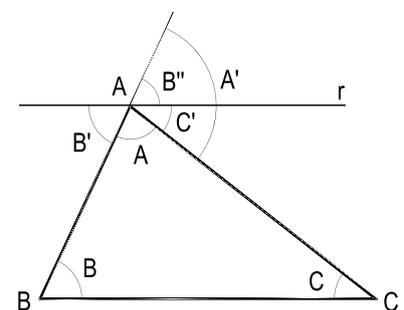


Figura 66

65 – Corolários

1. Cada ângulo externo de um triângulo é igual à soma dos internos não adjacentes. Como o externo $A' = B'' + C' = B' + C' = B + C$ (Figura 66).

2. Cada ângulo interno de um triângulo é o suplemento da soma dos outros dois. Como o interno A e outros dois internos B e C, respectivamente, iguais a B' e C' (Figura 66).
3. Todo triângulo possui, sempre, pelo menos, dois ângulos internos agudos. Porque a soma de seus três ângulos internos, sendo igual a dois retos, não pode admitir, em sendo um deles reto, um segundo também, o que implicaria em anular seu terceiro ângulo interno. E, ainda mais, não pode admitir mais que um ângulo interno obtuso.
4. É o mesmo que afirmar que um triângulo só pode possuir, no máximo, um ângulo interno reto ou obtuso.
5. Os ângulos internos agudos de um triângulo retângulo são complementares.
6. Os ângulos internos de um triângulo equilátero, porque são iguais entre si, valem 60° cada um.
7. Os ângulos externos de um triângulo equilátero valem 120° cada um.

66 – Soma dos ângulos internos de um polígono convexo

Para calcular a soma dos ângulos internos de um polígono convexo qualquer em função de seu gênero n, tracemos, por um de seus vértices, todas as diagonais possíveis, as quais dividem o polígono em triângulos (Figura 67).

Porque todos os lados do polígono, exceto os dois que chegam ao vértice considerado, formam, com esse vértice, triângulos parciais, concluímos que o polígono foi decomposto em (n – 2) triângulos.

E, porque a soma de todos os ângulos internos desses triângulos é a própria soma dos ângulos internos S_i do polígono, aplicando a Lei angular de Thales (número 64), podemos escrever:

$$S_i = (n - 2) 2r$$

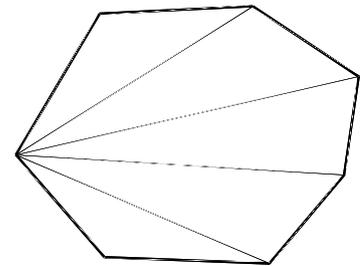


Figura 67

67 – Soma dos ângulos externos de um polígono convexo

Consideremos um polígono convexo de n lados e calculemos a soma S_e de seus ângulos externos.

Como, em cada vértice, os ângulos interno e externo são suplementares, e como são n os vértices do polígono, temos:

$$S_i + S_e = n2r \quad \therefore \quad (n - 2) 2r + S_e = n2r \quad \therefore \quad n2r - 4r + S_e = n2r$$

$$\therefore \quad S_e = 4r$$

68 – Observações

1. A soma dos ângulos internos de um polígono convexo cresce com o seu gênero, isto é, quanto maior for o número de lados do polígono, maior será a soma de seus ângulos internos.
2. A soma dos ângulos externos de um polígono convexo é constante, independentemente, pois, de seu gênero.
3. Para o caso particular em que o polígono convexo é regular, por ser ele equiângulo, seus ângulos internos i e externos e podem ser calculados, em função de seu gênero n , pelas seguintes expressões:

$$S_i = n \cdot i \quad \therefore \quad i = \frac{S_i}{n} \quad \therefore \quad \boxed{i = \frac{(n-2) 2r}{n}}$$

$$S_e = n \cdot e \quad \therefore \quad e = \frac{S_e}{n} \quad \therefore \quad \boxed{e = \frac{4r}{n}}$$

4. Os valores dos ângulos internos dos polígonos convexos regulares crescem com o aumento de seu gênero.

Porque, do item anterior, os valores desses ângulos internos se obtêm pela expressão:

$$i = \frac{(n-2) 2r}{n},$$

$$i = \frac{n2r}{n} - \frac{4r}{n},$$

$$i = 2r - \frac{4r}{n},$$

expressão de valor crescente com o aumento do gênero n .

5. Os valores dos ângulos externos dos polígonos convexos regulares diminuem com o crescimento de seu gênero.

Porque, conforme o item 68.3 acima, a expressão $e = \frac{4r}{n}$, utilizada para seus cálculos, é, evidentemente, decrescente com o aumento do denominador n .

Ou, até, porque sendo esses ângulos externos os suplementos dos internos, seus valores têm de diminuir com o aumento dos internos, na medida em que cresce o gênero do polígono.

CAPÍTULO V

PARALELOGRAMOS E TRAPÉZIOS

69 – Definições

Dentre os quadriláteros convexos, destacamos:

- o paralelogramo, que possui os lados opostos paralelos (Figura 68);
- o retângulo, que possui os quatro ângulos iguais (Figura 69);
- o losango ou rombo, que possui os quatro lados iguais (Figura 70);
- o quadrado, que possui lados e ângulos iguais (Figura 71);
- o trapézio, que possui apenas dois lados opostos paralelos (Figura 72).

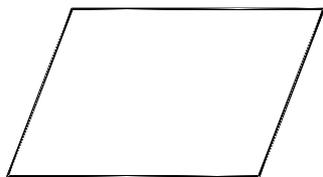


Figura 68

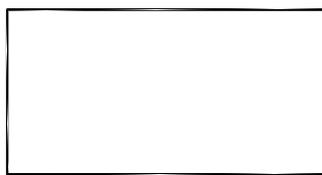


Figura 69

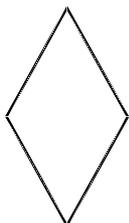


Figura 70

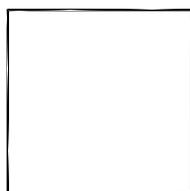


Figura 71



Figura 72

70 – Propriedades gerais dos quadriláteros convexos

1. Possuem duas diagonais.

De fato, para $n = 4$ (número 24), temos:

$$D = \frac{n(n-3)}{2} = \frac{4(1)}{2} = 2$$

2. A soma de seus ângulos internos é igual a 360° .

De fato (número 66), $S_i = (n - 2) 2r = 4r = 360^\circ$

71 – Propriedades gerais dos paralelogramos

1. Os pares de ângulos consecutivos são suplementares, como colaterais internos (Figura 73).
2. Os ângulos opostos são iguais, como ângulos agudos (ou obtusos) com lados respectivamente paralelos (Figura 73).
3. Os lados opostos são iguais, como paralelas entre paralelas (Figura 73).
4. As diagonais cortam-se mutuamente ao meio.

De fato, sendo O o ponto comum às diagonais AC e BD do paralelogramo $ABCD$ (Figura 73), os triângulos ABO e CDO são iguais (1° caso) pois:

$$AB = CD$$

$$\alpha = \beta \text{ (alternos internos) e } \gamma = \theta \text{ (alternos internos)}$$

$$\text{Assim, } OA = OC \text{ e } OB = OD$$

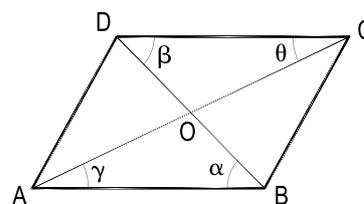


Figura 73

72 – Propriedades recíprocas

1. Todo quadrilátero convexo que possui os pares de ângulos consecutivos suplementares é um paralelogramo.

Demonstração: Sejam A, B, C e D os ângulos internos do quadrilátero convexo $ABCD$ (Figura 74). Como, pela hipótese, $A + B = 2r$, AD e BC são paralelos (número 57.4).

Da mesma forma, como $A + D = 2r$, AB e CD também são paralelos e, assim, $ABCD$ é um paralelogramo.

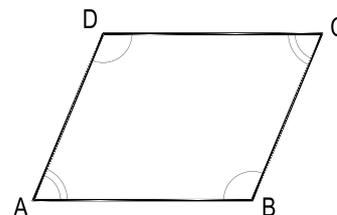


Figura 74

2. Todo quadrilátero convexo que possui os pares de ângulos opostos iguais é um paralelogramo.

Demonstração: Sejam A, B, C e D os ângulos internos do quadrilátero convexo $ABCD$ (Figura 74). Da hipótese, temos: $A = C$ e $B = D$.

E, como (número 70.2) $A + B + C + D = 4r$, vem:

$$2A + 2B = 4r \quad \therefore \quad A + B = 2r$$

$$2A + 2D = 4r \quad \therefore \quad A + D = 2r$$

Assim, porque recaímos na propriedade anterior, $ABCD$ é um paralelogramo.

3. Todo quadrilátero convexo que possui os pares de lados opostos iguais é um paralelogramo.

Demonstração: Para o quadrilátero convexo ABCD (Figura 75), segundo a hipótese, os triângulos ABD e BCD formados pela diagonal BD são iguais, por terem lados respectivamente iguais.

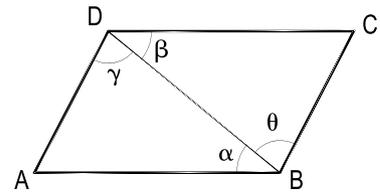


Figura 75

Assim, $\alpha = \beta$ e, em consequência, AB e CD são paralelos (número 57.2). Da mesma forma, $\gamma = \theta$ e, então, AD e BC são também paralelos.

Logo, ABCD é um paralelogramo.

4. Todo quadrilátero convexo que possui um par de lados opostos paralelos e iguais é um paralelogramo.

Demonstração: Sejam AB e CD os lados paralelos e iguais do quadrilátero convexo a ABCD. Tracemos a diagonal BD (Figura 76), formando os triângulos ABD e BCD, iguais, por terem um lado comum BD, um par de lados iguais AB e CD e os ângulos α e β compreendidos iguais (como alternos internos).

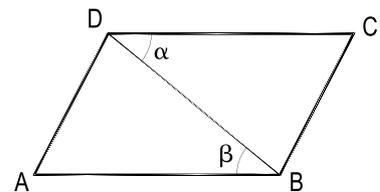


Figura 76

Dessa igualdade vem $AD = BC$ e, porque recaímos na propriedade anterior, ABCD é um paralelogramo.

5. Todo quadrilátero convexo cujas diagonais cortam-se mutuamente ao meio é um paralelogramo.

Demonstração: Seja O o ponto médio comum das diagonais AC e BD do quadrilátero ABCD (Figura 77). Porque α e β são iguais, como opostos pelo vértice, os triângulos AOD e BOC são iguais (2º caso) e, em consequência, $AD = BC$. De forma igual, provaríamos a igualdade dos triângulos AOB e COD e, em consequência, dos lados AB e CD.

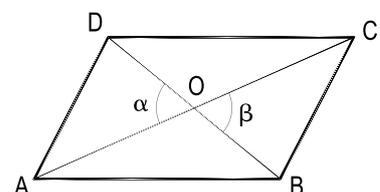


Figura 77

Assim, pela terceira propriedade recíproca, ABCD é um paralelogramo.

73 – Corolários

1. O retângulo, por ser equiângulo, é um paralelogramo (número 72.2).
2. O losango, por ser equilátero, é um paralelogramo (número 72.3).
3. O quadrado, sendo equiângulo e equilátero, é retângulo e losango. E, portanto, um paralelogramo.

74 – Propriedades dos retângulos, dos losangos e dos quadrados

Porque os retângulos, os losangos e os quadrados são paralelogramos particulares, valem, para cada um deles, as propriedades gerais dos paralelogramos (número 71).

Além daquelas, destacamos as seguintes:

1. As diagonais de um retângulo são iguais.

Porque (Figura 78) os triângulos retângulos ABC e ABD , sendo iguais, (2° caso), fornecem $AC = BD$.

2. As diagonais de um losango são perpendiculares entre si e bissetrizes de seus ângulos internos.

Porque A e C , equidistando de B e D , determinam a mediatriz AC do segmento BD (Figura 79).

E, como os triângulos ABD e CBD são isósceles, suas alturas AO e CO são também bissetrizes de seus ângulos internos A e C (número 48.1).

De forma igual, mostraríamos que a diagonal BD é bissetriz dos ângulos internos B e D do losango.

3. Porque os quadrados são, ao mesmo tempo, retângulos e losangos especiais, suas diagonais são iguais, perpendiculares e bissetrizes de seus ângulos internos.

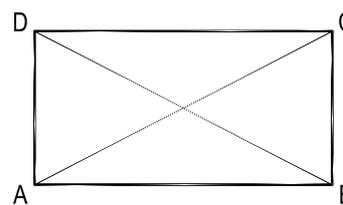


Figura 78

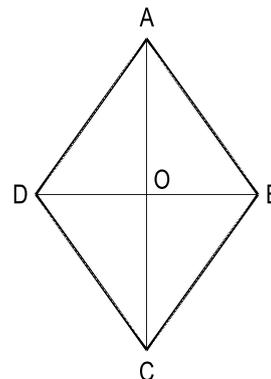


Figura 79

75 – Propriedades recíprocas

1. Todo paralelogramo que possui diagonais iguais é um retângulo.

Porque (Figura 80) são iguais os triângulos ABC e ABD (3° caso) e, em consequência, $\hat{A} = \hat{B}$. Mas, como $\hat{A} + \hat{B} = 2r$, vem $\hat{A} = \hat{B} = 1r$. Da mesma forma, chegaríamos a $\hat{C} = \hat{D} = 1r$ e, então, a $\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = \hat{D} = 1r$.

2. Todo paralelogramo que possui diagonais perpendiculares é um losango.

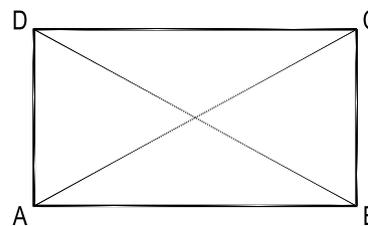


Figura 80

Porque cada uma das diagonais é mediatriz da outra e, em consequência, os quatro lados do paralelogramo são iguais, já que são, aos pares, consecutivamente iguais.

3. Todo paralelogramo cujas diagonais são bissetrizes de seus ângulos internos é um losango.

Porque, (Figura 81), são isósceles e iguais os triângulos ABD e CBD (já que os ângulos opostos A e C são iguais) e, em consequência, temos: $AB = BC = CD = DA$.

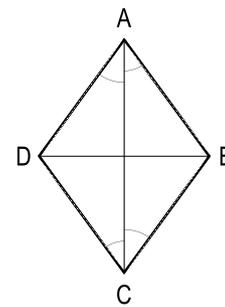


Figura 81

4. Todo paralelogramo que possui diagonais perpendiculares e iguais é um quadrado.

Porque é, ao mesmo tempo, losango e retângulo.

5. Todo paralelogramo cujas diagonais são iguais e bissetrizes de seus ângulos internos é um quadrado.

Porque é, ao mesmo tempo, retângulo e losango.

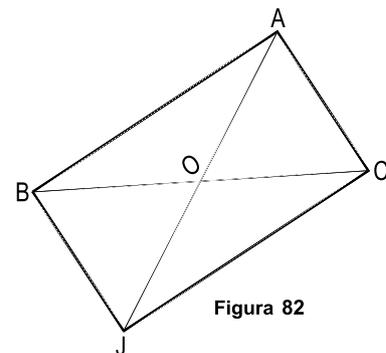


Figura 82

76 – Propriedade exclusiva dos triângulos retângulos

Em todos os triângulos retângulos, e apenas neles, a mediana relativa ao maior lado vale a metade dele.

Demonstração: Consideremos o triângulo retângulo ABC, de hipotenusa BC, e tracemos as paralelas aos catetos, por B e C, formando o retângulo ABJC, (Figura 82), cujas diagonais cortam-se em O.

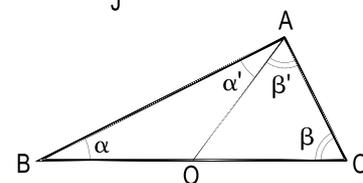


Figura 83

Porque $AO = BO = OC$ (números 71.4 e 74.1), fica provado que a mediana AO relativa à hipotenusa (maior lado) vale a metade desta.

Reciprocamente, consideremos um triângulo ABC, (Figura 83), tal que a mediana AO, relativa ao maior lado, valha a metade deste lado, isto é, tal que $AO = BO = OC$ e provemos que ele é retângulo em A. Porque os triângulos OBA e OCA são, por hipótese, isósceles, temos $\alpha = \alpha'$ e $\beta = \beta'$ (número 45). E, pela Lei angular de Thales (número 64):

$$\begin{aligned} \alpha + \alpha' + \beta' + \beta &= 2r \quad \therefore \quad 2\alpha' + 2\beta' = 2r \\ \therefore \quad \alpha' + \beta' &= r \quad \therefore \quad \boxed{A = 1r} \end{aligned}$$

77 – Escólio

A mediana relativa à hipotenusa de um triângulo retângulo divide-o em dois triângulos isósceles cujas bases são os catetos (Figura 83).

78 – Centro de uma figura

Diz-se que um ponto é o centro de uma figura, quando todos os segmentos que contêm esse ponto e que têm seus extremos sobre a periferia da figura têm esse ponto para médio.

79 – Teorema

O ponto comum às diagonais de um paralelogramo é o seu centro.

Demonstração: Seja O o ponto de concurso das diagonais de um paralelogramo ABCD (Figura 84).

Para provar que O é o centro do paralelogramo, basta provar que um segmento RS genérico, limitado à periferia da figura e pertencente a O, tem esse ponto para médio.

Como,

$$\alpha = \beta \text{ (opostos pelo vértice)}$$

$$\gamma = \theta \text{ (alternos internos)}$$

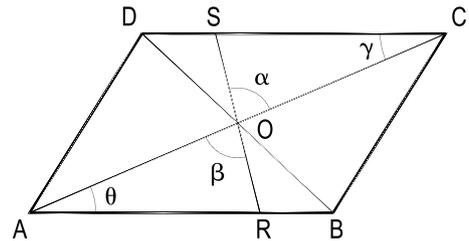
$$AO = OC \text{ (metades de AC)}$$


Figura 84

concluimos que os triângulos ARO e CSO são iguais (1º caso) e, em consequência, que $RO = OS$.

Logo, o ponto comum...

80 – Escólio

O ponto comum às diagonais de um retângulo, de um losango ou de um quadrado é o centro de tal quadrilátero (Figuras 85 e 86).

81 – Observações

1. O centro do losango equidista de seus quatro lados. Porque, (Figura 85), ele é o ponto comum às bissetrizes de seus ângulos internos.
2. O centro do quadrado equidista de seus quatro lados. Porque, (Figura 86), ele é um losango particular. Essa distância é igual à metade do lado do quadrado.

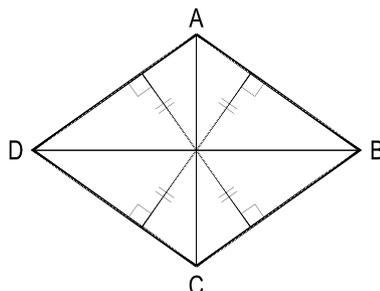


Figura 85

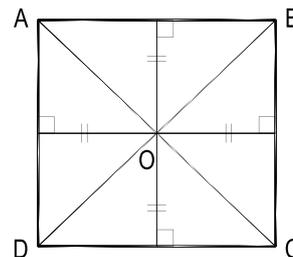


Figura 86

82 – Trapézios

Os lados paralelos denominam-se bases e a distância entre eles altura do trapézio (h , na Figura 87).

Os trapézios classificam-se em isósceles (Figura 88) ou escalenos (Figura 89), conforme, respectivamente, seus lados oblíquos sejam ou não iguais.

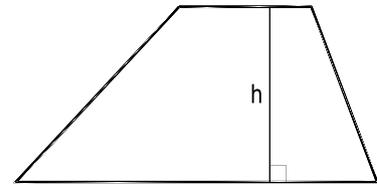


Figura 87

Quando um dos lados não paralelos é perpendicular às bases (Figura 90), diz-se que o trapézio é retângulo.

Evidentemente, todo trapézio retângulo é escaleno.

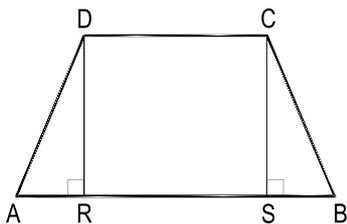


Figura 88

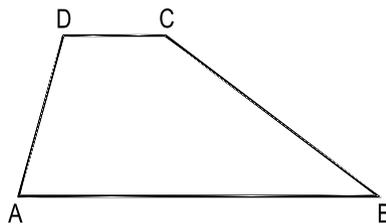


Figura 89

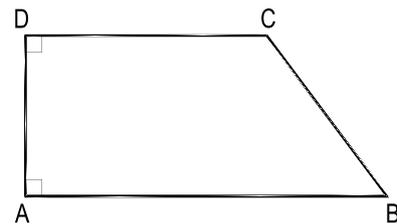


Figura 90

83 – Propriedades dos trapézios isósceles

1. Os lados oblíquos formam com cada uma das bases ângulos iguais.

Porque (Figura 88), os triângulos ARD e BSC , tendo hipotenusas e um par de catetos iguais, são iguais (2º caso), o que obriga a igualdade dos ângulos internos A e B .

E, como suplementos desses ângulos (colaterais internos), vem $C = D$ (Figura 88).

2. As diagonais são iguais.

Porque os triângulos ABC e ABD – tendo um lado comum (AB), um par de lados iguais (BC e AD) e os ângulos compreendidos iguais (A e B) – são iguais (2º caso).

E, em consequência, $AC = BD$ (Figura 91).

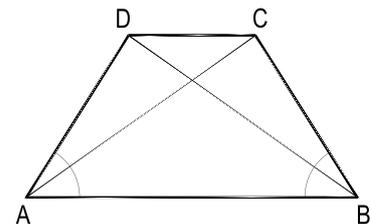


Figura 91

84 – Definições

Base média de um trapézio qualquer é o segmento formado pelos pontos médios de seus lados oblíquos (XY , na Figura 92).

Mediana de Euler de um trapézio qualquer é o segmento formado pelos pontos médios de suas diagonais (ZW , na Figura 92).

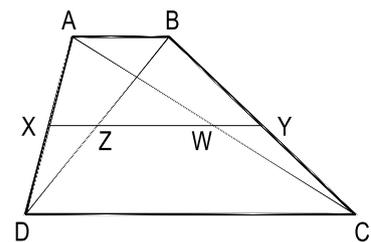


Figura 92

Adiante veremos que a definição é válida para todo quadrilátero, mesmo os não convexos.

85 – Lema

A reta que passa pelo ponto médio de um dos lados de um triângulo e que é paralela a um segundo contém o ponto médio do terceiro e mede, entre os lados, a metade do lado a que é paralela.

Demonstração: Consideremos um triângulo qualquer ABC e a paralela MN traçada, pelo ponto M, médio de AB, a BC (Figura 93).

Seja NP paralelo a AB.

Do paralelogramo MNPB formado, temos $NP = MB$. Mas como, por hipótese, $AM = MB$, concluímos que $AM = NP$. Assim, são iguais os triângulos AMN e NPC, (1º caso), pois, além daquele par de lados iguais, têm também seus ângulos respectivamente iguais (lados paralelos). Por isso:

$AN = NC$, isto é, N é médio de AC e $MN = PC$.

Mas como $MN = BP$, vem: $MN = BP = PC \quad \therefore \quad MN = \frac{BC}{2}$

Logo, a reta que passa...

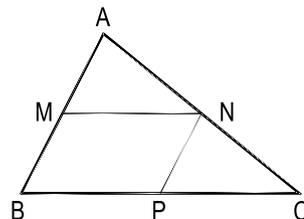


Figura 93

86 – Recíproca

A reta formada pelos pontos médios de dois lados de um triângulo é paralela ao último lado.

Demonstração: Sejam M e N os pontos médios dos lados AB e AC de um triângulo ABC (Figura 93). Se traçarmos, por M, a paralela a BC, pelo lema, provado acima, ela encontrará AC em N, isto é, coincidirá com a reta MN dada, o que prova a proposição.

87 – Teorema

A reta que passa pelo ponto médio de um dos lados oblíquos de um trapézio e que é paralela às bases passa pelo ponto médio do outro lado oblíquo e mede, entre os lados oblíquos, a semissoma das bases do trapézio.

Demonstração: Consideremos um trapézio qualquer ABCD e a paralela MN traçada, pelo ponto M, médio de AD, às bases (Figura 94).

Seja P o ponto em que essa paralela encontra a diagonal BD. Pelo lema (número 85), para o triângulo ABD, sabemos que P é o ponto médio de BD e que $MP = \frac{AB}{2}$ (1).

E, para o triângulo BCD, que, se P é o médio de BD e PN é paralela a CD, N é o médio de BC e $PN = \frac{CD}{2}$ (2).

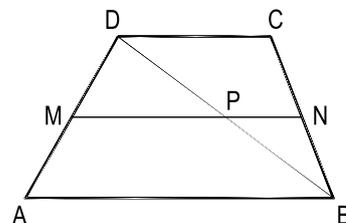


Figura 94

Somando, membro a membro, as relações (1) e (2), temos:

$$MP + PN = \frac{AB}{2} + \frac{CD}{2} \quad \therefore \quad \boxed{MN = \frac{AB + CD}{2}}$$

Logo, a reta que passa...

88 – Escólios

1. A base média de um trapézio é paralela e equidistante de suas bases.
2. O comprimento da base média é função exclusiva das bases do trapézio.

De fato, designando por b_m , B e b respectivamente a base média, a maior e a menor, temos:

$$\boxed{b_m = \frac{B + b}{2}}$$

Ou seja, a base média é igual à média aritmética das bases do trapézio e, então, seu comprimento é função exclusiva destas.

89 – Teorema

A mediana de Euler de um trapézio qualquer é paralela às bases e vale a semidiferença de suas bases.

Demonstração: Consideremos um trapézio qualquer ABCD e os pontos médios P e Q de suas diagonais (Figura 95).

Sendo M o ponto médio do lado AD, MP é paralelo ao lado DC do triângulo ACD (número 86).

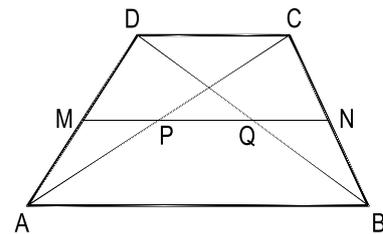


Figura 95

Da mesma forma, no triângulo ABD, MQ é paralelo a AB. Mas, se MP e MQ são paralelos às bases do trapézio, os pontos M, P e Q são colineares, ou seja, a mediana de Euler PQ é paralela às bases do trapézio.

Para os triângulos ABD e ACD, respectivamente, o lema (número 85) fornece:

$$MQ = \frac{AB}{2}$$

$$MP = \frac{CD}{2}$$

Subtraindo, membro a membro, vem: $MQ - MP = \frac{AB}{2} - \frac{CD}{2}$

$$\therefore \quad \boxed{PQ = \frac{AB - CD}{2}}$$

Logo, a mediana de Euler de um trapézio é paralela às bases e vale a semidiferença entre elas.

90 – Escólios

1. O comprimento da mediana de Euler de um trapézio é função exclusiva de suas bases.

De fato, designando por m , B e b , respectivamente, a mediana e cada uma das bases, temos:

$$m = \frac{B + b}{2}$$

2. As bases de um trapézio podem ser calculadas a partir de sua base média e de sua mediana de Euler. Vejamos:

$$b_m = \frac{B + b}{2} \quad \therefore \quad B + b = 2b_m \quad (1)$$

$$m = \frac{B - b}{2} \quad \therefore \quad B - b = 2m \quad (2)$$

Somando e subtraindo, membro a membro, as relações (1) e (2), temos:

$$2B = 2b_m + 2m \quad \therefore \quad B = b_m + m$$

$$2b = 2b_m - 2m \quad \therefore \quad b = b_m - m$$

Ou seja, para qualquer trapézio, a base maior é igual à soma de sua base média e de sua mediana de Euler. E sua base menor é igual à diferença entre sua base média e sua mediana de Euler.

91 – Teorema

Os pontos médios dos lados de qualquer quadrilátero são vértices de um paralelogramo.

Demonstração: Consideremos um quadrilátero convexo qualquer $ABCD$ e os pontos M , N , P e Q , médios de seus lados (Figura 96), assim como suas diagonais AC e BD .

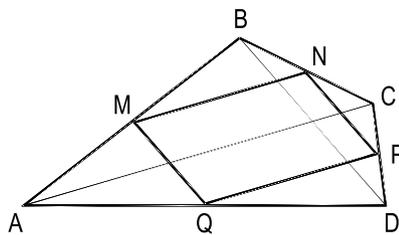


Figura 96

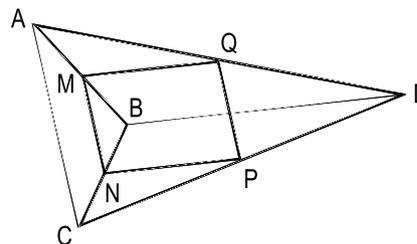


Figura 97

Nos triângulos ABC e ACD , MN e PQ são paralelos entre si, por o serem à diagonal AC (número 86). Da mesma forma, nos triângulos ABD e CBD , são paralelos MQ e NP , por serem paralelos à diagonal BD . E, então, $MNPQ$ é um paralelogramo.

Observe-se que o teorema persiste válido mesmo quando o quadrilátero $ABCD$ é côncavo ou entrecruzado, (Figura 97), com a mesma demonstração.

92 – Corolários

1. Quando as diagonais do quadrilátero são perpendiculares, os pontos médios de seus lados são vértices de um retângulo (Figura 98).

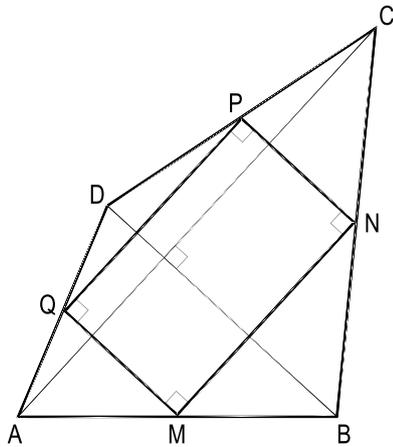


Figura 98

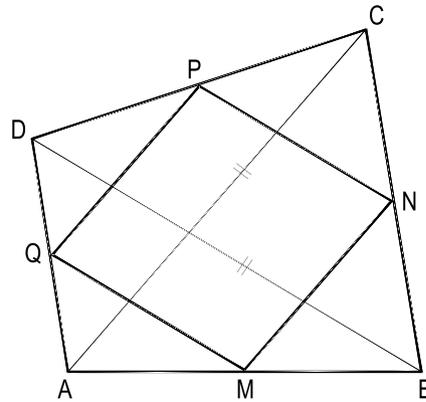


Figura 99

2. Quando as diagonais do quadrilátero são iguais, os pontos médios de seus lados são vértices de um losango (Figura 99).
3. Quando as diagonais do quadrilátero são perpendiculares e iguais, os pontos médios de seus lados são vértices de um quadrado (Figura 100).
4. Os pontos médios dos lados de um paralelogramo qualquer são vértices de outro paralelogramo.

Porque, para um paralelogramo genérico (Figura 101), as diagonais são diferentes e oblíquas entre si.

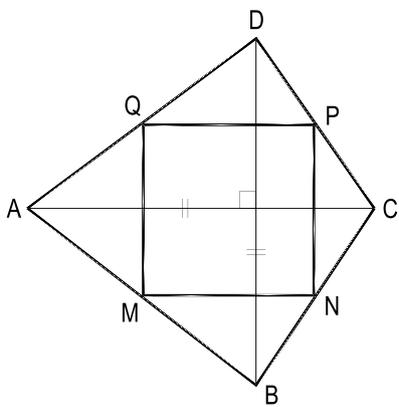


Figura 100

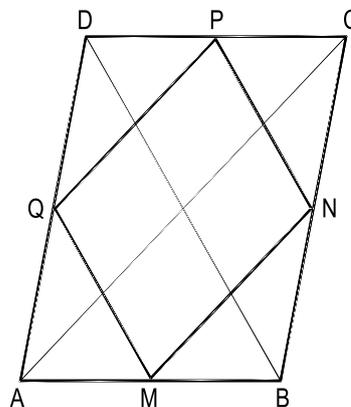


Figura 101

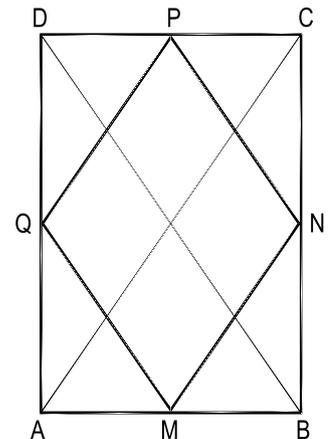


Figura 102

5. Os pontos médios dos lados de um retângulo são vértices de um losango (Figura 102).

Porque o quadrilátero assim formado terá seus lados iguais às metades das diagonais (iguais) do retângulo.

6. Os pontos médios dos lados de um losango são vértices de um retângulo (Figura 103).
7. Os pontos médios dos lados de um quadrado são vértices de outro quadrado.

Aliás, o quadrado formado por esses pontos médios tem lados iguais às metades das diagonais daquele (Figura 104).

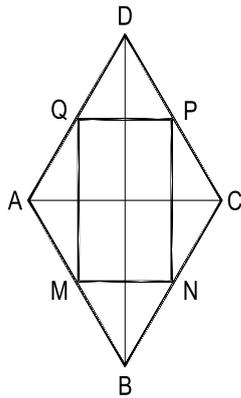


Figura 103

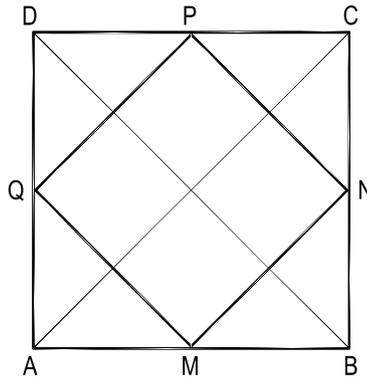


Figura 104

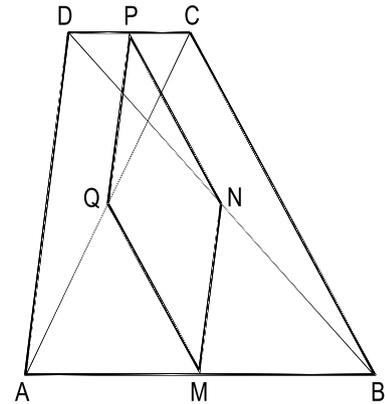


Figura 105

8. Os pontos médios das diagonais e das bases de um trapézio escaleno são vértices de um paralelogramo (Figura 105).
9. Os pontos médios dos lados de um trapézio isósceles são vértices de um losango (Figura 106).
10. Os pontos médios das diagonais e das bases de um trapézio isósceles são vértices de um losango (Figura 107).
11. No caso particular em que as diagonais de um trapézio isósceles sejam perpendiculares, os pontos médios de seus lados e de suas bases são vértices de um quadrado (Figura 108).

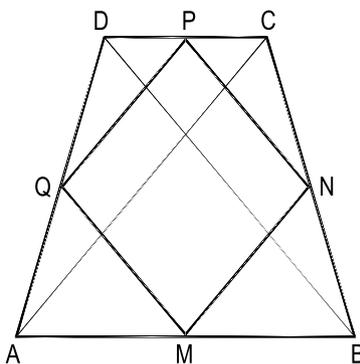


Figura 106

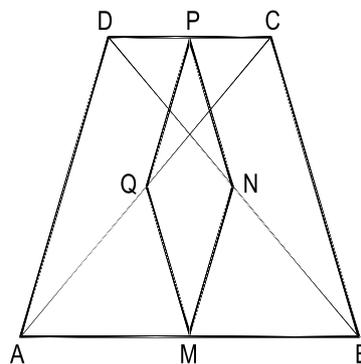


Figura 107

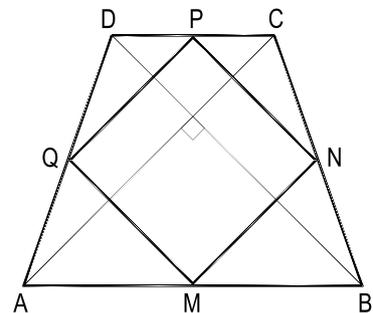


Figura 108

CAPÍTULO VI

CÍRCULO

93 – Definições

- Circunferência é a curva plana, cujos pontos distam um valor constante de um ponto fixo do seu plano. Tal ponto (O, na Figura 109) é o centro da curva e os segmentos, como AO, na Figura 109, que unem a pontos da curva são seus raios.
- Círculo é a porção do plano interior a uma circunferência.
- Embora a precisa distinção entre círculo e circunferência de círculo, porque esta última denominação é também frequentemente adotada como sinônimo de linha limítrofe de figuras curvas, neste trabalho utilizaremos comumente a palavra círculo como referência não só à superfície que lhe corresponde, como à linha que a delimita.
- Arco é toda porção AB de uma circunferência limitada por dois quaisquer de seus pontos (Figura 109).
- Corda é todo segmento de reta formado por dois pontos A e B da circunferência (Figura 109).
- Quando se considera uma corda e um arco de mesmos extremos, diz-se que a corda subtende o arco e que o arco é subtendido pela corda. Assim são a corda e o arco AB, na Figura 109.
- Flecha, relativa a uma corda ou a um arco, é a porção da mediatriz da corda considerada limitada entre ela e o arco subtendido, como MN, na Figura 109.
- Diâmetro é toda corda EF, que passa pelo centro O do círculo (Figura 109). Todos os diâmetros de um mesmo círculo são iguais entre si, por valerem o dobro de seu raio.
- Os pontos extremos de um diâmetro são ditos diametralmente opostos (como E e F, na Figura 109).
- Todo diâmetro divide uma circunferência e seu círculo em duas partes iguais, denominadas, respectivamente, semicircunferências e semicírculos.

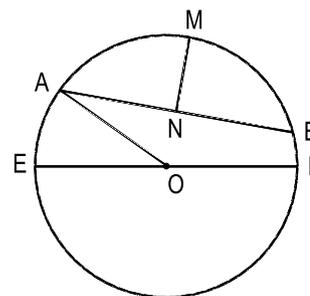


Figura 109

- Ângulo central é todo ângulo formado por dois raios, como AOB, na Figura 110.
- Setor circular é a porção do círculo limitada por dois raios e pelo arco que une seus extremos, como a porção AOB hachurada na Figura 110.
- Segmento circular é a porção do plano limitada por uma corda e pelo arco por ela subtendido, como a hachurada, limitada pela corda EF na Figura 110.
- Um segmento circular especial é cada um dos obtidos quando uma corda limítrofe (MN, na Figura 110) é um diâmetro. Nesse caso, cada segmento circular formado é um semicírculo.
- Circunferências, ou círculos, que tenham o mesmo centro são ditas(os) concêntricas(os).
- Coroa circular é a porção do plano limitada por duas circunferências concêntricas, como a indicada por hachuras na Figura 111. A distância d entre as duas circunferências, medida sobre a reta suporte de um diâmetro da maior circunferência, é designada largura da coroa.
- Setor de coroa circular é a parte de uma coroa circular compreendida entre dois raios da maior de suas circunferências, como a porção $ABB'A'$ da Figura 111.

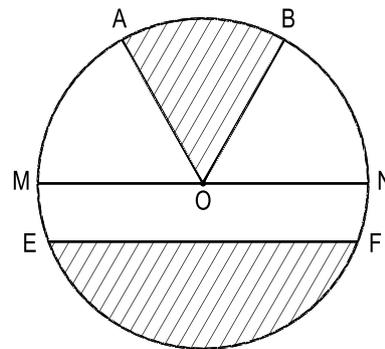


Figura 110

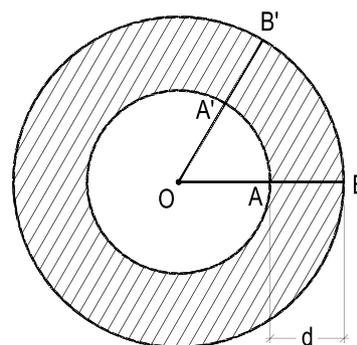


Figura 111

94 – Observações

1. Quando se considera uma corda de um círculo, seus extremos dão formação a dois arcos (que completam o círculo). Ao dizermos arco subtendido pela corda, estaremos nos referindo, salvo menção contrária, ao menor dos dois.

Analogamente, quando se considera um par de raios, ou uma corda, formam-se, respectivamente, dois setores ou dois segmentos circulares, mas, a não ser que se faça restrição contrária, estaremos nos referindo ao menor dos dois elementos formados.

2. Porque um círculo fica determinado em grandeza e posição pelo conhecimento da posição de seu centro e do valor de seu raio, costuma-se indicar um círculo de centro O e raio R pelo símbolo (O, R) .

Por vezes, quando vários círculos estão em jogo, numa mesma questão, pode-se fazer referência a eles, apenas por seus centros.

95 – Teorema

O lugar geométrico dos pontos que distam um valor constante de um ponto fixo é a circunferência que tem esse ponto para centro e raio igual àquele valor.

Demonstração: Consideremos a circunferência de centro O e raio igual ao valor constante dado (Figura 112), assim como dois pontos genéricos A e B respectivamente situados em seu exterior e em seu interior.

Da própria definição, todos os pontos da circunferência atendem à condição imposta. Ao contrário, os pontos não pertencentes à linha distam de seu centro valores desiguais àquele dado.

De fato, considerando as retas OA e OB e os pontos A' e B' em que elas cortam a circunferência (Figura 112), porque A' se situa entre O e A e B entre O e B' , temos:

$$OA = OA' + A'A \quad \therefore \quad OA > OA' \quad \therefore \quad OA \neq OA'$$

$$OB = OB' - BB' \quad \therefore \quad OB < OB' \quad \therefore \quad OB \neq OB'$$

Logo, o lugar geométrico dos pontos que distam um valor constante de um ponto fixo é a circunferência que tem esse ponto para centro e o raio igual àquele valor.

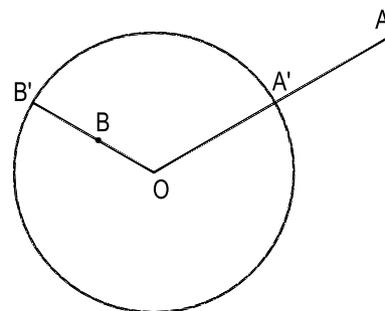


Figura 112

96 – Teorema

O diâmetro é a maior corda do círculo.

Demonstração: Consideremos o círculo (O, R) , uma qualquer de suas cordas EF e um diâmetro AB (Figura 113). Unamos o centro aos extremos da corda EF , formando o triângulo OEF , para o qual podemos escrever (número 35):

$$OE + OF > EF \quad \therefore \quad R + R > EF \quad \therefore \quad AB > EF$$

Como EF é uma corda genérica, a conclusão vale para toda corda que não seus diâmetros.

Logo, o diâmetro é a maior corda do círculo.

97 – Definição

A distância de um ponto a um círculo se mede pelo menor segmento que se pode formar com o ponto dado e com um ponto do círculo.

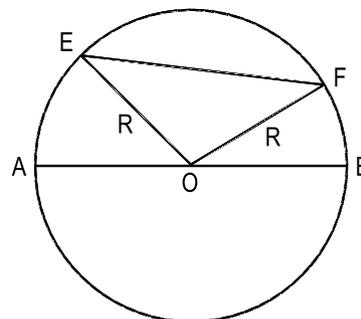


Figura 113

98 – Teorema

De todos os pontos de um círculo, o mais próximo e o mais afastado de um ponto a ele não pertencente situam-se sobre a reta formada por esse ponto e pelo centro do círculo.

Demonstração:

1ª hipótese: O ponto dado P é exterior ao círculo (Figura 114).

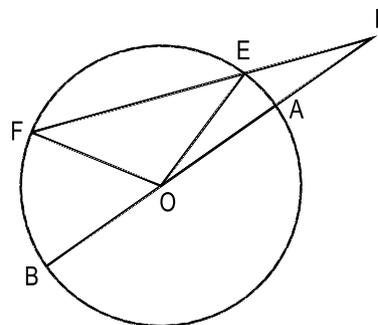


Figura 114

Unamos P ao centro, obtendo os pontos A e B do círculo.

Consideremos, ainda, dois pontos E e F genéricos do círculo, colineares com P.

Para os triângulos POE e POF, podemos escrever:

$$PA + AO < PE + OE \quad \therefore \quad PA + OE < PE + OE \quad \therefore \quad PA < PE \quad (1)$$

$$PO + OF > PF \quad \therefore \quad PO + OB > PF \quad \therefore \quad PB > PF \quad (2)$$

2ª hipótese: O ponto dado P é interior ao círculo (Figura 115).

Voltemos a considerar os pontos A e B extremos do diâmetro que contém P e dois pontos E e F genéricos do círculo, alinhados com P.

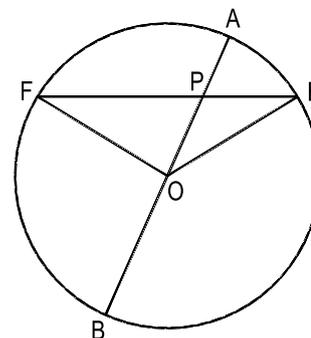


Figura 115

Para os triângulos POE e POF, temos:

$$OE - OP < PE \quad \therefore \quad OA - OP < PE \quad \therefore \quad PA < PE \quad (3)$$

$$PO + OF > PF \quad \therefore \quad PO + OB > PF \quad \therefore \quad PB > PF \quad (4)$$

As relações (1), (2), (3) e (4) demonstram o teorema.

99 – Corolários

1. Para medir a distância de um ponto a um círculo, basta uni-lo ao centro e tomar, dos dois pontos em que esta reta corta o círculo, o mais próximo do ponto dado. O segmento assim formado medirá a distância procurada (PA, em ambas as Figuras 114 e 115).
2. Para obter o ponto de um círculo que mais se afaste de um ponto P genérico, basta unir P ao seu centro do círculo e tomar o extremo do diâmetro, assim criado, mais afastado de P (o ponto B, nas Figuras 114 e 115).

3. O lugar geométrico dos pontos P que distam um comprimento constante K de um círculo (O, R) dado é:
- constituído por um par de círculos concêntricos (O, R+K) e (O, R-K), se $K < R$ (Figura 116);
 - constituído por um círculo (O, 2R) concêntrico com o dado e pelo seu centro O, se $K = R$ (Figura 117);
 - um círculo (O, R+K), concêntrico com o dado, se $K > R$ (Figura 118).

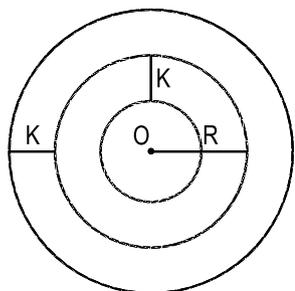


Figura 116

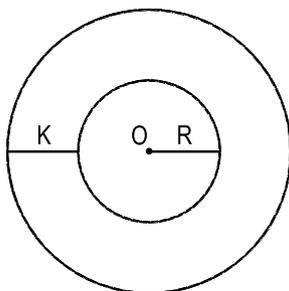


Figura 117

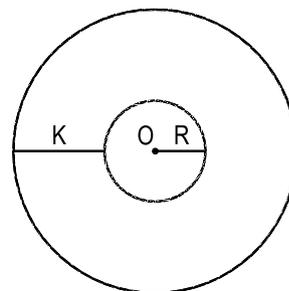


Figura 118

100 – Escólio

Os pontos de um círculo mais próximo e mais afastado de um ponto dado são diametralmente opostos.

101 – Teorema

Em todo círculo, o raio perpendicular a uma corda divide tanto a corda quanto o arco por ela subtendido em duas partes iguais.

Demonstração: Seja o raio OM perpendicular à corda AB do círculo (O, R) e unamos O a A e a B (Figura 119).

Porque o triângulo OAB é isósceles, o suporte OM de sua altura OM é também mediatriz da base AB e bissetriz do ângulo interno (AOB) (número 48.1). Então, se girarmos o setor OAM, em torno de OM, ele virá a coincidir com o setor OMB.

Logo, são iguais os arcos AM e MB, assim como os segmentos em que OM divide a corda AB.

Logo, o raio perpendicular...

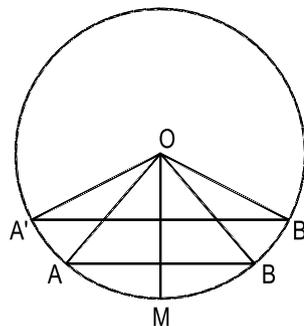


Figura 119

102 – Recíprocas

- O raio que passa pelo ponto médio de uma corda é perpendicular a ela.
- O raio que contém o ponto médio de um arco é perpendicular à corda que o subtende.

As recíprocas têm demonstrações análogas à demonstração do teorema direto.

103 – Corolários

Em um mesmo círculo ou em círculos iguais:

1. ângulos centrais iguais interceptam arcos iguais e reciprocamente;
2. cordas iguais subtendem arcos iguais e reciprocamente;
3. entre dois ângulos centrais diferentes, o maior ângulo intercepta o maior arco e reciprocamente (Figura 119);
4. entre duas cordas diferentes, a maior subtende o maior arco e reciprocamente; como $A'B'$ e AB , na Figura 119;
5. o raio perpendicular a uma corda é bissetriz do ângulo central correspondente à corda considerada, porque é a altura do triângulo isósceles OAB assim formado (Figura 119);
6. reciprocamente, a bissetriz de um ângulo central é perpendicular à corda correspondente ao ângulo considerado;
7. a bissetriz de um ângulo central contém o ponto médio do arco que corresponde a este ângulo (Figura 119);
8. a mediatriz de uma corda qualquer passa pelo centro do círculo e pelos pontos médios dos arcos por ela subtendidos (Figura 120);
9. os pontos médios de uma corda e os dos arcos por ela subtendidos são colineares com o centro do círculo (Figura 120).

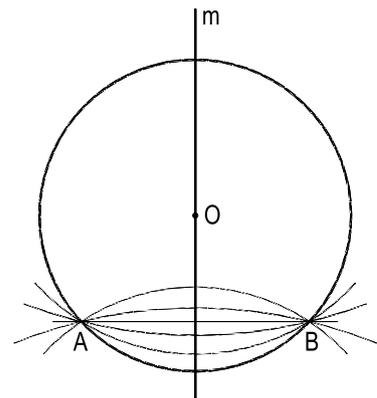


Figura 120

104 – Teorema

O lugar geométrico dos centros dos círculos que passam por dois pontos distintos é a mediatriz do segmento formado por esses dois pontos.

Demonstração: Dados dois pontos distintos A e B , sabe-se (número 39) que a mediatriz m desse segmento é o lugar geométrico dos pontos equidistantes de A e de B .

Assim, todos os pontos de m – e apenas eles (Figura 120) – são centros dos círculos que pertencem a A e B .

105 – Teorema

Por três pontos não colineares passa sempre uma circunferência de círculo e apenas uma.

Demonstração: Consideremos os pontos A, B e C não colineares e as mediatrizes dos segmentos AB e BC (Figura 121) que, por serem perpendiculares a segmentos oblíquos, não podem ser paralelas, cortando-se, então, num certo ponto O.

Tal ponto, por equidistar de A, de B e de C, é centro de uma circunferência que contém os três pontos dados.

Por outro lado, porque todas as circunferências que podem passar pelos pontos dados devem ter seus centros sobre as mediatrizes de AB e de BC (número 104) e devem ter seus centros sobre O, isto é, só podem ser uma única circunferência de centro O e raio OA, o que demonstra o teorema.

Aliás, tal ponto O há de pertencer, também, à mediatriz do terceiro segmento considerado, AC.

Então, por três pontos não colineares passa sempre uma circunferência e apenas uma.

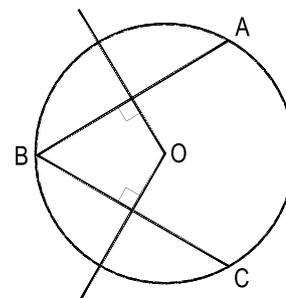


Figura 121

106 – Corolário

Duas circunferências que se cortam o fazem em dois pontos.

De fato, duas circunferências secantes não podem ter mais de dois pontos comuns, pois, se assim fosse, viriam a coincidir.

107 – Escólio

Para determinar graficamente o centro de um círculo dado, basta traçar as mediatrizes de duas cordas não paralelas (Figura 121). O ponto de concurso dessas duas mediatrizes será o centro procurado.

108 – Teorema

Duas cordas paralelas de um círculo determinam, nele, dois arcos iguais.

Demonstração: Sejam AB e CD as cordas paralelas consideradas (Figura 122) e AD e BC os arcos interceptados entre elas.

O raio perpendicular a AB também será perpendicular a CD e seu extremo M será, ao mesmo tempo, médio do arco AB e do arco CD (número 101).

Assim, por subtração, temos, para os arcos AD e BC:

$$MA - MD = MB - MC$$

Ou seja, $AD = BC$.

Logo, duas cordas paralelas...

109 – Escólio

Todo trapézio inscrito num círculo, isto é, que tem seus vértices sobre a circunferência de um mesmo círculo, é isósceles.

Porque (Figura 122), se os arcos AD e BC são iguais, também o serão as cordas AD e BC (número 103.2).

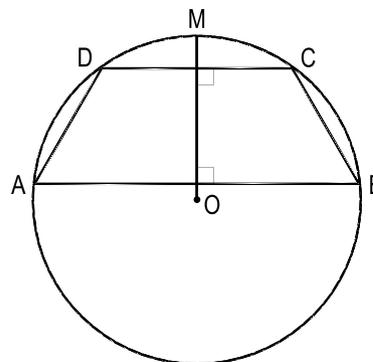


Figura 122

110 – Teorema

Em um mesmo círculo ou em círculos iguais:

1. cordas iguais afastam-se igualmente do centro e reciprocamente;
2. entre duas cordas desiguais, a menor dista mais do centro que a maior e reciprocamente.

Demonstração:

1. Consideremos duas cordas iguais AB e EF de um círculo de centro O (Figura 123) e tracemos as perpendiculares OM e ON a elas.

Porque M e N são os pontos médios das duas cordas (número 101), os triângulos retângulos OMA e ONE são iguais ($OA = OE$ e $MA = NE$).

Assim, $OM = ON$, isto é, as cordas distam igualmente do centro.

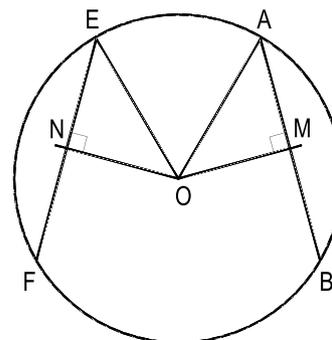


Figura 123

Reciprocamente, se, por hipótese, OM e ON fossem iguais, pela igualdade dos mesmos triângulos chegaríamos a $MA = NE$ e, em consequência, à igualdade das cordas consideradas.

Consideremos, agora, as cordas AB e EF, sendo, por hipótese, EF a menor das duas.

Tracemos a corda E'F' paralela a AB e igual a EF (Figura 124).

Assim fazendo, AB e E'F' serão, ambas, perpendiculares ao raio OJ. Porque o arco E'F' é menor que o arco AB (número 103.4), ON será maior que OM.

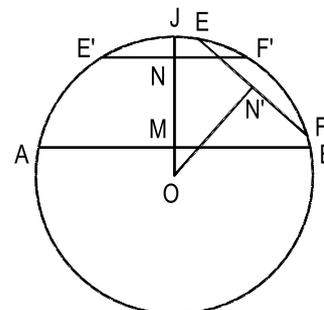


Figura 124

Mas como ON e ON' são iguais (do item anterior), conclui-se que, das duas cordas consideradas, a menor EF dista mais do centro que a maior AB.

Reciprocamente, se admitíssemos $ON' > OM$, ou seja, $ON > OM$, chegaríamos a $E'F' < AB$, ou $EF < AB$, porque o arco EF seria menor que o arco AB.

111 – Escólios

1. Num mesmo círculo, ou em círculos iguais, as cordas crescem conforme diminuem suas distâncias ao centro e, inversamente, diminuem quando aumentam suas distâncias ao centro.
2. Quando a distância é nula, a corda passa a ser um diâmetro, adquirindo seu valor máximo (número 96).

112 – Tangentes ao círculo

Tangente a uma curva, num de seus pontos A , é a posição limite ocupada por uma secante AB quando se fixa o ponto A e se faz o ponto B , descrevendo o arco BA da curva, tender a coincidir com A (Figura 125).

O ponto A é, então, denominado ponto de contato da tangente.

Normal n a uma curva, num de seus pontos, é a perpendicular à tangente t naquele ponto (Figura 125).

Toda tangente a um círculo possui apenas um ponto em comum com ele – o de contato. De fato, basta lembrar que toda secante ao círculo só possui em comum com ele dois pontos e que, quando se passa da secante à tangente, um dos pontos de corte tende ao outro, mantido fixo (Figura 126).

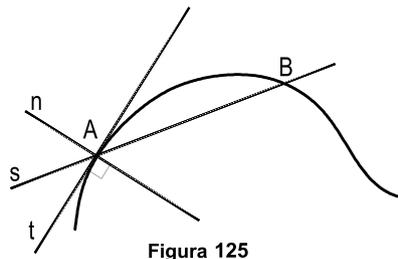


Figura 125

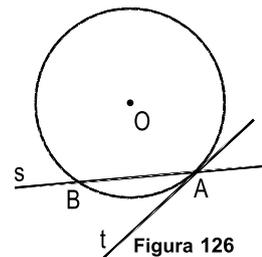


Figura 126

113 – Teorema

A perpendicular a um raio do círculo, traçada por sua extremidade, é a tangente ao círculo nesse ponto.

Demonstração: Seja a reta r perpendicular ao raio OA , do círculo (O, R) , traçada pelo ponto A (Figura 127).

Todos os segmentos OB formados pelo centro do círculo e por pontos B de r não coincidentes com A são oblíquos a r e, por isso mesmo, maiores que o raio OA (número 40), o que acarreta que todos os pontos B de r , exceto A , são exteriores ao círculo.

Assim, r , tendo apenas o ponto A em comum com o círculo, é tangente ao círculo em A , como se queria demonstrar.

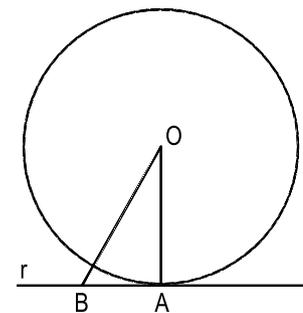


Figura 127

114 – Recíproca

A tangente a um círculo, num de seus pontos, é perpendicular ao raio relativo ao ponto de contato.

Demonstração: Sendo r , por hipótese, tangente ao círculo (O, R) em A (Figura 127), todos os seus pontos B (distintos de A) são exteriores ao círculo e, em consequência, todos os segmentos OB são maiores que OA (número 41).

Assim, OA é perpendicular a r .

115 – Escólio

A normal a um círculo, num de seus pontos, é a reta suporte do raio relativo a esse ponto.

116 – Teorema

O ponto de contato de duas circunferências tangentes pertence à reta formada pelos centros das circunferências.

Demonstração: Consideremos duas circunferências secantes (O, R) e (O', R') e observemos que a reta OO' , formada por seus centros, é a mediatriz da corda AB , formada pelos pontos de corte A e B (Figura 128), pois, tanto O quanto O' equidistam de A e de B .

Fixemos a circunferência (O, R) e deslizemos a outra, de modo tal que O' percorra a reta original OO' (Figura 128), até que as duas circunferências venham a ser tangentes, no ponto T (Figura 129). Durante esse movimento de translação da circunferência (O', R') , a corda comum AB passa por várias posições $A'B'$ (Figura 128), em que seus extremos A' e B' vão se aproximando, até que coincidam na posição final da tangência das duas circunferências (Figura 129), quando A' e B' convertem-se no ponto T de contato das duas curvas.

Observe-se que tudo se passaria exatamente da mesma forma se a translação de (O', R') se desse no sentido oposto, levando as duas circunferências a serem tangentes interiormente (Figura 129).

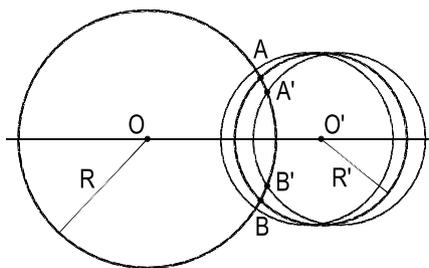


Figura 128

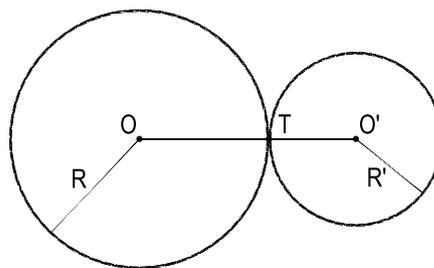
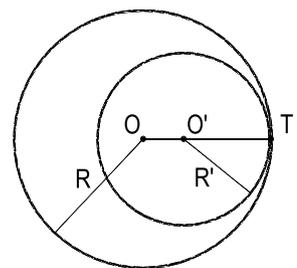


Figura 129



117 – Teorema

Todas as cordas de mesmo comprimento de um círculo são tangentes a um outro círculo concêntrico com o primeiro.

Demonstração: Basta ver que todas as cordas AB , por serem iguais, equidistam do centro do círculo (número 110.1).

Assim, todos os segmentos OM (Figura 130), que medem essas distâncias iguais, são raios de outro círculo concêntrico com o primeiro.

E como todos os segmentos AB são perpendiculares aos diversos raios OM em suas extremidades M (número 114), são todos tangentes ao círculo (O, OM) .

Então, todas as cordas de mesmo comprimento de um círculo são tangentes a um outro círculo, concêntrico com o primeiro.

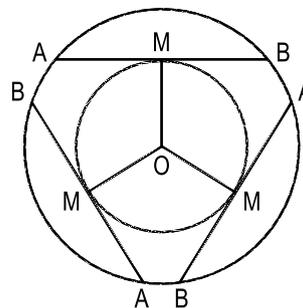


Figura 130

118 – Corolário

O lugar geométrico dos pontos médios das cordas de mesmo comprimento de um círculo é outro círculo concêntrico com o primeiro e tangente àquelas cordas.

119 – Teorema

As tangentes (entenda-se: as porções das tangentes limitadas entre o ponto considerado e seus pontos de contato) traçadas de um ponto exterior a um círculo são iguais.

Demonstração: Sejam JB e JC as tangentes de um ponto J qualquer, exterior a um círculo de centro O e B e C seus pontos de contato (Figura 131).

Porque os raios OB e OC são perpendiculares a essas tangentes (número 114), os triângulos OJB e OJC são retângulos. E são iguais por terem a mesma hipotenusa e um par de catetos iguais (OB e OC).

Dessa igualdade, vem $JB = JC$.

Logo, as tangentes traçadas de um ponto exterior a um círculo são iguais, como se queria demonstrar.

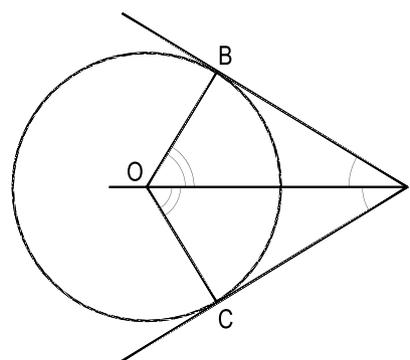


Figura 131

120 – Observações

Ainda como decorrência da igualdade dos triângulos OJB e OJC (Figura 131), pode-se concluir que:

1. A bissetriz do ângulo formado pelas tangentes contém o centro do círculo (porque são iguais os ângulos OJB e OJC – Figura 131).
2. A bissetriz do ângulo formado por dois raios contém o ponto comum às tangentes traçadas pelos extremos desses raios (porque são iguais os ângulos BOJ e COJ – Figura 131).
3. Os pontos de contato das tangentes traçadas por um ponto qualquer são simétricos em relação à reta que une este ponto ao centro do círculo, porque OJ é a mediatriz da corda BC, já que tanto O quanto J equidistam de B e de C (Figura 131).
4. O lugar geométrico dos pontos dos quais se pode traçar tangentes a um círculo dado, medindo um valor fixo, é um outro círculo concêntrico com o primeiro.

De fato, fixado o valor k das tangentes $JB = JC$ ao círculo (O, R) , todos os triângulos retângulos OJB ou OJC (Figura 132) serão iguais por terem os dois catetos respectivamente iguais.

E, por isso, serão iguais todas as hipotenusas OJ, ou seja, ficará constante o valor OJ da distância dos pontos considerados ao centro O do círculo dado.

Assim, o lugar geométrico procurado será o círculo de centro O e raio OJ.

5. O lugar geométrico dos pontos dos quais se vê um círculo dado (O, R) sob um ângulo dado α é um círculo (O, R') concêntrico ao dado. Porque, (Figura 132), a fixação do valor do ângulo α implica na constância do valor das tangentes JB e JC ao círculo (O, R) e, então, de sua hipotenusa OJ, raio do círculo (O, R') , lugar geométrico procurado.

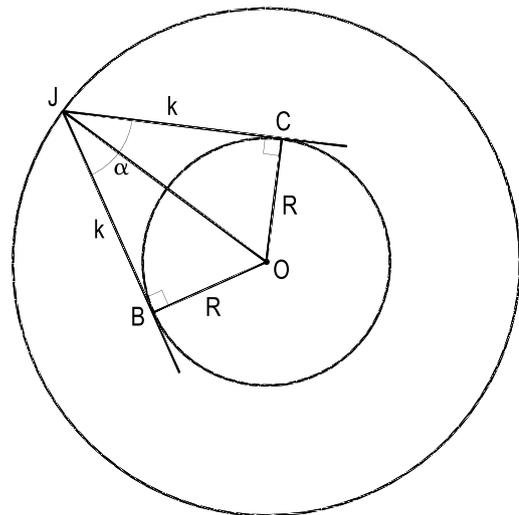


Figura 132

De fato, todos os triângulos retângulos como JOB e JOC (Figura 132) terão um ângulo $\frac{\alpha}{2}$ igual e um cateto R iguais.

6. A fixação do ângulo α , sob o qual se vê um círculo dado (O, R) , implica na igualdade de todos os arcos BC , daquele círculo vistos sob o ângulo α , porque, assim, estarão fixadas as dimensões do quadrilátero $JBOC$ (Figura 132), inclusive do arco BC que ele contém.

121 – Ângulo de duas curvas

Por definição, ângulo de duas curvas secantes é o ângulo formado pelas tangentes a essas curvas no ponto de corte.

Assim, o ângulo dos círculos secantes (O, R) e (O', R') da Figura 133 é medido pelo ângulo α formado entre as tangentes t e t' a esses círculos no ponto A comum às suas circunferências.

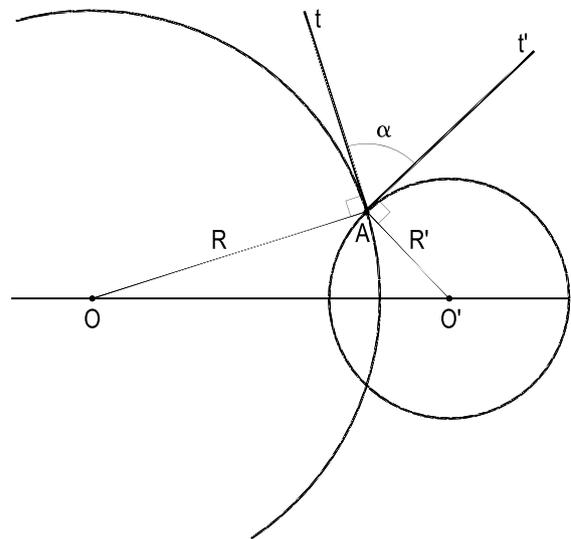


Figura 133

122 – Círculos ortogonais

Por definição, dois círculos são ortogonais quando, sendo secantes, suas tangentes em cada um dos pontos de corte são perpendiculares entre si.

Assim, quando dois círculos são ortogonais (Figura 134):

1. o raio de cada um deles, relativo a um dos pontos de interseção, é tangente ao outro e vice-versa;
2. os raios relativos a cada um dos pontos de corte são perpendiculares entre si.

Porque, (Figura 134), como cada tangente tem de ser perpendicular ao raio do ponto de tangência (número 114), os pontos de corte A e B produzem, com os centros, os triângulos retângulos OAO' e OBO' .

3. o ângulo formado pelas circunferências de seus círculos é reto.

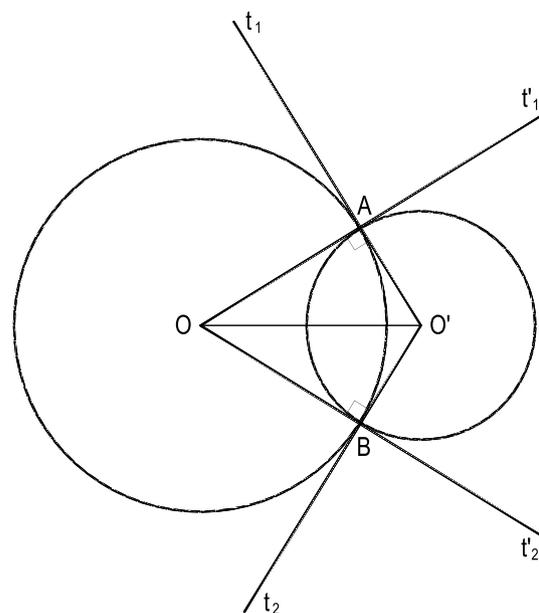


Figura 134

123 – Posições relativas entre dois círculos

Dois círculos podem ocupar cinco posições relativas (Figura 135), a saber:

- Secantes.
- Tangentes exteriormente.
- Tangentes interiormente.
- Exteriores um ao outro.
- Um interior ao outro.

Como caso particular desta última hipótese, destaque-se a dos círculos concêntricos.

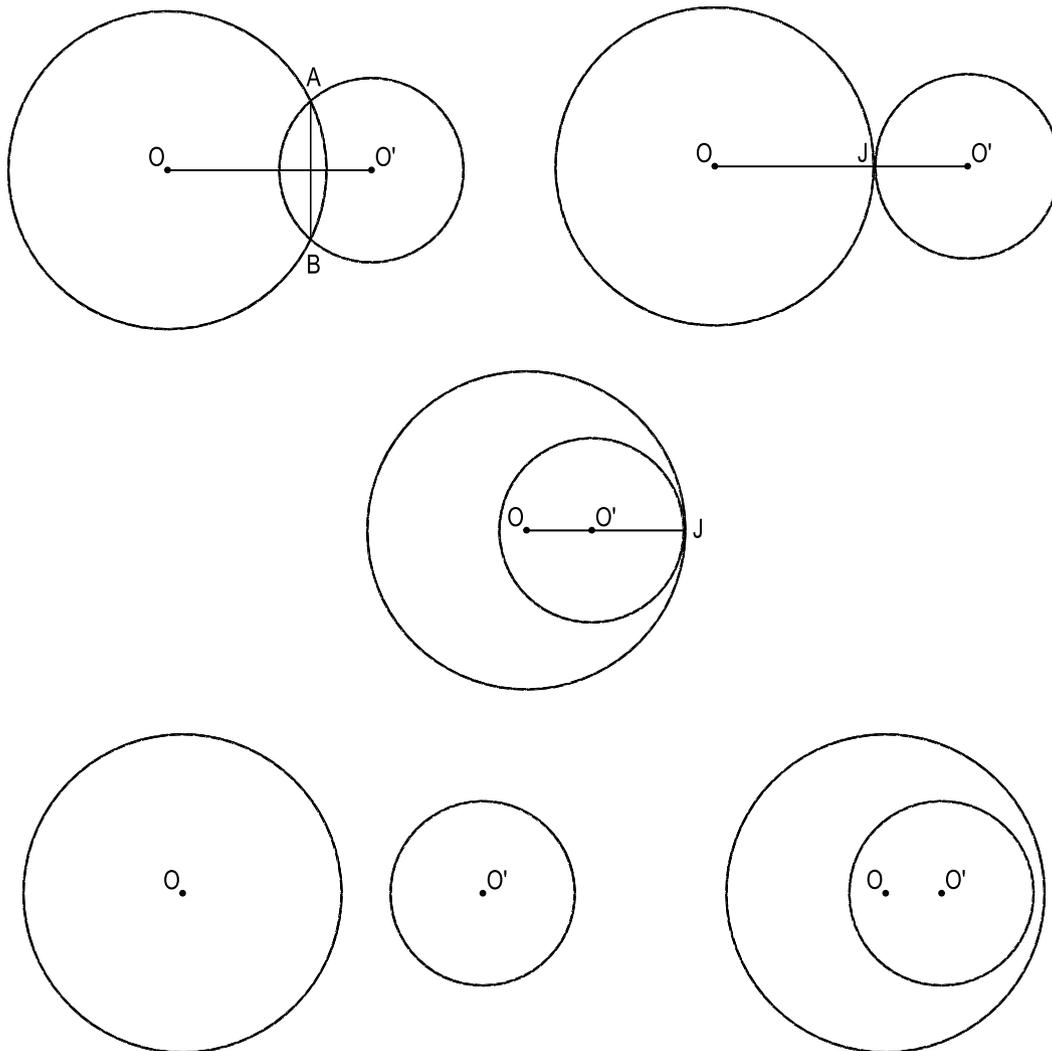


Figura 135

CAPÍTULO VII

ÂNGULOS NO CÍRCULO

124 – Definições

Ângulo central, como vimos (número 93), é o formado por dois raios de um círculo.

Ângulo inscrito é o que tem para vértice um ponto do círculo e para lados duas cordas quaisquer (\hat{i} , na Figura 136).

Ângulo de segmento é o formado por uma corda e uma tangente ao círculo, num dos extremos da corda (como \hat{s} , na Figura 136).

Diz-se que um ângulo é inscrito num segmento circular quando seu vértice pertence ao arco desse segmento e seus lados passam pelos extremos da corda que limita o segmento (Figura 137).

125 – Teorema

Num mesmo círculo, ou em círculos iguais, dois ângulos centrais estão entre si como os arcos por eles interceptados.

Demonstração: Sejam os ângulos centrais $\hat{AÔB}$ e $\hat{CÔD}$ (Figura 138) e a um arco unitário a que utilizaremos para medir os arcos AB e CD .

Admitamos, inicialmente, que os ângulos em estudo são tais que os arcos AB e CD sejam múltiplos de a , isto é, que possamos escrever:

$$AB = ma \quad \text{e} \quad CD = na \quad (1)$$

onde m e n são números inteiros e, naturalmente, positivos.

Marquemos os m arcos a em AB e os n arcos a em CD e tracemos os raios relativos aos pontos de divisão assim obtidos (Figura 138).

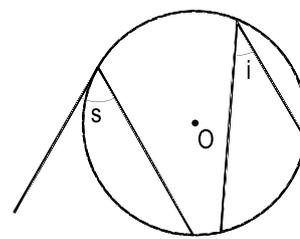


Figura 136

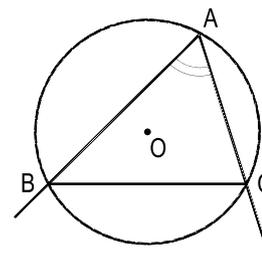


Figura 137

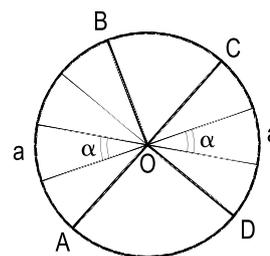


Figura 138

Como os diversos ângulos centrais relativos aos arcos a são iguais (número 103.1), designando-os por α , podemos escrever:

$$\widehat{A\hat{O}B} = m\alpha \quad \text{e} \quad \widehat{C\hat{O}D} = n\alpha \quad (2)$$

Das relações (1) e (2), vem:

$$\frac{\widehat{A\hat{O}B}}{\widehat{C\hat{O}D}} = \frac{m\alpha}{n\alpha} = \frac{m}{n}$$

e

$$\frac{AB}{CD} = \frac{ma}{na} = \frac{m}{n}$$

Logo,

$$\frac{\widehat{A\hat{O}B}}{\widehat{C\hat{O}D}} = \frac{AB}{CD} \quad (3)$$

No caso mais geral em que não exista qualquer arco unitário que seja simultaneamente submúltiplo dos arcos AB e CD , escolhe-se um arco a tão pequeno que permita, sem afetar a precisão da medida, desprezar parte de um dos arcos considerados e, em consequência, de um dos ângulos.

Procedendo, então, da mesma forma que a indicada acima chegaríamos à mesma relação (3) que demonstra o teorema.

126 – Corolário

Adotando para unidade de ângulo central o que intercepta, no círculo, um arco unitário, podemos escrever para um ângulo central qualquer $\widehat{A\hat{O}B}$ e o arco AB que lhe corresponde:

$\frac{\widehat{A\hat{O}B}}{1} = \frac{AB}{1}$, relação que implica em que o número que mede o ângulo seja igual ao que mede o arco por ele interceptado.

Abreviadamente diremos, então, que o ângulo central é igual ao arco interceptado.

Advertimos, no entanto, que, sob esta forma cômoda, queremos dizer que um arco de tantos graus de um certo círculo é o que é interceptado, neste círculo, por um ângulo central daqueles tantos graus.

127 – Teorema

O ângulo inscrito é igual à metade do arco por ele interceptado (leia-se: igual à metade do ângulo central que intercepta, no círculo considerado, o mesmo arco que ele).

Demonstração: Consideremos, inicialmente, o ângulo inscrito particular $\widehat{B\hat{A}C}$ que tem um de seus lados AB passando pelo centro do círculo (Figura 139) e unamos o ponto C ao centro O , formando o triângulo OAC (Figura 139).

Porque o ângulo central c é um ângulo externo do triângulo isósceles OAC , ele é igual à soma dos ângulos internos não adjacentes do triângulo, isto é:

$$c = 2i \quad \therefore \quad i = \frac{c}{2}$$

$$\therefore \quad \widehat{BAC} = \frac{\widehat{BOC}}{2}$$

$$\therefore \quad \boxed{\widehat{BAC} = \frac{BC}{2}} \quad (1)$$

Nos casos mais gerais em que nenhum dos lados do ângulo inscrito passa pelo centro do círculo (Figuras 140 e 141), utilizando a relação (1) acima, podemos escrever:

$$\therefore \quad \widehat{FEG} = \widehat{FEE'} - \widehat{GEE'} \quad (\text{Figura 140}).$$

$$\therefore \quad \widehat{FEG} = \frac{FE'}{2} - \frac{GE'}{2}$$

$$\therefore \quad \widehat{FEG} = \frac{FE' - GE'}{2}$$

$$\therefore \quad \boxed{\widehat{FEG} = \frac{FG}{2}} \quad (2)$$

e $\widehat{SRT} = \widehat{SRR'} + \widehat{TRR'}$ (Figura 141).

$$\therefore \quad \widehat{SRT} = \frac{SR'}{2} + \frac{R'T}{2}$$

$$\therefore \quad \widehat{SRT} = \frac{SR' + R'T}{2}$$

$$\therefore \quad \boxed{\widehat{SRT} = \frac{ST}{2}} \quad (3)$$

As relações (1), (2) e (3) demonstram o teorema.

128 – Corolários

1. Todos os ângulos inscritos num mesmo segmento circular são iguais, pois interceptam o mesmo arco de círculo (Figura 142).

Por este motivo, todo segmento circular APB (Figura 142) é denominado segmento circular capaz de ver a corda AB sob o ângulo α ou, mais simplesmente, segmento capaz de α para AB .

Simplificadamente, o arco APB é denominado arco capaz de α para o segmento AB .

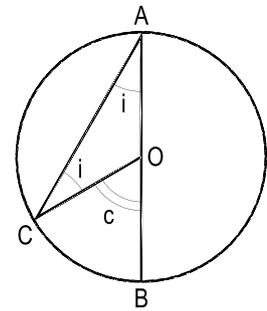


Figura 139

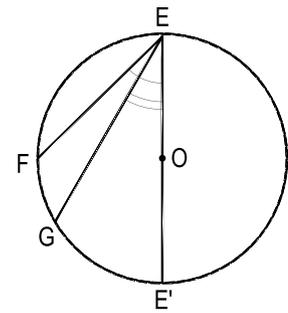


Figura 140

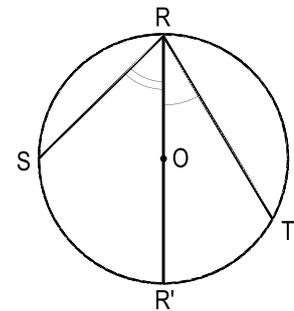


Figura 141

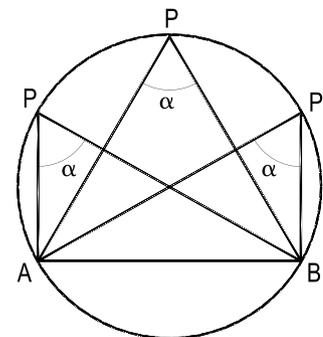


Figura 142

2. Todo ângulo inscrito num semicírculo é reto, porque intercepta um arco correspondente a um central de dois retos (Figura 143).

Isto é o mesmo que dizer que todo triângulo inscrito num círculo, tendo para um dos lados o diâmetro do círculo, é retângulo – e o diâmetro é sua hipotenusa.

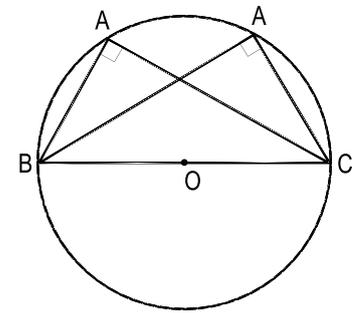


Figura 143

3. A mediana de um triângulo relativa à hipotenusa é igual à metade da hipotenusa, como raio e diâmetro do círculo (Figura 144).
4. Quando se divide um círculo em dois segmentos, por uma corda qualquer, dois ângulos inscritos, cada um num dos segmentos, são suplementares, porque (Figura 145):

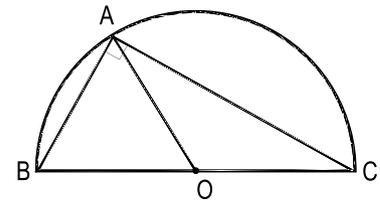


Figura 144

$$\hat{A} + \hat{C} = \frac{\widehat{BCD}}{2} + \frac{\widehat{DAB}}{2} = \frac{\widehat{BCD} + \widehat{DAB}}{2}$$

$$\therefore \hat{A} + \hat{C} = \frac{4r}{2} = 2r$$

5. Todo quadrilátero convexo inscrito num círculo tem os pares de ângulos opostos suplementares (Figura 145). Reciprocamente, a condição para que um quadrilátero convexo seja inscrito num círculo é que dois de seus ângulos opostos sejam suplementares.

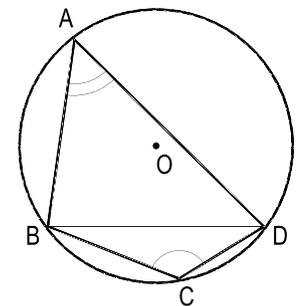


Figura 145

129 – Teorema

O ângulo de segmento é igual à metade do arco compreendido entre seus lados.

Demonstração: Consideremos o círculo (O, r) e uma corda qualquer BC (Figura 146).

Façamos um ponto A de arco BC percorrer esse arco, no sentido de C para B, formando diversos ângulos inscritos \widehat{BAC} , todos iguais à metade do arco BC (número 128.1).

À medida que o ponto A tende a coincidir com B, as secantes s ao círculo, suportes das cordas AB, tendem à posição da tangente t ao círculo, no ponto B. E os ângulos inscritos \widehat{BAC} tendem ao ângulo de segmento α , formado pela corda BC e a tangente t, no ponto B, o que demonstra o teorema.

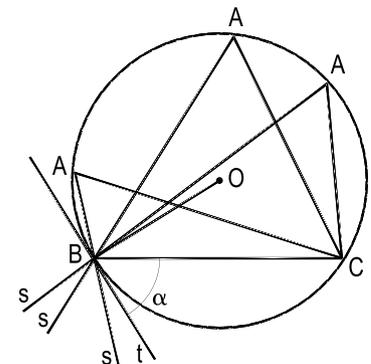


Figura 146

130 – Corolário

Um ângulo de segmento é igual a todo ângulo inscrito no segmento circular oposto ao que fica compreendido entre seus lados.

De fato, consideremos o ângulo de segmento \widehat{BAC} e um ângulo inscrito \widehat{AJB} , segundo as condições impostas (Figura 147). Tais ângulos serão necessariamente iguais por valerem, ambos, a metade do arco AMB .

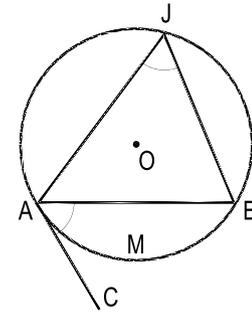


Figura 147

131 – Teorema

O lugar geométrico dos pontos dos quais se vê um segmento fixo sob um ângulo constante é constituído por um par de arcos de círculos iguais limitados por aquele segmento.

Demonstração: Sejam BC e α o segmento fixo e o ângulo constante dados e A um ponto genérico, tal que $\widehat{BAC} = \alpha$ (Figura 148).

Consideremos o arco BAC do círculo que contém os pontos A , B e C .

Sabemos que todos os pontos desse arco veem BC sob o mesmo ângulo α (número 128.1). Igual propriedade existe, naturalmente, para todos os pontos A' do arco $BA'C$, simétrico do primeiro em relação à corda comum BC .

Completando a demonstração, consideremos um ponto J qualquer exterior a esses arcos e unamo-lo a B a C (Figura 148). No triângulo JAC , assim formado, temos para o ângulo externo α , a relação:

$$\alpha = \beta + \gamma \quad \therefore \beta < \alpha \quad \therefore \beta \neq \alpha$$

Para pontos L interiores a um dos dois segmentos circulares considerados, com mesmo procedimento, chegaríamos (Figura 148) a:

$$\varphi = \alpha + \theta \quad \therefore \varphi > \alpha \quad \therefore \varphi \neq \alpha$$

Isto é, todo ponto não pertencente a um daqueles dois arcos considerados não vê o segmento BC sob o ângulo α .

Logo, o lugar geométrico...

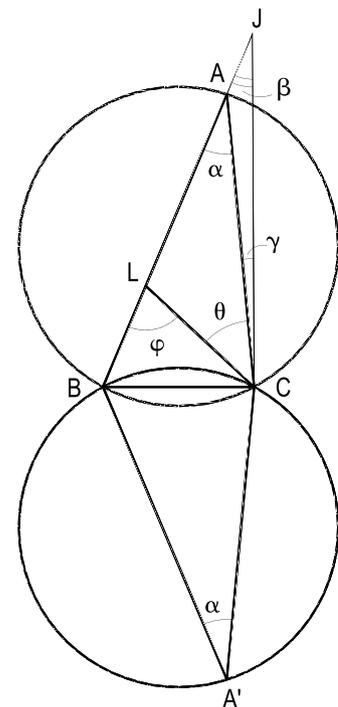


Figura 148

132 – Observações

1. Quando afirmamos que todos os pontos dos arcos BAC e $BA'C$ (Figura 148) pertencem ao lugar, incluímos – em posições limites – os extremos B e C do segmento dado.

Porque quando A (ou A') tende a um desses pontos, os ângulos inscritos considerados tendem a ângulos de segmento de mesmo valor α (número 130).

2. Daqui por diante diremos, por comodidade, que o lugar instituído acima é constituído pelo par de arcos capazes de α , para BC .

133 – Construção do arco capaz

Dentre os inúmeros processos para a construção do arco capaz de ver um segmento dado BC sob um ângulo dado α , apresentaremos os dois seguintes:

1. Constrói-se a semirreta Bx , formando, com BC , o ângulo dado α e, em seguida, a mediatriz de BC e a perpendicular By a Bx , que encontra a mediatriz em O , centro do arco capaz procurado (Figura 149).

O processo é válido para qualquer valor de α , porque Bx será tangente ao arco, em B e, em consequência, \widehat{xBC} será um ângulo de segmento (ver números 130 e 132.1).

2. Constrói-se a mediatriz de BC e uma reta r que forme, com a mediatriz, o ângulo dado α (Figura 150). Em seguida, por um dos extremos de BC , traça-se a paralela a r que encontra a mediatriz no ponto O , centro do arco.

É válido o processo, porque o arco oposto ao traçado será igual ao ângulo central 2α a ele correspondente e, em consequência, todo ponto do arco traçado verá BC sob um ângulo igual à metade daquele, ou seja, α .

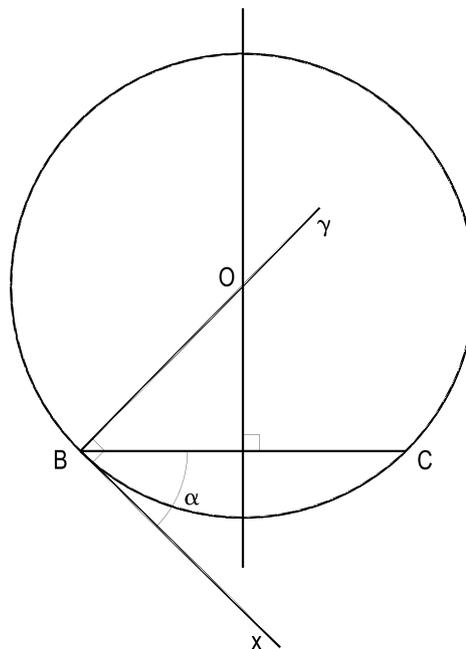


Figura 149

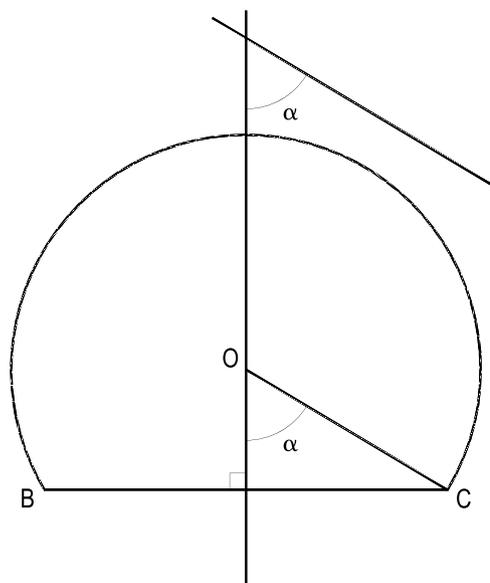


Figura 150

134 – Teorema

As bissetrizes internas relativas aos vértices A de todos os triângulos ABC inscritos num segmento circular BAC passam por um ponto fixo, o médio do arco BC, oposto a A.

Demonstração: Consideremos uma corda fixa BC de um círculo qualquer e um ponto A descrevendo um dos arcos BC (Figura 151).

Para todas as posições ocupadas por A, a bissetriz interna relativa a esse vértice permite escrever:

$$\alpha = \beta \quad \therefore \quad BM = MC$$

E se, em todas as posições, a bissetriz divide ao meio o arco BC oposto ao percorrido pelo vértice A, conclui-se que todas as bissetrizes passam pelo ponto M, médio do arco BC, oposto a A.

Assim, as bissetrizes internas...

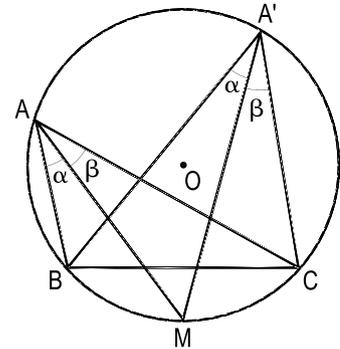


Figura 151

135 – Teorema

As bissetrizes externas relativas aos vértices A de todos os triângulos ABC inscritos num segmento circular BAC passam por um ponto fixo, o médio do arco BC, que contém A.

Demonstração: Consideremos uma corda fixa BC de um círculo qualquer e um ponto A descrevendo um dos arcos BC (Figura 152).

Sabe-se que as bissetrizes internas relativas ao vértice A dos triângulos considerados passam pelo ponto M, médio do arco BC oposto a A (número 134). E mais, que as bissetrizes internas e externas relativas a A, em qualquer posição do triângulo, são perpendiculares entre si (número 12.3).

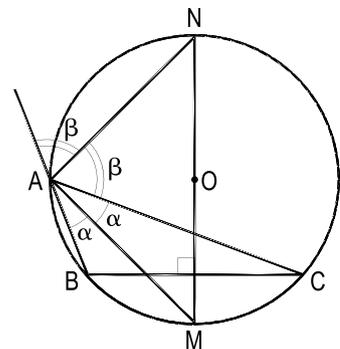


Figura 152

Assim, numa posição genérica de A, o triângulo AMN (Figura 152) será retângulo em A e, conseqüentemente, MN será (número 128.2) um diâmetro do círculo considerado.

E, como o ponto M é fixo, o ponto N também o será.

Até porque o diâmetro MN é perpendicular à corda BC, N é o ponto médio do arco BC, ao qual pertence o ponto A.

Então, as bissetrizes externas...

136 – Teorema

O ângulo formado por duas secantes a um círculo é igual à semissoma ou à semidiferença dos arcos interceptados, conforme, respectivamente, o ponto comum às secantes seja interior ou exterior ao círculo.

Demonstração: Consideremos duas secantes ao círculo (O, r) cortando-se num ponto J , interior ao círculo (Figura 153), ou num ponto L a ele exterior (Figura 154) e calculemos o ângulo por elas formado.

Para tanto, consideremos os triângulos JAD (Figura 153) e LPS (Figura 154). Os ângulos externos, α e z , respectivamente, fornecem:

$$\alpha = x + y = \frac{AC}{2} + \frac{BD}{2} \quad \therefore \quad \alpha = \frac{AC + BD}{2}$$

$$\beta = z - w = \frac{QS}{2} - \frac{TP}{2} \quad \therefore \quad \beta = \frac{QS - TP}{2}$$

As relações acima demonstram o teorema.

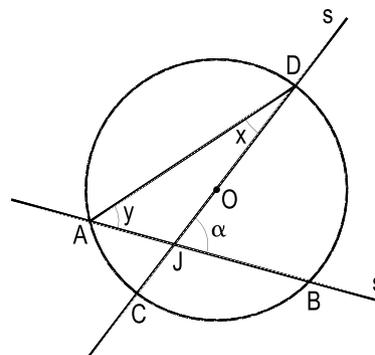


Figura 153

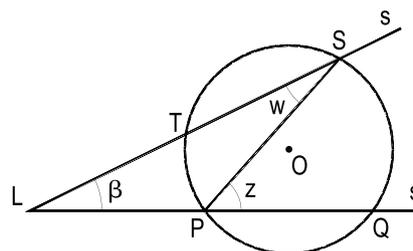


Figura 154

137 – Observações

1. O ângulo formado por uma tangente e uma secante a um círculo é, ainda, igual à semidiferença entre os arcos interceptados.

Porque, com raciocínio semelhante ao utilizado na demonstração do teorema anterior, podemos escrever (Figura 155):

$$\alpha = p - q = \frac{AB}{2} - \frac{AC}{2} \quad \therefore \quad \alpha = \frac{AB - AC}{2}$$

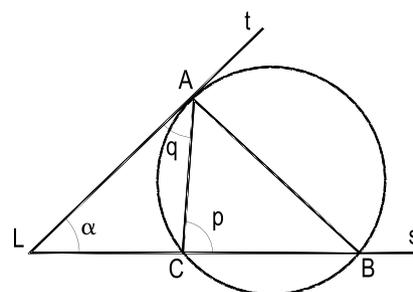


Figura 155

2. A relação ainda é válida no caso particular do ângulo formado por duas tangentes ao círculo, porque, traçando a bissetriz do ângulo, pelo item anterior, teremos (Figura 156):

$$\frac{\alpha}{2} = \frac{AM - AN}{2} \quad \therefore \quad \alpha = \frac{AMB - ANB}{2}$$

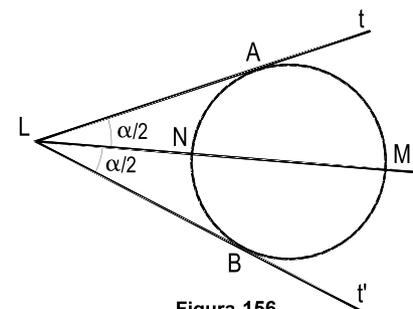


Figura 156

CAPÍTULO VIII

PONTOS NOTÁVEIS DO TRIÂNGULO

138 – Definições

Quando um polígono tem todos os seus vértices sobre um mesmo círculo, diz-se que o polígono está inscrito no círculo e que o círculo é circunscrito ao polígono (Figura 157).

Quando um círculo situado no interior de um polígono tangencia todos os seus lados, diz-se que ele está inscrito no polígono e que este é circunscrito ao círculo (Figura 158).

Quando um círculo é tangente aos três lados de um triângulo, mas está no seu exterior, diz-se que o círculo é exinscrito ao triângulo (Figura 159).

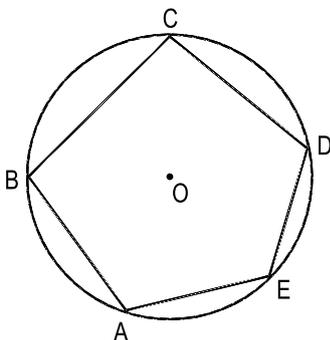


Figura 157

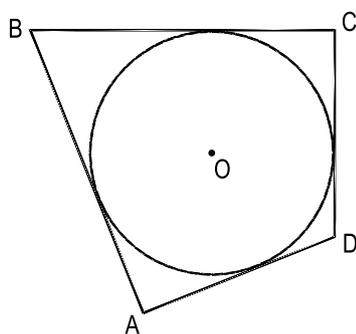


Figura 158

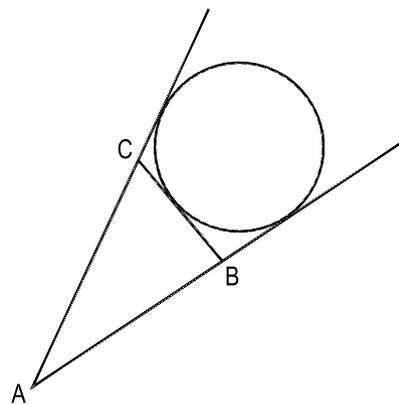


Figura 159

139 – Circuncentro

Sabemos que por três pontos não colineares passa um círculo e apenas um (número 105), e que o centro desse círculo é o ponto comum às mediatrizes das cordas formadas pelos pontos (número 107).

Vale dizer que o centro do círculo circunscrito a um triângulo, denominado circuncentro do triângulo, é o ponto comum às mediatrizes de seus lados (O, na Figura 160).

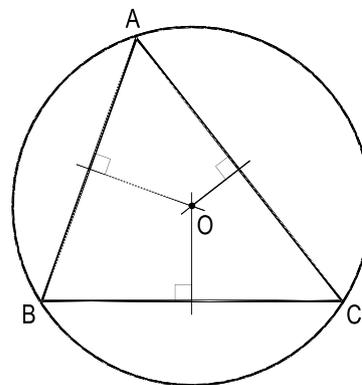


Figura 160

140 – Observações

1. O circuncentro de um triângulo é interior (Figura 160) ou exterior (Figura 161) a ele, conforme respectivamente o triângulo seja acutângulo ou obtusângulo.
2. No caso particular em que o triângulo é retângulo (Figura 162), seu circuncentro coincide com o ponto médio da hipotenusa (número 128.3).

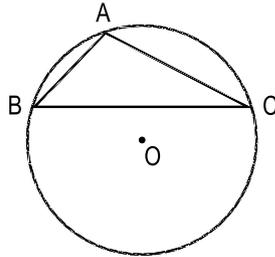


Figura 161

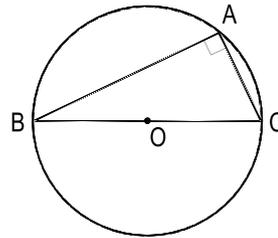


Figura 162

141 – Incentro

Consideremos um triângulo qualquer ABC e provemos que as bissetrizes de seus três ângulos internos concorrem num mesmo ponto.

Para tanto, tomemos, inicialmente, as bissetrizes dos ângulos internos A e B que, por não serem paralelas, encontram-se num certo ponto I (Figura 163).

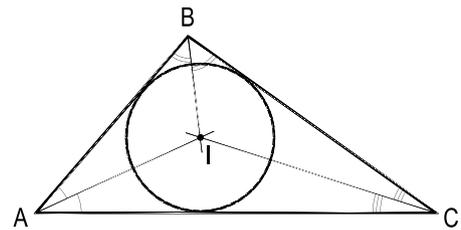


Figura 163

Tal ponto, por pertencer à bissetriz de A, equidista de AB e de AC e, por pertencer à bissetriz de B, equidista de AB e de BC. Logo, equidista de AC e de BC e, em consequência, pertence à bissetriz do ângulo interno C.

Assim, as três bissetrizes dos ângulos internos concorrem num mesmo ponto I que, por ser interior ao triângulo e equidistar de seus lados, será centro do círculo nele inscrito (Figura 163), sendo, por isso, denominado incentro do triângulo.

142 – Exincentros

Consideremos um triângulo qualquer ABC e provemos que as bissetrizes de dois de seus ângulos externos e a do ângulo interno não adjacente àqueles concorrem num mesmo ponto.

Tracemos as bissetrizes dos ângulos externos B e C que, por não serem paralelas, encontram-se num certo ponto E, exterior ao triângulo (Figura 164).

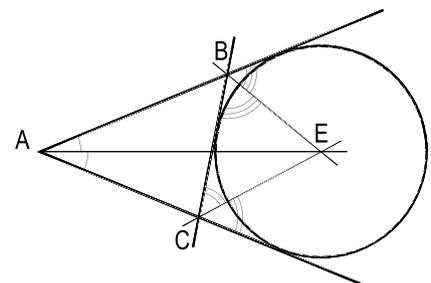


Figura 164

Tal ponto, por pertencer à bissetriz do ângulo externo B, equidista de BC e de AB e, por pertencer à bissetriz do ângulo externo C, equidista de BC e de AC. Logo, equidista de AB e de AC e, em consequência, pertence à bissetriz do ângulo interno A.

Assim, as bissetrizes dos ângulos externos B e C e a do ângulo interno A, não adjacente àqueles, concorrem num mesmo ponto E que, por ser exterior ao triângulo e equidistar de seus lados, será centro de um círculo exinscrito ao triângulo.

143 – Observação

Todo triângulo possui três exincen-tros, cada um pertencendo a cada uma de suas bissetrizes internas (Figura 165).

Assim, há quatro pontos equidistantes dos lados de um triângulo: seu incentro e seus três exincen-tros.

Vale dizer que sempre se pode traçar quatro círculos tangentes a três retas que se cortam formando um triângulo (Figura 165): o inscrito e os três exinscritos a esse triângulo.

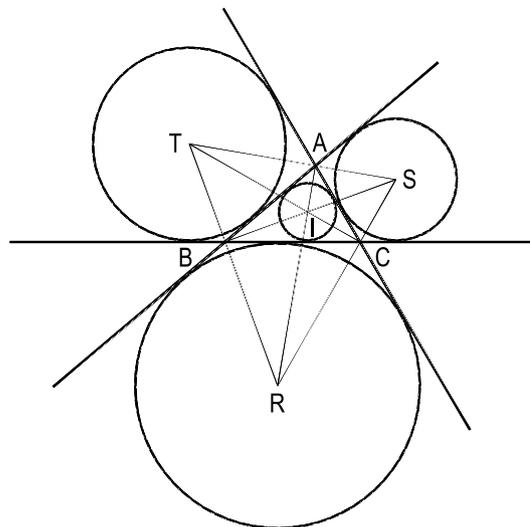


Figura 165

144 – Ortocentro

Consideremos um triângulo qualquer ABC e provemos que suas três alturas con-correm num mesmo ponto.

Para tanto, tracemos, pelos vértices do triângulo ABC, retas paralelas aos lados opostos, formando um triângulo A'B'C' (Fi-gura 166).

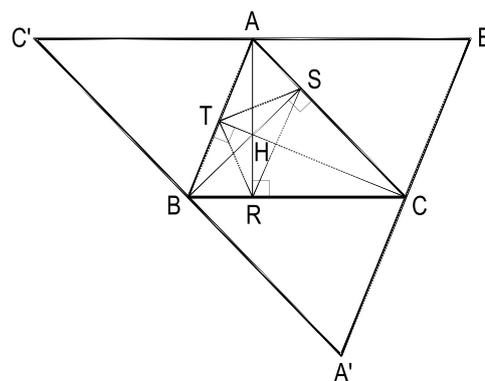


Figura 166

Sabemos que os vértices do triângulo ABC são os pontos médios dos lados do triângulo A'B'C', tais as formações dos pares de paralelogramos como ACBC' e AB'CB (Figura 166).

Assim, as alturas de ABC serão mediatrizes dos lados de A'B'C' e, por isso (número 139), concorrem num certo ponto H, circuncentro do triângulo A', B', C', que será denomi-nado ortocentro do triângulo ABC.

145 – Triângulo órtico

Triângulo órtico de um triângulo dado é o que tem para vértices os pés das alturas do dado.

Assim, na Figura 166, RST é o triângulo órtico do triângulo ABC. E, observando a Figura 165, como sabemos que são perpendiculares as bissetrizes, interna e externa relativas a cada vértice, decorrem as seguintes propriedades:

1. As alturas (RA, SB e TC) de um triângulo acutângulo RST (Figura 165) são as bissetrizes dos ângulos internos de seu triângulo órtico ABC.
2. Os lados de um triângulo acutângulo RST (Figura 165) são as bissetrizes dos ângulos externos de seu triângulo órtico ABC.
3. O ortocentro (I) de um triângulo acutângulo RST coincide com o incentro do seu triângulo órtico ABC (Figura 165).
4. Os vértices de um triângulo acutângulo RST coincidem respectivamente com os exincentros de seu triângulo órtico ABC (Figura 165).

Quando o triângulo dado RST é obtusângulo (Figura 167), há algumas modificações naquelas propriedades. Assim, sendo ABC seu triângulo órtico, podemos concluir que as alturas de RST são bissetrizes internas ou externas de ABC; que um dos vértices de RST é o incentro de ABC e que o ortocentro H de RST é um dos exincentros de ABC.

Quando, enfim, o triângulo é retângulo, ele não possui triângulo órtico, porque dois pés de alturas coincidem com o vértice do ângulo reto.

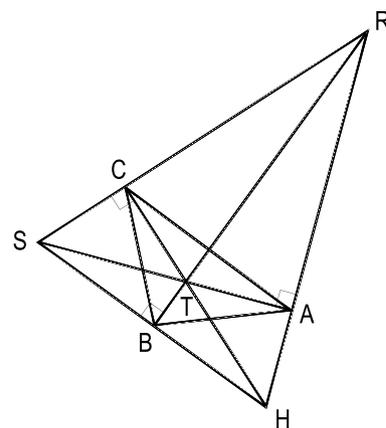


Figura 167

146 – Baricentro

Consideremos um triângulo qualquer ABC e provemos que suas três medianas concorrem num mesmo ponto.

Para tanto, sendo G o ponto comum às medianas BM e CN (Figura 168), tracemos os segmentos MN e PQ, este formado pelos pontos médios dos lados BG e CG do triângulo BCG.

Ora, nos triângulos ABC e BCG, os segmentos MN e PQ são paralelos a BC e valem, ambos, a metade de BC (números 85 e 86).

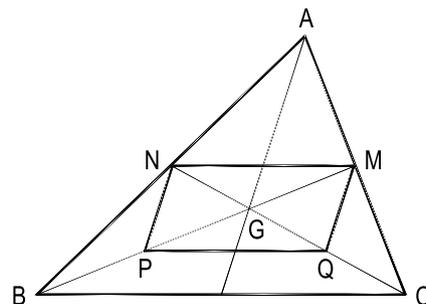


Figura 168

Assim, MN e PQ são iguais e paralelos entre si. Por isso, MNPQ é um paralelogramo (número 72.4) e, em consequência,

$$PG = GM \quad (1)$$

$$\text{e } QG = GN \quad (2)$$

Como, por construção,

$$BP = PG \quad (3)$$

$$\text{e } CQ = QG \quad (4)$$

temos, reunindo (1) com (3) e (2) com (4):

$$BP = PG = GM \quad (5)$$

$$\text{e } CQ = QG = GN \quad (6)$$

Estas relações (5) e (6) garantem que as duas medianas consideradas cortam-se num de seus pontos terços, o mais próximo de seus pés.

Igualmente provaríamos que a última mediana, relativa ao lado BC, corta uma das duas primeiras no mesmo ponto G, terço mais próximo de seu pé.

Assim, fica provado que as medianas de um triângulo cortam-se num mesmo ponto, denominado baricentro do triângulo.

147 – Observação

Do que ficou provado acima, insistimos em destacar que o baricentro de um triângulo está situado em cada uma de suas medianas a um terço dela, a contar de seu pé, e a dois terços dela, a contar do vértice correspondente (Figura 168). Vale dizer que o baricentro divide cada mediana em dois segmentos tais que um deles é igual ao dobro do outro.

148 – Propriedades dos triângulos isósceles

1. Porque nos triângulos isósceles a bissetriz do ângulo interno oposto à base coincide com a altura, com a mediatriz e com a mediana relativas à base e, porque tal coincidência só ocorre com estas cevianas relativas à base, conclui-se que em todo triângulo isósceles são colineares o incentro I, o ortocentro O, o circuncentro C, o baricentro G e um dos exincentros E (Figura 169).

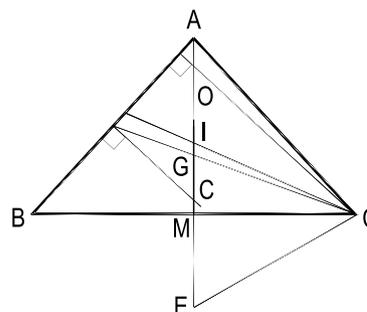


Figura 169

Reciprocamente, todo triângulo que possui três destes pontos colineares possui também os demais sobre esta reta e, em consequência, é isósceles.

2. O triângulo órtico de um triângulo isósceles é também isósceles, porque os pés das alturas iguais são simétricos em relação à altura relativa à base (Figura 170).

Reciprocamente, todo triângulo, cujo triângulo órtico é isósceles, é também isósceles.

149 – Observação

Quando o triângulo, além de isósceles, é também retângulo, os pontos médios de seus lados formam, com o vértice do ângulo reto, um quadrado de lado igual à metade dos catetos do primeiro.

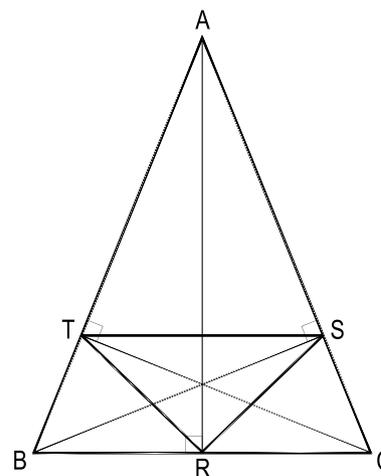


Figura 170

150 – Propriedades dos triângulos equiláteros

1. Porque, nos triângulos equiláteros, em relação a cada um dos lados, coincidem altura, mediana, mediatriz e bissetriz interna, haverá obrigatoriamente a coincidência dos ortocentro, baricentro, circuncentro e incentro (Figura 171).

Reciprocamente, todo triângulo no qual coincidem dois destes pontos é equilátero e coincidem também com aqueles, os demais aqui abordados.

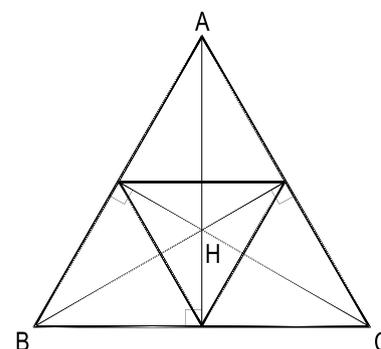


Figura 171

2. O triângulo órtico de um triângulo equilátero é também equilátero, tendo lados paralelos e iguais à metade dos lados do primeiro, pois os vértices do órtico são os pontos médios dos lados do primeiro (Figura 171).

Reciprocamente, todo triângulo que tem para órtico um triângulo equilátero é também equilátero, tendo lados paralelos e iguais aos dobros dos lados do órtico (Figura 171).

151 – Cálculo dos segmentos determinados sobre os lados de um triângulo pelos pontos de contato dos círculos inscrito e exinscrito

1. Círculo inscrito.

Consideremos um triângulo qualquer ABC de lados a , b e c e perímetro $2p$.

Construamos o círculo I, nele inscrito (Figura 172).

Como tangentes de cada vértice do triângulo a esse círculo (número 119), temos:

$$AS = AT = x, \quad BR = BT = y \quad e \quad CR = CS = z$$

$$E, \text{ como } 2x + 2y + 2z = 2p, \text{ vem: } x + y + z = p \quad \therefore \quad x = p - (y + z)$$

$$\therefore \quad x = p - (BR + RC) = p - (BC) \quad \therefore \quad \boxed{x = p - a}$$

Analogamente, chegáramos a

$$\boxed{y = p - b}$$

$$\boxed{z = p - c}$$

Ou seja, cada segmento de tangente é igual à diferença entre o semiperímetro e o lado oposto ao vértice considerado.

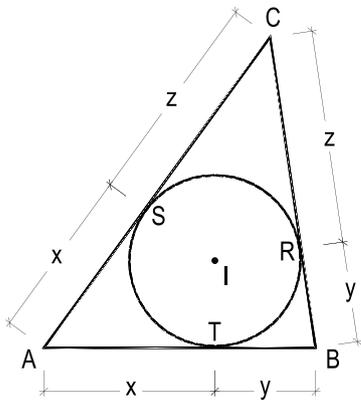


Figura 172

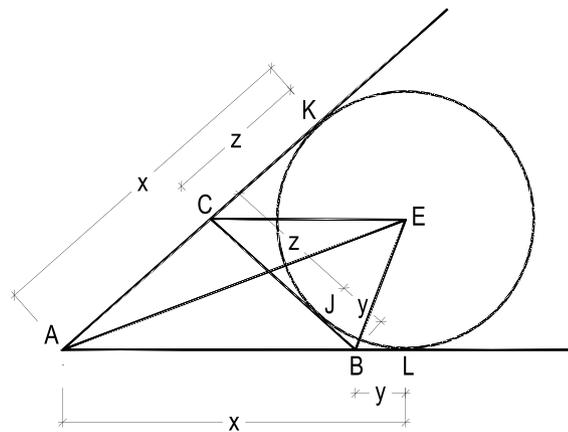


Figura 173

2. Círculo exinscrito.

Consideremos o círculo E, exinscrito ao triângulo ABC, relativo ao vértice A.

Sendo a, b e c os lados, 2p o perímetro do triângulo e J, L e K os pontos de contato de seus lados com o círculo considerado (Figura 173), pode-se (número 119) escrever:

$$AL = AK = x, \quad BL = BJ = y \quad e \quad CK = CJ = z$$

$$\text{Ora, } AC + CJ + BJ + AB = 2p \quad \therefore \quad AC + CK + BL + AB = 2p$$

$$\therefore \quad AK + AL = 2p \quad \therefore \quad 2x = 2p \quad \therefore \quad \boxed{x = p}$$

$$\therefore \quad BL = AL - AB \quad \therefore \quad y = x - c \quad \therefore \quad \boxed{y = p - c}$$

$$e \quad CK = AK - AC \quad \therefore \quad z = x - b \quad \therefore \quad \boxed{z = p - b}$$

Ou seja:

- Os segmentos de tangentes do vértice oposto ao círculo exinscrito são iguais ao semiperímetro do triângulo.

b. Os segmentos de tangentes de cada um dos outros dois vértices são iguais às diferenças entre o semiperímetro e o lado compreendido entre esse vértice e aquele referente ao círculo exinscrito considerado.

3. Associação do círculo inscrito e de um exinscrito.

Do que foi instituído, torna-se fácil calcular os segmentos $TL = x$, $SK = y$ e $JR = z$ (Figura 174) formados sobre os lados do triângulo ABC pelos pontos de contato do círculo inscrito I e do círculo exinscrito E , relativo ao vértice A .

De fato, podemos escrever:

$$x = AL - AT = p - (p - a)$$

$$y = AK - AS = p - (p - a) \quad \therefore \boxed{x = y = a}$$

$$z = BR - BJ = (p - b) - (p - c) \quad \therefore \boxed{z = c - b}$$

Ou, $z = b - c$, se $b > c$

4. Associação dos círculos exinscritos.

Para calcular os segmentos formados sobre os lados de um triângulo ABC pelos pontos de contato dos círculos exinscritos, utilizaremos as relações criadas nos itens anteriores.

Consideremos, inicialmente, os círculos exinscritos relativos aos vértices B e C (Figura 175).

$$XF = AF + AX = (p - c) + (p - b)$$

e $YE = AE + AY = (p - c) + (p - b)$

$$\therefore XF = YE = (p - c) + (p - b)$$

$$\therefore XF = YE = 2p - (b + c) \quad \therefore \boxed{XF = YE = a}$$

E mais, $HZ = CH + CZ = (p - a) + p = 2p - a$

$$\therefore HZ = a + b + c - a \quad \therefore \boxed{HZ = b + c}$$

Analogamente, para o vértice A :

$$\boxed{XL = ZJ = b} \quad \boxed{EK = HJ = c} \quad \boxed{YK = a + c} \quad \boxed{FL = a + b}$$

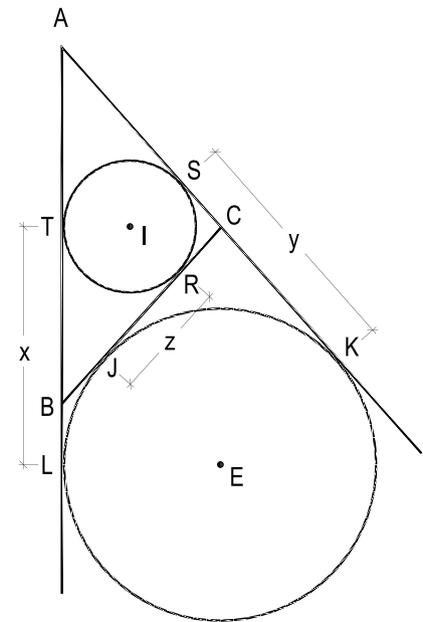


Figura 174

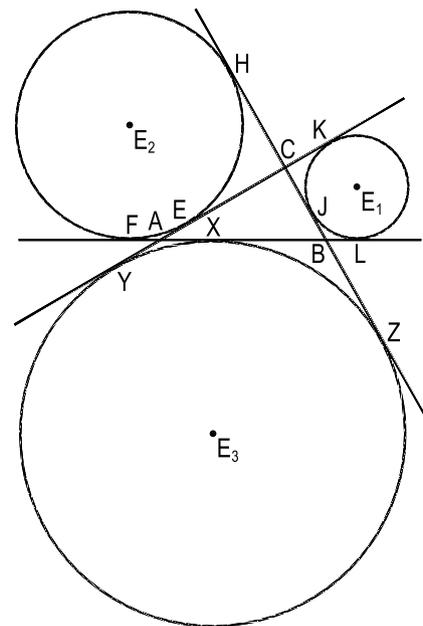


Figura 175

152 – Conclusões

1. Os segmentos formados pelos pontos de contato do círculo inscrito nos lados do triângulo são iguais à diferença entre o semiperímetro e o lado oposto ao vértice considerado (Figura 176).

$$AS = AT = p - a$$

2. Os segmentos formados por um vértice e pelos pontos de contato dos prolongamentos dos dois lados que o formam com o círculo exinscrito a ele relativo são iguais ao semiperímetro (Figura 176).

$$AL = AK = p$$

3. Os segmentos formados pelos pontos de contato do círculo inscrito e do exinscrito relativo a um vértice nos prolongamentos de seus lados são iguais ao lado oposto (Figura 177).

$$SK = TL = BC = a$$

4. Os segmentos formados pelos pontos de contato do círculo inscrito e do exinscrito relativo a um vértice sobre o lado oposto é igual à diferença entre os outros dois lados (Figura 177).

$$RJ = AC - AB = b - c$$

5. Os segmentos formados pelos pontos de contato de dois círculos exinscritos sobre os lados que lhes correspondem são iguais ao terceiro lado (Figura 178).

$$HJ = EK = AC = b$$

6. O segmento formado pelos pontos de contato de dois círculos exinscritos sobre o lado que não lhes corresponde é igual à soma dos outros dois lados (Figura 179).

$$FL = BA + BC = c + a$$

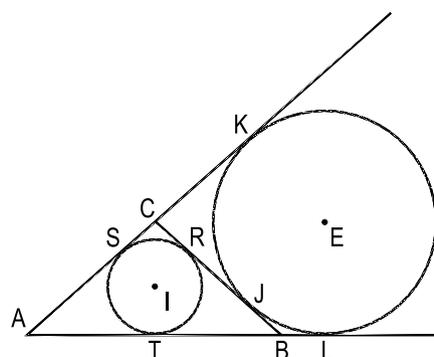


Figura 176

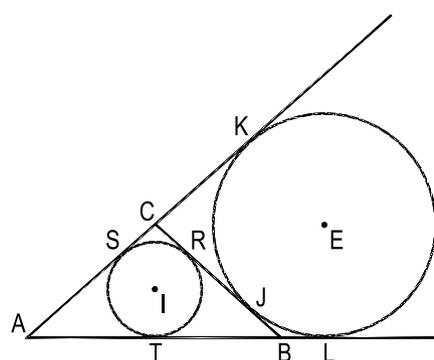


Figura 177

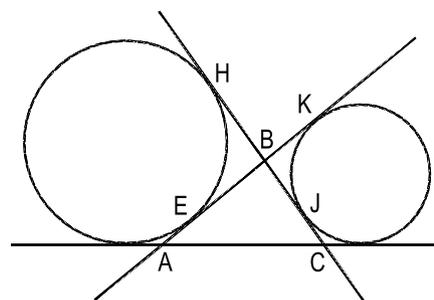


Figura 178

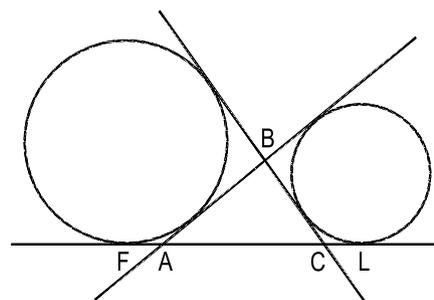


Figura 179

153 – Teorema

A distância do baricentro de um triângulo a uma reta qualquer é igual à média aritmética das distâncias de seus vértices àquela reta.

Demonstração: Consideremos um triângulo qualquer ABC a uma reta r a ele exterior e baixemos as perpendiculares a r dos vértices e do baricentro G do triângulo (Figura 180).

Se T o outro ponto terço da mediana CM, MM', TT' e GG' são as bases médias dos trapézios AA' B' B, GG' C' C e MM' T' T, o que permite escrever (número 88.2):

$$MM' = \frac{AA' + BB'}{2} \quad (1)$$

$$TT' = \frac{GG' + CC'}{2} \quad (2)$$

$$GG' = \frac{MM' + TT'}{2} \quad (3)$$

Substituindo (1) e (2) em (3), vem:

$$GG' = \frac{AA' + BB'}{4} + \frac{GG' + CC'}{4}$$

$$\therefore 4GG' = AA' + BB' + GG' + CC' \quad \text{ou} \quad 3GG' = AA' + BB' + CC'$$

$$\therefore \boxed{GG' = \frac{AA' + BB' + CC'}{3}}$$

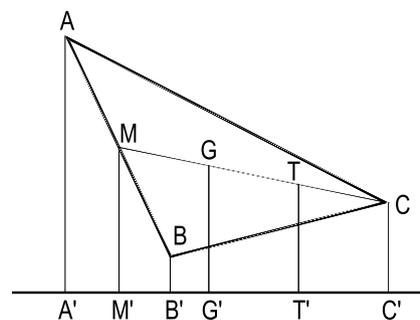


Figura 180

Admitamos, agora, que a reta considerada s atravessasse o triângulo ABC.

Considerando uma reta r, paralela a s e exterior ao triângulo, sendo d a distância entre as duas (Figura 181), orientemos o plano a partir desta reta s.

A relação acima instituída para o caso da reta r exterior ao triângulo permite anotar:

$$3 GG' = AA' + BB' + CC'$$

$$\therefore 3 (GG'' + d) = AA'' + d + BB'' + d + CC'' + d$$

$$\therefore 3 GG'' + 3d = AA'' + BB'' + CC'' + 3d$$

$$\therefore \boxed{GG' = \frac{AA' + BB' + CC'}{3}}$$

Assim, independente da posição da reta em relação ao triângulo, fica demonstrado o teorema.

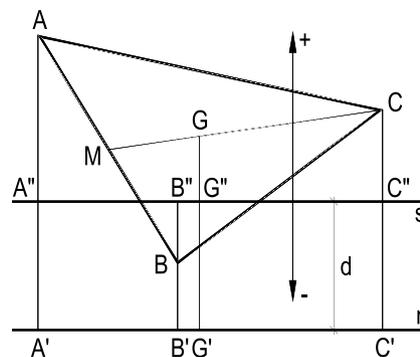


Figura 181

CAPÍTULO IX

LINHAS PROPORCIONAIS

154 – Definições

Razão entre dois segmentos é a razão existente entre as medidas desses segmentos, obtidas pela utilização de uma mesma unidade.

Quando, numa proporção, os quatro termos são diferentes, cada um deles é denominado quarta proporcional em relação aos demais. Se, no entanto, são iguais os meios (ou os extremos), cada um deles é dito média proporcional ou média geométrica em relação aos dois diferentes e cada um destes é, então, denominado terceira proporcional, em relação aos demais.

155 – Teorema

Sobre a reta orientada que contém dois pontos fixos A e B só existe um ponto P, tal que a razão $\overline{PA} / \overline{PB}$ tenha um valor algébrico fixado.

Demonstração: 1ª hipótese: $\overline{PA} / \overline{PB}$ é positiva, isto é, P é exterior ao segmento AB. Admitamos que exista um outro ponto Q que forneça a mesma divisão que P, isto é, tal que: $\overline{PA} / \overline{PB} = \overline{QA} / \overline{QB}$ (Figura 182).

Por propriedade de proporções, temos então:

$$\frac{\overline{PA} - \overline{PB}}{\overline{PB}} = \frac{\overline{QA} - \overline{QB}}{\overline{QB}} \quad \therefore \quad \frac{\overline{BA}}{\overline{PB}} = \frac{\overline{BA}}{\overline{QB}} \quad \therefore \quad \overline{PB} = \overline{QB}$$

Assim sendo, o ponto Q tem de coincidir com o ponto P, havendo, então, um único ponto segundo a condição imposta.

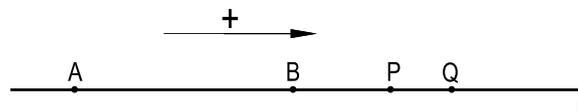


Figura 182

2ª hipótese: $\overline{PA} / \overline{PB}$ é negativa, isto é, P é interior ao segmento AB. Admitindo a existência de um outro ponto Q que forneça a mesma divisão que P, podemos escrever:

$$\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = \frac{\overline{QA}}{\overline{QB}} \quad \therefore \quad \frac{\overline{PA} - \overline{PB}}{\overline{PB}} = \frac{\overline{QA} - \overline{QB}}{\overline{QB}}, \text{ ou}$$
$$\frac{-\overline{AP} - \overline{PB}}{\overline{PB}} = \frac{-\overline{AQ} - \overline{QB}}{\overline{QB}} \quad \therefore \quad \frac{-\overline{AB}}{\overline{PB}} = \frac{-\overline{AB}}{\overline{QB}} \quad \therefore \quad \overline{PB} = \overline{QB}$$

Assim, como na hipótese anterior, concluímos que o segundo ponto (Q) deve coincidir com o primeiro (P), isto é, que para cada valor algébrico da razão dada só existe, em correspondência, um ponto da reta orientada AB.

156 – Teorema

Se um feixe de retas paralelas determina sobre uma secante segmentos iguais, determina também sobre qualquer outra secante segmentos iguais entre si.

Demonstração: Consideremos um feixe de retas paralelas atravessado pelas secantes r e s (Figura 183). Por hipótese, os segmentos AB, BC, CD, etc. determinados na secante r são iguais.

Traçando as paralelas TB', UC', VD', etc. à reta r , teremos, por paralelas entre paralelas:

$$TB' = AB; UC' = BC; VD' = CD, \text{ etc. } \therefore TB' = UC' = VD', \text{ etc.}$$

Assim, os triângulos TUB', UVC', VXD', etc. são iguais, por terem um lado igual e os ângulos respectivamente iguais (lados paralelos).

E, por isso, os segmentos TU, UV, VX, etc. formados na secante s são iguais entre si, como queríamos provar.

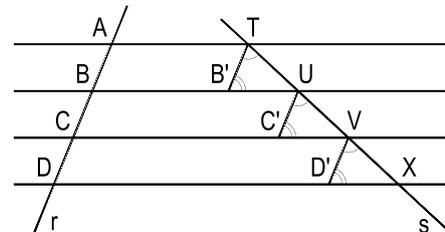


Figura 183

157 – Teorema

Um feixe de retas paralelas determina, sobre duas secantes quaisquer, segmentos proporcionais.

Demonstração: Admitamos que os segmentos formados pelo feixe na secante r sejam múltiplos de uma certa unidade a , isto é, que $AB = ma$ e $BC = na$, onde m e n sejam números inteiros e positivos.

Se traçarmos, pelos pontos de divisão, novas retas paralelas às do feixe dado (Figura 184), pelo teorema anterior sabemos que os diversos segmentos formados sobre a secante s são iguais entre si.

Designando por b cada um desses segmentos, teremos: $TU = mb$ e $UV = nb$.

$$\text{Assim: } \frac{AB}{TU} = \frac{ma}{mb} = \frac{a}{b} \quad \text{e} \quad \frac{BC}{UV} = \frac{na}{nb} = \frac{a}{b}$$

$$\text{Logo: } \frac{AB}{TU} = \frac{BC}{UV} \quad (1)$$

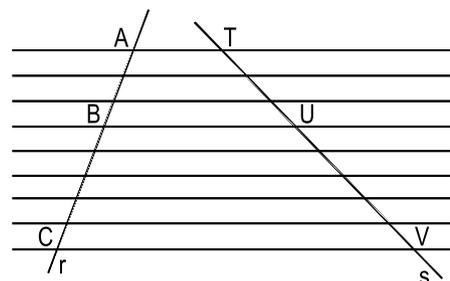


Figura 184

No caso mais geral em que os segmentos formados na primeira secante não admitem uma unidade submúltipla comum, bastará escolher um segmento a tão pequeno que permita desprezar, sem influência nas medidas, os restos de cada medição e operar como acima foi feito.

Chegaríamos, então, à mesma relação (1), demonstrando, pois, o teorema.

158 – Corolário

Toda paralela a um dos lados de um triângulo divide os outros dois lados em partes proporcionais.

De fato, considerando a paralela à secante pelo vértice A do triângulo ABC, temos:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AE}{AF} \quad (\text{Figura 185})$$

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AR}{AS} \quad (\text{Figura 186})$$

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AM}{AN} \quad (\text{Figura 187})$$

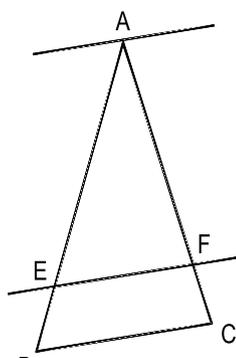


Figura 185

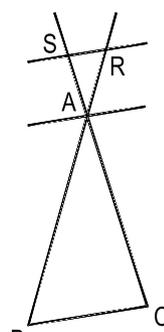


Figura 186

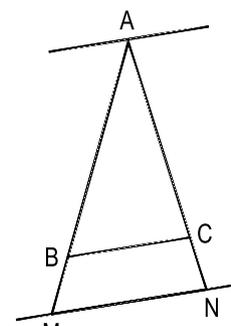


Figura 187

159 – Recíproca

Se uma reta divide dois lados de um triângulo em partes proporcionais, ela é paralela ao terceiro lado.

Demonstração: Consideremos um triângulo ABC e uma reta r (Figura 188) que corte seus lados AB e AC nos pontos E e F, tais que:

$$\frac{AE}{AF} = \frac{EB}{FC} \quad \text{ou} \quad \frac{AE}{EB} = \frac{AF}{FC} \quad (1)$$

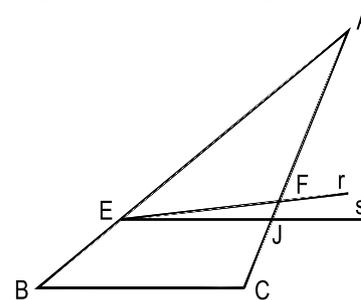


Figura 188

Tracemos, pelo ponto E, a reta s, paralela a BC, que encontre AC em J. Pela proposição direta temos:

$$\frac{AE}{AJ} = \frac{EB}{JC} \quad \text{ou} \quad \frac{AE}{EB} = \frac{AJ}{JC} \quad (2)$$

Comparando (1) e (2), vem: $\frac{AF}{FC} = \frac{AJ}{JC}$

Logo, os pontos F e J devem ser um único, pois só pode existir um ponto que divida o lado AC numa certa razão (número 155). E, em consequência, as retas r e s devem coincidir, ou seja, a reta r considerada inicialmente deve ser paralela a BC, como se queria demonstrar.

160 – Divisão harmônica

Consideremos uma reta orientada \overline{AB} e os pontos M e N a ela pertencentes e tais que:

$$\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = - \frac{\overline{NA}}{\overline{NB}} \quad (\text{Figura 189})$$

Nestas condições, diz-se, por definição, que os quatro pontos constituem uma divisão harmônica e que os pontos M e N são conjugados harmônicos de A e B .

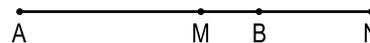


Figura 189

161 – Propriedades da divisão harmônica

1. Os conjugados harmônicos de A e B devem ser um interior ao segmento AB e o outro exterior, para que as razões $\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}}$ e $\frac{\overline{NA}}{\overline{NB}}$, de mesmo módulo, tenham sinais contrários.
2. Para um mesmo segmento \overline{AB} há uma infinidade de pares de conjugados harmônicos M e N , mas fixada a posição de um destes, teremos também fixado a posição do outro.
3. Os divisores harmônicos M e N de um segmento AB pertencem a uma das semirretas que têm origem no ponto médio de AB e que contém A ou B .

De fato, sendo O o ponto médio de AB , admitindo que M fique à direita de O (Figura 190), teremos:



Figura 190

$$\left| \frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} \right| > 1 \quad \therefore \quad \left| \frac{\overline{NA}}{\overline{NB}} \right| > 1 \quad \therefore \quad \overline{NA} > \overline{NB}$$

E, como N deve ser exterior ao segmento AB , N deverá estar à direita de B e, em consequência, à direita de O .

Se, ao contrário, fixássemos M à esquerda de O , com igual raciocínio, provaríamos que N também estaria à esquerda do ponto médio de AB .

4. Quando o conjugado harmônico interno tende ao ponto O médio do segmento AB , o externo afasta-se indefinidamente, sobre a reta AB . De fato, se M tende a O (Figura 191), temos:

$$\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} \rightarrow -1 \quad \therefore \quad \frac{\overline{NA}}{\overline{NB}} \rightarrow +1$$

$$\therefore \quad \overline{NA} \rightarrow \overline{NB}$$

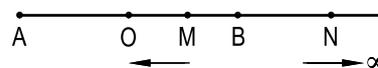


Figura 191

E, para que os segmentos \overline{NA} e \overline{NB} tendam a se igualar, N deve se afastar indefinidamente do extremo B de \overline{AB} .

5. Se dois pontos M e N dividem harmonicamente um segmento AB, reciprocamente, A e B dividem \overline{MN} harmonicamente.

De fato, se, por hipótese, temos $\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = -\frac{\overline{NA}}{\overline{NB}}$

podemos escrever: $\frac{\overline{AM}}{\overline{BM}} = -\frac{\overline{AN}}{\overline{BN}}$ ou $\frac{\overline{AM}}{\overline{AN}} = -\frac{\overline{BM}}{\overline{BN}}$

6. A semi-amplitude do segmento \overline{AB} é igual à média geométrica entre as abscissas dos conjugados harmônicos M e N em relação ao ponto médio de \overline{AB} .

Porque OM e ON devem ter o mesmo sinal (número 161.3), podemos trabalhar com os módulos dos segmentos, escrevendo (Figura 192), pois:

$$\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = \frac{\overline{NA}}{\overline{NB}} \quad \therefore \quad \frac{a+m}{a-m} = \frac{a+n}{n-a}$$

$$\therefore (a+m)(n-a) = (a-m)(a+n)$$

$$\therefore an - a^2 + mn - am = a^2 + an - am - mn$$

$$\therefore -a^2 + mn = a^2 - mn \quad \therefore 2a^2 = 2mn \quad \therefore a^2 = mn$$

Ou seja: $\boxed{\overline{OA}^2 = \overline{OB}^2 = \overline{OM} \cdot \overline{ON}}$

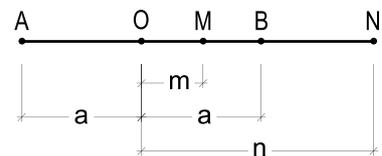


Figura 192

7. Reciprocamente, dados quatro pontos A, B, M e N colineares, sendo O o ponto médio de AB, a existência da relação $\overline{OA}^2 = \overline{OB}^2 = \overline{OM} \cdot \overline{ON}$ implica em que M e N dividam AB harmonicamente.

De fato, é imediato ver que a partir desta média geométrica, com marcha inversa à apresentada no item anterior, chegaríamos à relação:

$$\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = -\frac{\overline{NA}}{\overline{NB}}, \text{ garantindo a divisão.}$$

162 – Média harmônica

Por definição, um valor m é a média harmônica entre outros n valores (a, b, c, d, ...) quando o inverso de m é igual à média aritmética entre os inversos daqueles outros n, isto é, quando existe a relação:

$$\boxed{\frac{1}{m} = \frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \dots}{n}}$$

Assim, em caso particular, m é a média harmônica entre dois valores a e b , quando entre os três existe a relação:

$$\frac{1}{m} = \frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}{2} \quad \text{ou} \quad \boxed{\frac{2}{m} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$$

163 – Teorema

Se dois pontos M e N dividem harmonicamente um segmento AB , este segmento é a média harmônica entre as abscissas de M e de N em relação ao extremo de AB não situado entre eles.

Demonstração: Sejam o segmento AB e os pontos M e N (Figura 193) segundo a hipótese. Queremos provar que: $\frac{2}{AB} = \frac{1}{AM} + \frac{1}{AN}$

Porque os três segmentos em jogo têm a mesma orientação, podemos operar com seus módulos, tendo-se, então:

$$\frac{MA}{MB} = \frac{NA}{NB} \quad \therefore \quad \frac{a}{m-a} = \frac{b}{b-m}$$

$$\therefore a(b-m) = b(m-a)$$

$$\therefore ab - am = bm - ab \quad \therefore 2ab = bm + am$$

Dividindo os dois membros da relação acima pelo produto abm , chegamos a:

$$\frac{2}{m} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \quad \text{ou} \quad \boxed{\frac{2}{AB} = \frac{1}{AM} + \frac{1}{AN}}$$

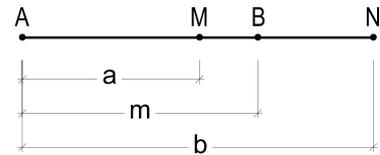


Figura 193

164 – Teorema das bissetrizes

A bissetriz (interna ou externa) relativa a um dos vértices de um triângulo determina, sobre o lado oposto, dois segmentos diretamente proporcionais aos outros dois lados do triângulo.

Demonstração: Sejam CM (Figura 194) e CN (Figura 195) as bissetrizes consideradas e os segmentos BJ a elas paralelos.

Queremos provar que:

$$\frac{MA}{MB} = \frac{NA}{NB} = \frac{CA}{CB}$$

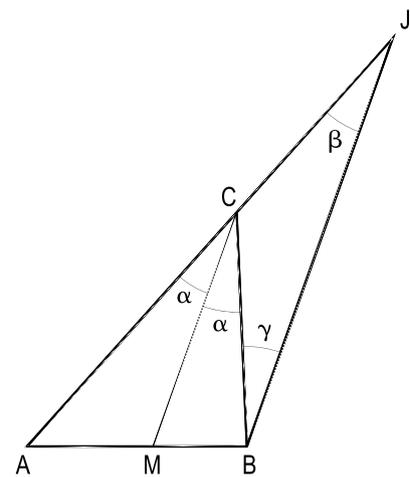


Figura 194

Como: $\beta = \alpha$ (correspondentes)

$\gamma = \alpha$ (alternos internos)

temos: $\beta = \gamma$.

Logo, os triângulos CBJ são isósceles.

E, assim: $CJ = CB$ (1)

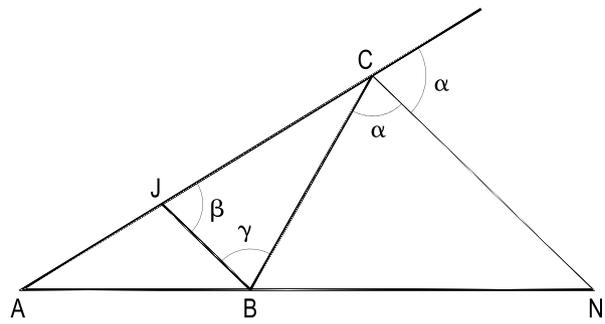


Figura 195

Por linhas proporcionais, podemos escrever:

$$\frac{MA}{MB} = \frac{CA}{CJ} \quad (\text{Figura 194}) \quad \text{e} \quad \frac{NA}{NB} = \frac{CA}{CJ} \quad (\text{Figura 195})$$

Logo, $\frac{MA}{MB} = \frac{NA}{NB} = \frac{CA}{CJ}$

E, pela relação (1), temos: $\boxed{\frac{MA}{MB} = \frac{NA}{NB} = \frac{CA}{CB}}$

165 – Observação

A recíproca é verdadeira porque (número 155) sobre cada um dos lados de um triângulo só pode existir um par de pontos que o divide numa razão de valor absoluto igual à razão entre os outros dois lados. E estes pontos, provou o teorema direto, são os pés das bissetrizes consideradas.

166 – Corolário

Os pés das bissetrizes interna e externa relativas a um dos vértices de um triângulo escaleno dividem harmonicamente o lado oposto.

167 – Círculo de Apollonius

Dados dois pontos fixos A e B, vamos provar que o lugar geométrico dos pontos C, cujas razões entre as distâncias a A e a B têm um mesmo valor dado, é o círculo que tem para diâmetro o segmento formado pelos divisores harmônicos de AB na razão dada.

Para tanto, consideremos os pontos fixos A e B e um ponto genérico C, tal que a razão $\frac{CA}{CB}$ tenha um valor dado k (Figura 196).

Sejam ainda os divisores harmônicos M e N de AB, nessa razão, ou seja:

$$\frac{MA}{MB} = \frac{NA}{NB} = k$$

Porque temos, então, $\frac{MA}{MB} = \frac{NA}{NB} = \frac{CA}{CB}$, podemos concluir que CM e CN são as bissetrizes interna e externa, relativas ao vértice C do triângulo ABC (número 165).

E porque essas bissetrizes devem ser perpendiculares entre si, (número 12.3), o triângulo MCN é retângulo em C, inscrevendo-se, pois, no círculo de diâmetro MN (número 128.2) (Figura 196).

É, então, o lugar geométrico dos pontos procurados C, como se queria demonstrar.

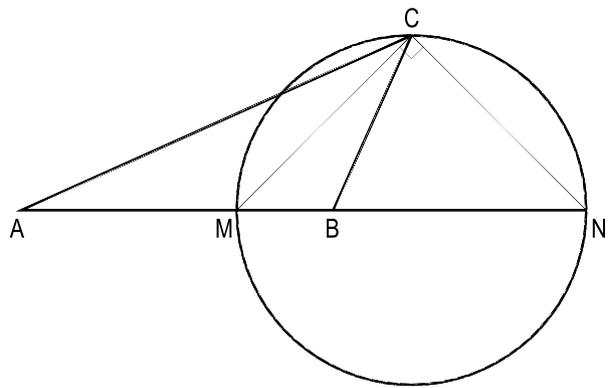


Figura 196

168 – Observações

1. O círculo de diâmetro MN – lugar geométrico dos pontos C, tais que a razão $\frac{CA}{CB}$ seja igual à razão k em que M e N dividem AB (em módulo) – é denominado círculo de Apollonius de AB, para a razão k, diferente de zero e de um.
2. Quando a razão dada é igual a 1 ($CA = CB$), o lugar geométrico estudado é a mediatriz de AB.
3. Quando a razão dada $\frac{CA}{CB}$ é igual a zero, o ponto C é forçado a coincidir com A.

169 – Teorema

Dado um ponto qualquer exterior a um círculo, ao se traçar, dele, as duas tangentes ao círculo, esse ponto e o traço da reta que liga os pontos de contato dessas tangentes sobre o diâmetro que contém o ponto dado dividem harmonicamente tal diâmetro.

Demonstração: Consideremos as tangentes AE e AF ao círculo de diâmetro MN (Figura 197) e tracemos os segmentos EM e EN. Porque os pontos de contato E e F são simétricos em relação à reta AB, M será o ponto médio do arco EF. Logo, EM será bissetriz de \widehat{AEB} .

E, como o triângulo MEN é retângulo em E, EN será a bissetriz do ângulo externo E do triângulo AEB.

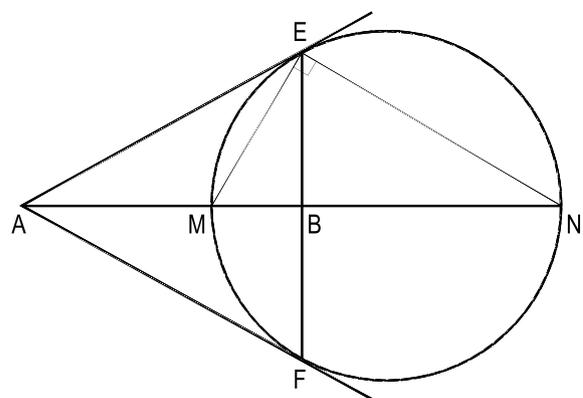


Figura 197

Assim, os pés M e N das bissetrizes relativas a E, no triângulo AEB, dividem harmonicamente a base AB (número 166). E, conforme vimos (número 161.5), reciprocamente, A e B dividem harmonicamente o diâmetro MN, como se queria demonstrar.

CAPÍTULO X

SEMELHANÇA

170 – Triângulos semelhantes

Dois triângulos são semelhantes quando têm seus lados respectivamente proporcionais. Os lados, vértices, cevianas, etc. correspondentes são, então, denominados homólogos.

A razão existente entre dois lados homólogos denomina-se razão de semelhança dos triângulos.

171 – Observação

Como decorrência imediata da definição podemos concluir que a razão entre os perímetros de dois triângulos semelhantes é igual à razão de semelhança existente entre eles.

De fato, sendo a, b, c e $2p$ os lados e o perímetro de um dos triângulos e a', b', c' e $2p'$ seus homólogos, para o segundo, podemos escrever:

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \frac{a + b + c}{a' + b' + c'} = \frac{2p}{2p'}$$

172 – Teorema

Uma paralela a um dos lados de um triângulo forma, com os outros dois, um triângulo semelhante ao primeiro.

Demonstração: Consideremos o triângulo ABC e a reta EF, paralela a BC, que dá formação ao triângulo AEF (Figura 198).

Por linhas proporcionais (número 158), temos:

$$\frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC} \quad (1)$$

Traçando EJ, paralelo a AC, vem, da mesma forma:

$$\frac{AE}{AB} = \frac{JC}{BC} \quad (2)$$

Reunindo (1) e (2):

$$\frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC} = \frac{JC}{BC} \quad (3)$$

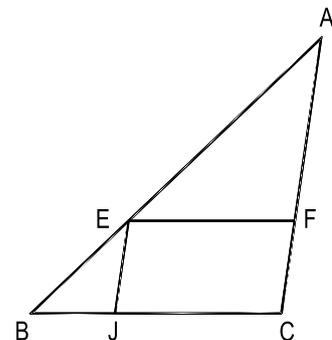


Figura 198

Mas, como $JC = EF$ (paralelas entre paralelas), a relação (3) se escreve:

$$\frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC} = \frac{EF}{BC}$$

Então, uma paralela a um dos lados de um triângulo forma, com os outros dois, um triângulo semelhante ao primeiro.

173 – Observação

O teorema é válido mesmo quando a paralela EF considerada não passa entre A e BC , pois o raciocínio utilizado na demonstração do teorema permanece correto ainda para as posições indicadas na Figura 199.

É claro, no entanto, que, quando a paralela considerada contém um dos vértices do triângulo, não se aplica o teorema, uma vez que, então, deixa de se formar o segundo triângulo.

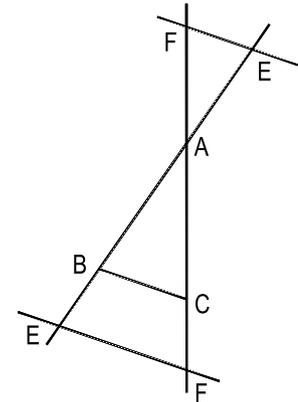


Figura 199

174 – Teorema

Os ângulos de dois triângulos semelhantes são respectivamente iguais.

Demonstração: Sejam os triângulos semelhantes ABC e RST (Figura 200).

Consideremos ainda o triângulo AEF , tal que, por construção, AE seja igual a RS e EF seja paralelo a BC . Podemos, então, escrever (número 172):

$$\frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC} = \frac{EF}{BC}$$

E, como fizemos $AE = RS$,

$$\frac{RS}{AB} = \frac{AF}{AC} = \frac{EF}{BC} \quad (1)$$

Mas, da própria hipótese, temos:

$$\frac{RS}{AB} = \frac{RT}{AC} = \frac{ST}{BC} \quad (2)$$

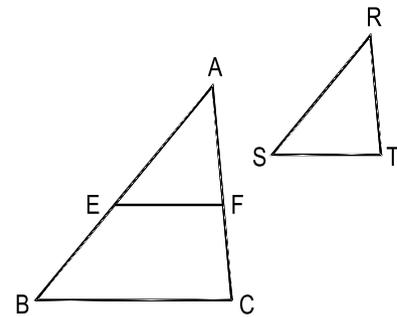


Figura 200

Reunindo as relações (1) e (2), concluímos que: $AF = RT$ e $EF = ST$.

Assim, os triângulos RST e AEF serão iguais e, em consequência, terão seus ângulos respectivamente iguais.

Como, finalmente, os ângulos do triângulo AEF são respectivamente iguais aos do triângulo ABC , temos:

$$\hat{A} = \hat{R}, \quad \hat{B} = \hat{S} \quad \text{e} \quad \hat{C} = \hat{T}$$

Então, os ângulos de dois...

175 – Recíproca

Dois triângulos que possuem ângulos respectivamente iguais são semelhantes.

Bastaria garantir, na hipótese, a igualdade de dois ângulos respectivos dos triângulos, pois, então, por diferença, os terceiros também seriam, necessariamente, iguais.

Demonstração: Sejam os triângulos ABC e RST (Figura 201), tais que, $\hat{A} = \hat{R}$, $\hat{B} = \hat{S}$ e $\hat{C} = \hat{T}$.

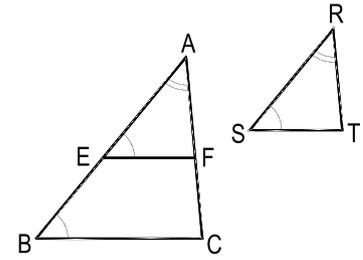


Figura 201

Consideremos $AE = RS$ e tracemos EF paralela a BC.

Como correspondentes, $\hat{E} = \hat{B}$. Logo, $\hat{E} = \hat{S}$. Assim, os triângulos AEF e RST serão iguais (1º caso). E, como AEF é semelhante a ABC (número 172), RST também o será.

Então, dois triângulos que possuem ângulos respectivamente iguais são semelhantes.

176 – Observação

É evidente que, em caso particular, dois triângulos que possuam ângulos respectivamente iguais podem ser iguais (basta que possuam um par de lados correspondentes iguais). Podemos, no entanto, considerar válido o teorema, ainda neste caso, desde que entendamos a igualdade como semelhança de razão igual a um.

177 – Teorema

Dois triângulos que possuem dois lados respectivamente proporcionais e os ângulos por eles compreendidos iguais são semelhantes.

Demonstração: Sejam os triângulos ABC e RST, tais que, por hipótese:

$$\frac{RS}{AB} = \frac{RT}{AC} \quad \text{e} \quad \hat{R} = \hat{A} \quad (\text{Figura 202}).$$

Consideremos $AE = RS$, bem como o segmento EF paralelo a BC. Teremos, então (número 172):

$$\frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC} \quad \therefore \quad \frac{RS}{AB} = \frac{AF}{AC}$$

Comparando esta relação com a hipótese, vem:

$$\frac{RT}{AC} = \frac{AF}{AC} \quad \therefore \quad RT = AF$$

Assim, os triângulos AEF e RST são iguais (2º caso). E como AEF é semelhante a ABC (número 172), RST também o é.

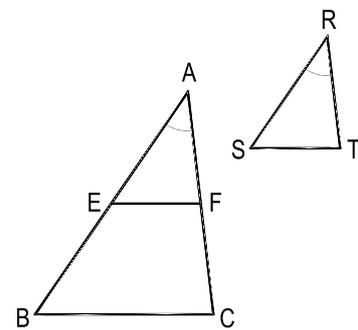


Figura 202

Então, dois triângulos que possuem...

178 – Casos de semelhança de triângulos

Do que foi provado, podemos enunciar os dois seguintes casos de semelhança para triângulos:

1. Dois triângulos são semelhantes quando possuem dois ângulos respectivamente iguais (número 175).
2. Dois triângulos são semelhantes quando possuem dois lados respectivamente proporcionais e os ângulos por eles compreendidos iguais (número 177).

Grande parte dos autores cita ainda um terceiro caso de semelhança que é a própria definição por nós apresentada, ou seja, dois triângulos são semelhantes quando possuem os lados respectivamente proporcionais.

O símbolo \sim é o utilizado para indicar semelhança.

E, para dois triângulos ABC e RST semelhantes, usa-se anotar: $\Delta ABC \sim \Delta RST$.

179 – Teorema

Dois triângulos que possuem lados respectivamente paralelos ou perpendiculares são semelhantes.

Demonstração: Porque os ângulos correspondentes dos triângulos têm, por hipótese, lados paralelos ou perpendiculares, sabemos que eles poderiam ser iguais ou suplementares (números 60 e 62). Mas, como a soma dos ângulos internos dos dois triângulos é igual a 360° , não se pode supor que dois ou três pares de ângulos correspondentes sejam suplementares (porque, assim, a soma dos seis ângulos ultrapassaria 360°).

Desta forma, pode-se garantir que, ao menos dois pares de ângulos correspondentes, nos dois triângulos, são iguais (o que, enfim, obriga a igualdade dos terceiros).

E, se os triângulos possuem, com obrigação, dois (ou três) pares de ângulos respectivamente iguais eles são semelhantes (número 175).

Então, dois triângulos...

180 – Teorema

Quando as razões entre um dos catetos e a hipotenusa de dois triângulos retângulos são iguais, os triângulos são semelhantes.

Demonstração: Sejam os triângulos retângulos ABC e RST (Figura 203), segundo a hipótese, isto é, tais que: $\frac{TR}{TS} = \frac{CA}{CB}$

Tomemos, sobre a hipotenusa CB, o ponto E, tal que $CE = TS$, e tracemos EF paralelo a BA.

Como $\triangle CEF \sim \triangle ABC$ (número 172):

$$\frac{CF}{CE} = \frac{CA}{CB} \quad \text{ou} \quad \frac{CF}{TS} = \frac{CA}{CB}$$

Comparando esta relação com a da hipótese, vem:

$$\frac{TR}{TS} = \frac{CF}{TS} \quad \therefore \quad TR = CF$$

Assim, os triângulos CEF e RST são iguais, por terem um cateto e a hipotenusa respectivamente iguais. Em consequência, os triângulos ABC e RST são semelhantes.

Então, quando as razões...

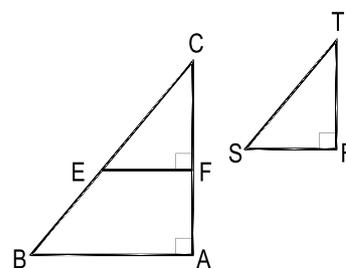


Figura 203

181 – Teorema

A razão entre dois segmentos homólogos quaisquer de dois triângulos semelhantes é igual à razão de semelhança dos triângulos.

Demonstração: Sejam os triângulos RST e ABC semelhantes na razão k , isto é, tais que $\frac{RS}{AB} = \frac{RT}{AC} = k$ (Figura 204). (1)

Consideremos os segmentos homólogos EF e PQ, que permitem escrever:

$$\frac{AE}{AB} = \frac{RP}{RS} \quad (2)$$

$$\frac{AF}{AC} = \frac{RQ}{RT} \quad (3)$$

Trocando os extremos das proporções (2) e (3), vem:

$$\frac{RS}{AB} = \frac{RP}{AE} \quad (4)$$

$$\frac{RT}{AC} = \frac{RQ}{AF} \quad (5)$$

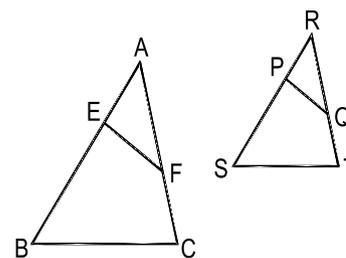


Figura 204

E, então, a simples comparação das relações (4) e (5) com (1) dá:

$$\frac{RP}{AE} = \frac{RQ}{AF} = k$$

Esta proporção e a igualdade, por hipótese, dos ângulos A e R garantem a semelhança entre os triângulos RPQ e AEF, naquela razão k .

Assim, chegamos a $\frac{PQ}{EF} = k$, o que demonstra o teorema.

182 – Corolários

1. A razão entre duas cevianas (alturas, medianas, etc.) homólogas de dois triângulos semelhantes é igual à razão de semelhança dos triângulos.
2. A razão entre os raios dos círculos inscritos, circunscritos ou exinscritos (homólogos) em dois triângulos semelhantes é igual à razão de semelhança dos triângulos.

183 – Teorema

Um feixe de retas concorrentes determina, sobre duas paralelas quaisquer, segmentos proporcionais.

Demonstração: Consideremos um feixe de retas concorrentes num ponto P e as paralelas r e s (Figura 205) que deixem, ou não, entre elas o ponto de convergência do feixe.

Para ambos os casos podemos escrever (número 182.1):

$$\Delta PAB \sim \Delta PRS \rightarrow \frac{AB}{RS} = \frac{PH}{PH'} \quad (1)$$

$$\Delta PBC \sim \Delta PST \rightarrow \frac{BC}{ST} = \frac{PH}{PH'} \quad (2)$$

$$\Delta PCD \sim \Delta PTU \rightarrow \frac{CD}{TU} = \frac{PH}{PH'} \quad (3)$$

As relações (1), (2) e (3) fornecem:

$$\frac{AB}{RS} = \frac{BC}{ST} = \frac{CD}{TU}$$

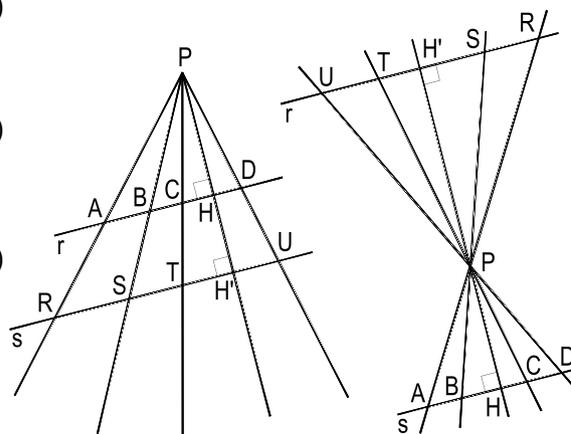


Figura 205

Então, um feixe de retas concorrentes determina, sobre duas paralelas quaisquer, segmentos proporcionais.

É claro que nenhuma das paralelas deve passar pelo ponto de convergência do feixe.

184 – Polígonos semelhantes

Dois polígonos são, por definição, semelhantes quando seus lados são respectivamente proporcionais e seus ângulos são respectivamente iguais.

As definições apresentadas para elementos homólogos e razão de semelhança permanecem válidas para os polígonos. Assim também – e a comprovação é a mesma indicada para os triângulos (número 171) – a razão entre os perímetros de dois polígonos semelhantes é igual à razão de semelhança entre eles.

É claro também que dois polígonos regulares de mesmo gênero são necessariamente semelhantes ou, em caso particular, iguais. De fato, por serem regulares, serão equiláteros e equiângulos, o que assegura as condições impostas, por definição, para a existência da semelhança.

185 – Teorema

Dois polígonos semelhantes podem sempre ser decompostos em números iguais de triângulos consecutivos respectivamente semelhantes.

Demonstração: Sejam os polígonos ABCDE e RSTUZ (Figura 206), por hipótese, semelhantes e tracemos as diagonais relativas aos vértices homólogos A e R, que dividem cada um deles em um mesmo número de triângulos.

Designando por k a razão de semelhança dos polígonos, podemos escrever:

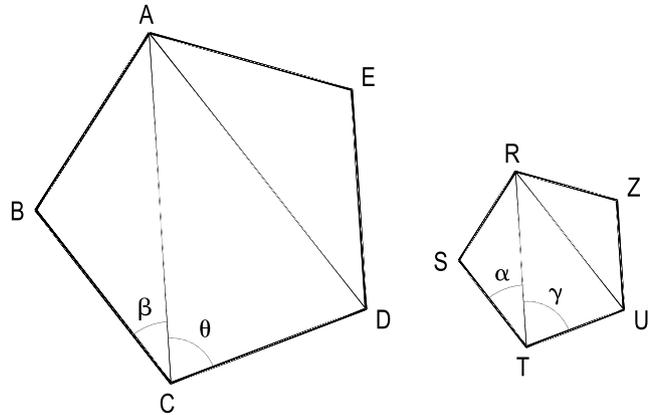


Figura 206

$$\frac{RS}{AB} = \frac{ST}{BC} = k \text{ e } \hat{S} = \hat{B} \quad \therefore \quad \Delta RST \sim \Delta ABC \quad (2^\circ \text{ caso})$$

$$\text{Logo: } \frac{RT}{AC} = k \text{ e } \hat{\alpha} = \hat{\beta}$$

E como, por hipótese, $\frac{TU}{CD} = k$ e $\hat{C} = \hat{T}$, concluímos que:

$$\frac{RT}{AC} = \frac{TU}{CD} = k \text{ e } \hat{\gamma} = \hat{\theta} \quad \therefore \quad \Delta RTU \sim \Delta ACD \quad (2^\circ \text{ caso})$$

$$\text{Logo: } \frac{RU}{AD} = k$$

E como, por hipótese, $\frac{UZ}{DE} = \frac{ZR}{EA} = k$, concluímos que:

$$\frac{RU}{AD} = \frac{UZ}{DE} = \frac{ZR}{EA} = k \quad \therefore \quad \Delta RUZ \sim \Delta ADE$$

Então, dois polígonos semelhantes...

186 – Observações

1. É claro que o teorema é válido para polígonos de quaisquer gêneros, pois a demonstração apresentada acima continua, por repetição, válida.
2. A razão de semelhança dos pares de triângulos em que foram divididos os polígonos é igual à existente entre os polígonos, porque é a mesma existente entre os pares de lados homólogos dos polígonos.

187 – Casos de semelhança de polígonos

1. Dois polígonos de gênero n são semelhantes quando possuem $(n - 1)$ ângulos respectivamente iguais e $(n - 2)$ lados consecutivos respectivamente proporcionais.
2. Dois polígonos de gênero n são semelhantes quando possuem $(n - 2)$ ângulos consecutivos respectivamente iguais e os $(n - 1)$ lados que os compreendem respectivamente proporcionais.
3. Dois polígonos de gênero n são semelhantes quando possuem $(n - 3)$ ângulos consecutivos respectivamente iguais e os n lados respectivamente proporcionais.

Os processos de prova seguem o mesmo encadeamento apresentado no teorema precedente (número 185).

188 – Teorema

A razão entre dois segmentos homólogos de dois polígonos semelhantes é igual à razão de semelhança dos polígonos.

Demonstração: Sejam os polígonos RSTZY e ABCEF semelhantes na razão k e os segmentos homólogos MN e JL (Figura 207).

Porque os polígonos podem ser decompostos em triângulos homólogos, na mesma razão k (números 185 e 186.2), os segmentos MN e JL são homólogos num par desses triângulos e, portanto (número 181), guardam a mesma razão k , tal como se queria demonstrar.

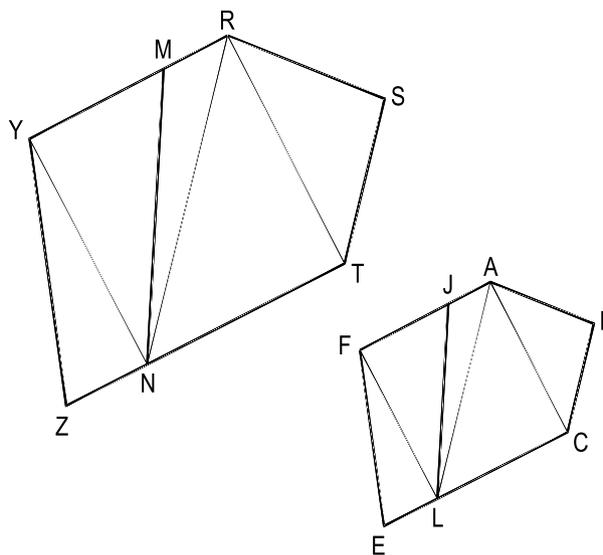


Figura 207

189 – Figuras semelhantes

Duas figuras, curvas ou mistas, são semelhantes quando elas são as posições limites ocupadas por polígonos ou linhas poligonais semelhantes nelas inscritas, cujos gêneros crescem indefinidamente, segundo leis iguais.

A razão de semelhança existente entre esses polígonos, e invariável com o aumento do gênero, é denominada razão de semelhança entre as figuras limites.

É claro que, assim sendo, a razão entre os perímetros de duas figuras semelhantes quaisquer é igual à razão de semelhança existente entre elas.

CAPÍTULO XI

HOMOTETIA

190 – Modificações planas

Figuras planas – e, naturalmente, não só – podem sofrer modificações por aplicação de procedimentos lógicos e estruturados ou por ações aleatórias, estas, por suas diversidades e falta de organização, naturalmente sem maior consideração no presente trabalho.

Quanto às lógicas, elas podem implicar em simples alterações de posição, sem mudanças de forma, o que ocorre, por exemplo, nas translações, rotações e simetrias, axiais ou centrais, as mais comuns nessa família, ou até em mudanças de forma e de grandeza, como nas subtrações, adições e na afinidade plana e, mesmo, com alterações de grandeza, mas não de forma, como na homotetia.

Numa translação, todos os pontos de uma figura F movimentam-se segundo segmentos de reta paralelos, de amplitudes iguais, num mesmo sentido, produzindo outra figura F' , naturalmente igual a F (Figura 208).

Numa rotação, todos os pontos de uma figura F movimentam-se segundo arcos de círculo de amplitudes angulares iguais, num mesmo sentido, em torno de um ponto fixo O , o centro da rotação (Figura 209). F e F' são, evidentemente, iguais.

É claro que, se a rotação for completa, isto é, se todos os arcos forem de 360° , F' virá a coincidir com F .

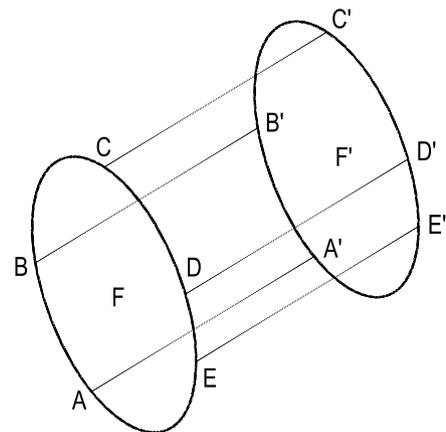


Figura 208

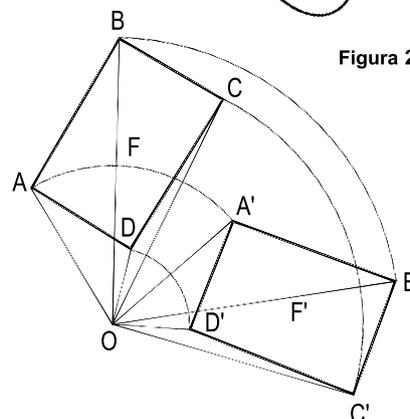


Figura 209

Numa simetria axial (Figura 210), todos os pontos de uma figura F produzem simétricos em relação a uma reta fixa e , de seu plano, os quais constituem a figura transformada F' , simétrica de F em relação à reta e , denominada eixo de simetria. F' é, obviamente, igual a F , embora com disposição invertida.

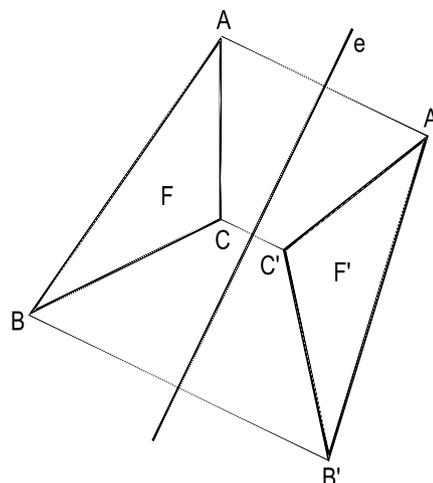


Figura 210

Numa simetria central, os pontos de uma figura F originam, por simetria em relação a um ponto fixo O (Figura 211), a figura F' . Tal como na simetria axial, também neste caso, a figura transformada F' , igual à original F , apresenta-se invertida em relação a esta. O ponto fixo O é denominado centro da simetria.

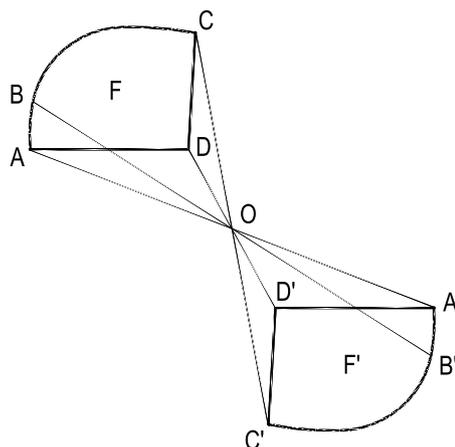


Figura 211

Modificações por subtração ou por adição ocorrem, conforme suas próprias denominações, ou por supressão de parte da figura inicial F (Figura 212), criando a nova – e menor – F' , ou por acréscimo de uma nova figura A à original F , dando formação à nova F' , transformada e maior (Figura 213). Estas duas modificações não resultam, como nas anteriormente citadas, de movimentos das figuras originais, implicando, por isso, apenas em alterações de grandeza e de forma.

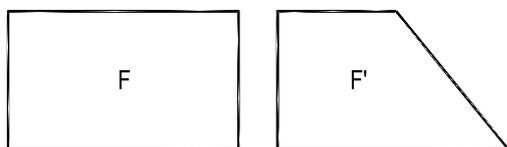


Figura 212

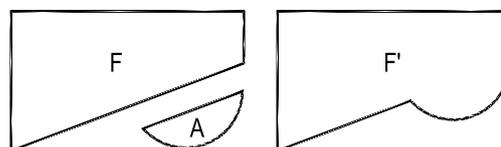


Figura 213

A afinidade plana – apresentada adiante, no Capítulo XVII, Elipse (número 351 e seguintes), e muito mais aprofundada em outra obra do autor (*Cônicas*) – consiste em transformar os pontos de uma figura por meio do traçado de segmentos de reta paralelos, em obediência à determinada lei de formação.

191 – Homotetia

Homotetia é a transformação de uma figura F em outra F' , de modo tal que, a partir de um ponto fixo O , todos os pontos de F sejam transformados em outros de F' , sempre alinhados com seus correspondentes de F e com aquele ponto fixo O , obedecendo a uma razão constante entre cada par de segmentos correspondentes e com origem em O (Figura 214).

Este ponto O é, então, denominado centro da homotetia e aquela razão constante a razão da homotetia.

Os pares de pontos correspondentes como A e A' , B e B' , C e C' , etc. na Figura 214, assim como os elementos correspondentes (AB e $A'B'$, BC e $B'C'$, AD e $A'D'$, etc.) e as próprias figuras F e F' , são denominados homotéticos.

Uma homotetia pode implicar numa ampliação (da figura F na F') ou numa redução (de F' para F), como indicado na Figura 214.

E pode ser positiva, ou direta, quando, orientadas as retas que passam pelo centro de homotetia O , os pares de segmentos homotéticos com origem em O têm mesmo sentido, como na Figura 214. Ao contrário, a homotetia é dita inversa ou negativa, quando tais segmentos homotéticos, com origem em O , têm sentidos contrários (Figura 215).

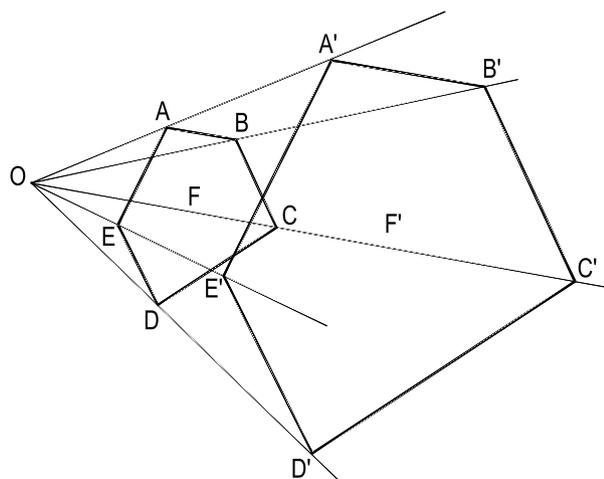


Figura 214

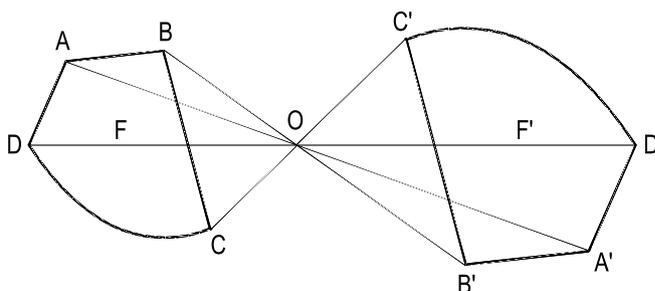


Figura 215

192 – Observações

1. Na homotetia direta, o centro da homotetia é exterior a todo par de elementos homotéticos (Figura 214).
2. Na homotetia inversa, o centro da homotetia se situa entre todos os pares de elementos homotéticos (Figura 215).

3. Sempre que o módulo da razão R da homotetia é maior que 1 há uma ampliação. Se $R > 1$, a ampliação é direta; se $R < -1$, a ampliação é inversa.
4. No caso particular em que a razão R da homotetia é igual a -1 , as figuras homotéticas são simétricas em relação ao centro da homotetia. Neste caso, não há ampliação nem redução.

193 – Teorema

Dois segmentos de reta homotéticos são paralelos e a razão entre eles é igual ao módulo da razão dessa homotetia.

Demonstração: Consideraremos o segmento $A'B'$, homotético de AB , para o centro O , numa razão R (Figura 216).

Pela própria hipótese, temos

$$\frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = R$$

Assim, são semelhantes os triângulos OAB e $OA'B'$ (Figura 216), por terem dois lados proporcionais e o ângulo compreendido igual.

E, então, seus terceiros lados AB e $A'B'$ hão de ser paralelos, guardando a mesma razão da semelhança – o módulo do valor de R .

Logo, dois segmentos de reta homotéticos...

194 – Observações

1. A recíproca é verdadeira, salvo se os dois segmentos forem iguais, quando a homotetia direta degenera em translação e a inversa em simetria central. A demonstração se faz, como no teorema direto, apoiada na semelhança dos triângulos OAB e $OA'B'$ (Figura 216), por terem os ângulos respectivamente iguais.
2. Como corolário natural, vem que dois triângulos homotéticos são semelhantes, na própria razão dessa homotetia (Figura 217).
3. E, como consequência imediata, são semelhantes dois polígonos homotéticos, na mesma razão dessa homotetia (Figura 218). Pelo simples fato de serem os dois polígonos decomponíveis em igual número de triângulos homotéticos.

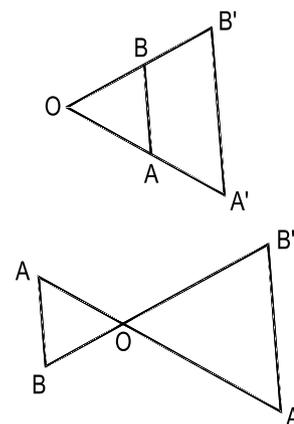


Figura 216

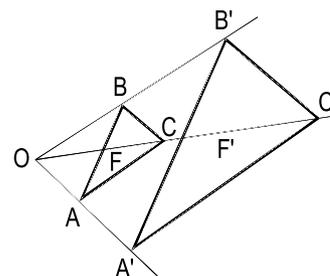


Figura 217

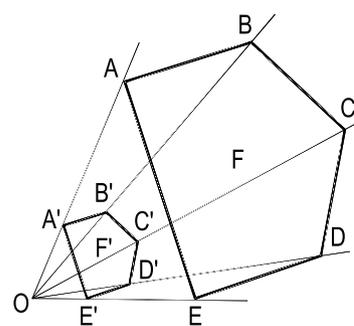


Figura 218

4. Generalizando, duas figuras – retilíneas, curvas ou mistas – homotéticas são sempre semelhantes, na mesma razão dessa homotetia (Figura 219).

Porque podem ser consideradas como posições limites de dois polígonos nelas inscritos, quando seus gêneros crescem indefinidamente.

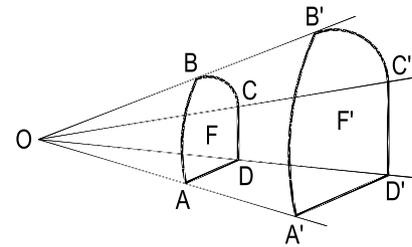


Figura 219

195 – Teorema

Duas figuras homotéticas de uma terceira são homotéticas entre si.

Demonstração: Consideremos, inicialmente, os segmentos de reta $A'B'$ e $A''B''$ homotéticos de AB a partir, respectivamente, dos centros O_1 e O_2 e provemos que $A'B'$ e $A''B''$ são homotéticos a partir de um terceiro centro O_3 (Figura 220).

Por serem paralelos, os segmentos de reta $A'B'$ e $A''B''$ são, naturalmente, homotéticos (número 194.1). E o centro dessa homotetia é o ponto O_3 , de concurso das retas $A'A''$ e $B'B''$.

Passemos, agora, a considerar os triângulos $A'B'C'$ e $A''B''C''$, homotéticos de ABC , respectivamente para os centros de homotetia O_1 e O_2 (Figura 221).

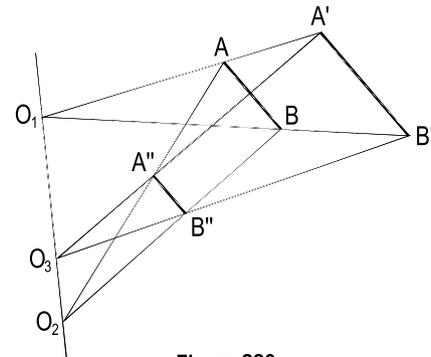


Figura 220

É claro que, por serem semelhantes a ABC , $A'B'C'$ e $A''B''C''$ são semelhantes entre si. E, mais que isso, por terem lados respectivamente paralelos, são homotéticos (número 194.1), agora, em relação ao centro O_3 (Figura 221).

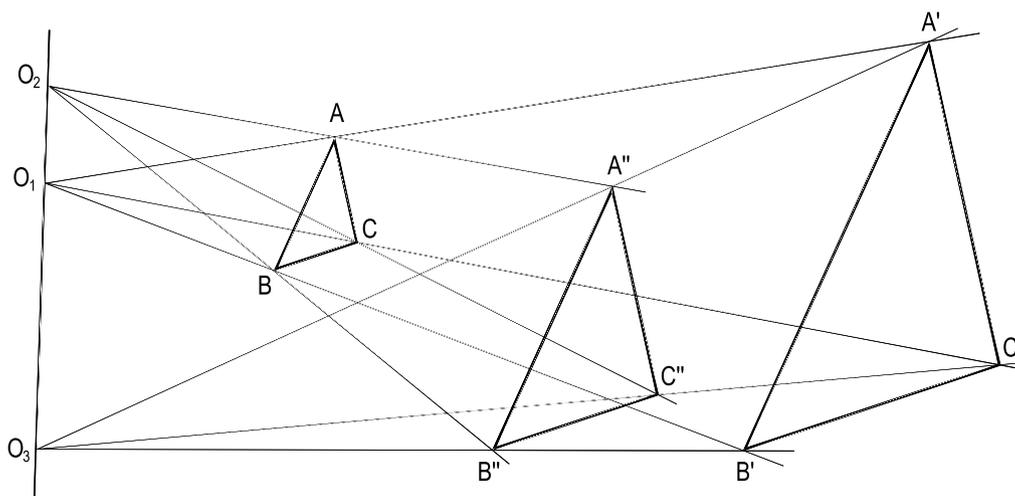


Figura 221

E, enfim, generalizando para linhas poligonais, polígonos e figuras curvas ou mistas (Figura 222), com o mesmo encadeamento apresentado nas observações do número 194, podemos concluir que duas figuras homotéticas de uma terceira são homotéticas entre si, como se queria demonstrar.

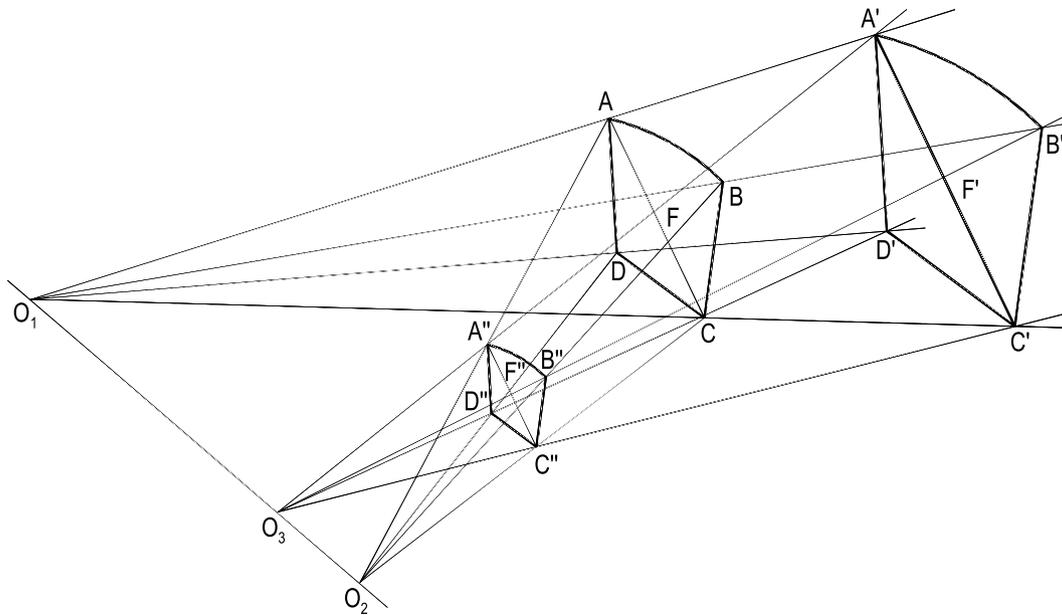


Figura 222

196 – Observações

1. A razão de homotetia entre duas figuras homotéticas de uma terceira, respectivamente, nas razões R_1 e R_2 , é igual à razão entre R_1 e R_2 .

Porque, por exemplo, no caso de triângulos (Figura 221), pode-se escrever:

$$\frac{A'B'}{AB} = R_1 \quad \text{e} \quad \frac{A''B''}{AB} = R_2$$

Por divisão, $\frac{A'B'}{A''B''} = \frac{R_1}{R_2}$

E, seguindo o mesmo processo desenvolvido no teorema número 195, chegaríamos à generalização da proposição para duas figuras, de quaisquer naturezas, homotéticas de uma terceira.

2. É claro que, em caso particular, se R_1 e R_2 tiverem módulos iguais, as duas figuras homotéticas da original resultarão iguais, em disposições idênticas ($R = 1$) ou invertidas ($R = -1$), implicando, respectivamente, numa translação ou numa simetria central.

CAPÍTULO XII

RELAÇÕES MÉTRICAS NOS TRIÂNGULOS

197 – Teorema

Em todo triângulo retângulo:

1. Cada cateto é a média geométrica entre a hipotenusa e sua projeção sobre a hipotenusa.
2. A altura relativa à hipotenusa é a média geométrica entre as projeções dos catetos sobre a hipotenusa.

Demonstração: Consideremos um triângulo retângulo ABC e tracemos a altura AH, relativa à hipotenusa (Figura 223). Designemos por a, b e c seus lados, por h a altura considerada e por m e n as projeções dos catetos sobre a hipotenusa a.

Porque $\widehat{ABC} = \widehat{CAH}$ (agudos com lados respectivamente perpendiculares), podemos escrever:

$$\triangle CAH \sim \triangle ABC \quad \therefore \frac{b}{a} = \frac{m}{b} \quad \therefore \boxed{b^2 = am} \quad (1)$$

$$\triangle BAH \sim \triangle ABC \quad \therefore \frac{c}{a} = \frac{n}{c} \quad \therefore \boxed{c^2 = an} \quad (2)$$

$$\triangle CAH \sim \triangle BAH \quad \therefore \frac{h}{n} = \frac{m}{h} \quad \therefore \boxed{h^2 = mn} \quad (3)$$

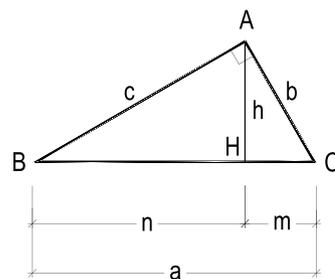


Figura 223

As relações (1), (2) e (3) demonstram o teorema.

198 – Relações métricas nos triângulos retângulos

A partir do teorema acima demonstrado, podemos obter uma série de relações métricas para os triângulos retângulos. A saber:

1. Somando membro a membro as relações (1) e (2), vem: $b^2 + c^2 = am + an$

$$\therefore b^2 + c^2 = a(m + n) = a \cdot a \quad \therefore \boxed{a^2 = b^2 + c^2} \quad (4)$$

2. E, por subtração, as mesmas relações (1) e (2) fornecem:

$$b^2 - c^2 = am - an = a(m - n)$$
$$\therefore b^2 - c^2 = (m + n)(m - n) \quad \therefore \boxed{b^2 - c^2 = m^2 - n^2} \quad (5)$$

3. Multiplicando, membro a membro, as relações (1), (2) e (3), vem:

$$b^2 c^2 (mn) = (am)(an)h^2$$
$$\therefore b^2 c^2 (mn) = a^2 h^2 (mn) \quad \therefore \boxed{bc = ah} \quad (6)$$

4. Por divisão, (1) e (2) dão:

$$\frac{b^2}{c^2} = \frac{am}{an} \quad \therefore \boxed{\frac{b^2}{c^2} = \frac{m}{n}} \quad (7)$$

5. Elevando ao quadrado os dois membros da relação (6), temos:

$$b^2 c^2 = a^2 h^2 \quad \text{ou} \quad \frac{1}{b^2 c^2} = \frac{1}{a^2 h^2}$$
$$\therefore \frac{1}{h^2} = \frac{a^2}{b^2 c^2} = \frac{b^2 + c^2}{b^2 c^2}$$
$$\therefore \frac{1}{h^2} = \frac{c^2}{b^2 c^2} + \frac{b^2}{b^2 c^2}$$

Simplificando, vem: $\boxed{\frac{1}{h^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}} \quad (8)$

199 – Enunciados das relações demonstradas no item anterior

1. O quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos.
2. A diferença entre os quadrados dos catetos é igual à diferença entre os quadrados de suas projeções sobre a hipotenusa.
3. O produto dos catetos é igual ao produto da hipotenusa pela altura.
4. A razão entre os quadrados dos catetos é igual à razão entre suas projeções sobre a hipotenusa.
5. O inverso do quadrado da altura é igual à soma dos inversos dos quadrados dos catetos.

200 – Triângulos retângulos particulares

1. Todo triângulo retângulo que tem os catetos proporcionais aos números 3 e 4 tem a hipotenusa proporcional a 5.

Tais triângulos são denominados pitagóricos.

De fato, podemos (número 198.1) escrever:

$$a^2 = b^2 + c^2 = (3k)^2 + (4k)^2 = 9k^2 + 16k^2 = 25k^2 \quad \therefore \quad \boxed{a = 5k}$$

Reciprocamente, todo triângulo retângulo que tem a hipotenusa proporcional a 5 e um cateto proporcional a 3 (ou a 4) tem o outro cateto proporcional a 4 (ou a 3).

E mais, todo triângulo que tem lados proporcionais a 3, 4 e 5 é necessariamente retângulo. Porque, assim sendo, seus lados atendem à relação $a^2 = b^2 + c^2$ (número 198.1) que, como veremos adiante (número 202), é exclusiva dos triângulos retângulos.

2. Triângulos retângulos isósceles.

Em todo triângulo retângulo isósceles a razão entre a hipotenusa e o cateto é igual a $\sqrt{2}$.

De fato, designando por b cada um dos catetos e por a a hipotenusa, podemos (número 198.1) escrever:

$$a^2 = b^2 + b^2 = 2b^2$$

$$\therefore \quad a = b \sqrt{2} \quad \therefore \quad \boxed{\frac{a}{b} = \sqrt{2}}$$

3. Todo triângulo retângulo que possui ângulos agudos respectivamente iguais a 30° e 60° tem lados diretamente proporcionais a 1, $\sqrt{3}$ e 2. Isto é, seu menor cateto vale a metade da hipotenusa e a razão entre os catetos é igual a $\sqrt{3}$.

De fato, consideremos o triângulo retângulo ABC, com ângulos $C = 30^\circ$ e $B = 60^\circ$ (Figura 224), e observemos que, porque a mediana AM relativa à hipotenusa vale a metade desta (número 76), o triângulo AMB é equilátero.

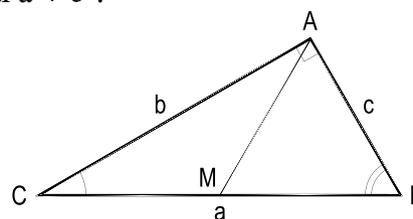


Figura 224

E, portanto, $AB = MB$. Assim, pode-se anotar:

$$\boxed{c = \frac{a}{2}}$$

E, além disso (número 198.1),

$$b^2 = a^2 - c^2 = (2c)^2 - c^2 = 4c^2 - c^2 = 3c^2 \quad \therefore \quad \boxed{b = c\sqrt{3}}$$

As recíprocas são verdadeiras, porque:

- a. Se o cateto b vale $c\sqrt{3}$ (Figura 224), o cálculo da hipotenusa a fornece (número 198.1)

$$a^2 = (c\sqrt{3})^2 + c^2 = 4c^2.$$

Logo, $c = \frac{a}{2}$, o que implica em ser equilátero o triângulo AMB . Ou seja, que o ângulo B mede 60° .

- b. Se a hipotenusa a vale o dobro do cateto c (Figura 224), recaímos na situação do item anterior, já que o triângulo AMB é necessariamente equilátero, visto que $AB = MB$, o que permite (número 198.1) escrever:

$$(2c)^2 = b^2 + c^2$$

$$\therefore \quad 4c^2 = b^2 + c^2 \quad \therefore \quad 3c^2 = b^2 \quad \therefore \quad \boxed{b = c\sqrt{3}}$$

4. Todo triângulo retângulo que tem catetos proporcionais aos números 1 e 2 tem a hipotenusa proporcional a $\sqrt{5}$.

De fato, sendo b e c os catetos, e tais que $b = 2c$, a hipotenusa a valerá (número 198.1):

$$a^2 = b^2 + c^2 = (2c)^2 + c^2 = 4c^2 + c^2 = 5c^2 \quad \therefore \quad \boxed{a = c\sqrt{5}}$$

A recíproca é verdadeira. De fato, todo triângulo que tenha lados proporcionais aos números 1, 2 e $\sqrt{5}$ atenderá à relação 198.1, já que $(\sqrt{5})^2 = 1^2 + 2^2$, o que implica em ser ele retângulo (número 202).

5. Generalizando o abordado no item 1, acima, vale comentar que há uma infinidade de trincas de números inteiros que atendem à relação 198.1, denominados ternos pitagóricos, como, por exemplo, os conjuntos (5, 12 e 13), (7, 24 e 25), (8, 15 e 17), (9, 40 e 41), (11, 60 e 61), (12, 35 e 37), (13, 84 e 85), etc.

201 – Teorema

Em todo triângulo obliquângulo de lados a , b e c , se m é a projeção do lado c sobre o lado b , existe a relação $a^2 = b^2 + c^2 \pm 2bm$, sendo o termo $2bm$ positivo ou negativo, conforme, respectivamente, o lado a se oponha a um ângulo obtuso ou agudo.

Demonstração: Consideremos o triângulo ABC, no qual o ângulo A é agudo e tracemos sua altura BH (Figura 225). Para o triângulo BHC, temos (número 198.1):

$$a^2 = h^2 + (b - m)^2 = h^2 + m^2 + b^2 - 2bm$$

E como $h^2 + m^2 = c^2$, vem:

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2bm} \quad (1)$$

Consideremos, agora, um triângulo ABC cujo ângulo A seja obtuso (Figura 226) e tracemos sua altura BH.

Para o triângulo BHC, podemos escrever (número 198.1):

$$a^2 = h^2 + (b + m)^2 = h^2 + m^2 + b^2 + 2bm$$

E como $h^2 + m^2 = c^2$, vem:

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2 + 2bm} \quad (2)$$

As relações (1) e (2) provam o teorema.

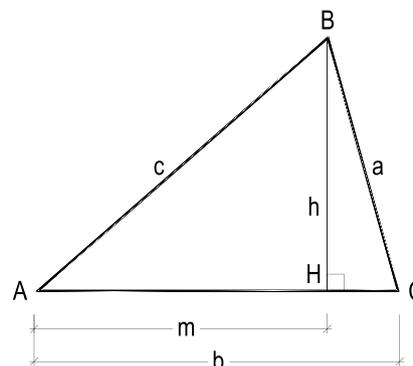


Figura 225

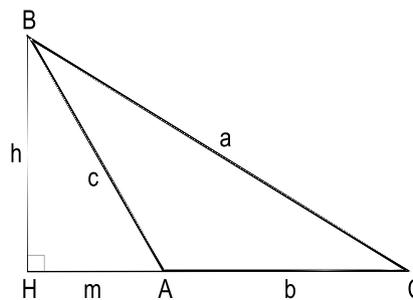


Figura 226

202 – Escólio

Um ângulo de um triângulo é agudo, reto ou obtuso, conforme o quadrado do lado que lhe é oposto seja respectivamente menor, igual ou maior que a soma dos quadrados dos outros dois lados.

$$\text{De fato,} \quad - \text{ se } \hat{A} < 90^\circ \text{ temos } a^2 = b^2 + c^2 - 2bm \quad \therefore \quad a^2 < b^2 + c^2$$

$$- \text{ se } \hat{A} = 90^\circ \text{ temos } a^2 = b^2 + c^2 \text{ (número 198.1)}$$

$$- \text{ se } \hat{A} > 90^\circ \text{ temos } a^2 = b^2 + c^2 + 2bm \quad \therefore \quad a^2 > b^2 + c^2$$

Cabe comentar que a relação métrica estabelecida no número 201 aplica-se também aos triângulos retângulos, no que diz respeito ao ângulo reto e ao lado que lhe é oposto, a hipotenusa, pois, neste caso, a projeção m do lado c (um cateto) sobre b (o outro cateto) reduz-se a um ponto, ou seja, anula-se, levando o termo $2bm$ a valer zero.

203 – Soma e diferença dos quadrados de dois lados de um triângulo

Consideremos um triângulo obliquângulo ABC de lados a , b e c e tracemos sua mediana m_a , relativa ao lado BC (Figura 227).

Designemos por x a projeção desta mediana sobre BC.

Assim, temos (número 201):

$$\text{no } \Delta AMC: b^2 = m_a^2 + \left(-\frac{a}{2}\right)^2 + 2 \frac{a}{2} x$$

$$\text{no } \Delta AMB: c^2 = m_a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - 2 \frac{a}{2} x$$

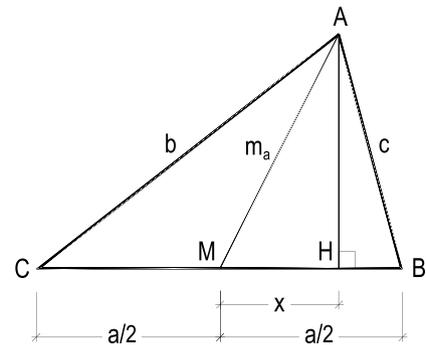


Figura 227

Somando e subtraindo, membro a membro, estas duas relações, obtemos:

$$b^2 + c^2 = 2m_a^2 + 2\left(\frac{a^2}{4}\right) \quad \therefore \quad \boxed{b^2 + c^2 = 2m_a^2 + \frac{a^2}{2}} \quad (1)$$

$$b^2 - c^2 = 2\frac{a}{2}x + 2\frac{a}{2}x \quad \therefore \quad \boxed{b^2 - c^2 = 2ax} \quad (2)$$

204 – Aplicações

1. Lugar geométrico dos pontos A cujas somas dos quadrados das distâncias a dois pontos fixos B e C é constante e igual a k^2 .

Na relação (1) demonstrada no item anterior, façamos $b^2 + c^2 = k^2$:

$$k^2 = 2m_a^2 + \frac{a^2}{2} \quad \therefore \quad 2m_a^2 = k^2 - \frac{a^2}{2} = \frac{2k^2 - a^2}{2} \quad \therefore \quad m_a^2 = \frac{2k^2 - a^2}{4}$$

$$\therefore \quad m_a = \frac{1}{2} \sqrt{2k^2 - a^2}$$

Porque k^2 e a^2 são constantes, m_a também o será. Em consequência, o lugar geométrico procurado será o círculo de centro M (médio de BC) e de raio $m_a = \frac{1}{2} \sqrt{2k^2 - a^2}$ (Figura 228), onde a mede a distância entre os dois pontos fixos considerados.

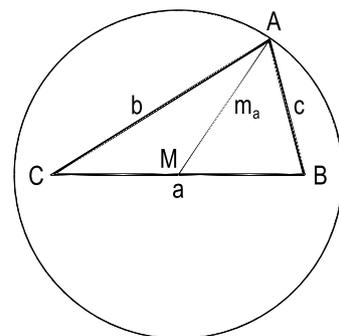


Figura 228

Evidentemente, há valores de k^2 que impossibilitam a existência do lugar. De fato, para que exista o círculo (M, m_a) é preciso que:

$$2k^2 - a^2 > 0 \quad \text{ou} \quad k^2 > \frac{a^2}{2}$$

Quando $k^2 = \frac{a^2}{2}$, m_a se anula e apenas o ponto médio de BC atende à condição imposta.

No caso particular em que $k = BC$, ou seja, em que $k^2 = BC^2 = a^2$, temos:

$$m_a = \frac{1}{2} \sqrt{2k^2 - a^2} = \frac{1}{2} \sqrt{a^2} \quad \therefore \quad m_a = \frac{a}{2},$$

isto é, o triângulo ABC é retângulo em A e o círculo lugar é o circunscrito ao triângulo.

2. Lugar geométrico dos pontos A cujas diferenças de quadrados das distâncias a dois pontos fixos B e C é constante e igual a k^2 .

Na relação (2) demonstrada no número 203, façamos $b^2 - c^2 = k^2$ e teremos:

$$k^2 = 2ax \quad \therefore \quad x = \frac{k^2}{2a}$$

Como k^2 e a são constantes, x também o será e, por isso, o lugar dos pontos A será a reta r , perpendicular a BC, distando $x = \frac{k^2}{2a}$ do ponto médio de BC (Figura 229).

Evidentemente, para todo valor de k^2 existirá o lugar. Até mais: o sinal da diferença k^2 dará sinal à distância x , definindo se a reta r deve estar à direita ou à esquerda de M. No caso particular em que $k^2 = 0$, temos $x = 0$ e a reta r , naturalmente, passa a ser a mediatriz de BC.

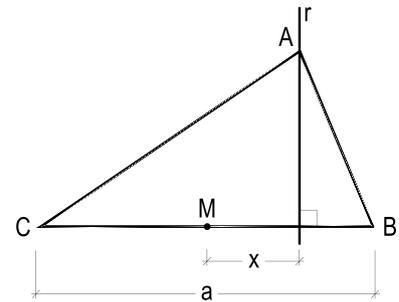


Figura 229

205 – Teorema de Stewart

Sejam A, B e C três pontos quaisquer de uma reta orientada, dispostos nesta ordem, e P um ponto qualquer exterior a ela, entre os seis segmentos formados existe a relação:

$$\frac{\overline{PA}^2}{\overline{AB} \cdot \overline{AC}} + \frac{\overline{PB}^2}{\overline{BA} \cdot \overline{BC}} + \frac{\overline{PC}^2}{\overline{CA} \cdot \overline{CB}} = 1$$

Demonstração: Sejam o triângulo PAB e uma ceviana qualquer PC (Figura 230). Para os triângulos PAB e PBC, respectivamente, podemos escrever (número 201):

$$a^2 = r^2 + b^2 + 2r(BH) \quad (1)$$

$$c^2 = s^2 + b^2 - 2s(BH) \quad (2)$$

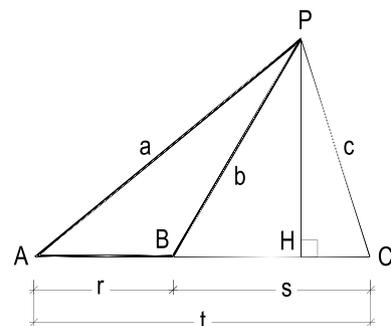


Figura 230

Multipliquemos os dois membros da relação (1) por s e os dois da relação (2) por r e somemos membro a membro.

$$a^2 s = r^2 s + b^2 s + 2rs \quad (\text{BH})$$

$$c^2 r = s^2 r + b^2 r - 2rs \quad (\text{BH})$$

$$\frac{a^2 s + c^2 r = r^2 s + s^2 r + b^2 s + b^2 r}{}$$

$$a^2 s + c^2 r = rs(r+s) + b^2(r+s) \quad \therefore \quad a^2 s + c^2 r = rst + b^2 t$$

Dividindo os dois membros pelo produto rst , vem:

$$\frac{a^2}{rt} + \frac{c^2}{st} - \frac{b^2}{rs} = 1 \quad \therefore \quad \frac{a^2}{rt} - \frac{b^2}{rs} + \frac{c^2}{st} = 1$$

Considerando, enfim, os segmentos orientados, temos:

$$\frac{\overline{PA}^2}{\overline{AB} \cdot \overline{AC}} - \frac{\overline{PB}^2}{\overline{AB} \cdot \overline{BC}} + \frac{\overline{PC}^2}{\overline{BC} \cdot \overline{AC}} = 1 \quad \therefore \quad \boxed{\frac{\overline{PA}^2}{\overline{AB} \cdot \overline{AC}} + \frac{\overline{PB}^2}{\overline{BA} \cdot \overline{BC}} + \frac{\overline{PC}^2}{\overline{CA} \cdot \overline{CB}} = 1}$$

206 – Cálculo das medianas de um triângulo

Designemos por m_a , m_b e m_c as medianas de um triângulo ABC e calculemos uma delas.

Para tanto, apliquemos ao triângulo ABC (Figura 231) o teorema de Stewart:

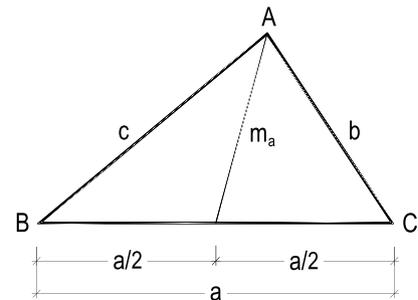


Figura 231

$$\frac{c^2}{\frac{a}{2} a} - \frac{m_a^2}{\frac{a}{2} \frac{a}{2}} + \frac{b^2}{\frac{a}{2} a} = 1$$

$$\therefore \quad 2c^2 - 4m_a^2 + 2b^2 = a^2 \quad \therefore \quad 4m_a^2 = 2(b^2 + c^2) - a^2$$

$$\therefore \quad 2m_a = \sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2} \quad \therefore$$

$$\boxed{m_a = \frac{1}{2} \sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2}}$$

Analogamente:

$$\boxed{m_b = \frac{1}{2} \sqrt{2(a^2 + c^2) - b^2}}$$

$$\boxed{m_c = \frac{1}{2} \sqrt{2(a^2 + b^2) - c^2}}$$

207 – Cálculo das bissetrizes internas de um triângulo

Designemos por bi_A , bi_B e bi_C as bissetrizes internas do triângulo ABC.

Calculemos a primeira (AJ, na Figura 232).

Para tanto, utilizemos, inicialmente, o teorema das bissetrizes (número 164), que permite escrever:

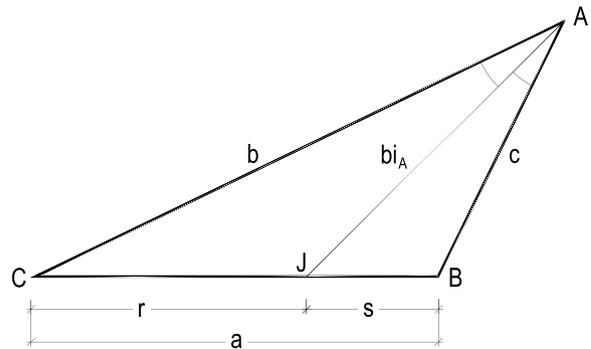


Figura 232

$$\frac{r}{s} = \frac{b}{c} \quad \therefore \quad \frac{r}{r+s} = \frac{b}{b+c} \quad \therefore \quad \frac{r}{a} = \frac{b}{b+c} \quad \therefore \quad r = \frac{ab}{b+c} \quad (1)$$

$$\frac{r}{s} = \frac{b}{c} \quad \therefore \quad \frac{r+s}{s} = \frac{b+c}{c} \quad \therefore \quad \frac{a}{s} = \frac{b+c}{c} \quad \therefore \quad s = \frac{ac}{b+c} \quad (2)$$

E, calculados os segmentos r e s , em função dos lados do triângulo, pode-se aplicar, para o cálculo da bissetriz bi_A , o teorema de Stewart:

$$\begin{aligned} \frac{b^2}{r \cdot a} - \frac{bi_A^2}{r \cdot s} + \frac{c^2}{sa} &= 1 \quad \therefore \quad sb^2 - a bi_A^2 + rc^2 = rsa \\ \therefore \quad \frac{acb^2}{b+c} - a bi_A^2 + \frac{abc^2}{b+c} &= \frac{ab}{b+c} \frac{ac}{b+c} a \quad \therefore \quad \frac{cb^2 + bc^2}{b+c} - bi_A^2 = \frac{a^2 bc}{(b+c)^2} \\ \therefore \quad bc(b+c)^2 - (b+c)^2 bi_A^2 &= a^2 bc \quad \therefore \quad (b+c)^2 bi_A^2 = bc(b+c)^2 - a^2 bc \\ \therefore \quad (b+c)^2 bi_A^2 &= bc [(b+c)^2 - a^2] = bc (b+c+a)(b+c-a) \end{aligned}$$

Mas, como $a+b+c = 2p$, temos $b+c-a = b+c+a-2a = 2p-2a = 2(p-a)$

Logo, $(b+c)^2 bi_A^2 = bc 2p 2(p-a) = 4 bc p (p-a)$

$$\therefore \quad (b+c) bi_A = 2 \sqrt{bc p (p-a)} \quad \therefore$$

$$bi_A = \frac{2}{b+c} \sqrt{bc p (p-a)}$$

E, analogamente:

$$bi_B = \frac{2}{a+c} \sqrt{ac p (p-b)}$$

$$bi_C = \frac{2}{a+b} \sqrt{ab p (p-c)}$$

208 – Cálculo das bissetrizes externas de um triângulo

Designemos por be_A , be_B e be_C as bissetrizes externas do triângulo ABC. Calculemos a primeira (AL, na Figura 233). Para tanto, utilizemos, inicialmente, o teorema das bissetrizes (número 164):

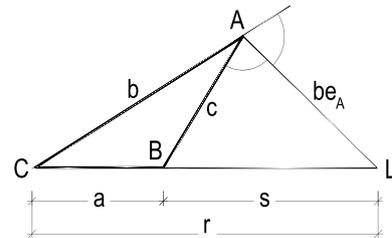


Figura 233

$$\frac{r}{s} = \frac{b}{c} \quad \therefore \quad \frac{r}{r-s} = \frac{b}{b-c} \quad \therefore \quad \frac{r}{a} = \frac{b}{b-c} \quad \therefore \quad r = \frac{ab}{b-c}$$

$$\frac{r}{s} = \frac{b}{c} \quad \therefore \quad \frac{r-s}{s} = \frac{b-c}{c} \quad \therefore \quad \frac{a}{s} = \frac{b-c}{c} \quad \therefore \quad s = \frac{ac}{b-c}$$

E, aplicando o teorema de Stewart (Figura 233), vem:

$$\frac{b^2}{ar} - \frac{c^2}{as} + \frac{be_A^2}{rs} = 1 \quad \therefore \quad sb^2 - rc^2 + a be_A^2 = rsa$$

$$\therefore \quad \frac{acb^2}{b-c} - \frac{abc^2}{b-c} + a be_A^2 = \frac{ab}{b-c} \frac{ac}{b-c} a \quad \therefore \quad \frac{cb^2 - bc^2}{b-c} + be_A^2 = \frac{a^2 bc}{(b-c)^2}$$

$$\therefore \quad bc(b-c)^2 + (b-c)^2 be_A^2 = a^2 bc \quad \therefore \quad (b-c)^2 be_A^2 = bc [a^2 - (b-c)^2]$$

$$\therefore \quad (b-c)^2 be_A^2 = bc(a+b-c)(a-b+c) = bc(a+b+c-2c)(a+b+c-2b)$$

$$\therefore \quad (b-c)^2 be_A^2 = bc(2p-2c)(2p-2b) = bc 2(p-c) 2(p-b) = 4bc(p-b)(p-c)$$

$$\therefore \quad (b-c) be_A = 2 \sqrt{bc(p-b)(p-c)} \quad \therefore \quad be_A = \frac{2}{|b-c|} \sqrt{bc(p-b)(p-c)}$$

E, analogamente:

$$be_B = \frac{2}{|a-c|} \sqrt{ac(p-a)(p-c)}$$

$$be_C = \frac{2}{|a-b|} \sqrt{ab(p-b)(p-c)}$$

Nos denominadores das expressões, as diferenças entre dois lados do triângulo foram tomadas em módulo para garantia de que seja positivo o valor de cada uma das bissetrizes. É evidente até que se o triângulo for isósceles, uma das bissetrizes – a relativa à base – não poderá ser medida, pois não poderá ser representada por um segmento de reta, o que se confirma na própria expressão, por se anular seu denominador. E, se o triângulo for equilátero, tal impossibilidade se dará para todas as bissetrizes externas.

209 – Cálculo das alturas de um triângulo

Designemos por h_a , h_b e h_c as alturas do triângulo ABC e calculemos a primeira. O triângulo ABC (Figura 234) fornece (número 201):

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2am \quad \therefore \quad m = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a}$$

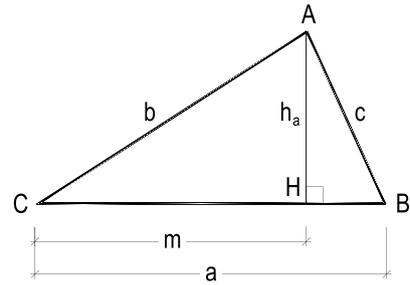


Figura 234

E do triângulo AHC (número 198.1), vem:

$$h_a^2 = b^2 - m^2 = b^2 - \frac{(a^2 + b^2 - c^2)^2}{4a^2} = \frac{4a^2 b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2}{4a^2}$$

$$\therefore 4a^2 h_a^2 = (2ab)^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2 = (2ab + a^2 + b^2 - c^2)(2ab - a^2 - b^2 + c^2)$$

$$\therefore 4a^2 h_a^2 = [(a+b)^2 - c^2][c^2 - (a-b)^2] = (a+b+c)(a+b-c)(c+a-b)(c-a+b)$$

$$\therefore 4a^2 h_a^2 = (a+b+c)(a+b+c-2c)(a+b+c-2b)(a+b+c-2a)$$

$$\therefore 4a^2 h_a^2 = 2p(2p-2c)(2p-2b)(2p-2a) = 16p(p-a)(p-b)(p-c)$$

$$\therefore a^2 h_a^2 = 4p(p-a)(p-b)(p-c) \quad \therefore$$

$$h_a = \frac{2}{a} \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Analogamente,

$$h_b = \frac{2}{b} \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$h_c = \frac{2}{c} \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

210 – Observações

1. Porque o fator $\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, comum às expressões das três alturas, é constante, já que depende apenas dos valores dos lados do triângulo, concluímos que as alturas são inversamente proporcionais aos lados correspondentes.
2. Todo triângulo é semelhante a um segundo cujos lados sejam respectivamente iguais (ou proporcionais) aos inversos das alturas do primeiro. Porque sendo a , b e c os lados e h_a , h_b e h_c as alturas do primeiro triângulo, podemos escrever:

$$2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = ah_a = bh_b = ch_c \quad \therefore$$

$$\frac{a}{h_a} = \frac{b}{h_b} = \frac{c}{h_c}$$

211 – Cevianas isogonais

1. Em um triângulo ABC, duas cevianas AE e AF são ditas isogonais quando, sendo ambas internas (Figura 235) ou ambas externas (Figura 236), formam ângulos iguais com os lados que concorrem no vértice A a elas comum.
2. Duas cevianas isogonais relativas ao vértice A de um triângulo ABC são simétricas em relação às bissetrizes (interna e externa) relativas aquele vértice (Figuras 235 e 236).
3. Assim, a ceviana isogonal de uma bissetriz (interna ou externa) é ela própria.
4. Quando se considera o círculo circunscrito a um triângulo ABC, a ceviana isogonal do diâmetro que contém o vértice A é a altura relativa a esse vértice (Figura 237).

De fato, basta ver que os ângulos internos A' e C dos triângulos ABA' e AHC são iguais, porque interceptam o mesmo arco AB. E, porque $\widehat{BAA'} = \widehat{HAC}$, os terceiros ângulos dos dois triângulos são iguais. Então, $\widehat{AHC} = \widehat{A'BA} = 90^\circ$. Logo, a ceviana isogonal de AA' é a altura AH .

5. Assim, nos triângulos retângulos (Figura 238), a ceviana isogonal da mediana relativa à hipotenusa é a altura também relativa à hipotenusa.

Porque (número 140) o pé da mediana relativa à hipotenusa é o circuncentro do triângulo.

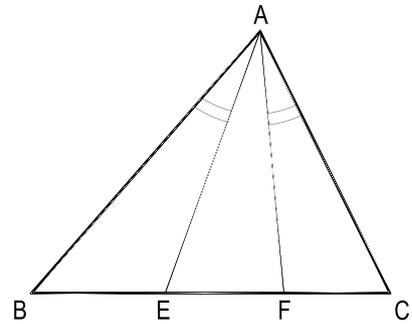


Figura 235

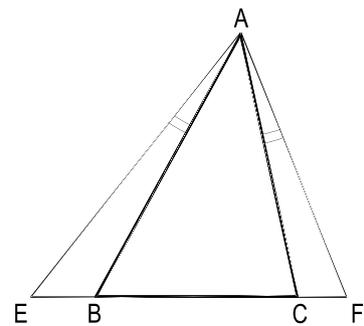


Figura 236

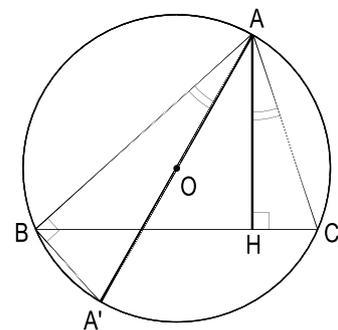


Figura 237

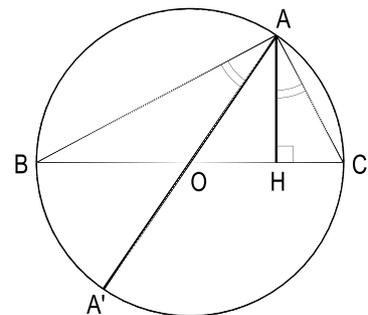


Figura 238

212 – Teorema

O produto de dois lados de um triângulo é igual ao produto de uma ceviana qualquer do triângulo relativa ao terceiro lado pela corda do círculo circunscrito, isogonal daquela ceviana.

Demonstração: Seja AF a corda do círculo circunscrito ao triângulo ABC, isogonal da ceviana AE (Figura 239).

Os ângulos \widehat{AFB} e \widehat{ACB} são iguais, pois, interceptam, no círculo, o mesmo arco AB. Em consequência, os triângulos AFB e ACE são semelhantes, podendo-se escrever:

$$\frac{AB}{AE} = \frac{AF}{AC}$$

$AB \cdot AC = AE \cdot AF$, como se queria demonstrar.

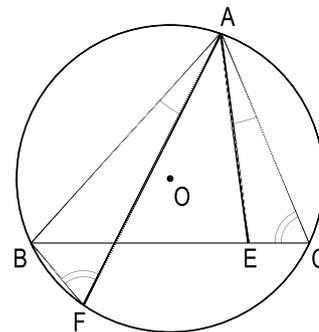


Figura 239

213 – Corolário

O produto de dois lados de um triângulo é igual ao produto da altura relativa ao terceiro lado pelo diâmetro do círculo circunscrito.

De fato, porque a altura AH (Figura 237) é isogonal do diâmetro AA' (número 211.4), podemos escrever:

$$AB \cdot AC = AH \cdot AA'$$

214 – Cálculo do raio do círculo circunscrito a um triângulo escaleno

Sendo R o raio do círculo circunscrito ao triângulo ABC (Figura 240), vimos (número 213) que há a relação:

$$AB \cdot AC = AH \cdot AA', \text{ ou seja, } cb = h_a \cdot 2R$$

Multiplicando os dois membros por a, vem:

$$abc = 2R a h_a$$

$$abc = 2R a \frac{2}{a} \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Logo,

$$R = \frac{abc}{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$$

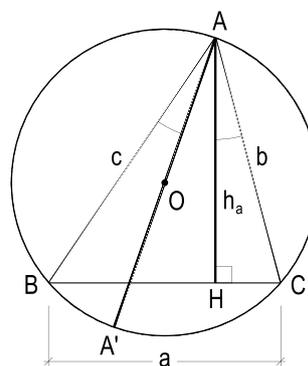


Figura 240

215 – Cálculo dos raios dos círculos inscrito e exinscrito a um triângulo escaleno

Consideremos o círculo inscrito e um círculo exinscrito (relativo ao lado BC) ao triângulo escaleno ABC (Figura 241). Designemos respectivamente por r e R_a os raios desses dois círculos.

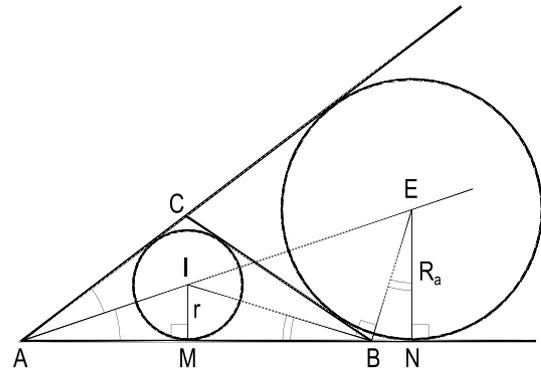


Figura 241

Como os triângulos AMI e ANE são semelhantes, temos:

$$\frac{r}{R_a} = \frac{AM}{AN} \quad (1)$$

Como as bissetrizes BI e BE são perpendiculares entre si, os triângulos BMI e BNE são também semelhantes (número 179). Assim, temos:

$$\frac{r}{BN} = \frac{BM}{R_a} \quad \therefore \quad r R_a = BM \cdot BN \quad (2)$$

Multiplicando e dividindo, membro a membro, as relações (1) e (2), chegamos a:

$$r^2 = \frac{AM \cdot BM \cdot NB}{AN} \quad \text{e} \quad R_a^2 = \frac{AN \cdot BM \cdot BN}{AM}$$

Como, finalmente, sabemos que:

$AN = p$, $AM = p - a$, $BM = p - b$ e $BN = p - c$ (números 151.1 e 151.2), vem:

$$r^2 = \frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p} = \frac{p(p-a)(p-b)(p-c)}{p^2} \quad \therefore \quad r = \frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{p}$$

$$R_a^2 = \frac{p(p-b)(p-c)}{(p-a)} = \frac{p(p-a)(p-b)(p-c)}{(p-a)^2} \quad R_a = \frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{(p-a)}$$

E, analogamente:

$$R_b = \frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{(p-b)}$$

$$R_c = \frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{(p-c)}$$

216 – Cálculo dos raios dos círculos circunscrito, inscrito e exinscritos a um triângulo isósceles

Além das relações gerais – instituídas para os triângulos escalenos (números 214 e 215) e, naturalmente, válidas para os isósceles – outras podem ser obtidas em função dos valores b , h e ℓ , respectivamente, da base, da altura e de cada um dos lados iguais do triângulo isósceles.

Para o cálculo do raio R do círculo circunscrito (Figura 242), o triângulo OMB fornece:

$$R^2 = (h - R)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2$$

$$\therefore R^2 = h^2 + R^2 - 2Rh + \frac{b^2}{4}$$

$$\therefore 2Rh = h^2 + \frac{b^2}{4}$$

$$\therefore 2Rh = \frac{4h^2 + b^2}{4}$$

$$\therefore R = \frac{4h^2 + b^2}{(2h)4} \therefore \boxed{R = \frac{4h^2 + b^2}{8h}}$$

Para o cálculo do raio r do círculo inscrito (Figura 243), a semelhança dos triângulos retângulos AIJ e ABM permite escrever:

$$\frac{IJ}{BM} = \frac{AI}{AB}$$

$$\therefore \frac{r}{\frac{b}{2}} = \frac{h-r}{\ell}$$

$$\therefore 2r\ell = bh - br$$

$$\therefore (2\ell + b)r = bh \therefore \boxed{r = \frac{bh}{2\ell + b}}$$

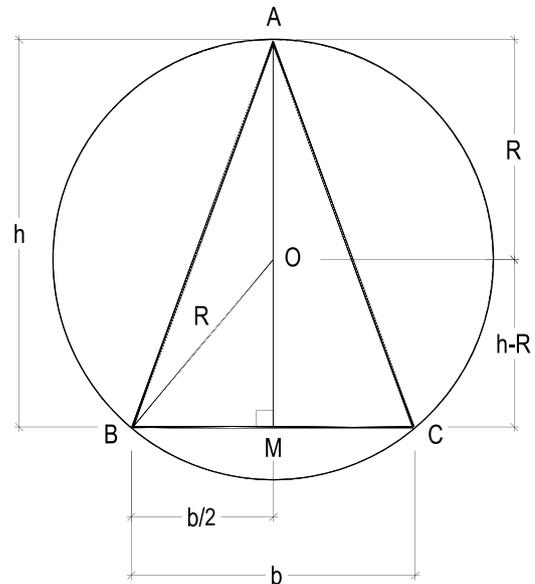


Figura 242

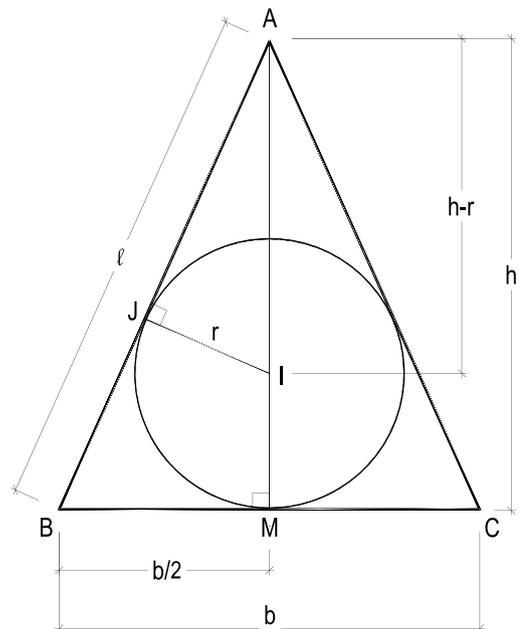


Figura 243

Finalmente, designando por R_b e por R_ℓ , respectivamente, os raios dos círculos exinscritos relativos à base e a cada um dos lados iguais do triângulo, porque (Figura 244) a bissetriz externa relativa ao vértice A é paralela à base do triângulo, temos:

$$E'J = AM$$

$$\therefore \boxed{R_\ell = h}$$

E a semelhança dos triângulos BEM e BJE' (Figura 244) fornece:

$$\frac{EM}{JE'} = \frac{BM}{JB}$$

Ou seja (número 151.2):

$$\therefore \frac{R_b}{h} = \frac{\frac{b}{2}}{p-b} \quad \therefore R_b = \frac{bh}{2p-2b} \quad \therefore R_b = \frac{bh}{2\ell + b - 2b}$$

$$\therefore \boxed{R_b = \frac{bh}{2\ell - b}}$$

Naturalmente, a relação que envolve os parâmetros b , h e ℓ , postos em jogo, é dada pelo triângulo retângulo AMB (Figura 244).

$$\text{Ou seja: } \ell^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + h^2$$

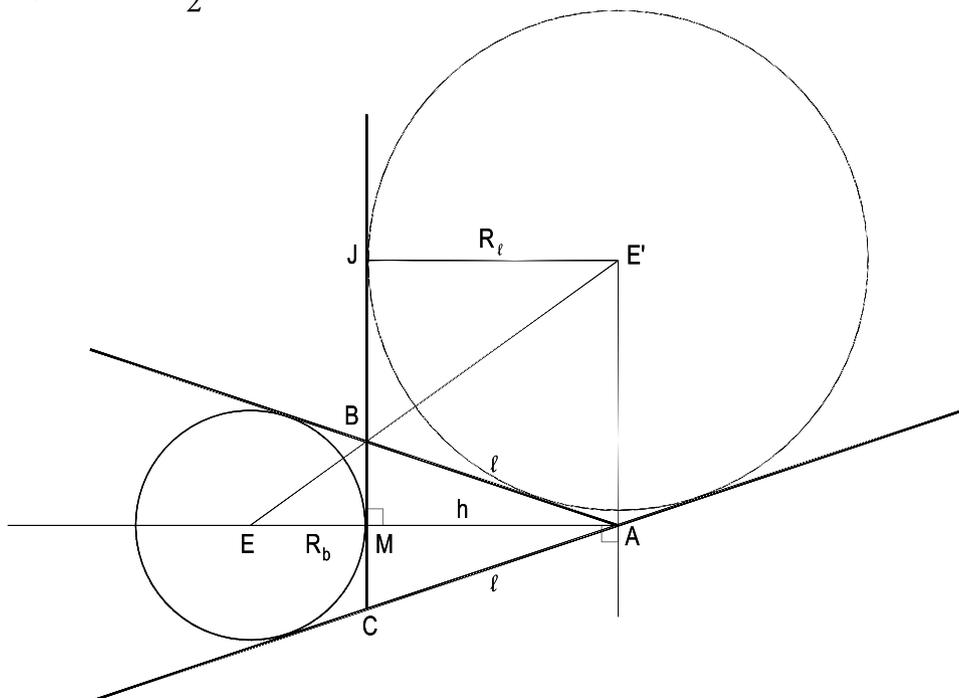


Figura 244

217 – Cálculo dos raios dos círculos circunscrito, inscrito e exinscrito a um triângulo equilátero

Designemos por a o lado e por h a altura do triângulo equilátero ABC (Figura 245) e por r , R e R' , respectivamente, os raios dos círculos inscrito, circunscrito e exinscrito.

Porque coincidem o baricentro, o circuncentro e o incentro do triângulo e porque são iguais os triângulos AMB e EMB (Figura 245), podemos escrever:

$$r = \frac{h}{3}$$

$$R = \frac{2h}{3}$$

$$R' = h$$

Conclui-se, assim, que esses três raios r , R e R' são proporcionais a 1, 2 e 3.

E, para calculá-los em função do lado a , basta observar que o ângulo \hat{A} do triângulo retângulo AMB vale 30° e que, por isso (número 200.3),

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$$

$$R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

$$R' = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

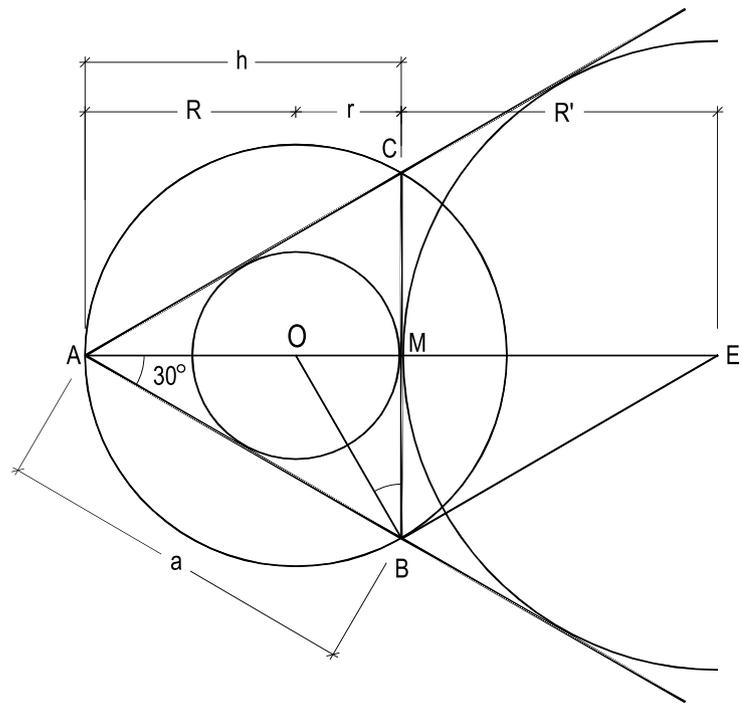


Figura 245

218 – Cálculo dos raios dos círculos circunscrito, inscrito e exinscritos a um triângulo retângulo

Consideremos um triângulo retângulo ABC de hipotenusa a e catetos b e c. Porque a hipotenusa é um diâmetro do círculo circunscrito, temos:

$$R = \frac{a}{2}$$

E, para os raios dos círculos inscrito e exinscrito, observemos os quadrados AJIL e APEQ (Figura 246) e AME'N e AGE''H (Figura 247), os quais permitem (números 151.1 e 151.2) escrever:

$$IJ = AL \quad \therefore \quad r = p - a$$

$$EP = AQ \quad \therefore \quad R_a = p$$

$$E'M = AN \quad \therefore \quad R_b = p - b$$

$$\text{Analogamente,} \quad R_c = p - c$$

Somando, membro a membro, essas quatro relações, temos:

$$r + R_a + R_b + R_c =$$

$$= p - a + p + p - b + p - c =$$

$$= 4p - 2p = 2p$$

$$\therefore \quad r + R_a + R_b + R_c = 2p$$

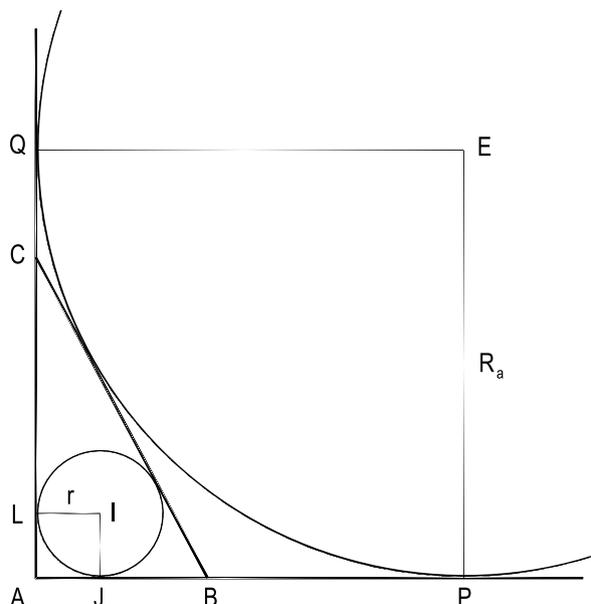


Figura 246

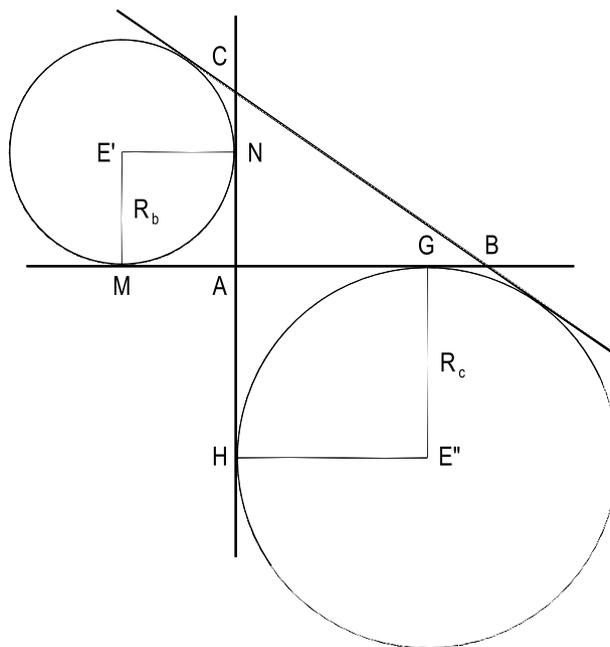


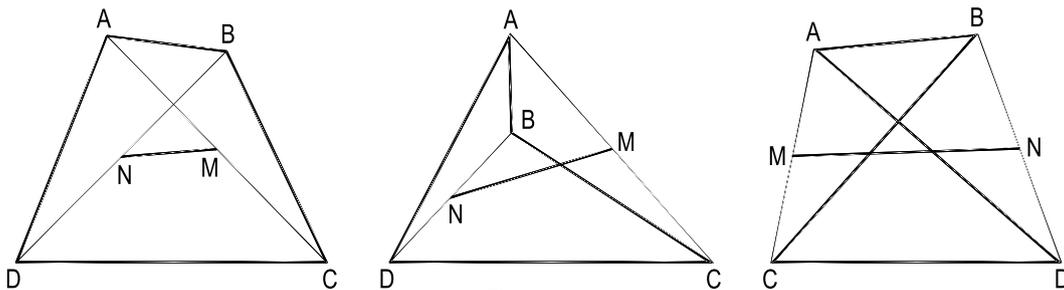
Figura 247

CAPÍTULO XIII

RELAÇÕES MÉTRICAS NOS QUADRILÁTEROS

219 – Definição

Em todo quadrilátero, o segmento formado pelos pontos médios das diagonais denomina-se mediana de Euler. Assim, na Figura 248, MN é a mediana de Euler do quadrilátero ABCD, em todos os casos apresentados.



Dentre todos os tipos de quadriláteros, apenas os paralelogramos (e seus casos particulares) não possuem mediana de Euler, uma vez que os pontos médios de suas diagonais coincidem (número 71.4).

220 – Teorema de Euler

A soma dos quadrados dos lados de um quadrilátero qualquer é igual à soma dos quadrados das diagonais e do quádruplo do quadrado de sua mediana de Euler.

Demonstração: Consideremos um quadrilátero qualquer ABCD cuja mediana de Euler seja MN e tracemos os segmentos BM e DM (Figura 249).

Para os triângulos ABC e ADC podemos escrever (número 203.1):

$$AB^2 + BC^2 = 2 BM^2 + \frac{AC^2}{2}$$

$$CD^2 + DA^2 = 2 MD^2 + \frac{AC^2}{2}$$

Somando membro a membro:

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = 2 (BM^2 + MD^2) + AC^2 \quad (1)$$

Para o triângulo BMD, temos (número 203.1):

$$BM^2 + MD^2 = 2MN^2 + \frac{BD^2}{2} \quad (2)$$

Substituindo (2) em (1), vem:

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = 2 \left(2MN^2 + \frac{BD^2}{2} \right) + AC^2$$

$$\therefore \boxed{AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2 + 4MN^2}$$

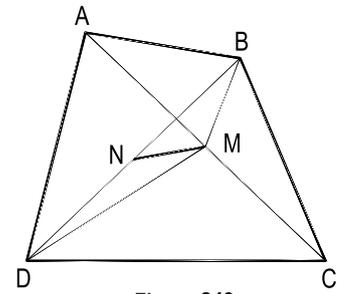


Figura 249

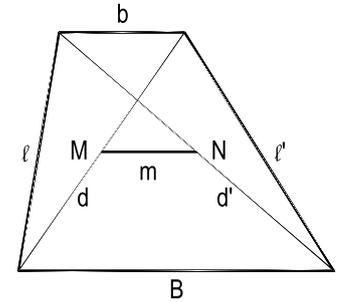


Figura 250

O teorema de Euler é válido para qualquer quadrilátero, mesmo os não convexos ou entrecruzados. De fato, basta ver que o raciocínio utilizado em sua demonstração independe da natureza do quadrilátero.

221 – Aplicações

1. Trapézios escalenos

Designando por B e b as bases, por ℓ e ℓ' os lados oblíquos, d e d' as diagonais e por m a mediana de Euler do trapézio (Figura 250), o teorema de Euler fornece:

$$B^2 + b^2 + \ell^2 + \ell'^2 = d^2 + d'^2 + 4m^2 \quad (1)$$

E como $m = \frac{B-b}{2}$ (número 89), a relação (1) dá:

$$B^2 + b^2 + \ell^2 + \ell'^2 = d^2 + d'^2 + \frac{4(B^2 + b^2 - 2Bb)}{4} \quad \therefore \ell^2 + \ell'^2 = d^2 + d'^2 - 2Bb$$

$$\therefore \boxed{d^2 + d'^2 - \ell^2 - \ell'^2 = 2Bb}$$

2. Trapézios isósceles

Para os trapézios isósceles temos $\ell = \ell'$ e $d = d'$. Assim, da relação acima:

$$2d^2 - 2\ell^2 = 2Bb \quad \therefore \boxed{d^2 - \ell^2 = Bb}$$

3. Paralelogramos

Designando por a e b os lados e por d e d' as diagonais de um paralelogramo (Figura 251), porque a mediana de Euler se anula, temos (número 220):

$$2a^2 + 2b^2 = d^2 + d'^2 \quad \therefore \quad \boxed{d^2 + d'^2 = 2(a^2 + b^2)}$$

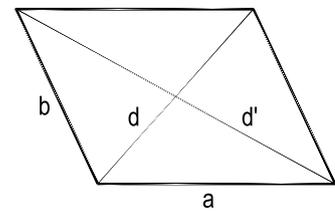


Figura 251

222 – Observação

As aplicações do teorema de Euler aos retângulos, losangos e quadrados são apenas repetições de relações métricas já abordadas (número 198.1).

223 – Teorema de Pitot

As somas dos lados opostos de um quadrilátero convexo circunscrito a um círculo são iguais.

Demonstração: Consideremos o quadrilátero ABCD, segundo a hipótese (Figura 252). Como tangentes de cada vértice ao círculo temos (número 119):

$$AI = AL = x, \quad BI = BJ = y, \quad CJ = CK = z, \quad DK = DL = w$$

Somando, membro a membro, vem:

$$AB + CD = x + y + z + w \quad \text{e} \quad BC + DA = x + y + z + w$$

Então:

$$\boxed{AB + CD = BC + DA}$$

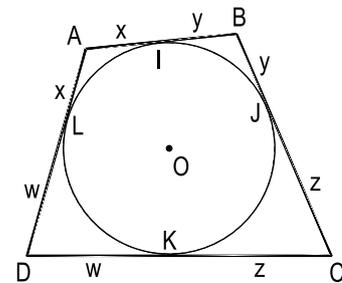


Figura 252

224 – Recíproca

Todo quadrilátero convexo que tem as somas dos lados opostos iguais é circunscritível a um círculo.

Demonstração: Consideremos um quadrilátero convexo ABCD tal que $a + c = b + d$ e o círculo O, tangente aos lados AB, BC e CD (Figura 253).

Admitamos que ABCD não é circunscritível e tracemos a tangente DJ que, então, não coincidirá com o lado DA (Figura 253). O teorema direto aplicado ao quadrilátero JBCD e o triângulo AJD fornecem: $JB + c = b + DJ$ e $DJ + AJ > d$.

Assim, por soma, temos:

$$JB + c + DJ + AJ > b + DJ + d \quad \therefore \quad AJ + JB + c > b + d \quad \therefore \quad a + c > b + d \quad \therefore \quad a + c \neq b + d$$

Esta relação contraria a hipótese, e, por isso, conclui-se que o quadrilátero ABCD é circunscritível ao círculo O, como se queria provar.

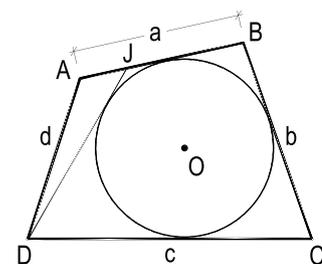


Figura 253

225 – Condição de circunscrição

A condição necessária e suficiente para que um quadrilátero convexo seja circunscritível a um círculo é que as somas de seus lados opostos sejam iguais.

226 – Trapézio isósceles circunscrito a um círculo

Como aplicações do teorema de Pitot aos trapézios isósceles circunscritíveis a um círculo, temos (Figura 254):

1. Cada um dos lados iguais vale um quarto do perímetro.

$$\text{De fato: } B + b = 2\ell \quad \therefore \quad 2p = B + b + 2\ell$$

$$\therefore \quad 2p = 4\ell \quad \therefore \quad \boxed{\ell = \frac{2p}{4}}$$

2. A base média do trapézio é igual aos dois lados iguais.

$$\text{Basta ver que, se } B + b = 2\ell, \quad \boxed{b_m = \frac{B + b}{2} = \ell}$$

É equivalente dizer que, em todo trapézio isósceles circunscrito a um círculo, a base média é igual a um quarto do perímetro do trapézio.

3. As projeções dos lados iguais sobre a base maior são iguais à mediana de Euler m do trapézio.

De fato (Figura 255), como:

$$DM = NC = \frac{B - b}{2}, \text{ temos } \boxed{DM = NC = m}$$

4. A altura é igual à média geométrica entre as bases.

Basta ver que, para o triângulo retângulo ADM (Figura 255), podemos escrever:

$$\ell^2 = h^2 + DM^2 \quad \therefore \quad \left(\frac{B + b}{2}\right)^2 = h^2 + \left(\frac{B - b}{2}\right)^2$$

$$\therefore \quad (B + b)^2 = 4h^2 + (B - b)^2$$

$$\therefore \quad B^2 + b^2 + 2Bb = 4h^2 + B^2 + b^2 - 2Bb$$

$$\therefore \quad 4h^2 = 4Bb \quad \therefore \quad \boxed{h^2 = Bb}$$

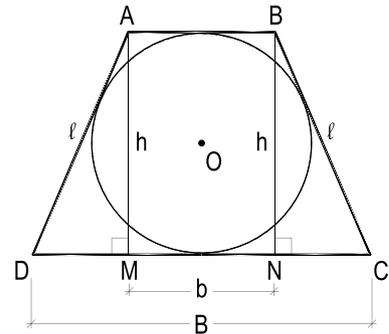


Figura 254

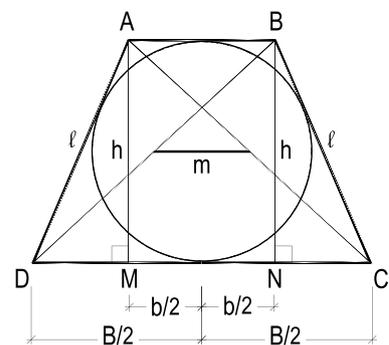


Figura 255

227 – Teoremas de Ptolomeu e Hiparco

Em todo quadrilátero convexo inscrito num círculo:

1. o produto das diagonais é igual à soma dos produtos dos lados opostos;
2. a razão entre as diagonais é igual à razão entre as somas dos produtos dos lados que concorrem, respectivamente, nos extremos de cada diagonal.

Demonstração:

1. Seja ABCD um quadrilátero convexo qualquer inscrito no círculo O (Figura 256). Tracemos a ceviana AJ, do triângulo ABD, isogonal da ceviana AL, pertencente à diagonal AC.

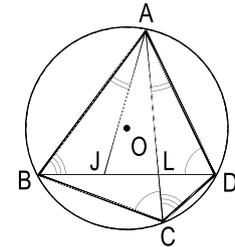


Figura 256

Porque $\widehat{A\hat{B}J} = \widehat{A\hat{C}D}$ (inscritos no mesmo segmento circular):

$$\Delta ABJ \sim \Delta ACD \text{ (1º caso)} \quad \therefore \frac{BJ}{CD} = \frac{AB}{AC} \quad \therefore BJ = \frac{AB \cdot CD}{AC} \quad (1)$$

Como AL e AJ são isogonais, por construção, temos $\widehat{B\hat{A}C} = \widehat{J\hat{A}D}$. E como $\widehat{B\hat{C}A} = \widehat{A\hat{D}J}$ (inscritos no mesmo segmento circular), temos:

$$\Delta AJD \sim \Delta ABC \text{ (1º caso)} \quad \therefore \frac{JD}{BC} = \frac{DA}{AC} \quad \therefore JD = \frac{BC \cdot DA}{AC} \quad (2)$$

Somando, membro a membro, (1) e (2), vem:

$$BJ + JD = BD = \frac{AB \cdot CD + BC \cdot DA}{AC} \quad \therefore \boxed{AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot DA}$$

relação que demonstra a primeira parte do teorema.

2. Consideremos um quadrilátero convexo qualquer ABCD inscrito num círculo (Figura 257) e tracemos as cordas CM e DN, respectivamente, iguais aos lados DA e BC. Por corresponderem a arcos iguais, temos:

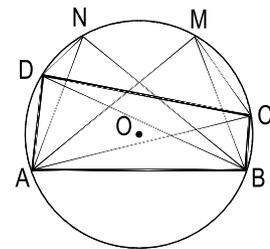


Figura 257

$$BM = AN \quad (1) \quad \text{e} \quad AM = BN = CD \quad (2)$$

Dos quadriláteros ABCM e ABND, vem (número 227.1):

$$BM \cdot AC = CM \cdot AB + BC \cdot AM \quad (3) \quad \text{e} \quad AN \cdot BD = DN \cdot AB + DA \cdot BN \quad (4)$$

Levando (1) e (2) a (3) e (4) e dividindo membro a membro,

vem:

$$\boxed{\frac{AC}{BD} = \frac{AB \cdot DA + BC \cdot CD}{AB \cdot BC + CD \cdot DA}}$$

relação que demonstra a segunda parte do teorema.

228 – Cálculo das diagonais de um quadrilátero convexo inscrito num círculo em função de seus lados

Consideremos um quadrilátero convexo ABCD, de lados a, b, c e d e diagonais x e y, inscrito num círculo (Figura 258), para o qual se pode escrever:

$$xy = ac + bd \quad (\text{número 227.1})$$

$$\frac{x}{y} = \frac{ab + cd}{ad + bc} \quad (\text{número 227.2})$$

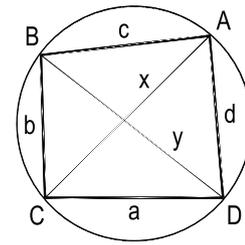


Figura 258

Multiplicando e dividindo membro a membro, respectivamente, essas duas relações, temos:

$$x^2 = \frac{(ac + bd)(ab + cd)}{(ad + bc)} \quad \therefore$$

$$x = \sqrt{\frac{(ac + bd)(ab + cd)}{(ad + bc)}}$$

$$y^2 = \frac{(ac + bd)(ad + bc)}{(ab + cd)} \quad \therefore$$

$$y = \sqrt{\frac{(ac + bd)(ad + bc)}{(ab + cd)}}$$

229 – Observação

Quando o quadrilátero inscrito for entrecruzado, desde que consideremos o convexo que tem os mesmos vértices que ele, poderemos aplicar os dois teoremas acima demonstrados.

230 – Corda do arco soma

Admitamos dados um círculo (O, R) e duas cordas AB = a e AC = b e calculemos, em função de R, a e b, a corda BC = x do arco soma dos dados AB e AC.

Para tanto, consideremos o diâmetro AJ do círculo dado e o quadrilátero ABJC nele inscrito (Figura 259).

Porque os triângulos ABJ e ACJ são retângulos, os lados JC = c e JB = d do quadrilátero valem:

$$c = \sqrt{(2R)^2 - b^2} \quad \text{e} \quad d = \sqrt{(2R)^2 - a^2}$$

E o próprio quadrilátero fornece (número 227.1): $2Rx = ac + bd$

$$2Rx = a\sqrt{4R^2 - b^2} + b\sqrt{4R^2 - a^2} \quad \therefore$$

$$x = \frac{a\sqrt{4R^2 - b^2} + b\sqrt{4R^2 - a^2}}{2R}$$

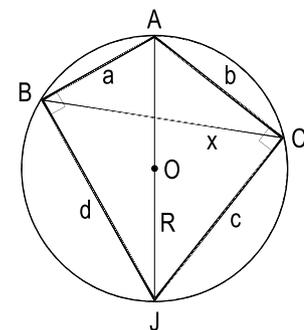


Figura 259

E, para calcular a corda do arco soma de mais de dois arcos, cujas cordas são conhecidas, num círculo de raio dado, basta proceder reiteradamente como foi feito acima.

231 – Corda do arco duplo

Admitamos dados um círculo (O, R) e uma corda AB = a e calculemos o valor da corda BC = x do arco BC, dobro do arco dado AB (Figura 260).

Como BC é a corda do arco soma de dois arcos iguais AB e AC, temos (número 230):

$$x = \frac{a\sqrt{4R^2 - a^2} + a\sqrt{4R^2 - a^2}}{2R}$$

$$x = \frac{a\sqrt{4R^2 - a^2}}{R}$$

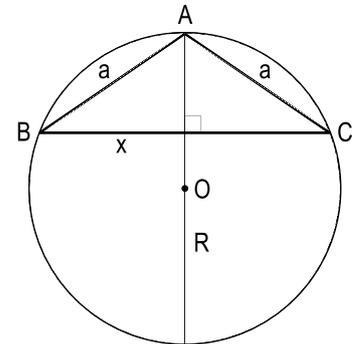


Figura 260

Naturalmente, a aplicação reiterada da expressão aqui instituída leva ao cálculo da corda do arco quádruplo, do óctuplo e, enfim, da corda dos arcos da família das potências de 2, em relação ao inicial.

232 – Corda do arco metade

Admitamos dados um círculo (O, R) e uma corda AB = a e calculemos a corda do arco metade do arco AB.

Observemos que ao se dar a corda AB = a, ficam formados dois arcos AB, havendo, pois, duas cordas AL = x e AJ = y correspondentes ao arco metade de AB (Figura 261).

Para o quadrilátero AJBL (Figura 261) podemos escrever (número 227.1):

$$2R \cdot a = xy + xy \quad \therefore \quad 2xy = 2Ra \quad (1)$$

$$\text{E, no triângulo retângulo JAL, } x^2 + y^2 = 4R^2 \quad (2)$$

Por soma e subtração, as relações (1) e (2) fornecem:

$$x^2 + y^2 + 2xy = 4R^2 + 2Ra \quad \therefore \quad (x+y)^2 = 4R^2 + 2Ra \quad \therefore \quad x+y = \sqrt{4R^2 + 2Ra} \quad (3)$$

$$x^2 + y^2 - 2xy = 4R^2 - 2Ra \quad \therefore \quad (x-y)^2 = 4R^2 - 2Ra \quad \therefore \quad x-y = \sqrt{4R^2 - 2Ra} \quad (4)$$

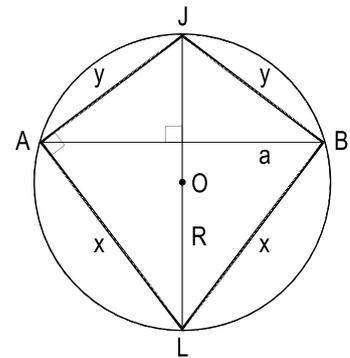


Figura 261

Por soma e subtração, as relações (3) e (4) dão:

$$2x = \sqrt{4r^2 + 2Ra} + \sqrt{4R^2 - 2Ra} \quad \therefore \quad x = \frac{\sqrt{4R^2 + 2Ra} + \sqrt{4R^2 - 2Ra}}{2}$$

$$2y = \sqrt{4r^2 + 2Ra} - \sqrt{4R^2 - 2Ra} \quad \therefore \quad y = \frac{\sqrt{4R^2 + 2Ra} - \sqrt{4R^2 - 2Ra}}{2}$$

233 – Corda do arco diferença

Sendo dados um círculo (O, R) e as cordas $AB = a$ e $AC = b$, para calcular a corda $BC = x$ do arco diferença dos dois dados, consideremos o diâmetro AJ e o quadrilátero $AJBC$ assim formado (Figura 262), o que nos possibilita escrever (número 227.1):

$$ad = 2Rx + bc$$

$$\therefore 2Rx = ad - bc \quad (1)$$

No triângulo retângulo AJB :

$$c = \sqrt{4R^2 - a^2}$$

No triângulo retângulo AJC :

$$d = \sqrt{4R^2 - b^2}$$

Assim, a relação (1) fica:

$$2Rx = ad - bc = a\sqrt{4R^2 - b^2} - b\sqrt{4R^2 - a^2}$$

Explicitando, vem:

$$x = \frac{a\sqrt{4R^2 - b^2} - b\sqrt{4R^2 - a^2}}{2R}$$

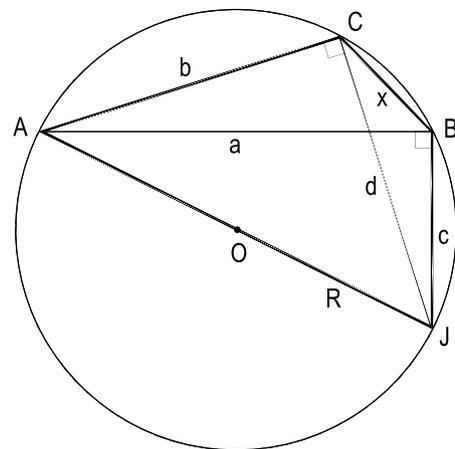


Figura 262

Para subtrações reiteradas, basta proceder como o aqui indicado para chegar ao resultado final.

E, para solucionar expressões algébricas, que reúnem somas e diferenças de arcos de um mesmo círculo, ou de círculos iguais, deve-se utilizar, conforme o caso, as expressões instituídas no item 230 e neste.

CAPÍTULO XIV

RELAÇÕES MÉTRICAS NOS CÍRCULOS

234 – Teorema

Quando duas cordas de um círculo se cortam, os produtos dos segmentos formados em cada uma delas são iguais.

Demonstração: Sejam AB e CD duas cordas quaisquer do círculo O que se cortam no ponto J (Figura 263). Porque $\widehat{A\hat{J}D} = \widehat{B\hat{J}C}$ (opostos pelo vértice) e $\widehat{AD\hat{J}} = \widehat{J\hat{B}C}$ (inscritos, interceptando o mesmo arco AC), concluímos que os triângulos JAD e JBC são semelhantes.

$$\text{Assim: } \frac{JA}{JC} = \frac{JD}{JB} \quad \therefore \boxed{JA \cdot JB = JC \cdot JD}$$

Então, quando duas cordas...

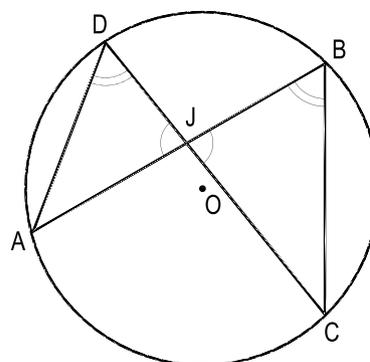


Figura 263

235 – Recíproca

Quando, sobre duas retas que se cortam num certo ponto J, e se consideram respectivamente os pontos A e B numa e C e D noutra, tais que $JA \cdot JB = JC \cdot JD$, os pontos A, B, C e D são concíclicos, isto é, pertencem a uma mesma circunferência.

Demonstração: Da própria hipótese temos:

$$JA \cdot JB = JC \cdot JD \quad \therefore \frac{JA}{JC} = \frac{JD}{JB}$$

E como (Figura 264) os ângulos $\widehat{A\hat{J}D}$ e $\widehat{B\hat{J}C}$ são iguais, como opostos pelo vértice, concluímos que $\Delta JAD \sim \Delta JBC$ (2º caso).

Em consequência, os ângulos $\widehat{B\hat{A}D}$ e $\widehat{B\hat{C}D}$ são iguais e, então (número 131), os pontos A e C pertencem a um mesmo arco de círculo construído sobre BD, ou seja, os quatro pontos considerados pertencem a uma mesma circunferência, o que prova a recíproca.

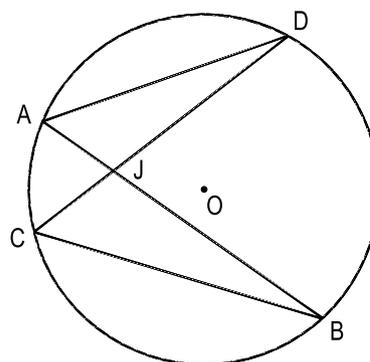


Figura 264

236 – Escólio

Todas as cordas de um círculo que passam por um mesmo ponto J interior são tais que os produtos dos segmentos nelas formados, por J, têm o mesmo valor.

De fato, (Figura 265) teremos: $JA \cdot JB = JC \cdot JD = JE \cdot JF = JG \cdot JH = \dots$

237 – Teorema

Quando duas secantes a um círculo se cortam, os produtos dos segmentos formados em cada uma delas pelo ponto de concurso das secantes e pelos pontos de corte no círculo são iguais.

Demonstração: Sejam as secantes JAB e JCD ao círculo O (Figura 266). Tracemos as cordas AD e BC. Os triângulos JAD e JBC formados são semelhantes por terem o ângulo J comum e $\widehat{ADJ} = \widehat{BCJ}$ (inscritos, interceptando o mesmo arco AC). Assim:

$$\frac{JA}{JC} = \frac{JD}{JB} \quad \therefore \quad \boxed{JA \cdot JB = JC \cdot JD}$$

238 – Recíproca

Quando, sobre duas retas que se cortam num certo ponto J, se consideram os pontos A e B, numa, e C e D, na outra, tais que $JA \cdot JB = JC \cdot JD$, os pontos A, B, C e D são concíclicos (Figura 266).

A demonstração é idêntica à desenvolvida em 235.

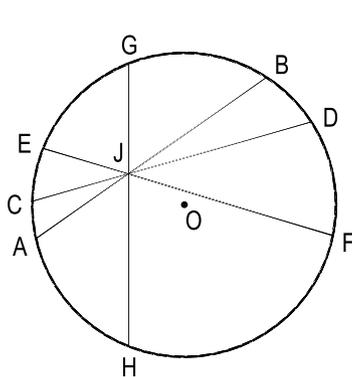


Figura 265

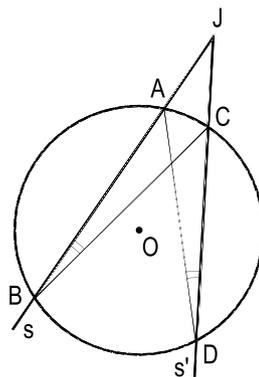


Figura 266

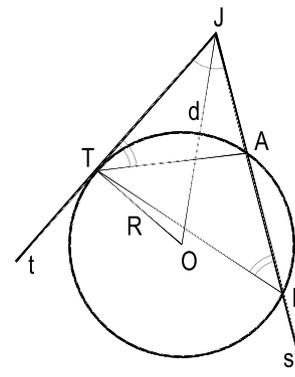


Figura 267

239 – Teorema

Quando uma secante e uma tangente a um círculo se cortam, a distância deste ponto de corte ao de contato da tangente é a média geométrica entre as distâncias do ponto de corte aos de interseção da secante com o círculo.

Demonstração: Os triângulos JAT e JBT formados são semelhantes, por terem o ângulo J comum e $\widehat{JTA} = \widehat{JBT}$, como ângulos de segmento e inscrito, interceptando o mesmo arco TA (Figura 267).

$$\text{Assim: } \frac{JT}{JB} = \frac{JA}{JT} \quad \therefore \quad \boxed{JT^2 = JA \cdot JB}$$

240 – Recíproca

Quando, sobre duas retas que se cortam num certo ponto J, são considerados os pontos T, numa, e A e B, na outra (Figura 267), tais que $JT^2 = JA \cdot JB$, o círculo circunscrito ao triângulo ABT é tangente a JT, no ponto T.

A demonstração é análoga à desenvolvida em 235.

241 – Escólio

A tangente de um ponto J a um círculo é a média geométrica entre os segmentos formados sobre qualquer secante traçada por J, pelos pontos de interseção com o círculo (Figura 268).

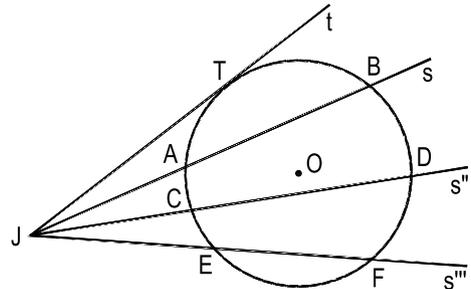


Figura 268

De fato, $JT^2 = JA \cdot JB = JC \cdot JD = JE \cdot JF = \dots$

242 – Potência de um ponto em relação a um círculo

Potência de um ponto J em relação a um círculo O é o produto dos segmentos que têm J para origem e, para extremos, dois pontos quaisquer do círculo colineares com J.

Habitualmente adotaremos a seguinte simbologia:

$$P_{J(O)} = \overline{JA} \cdot \overline{JB} \quad (\text{Figuras 269 e 270})$$

Evidentemente, a potência de um ponto J em relação a um círculo é positiva, negativa ou nula, conforme, respectivamente, J seja exterior (Figura 269), interior (Figura 270) ou pertencente à circunferência do círculo.

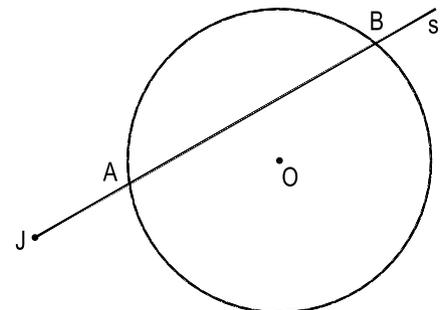


Figura 269

Em todos os casos o valor da potência de um ponto J qualquer em relação a um círculo O independe da secante JAB utilizada. De fato, fixados o ponto J e o círculo, o valor da potência é constante para todos os pares de pontos A e B do círculo, colineares com J, tal como foi concluído nos números 236 e 241.

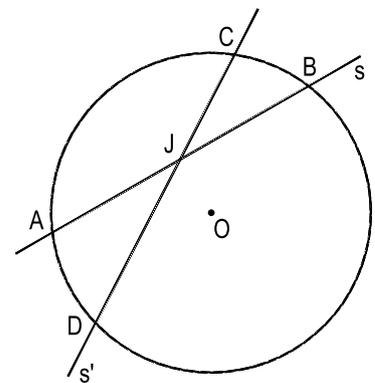


Figura 270

243 – Cálculo do valor da potência

1. Quando a potência é positiva, isto é, quando o ponto J considerado é exterior ao círculo, podemos calculá-la em função da tangente de J ao círculo. De fato:

$$P_{J(O)} = \overline{JA} \cdot \overline{JB}. \text{ E como } \overline{JA} \cdot \overline{JB} = \overline{JT}^2 \text{ (número 239), vem (Figura 267):}$$

$$\boxed{P_{J(O)} = \overline{JT}^2}$$

Assim, abreviadamente, diremos, neste caso, que a potência de um ponto exterior é igual ao quadrado da tangente do ponto ao círculo.

2. Quando a potência é negativa, isto é, quando o ponto J considerado é interior ao círculo, podemos calculá-la em função do valor da corda mínima do círculo, pertencente ao ponto J.

De fato, porque, de todas as cordas do círculo que passam por J, a menor é a perpendicular ao diâmetro que contém J, temos (Figura 271):

$$P_{J(O)} = \overline{JA} \cdot \overline{JB} = (\overline{JA}) (-\overline{JA})$$

$$\boxed{P_{J(O)} = -\overline{JA}^2}$$

Assim, a potência de um ponto interior é igual ao simétrico do quadrado da semicorda mínima pertencente ao ponto.

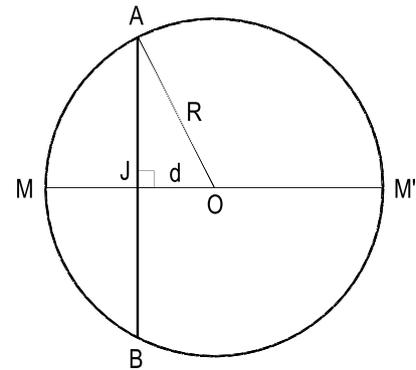


Figura 271

3. Em todos os casos, a potência de um ponto em relação a um círculo pode ser calculada em função da distância d do ponto ao centro do círculo e do raio R do círculo. De fato, temos:

$$P_{J(O)} = \overline{JT}^2 = \overline{JO}^2 - \overline{OT}^2 = d^2 - R^2 \text{ (Figura 267)}$$

$$P_{J(O)} = -\overline{JA}^2 = -(\overline{OA}^2 - \overline{OJ}^2)$$

$$P_{J(O)} = \overline{OJ}^2 - \overline{OA}^2 = d^2 - R^2 \text{ (Figura 271)}$$

Mesmo quando o ponto J pertence ao círculo, isto é, quando a potência é nula, a diferença $(d^2 - R^2)$ mede o valor da potência, pois, neste caso, $d = R$. Assim, em todos os casos, a potência de um ponto J em relação a um círculo O pode ser calculada pela relação:

$$\boxed{P_{J(O)} = d^2 - R^2}$$

244 – Teorema

O lugar geométrico dos pontos que têm a mesma potência em relação a um círculo é um círculo concêntrico com o primeiro.

Demonstração: Admitamos, inicialmente, que a potência seja positiva e igual a k^2 . Os pontos J, em estudo, então, serão tais que (Figura 272):

$$k^2 = d^2 - R^2 \quad \therefore \quad d^2 = k^2 + R^2, \text{ um valor constante.}$$

Assim, o lugar procurado será um círculo concêntrico e exterior ao primeiro, com raio igual a: $d = \sqrt{R^2 + k^2}$, evidentemente, maior que R.

Se, ao contrário, a potência for negativa e igual a $-k^2$, os pontos J estudados (Figura 273) serão tais que:

$$-k^2 = d^2 - R^2 \quad \therefore \quad d^2 = R^2 - k^2, \text{ um valor constante.}$$

Então, o lugar procurado será um círculo concêntrico e interior ao primeiro, com raio igual a: $d = \sqrt{R^2 - k^2}$, naturalmente, menor que R.

Quando, enfim, a potência é nula, evidentemente, o lugar é o próprio círculo considerado.

Assim, o lugar geométrico dos pontos...

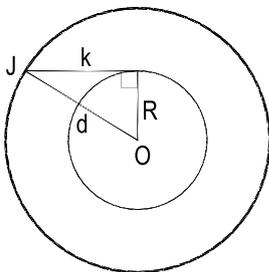


Figura 272

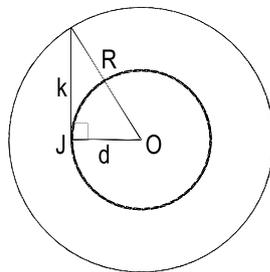


Figura 273

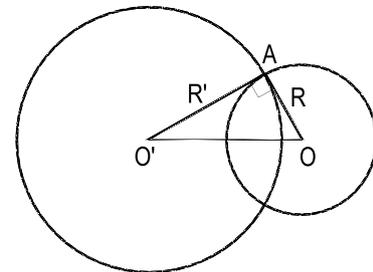


Figura 274

245 – Teorema

Quando dois círculos são ortogonais, a potência do centro de cada um deles em relação ao outro é igual ao quadrado de seu raio.

Demonstração: Consideremos os círculos ortogonais (O, R) e (O', R') e tracemos os raios OA e O'A relativos a um dos pontos de corte (Figura 274).

Porque cada um destes raios é tangente ao outro círculo (número 122.1), temos:

$$P_{O'}(O) = R^2 \quad \text{e} \quad P_O(O') = R'^2$$

Então, quando dois círculos são ortogonais...

246 – Recíproca

Quando a potência do centro de um círculo em relação a outro círculo é igual ao quadrado do raio do primeiro, os dois círculos são ortogonais.

Demonstração: Sejam dois círculos (O, R) e (O', R') , tais que: $P_{O(O')} = R^2$ (1)

Designando por d a distância entre os centros dos dois círculos considerados, podemos, tal como demonstrado em 243.3, escrever: $P_{O(O')} = d^2 - R'^2$ (2)

As relações (1) e (2) fornecem: $R^2 = d^2 - R'^2 \quad \therefore \quad d^2 = R^2 + R'^2$

Esta última relação garante que o triângulo OO' (Figura 274) seja retângulo. Ou seja, que os dois círculos sejam ortogonais.

247 – Teorema

Quando dois círculos são ortogonais, todo diâmetro de um é dividido harmonicamente pelo outro.

Demonstração: Consideremos dois círculos ortogonais (O, R) e (O', R') , bem como um diâmetro AB qualquer do primeiro. A reta r , suporte de AB , corta a circunferência (O', R') nos pontos M e N (Figura 275).

Queremos provar que M e N dividem harmonicamente o diâmetro AB .

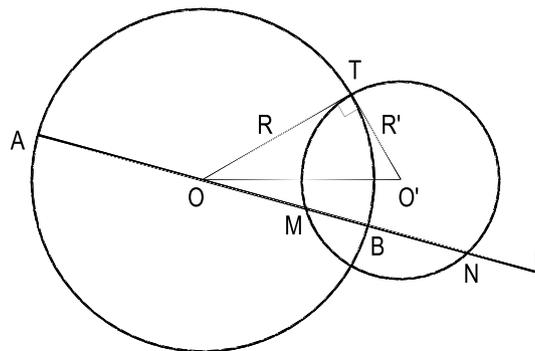


Figura 275

A potência do ponto O em relação ao círculo (O', R') se escreve:

$$P_{O(O')} = OT^2 = OM \cdot ON$$

E como $OT = R = OA = OB$, temos $OA^2 = OM \cdot ON$

Esta última relação garante (número 161.7) a tese.

248 – Recíproca

Quando dois círculos são tais que qualquer diâmetro de um é dividido harmonicamente pelo outro, os dois círculos são ortogonais.

Demonstração: Consideremos dois círculos (O, R) e (O', R') e um diâmetro qualquer AB do primeiro, bem como os pontos M e N , segundo os quais a reta suporte de AB corta a circunferência (O', R') (Figura 275).

Como, por hipótese, M e N são conjugados harmônicos de A e B , podemos (número 161.6) escrever:

$$OM \cdot ON = OA^2 \quad \therefore \quad OM \cdot ON = R^2$$

$$\text{Mas, } P_{O(O')} = OM \cdot ON \quad \therefore \quad P_{O(O')} = R^2$$

Esta última relação garante (número 246) a tese.

249 – Teorema de Faure

O lugar geométrico dos pontos cujas somas de potências em relação a dois círculos ortogonais é nula é um terceiro círculo que tem, por diâmetro, o segmento formado pelos centros dos dois primeiros.

Demonstração: Consideremos um ponto J , genérico, que, por hipótese, pertença ao lugar e que, então, permita escrever (Figura 276):

$$P_J(O) + P_J(O') = 0$$

$$JO^2 - R^2 + JO'^2 - R'^2 = 0$$

$$JO^2 + JO'^2 = R^2 + R'^2 \quad (1)$$

Mas, como os círculos (O, R) e (O', R') são ortogonais, temos:

$$R^2 + R'^2 = d^2 \quad (2)$$

As relações (1) e (2) fornecem:

$$JO^2 + JO'^2 = d^2$$

Assim, o triângulo JOO' é retângulo em J e, conseqüentemente, o lugar geométrico dos pontos J é o círculo de diâmetro OO' , conforme se queria demonstrar.

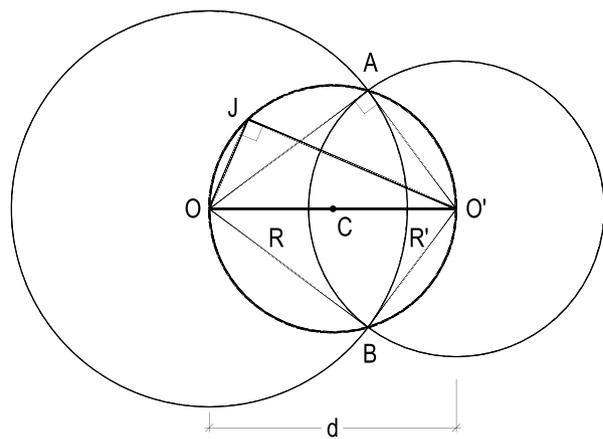


Figura 276

250 – Teorema

O lugar geométrico dos pontos, cujas diferenças de potências em relação a dois círculos dados são constantes, é uma reta perpendicular à reta formada pelos centros dos dois círculos.

Demonstração: Sejam (O, R) e (O', R') os dois círculos dados, d a distância entre seus centros e k^2 a diferença constante de potências estabelecida.

Seja J um ponto qualquer do lugar que se quer instituir (Figura 277), podemos escrever:

$$P_J(O) - P_J(O') = k^2$$

Ou, então:

$$JO^2 - R^2 - (JO'^2 - R'^2) = k^2$$

Logo:

$$JO^2 - JO'^2 = k^2 + R^2 - R'^2$$

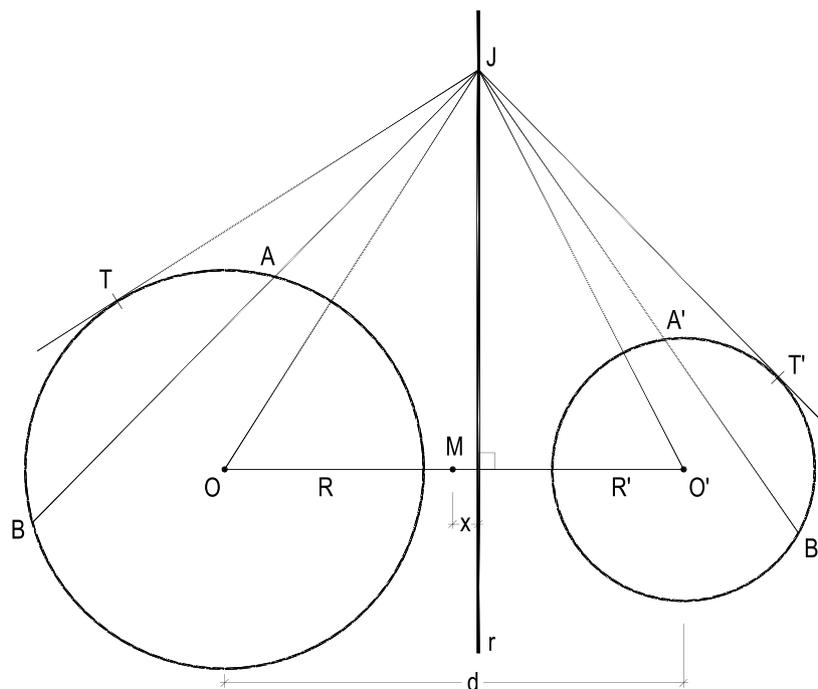


Figura 277

Como k^2 , R^2 e R'^2 são constantes, a diferença $(JO^2 - JO'^2)$ terá também valor constante e, em consequência (número 204.2), o lugar dos pontos J será a reta r perpendicular à linha dos centros OO' , cuja abscissa x em relação ao ponto M , médio de OO' , se calcula (número 204.2) pela expressão:

$$x = \frac{k^2 + R^2 - R'^2}{2d}$$

251 – Corolário

O lugar geométrico dos pontos equipotentes em relação a dois círculos é uma reta perpendicular à linha dos centros.

De fato, se os pontos são equipotentes em relação aos dois círculos, a diferença entre suas potências, em relação a esses círculos, é nula e, portanto, constante. Assim, o lugar será uma reta perpendicular à linha dos centros.

252 – Eixo radical de dois círculos

A reta, lugar geométrico dos pontos equipotentes em relação a dois círculos, é denominada eixo radical dos dois círculos.

Sendo R e R' os raios desses dois círculos e d a distância entre seus centros, a abscissa x do eixo radical em relação ao ponto médio do segmento formado pelos centros dos círculos é dada pela expressão (número 250):

$$x = \frac{R^2 - R'^2}{2d}$$

253 – Condição de existência

Dois círculos possuem eixo radical, a não ser que sejam concêntricos.

De fato, se os centros dos dois círculos são distintos, sabe-se (número 204.2) que existe o lugar.

Quando, ao contrário, os dois círculos são concêntricos (Figura 278), para todo ponto J podemos escrever:

$$P_J(O, R) = JO^2 - R^2 \quad \text{e}$$

$$P_J(O, R') = JO^2 - R'^2$$

E, como os raios R e R' dos dois círculos são diferentes, as potências de todo ponto J em relação aos dois círculos são sempre diferentes.

Assim, inexistindo qualquer ponto equipotente em relação aos dois círculos, inexistente também o eixo radical.

De fato, por subtração,

$$P_J(O, R) - P_J(O, R') = R'^2 - R^2 \neq 0$$

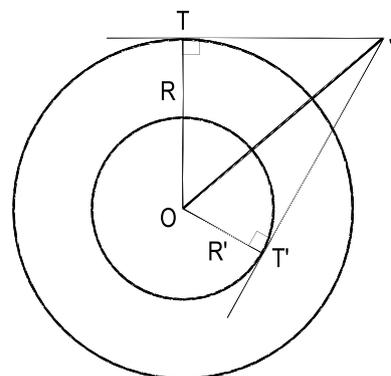


Figura 278

254 – Propriedades do eixo radical

1. O lugar geométrico dos pontos dos quais se pode traçar tangentes iguais a dois círculos é a porção do eixo radical dos dois círculos exterior a eles.

Entenda-se como tangente o segmento limitado entre o ponto considerado e o ponto de contato.

De fato, basta ver que todo ponto J do qual seja possível traçar tangentes iguais a dois círculos O e O' terá (número 243.1) potências iguais em relação aos dois círculos, devendo, pois, pertencer ao seu eixo radical (Figura 279). E, naturalmente, deverá ser exterior aos dois círculos.

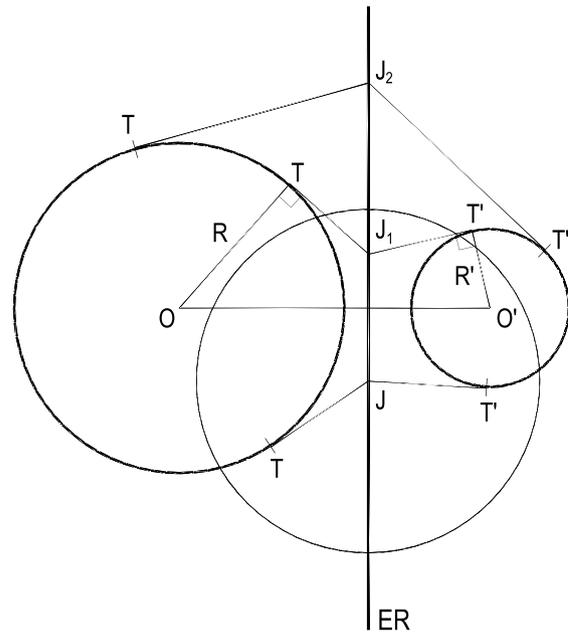


Figura 279

2. O lugar geométrico dos centros dos círculos ortogonais a dois círculos dados é a porção do eixo radical dos dois círculos dados exterior a eles (Figura 279).

Porque o centro J de todo círculo ortogonal aos círculos (O, R) e (O', R') deve fornecer tangentes iguais JT e JT' àqueles dois círculos (número 254.1).

3. O eixo radical de dois círculos secantes é a reta formada pelos pontos comuns aos dois círculos.

Porque os pontos A e B comuns aos dois círculos (Figura 280), possuindo potências nulas em relação a ambos os círculos, são equipotentes em relação a eles.

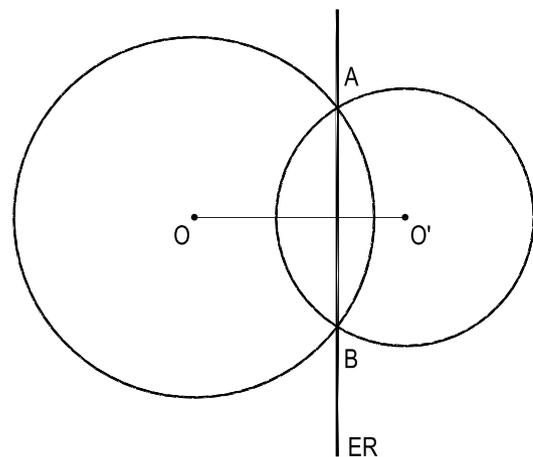


Figura 280

4. O eixo radical de dois círculos tangentes exteriormente é a tangente interna comum a eles.

Porque esta tangente, além de ser perpendicular à linha dos centros, passa pelo ponto T de contato dos círculos, o qual, pertencendo aos dois, tem potências iguais (nulas) em relação a eles (Figura 281).

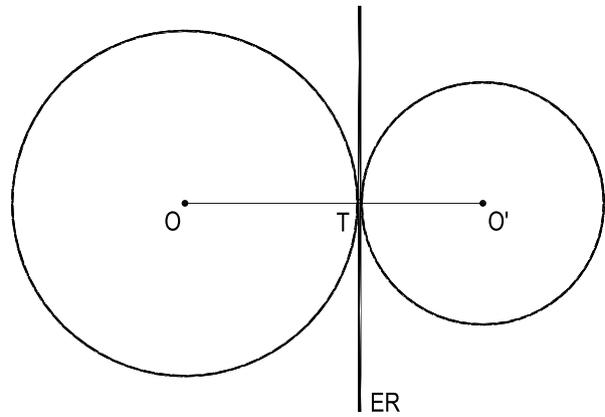


Figura 281

5. O eixo radical de dois círculos tangentes interiormente é a tangente comum a eles.

Porque a tangente (única) comum aos dois círculos é perpendicular à linha dos centros, pertencendo ao ponto T, comum aos dois círculos (Figura 282) e, por isso, equipotente em relação aos dois círculos.

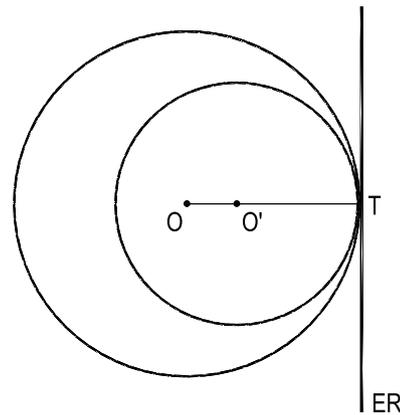


Figura 282

6. O eixo radical de dois círculos exteriores passa pelos pontos médios das tangentes comuns a eles.

Porque os pontos M, médios de todas as tangentes comuns (Figura 283), fornecem tangentes iguais a eles (número 254.1).

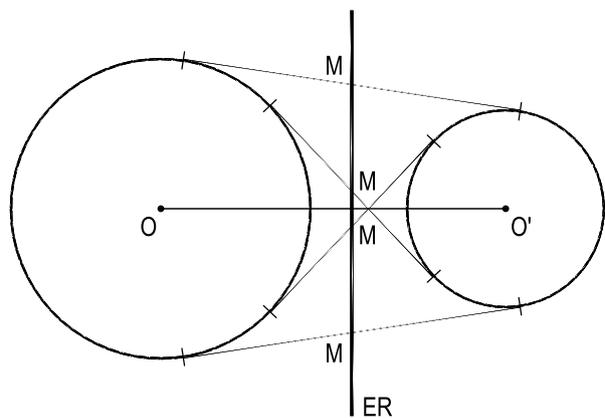


Figura 283

255 – Teorema

Os eixos radicais de três círculos, cujos centros não sejam colineares, concorrem num mesmo ponto.

Demonstração: Consideremos os círculos de centros O_1 , O_2 e O_3 , segundo a hipótese, bem como os eixos radicais ER_{12} , ER_{13} e ER_{23} destes círculos, tomados dois a dois (Figura 284).

Estes eixos radicais, sendo perpendiculares, cada um a cada um dos lados do triângulo $O_1 O_2 O_3$ (Figura 284), não podem ser paralelos entre si.

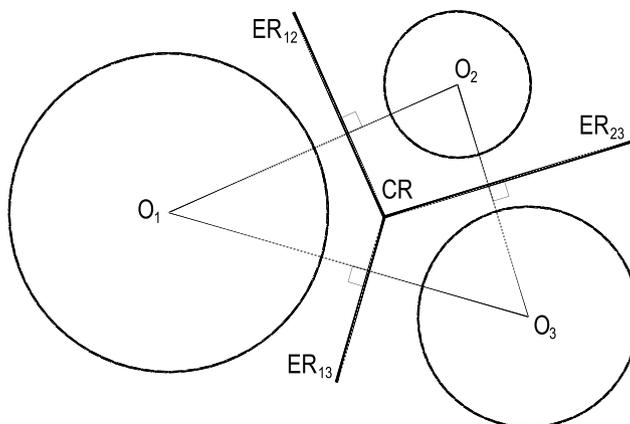


Figura 284

Seja, então, CR o ponto comum a ER_{12} e a ER_{13} (Figura 284). Teremos:

$$P_{CR}(O_1) = P_{CR}(O_2) \quad \text{e} \quad P_{CR}(O_1) = P_{CR}(O_3). \quad \text{Logo,}$$

$$P_{CR}(O_2) = P_{CR}(O_3)$$

Assim, o ponto CR pertencerá também ao eixo radical ER_{23} .

Então, os eixos radicais de três círculos...

256 – Centro radical de três círculos

O ponto (único) equipotente em relação a três círculos genéricos é denominado centro radical dos três círculos.

257 – Condição de existência

Para que exista o centro radical de três círculos é necessário e suficiente que seus centros sejam os três vértices de um triângulo.

Já vimos (número 255) que quando os centros dos três círculos não são colineares existe um – e só um – ponto equipotente em relação aos círculos: o centro radical CR (Figura 284).

Se, ao contrário, os centros dos três círculos fossem colineares, os três eixos radicais, sendo perpendiculares à reta formada pelos centros, seriam paralelos (ou, eventualmente, dois coincidentes, com a mesma direção do terceiro). E, então, não existiria o centro radical.

E se pelo menos dois dos três círculos fossem concêntricos também não existiria o centro radical por não existir pelo menos um dos eixos radicais (número 253).

258 – Propriedades do centro radical

1. Quando o centro radical de três círculos é exterior aos três, ele é o único ponto do qual se pode traçar tangentes iguais aos círculos.

Porque (número 254.1) o centro radical CR, além de pertencer aos eixos radicais, é exterior aos círculos (Figura 285).

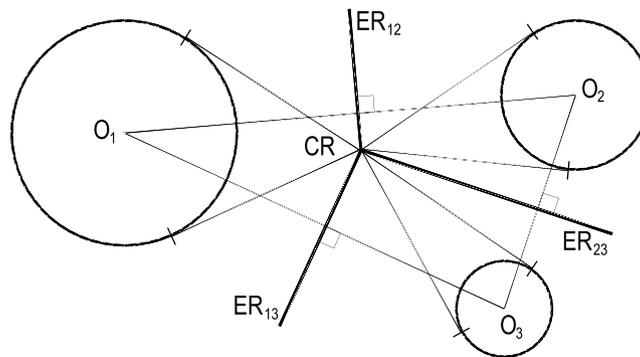


Figura 285

2. Quando o centro radical de três círculos é exterior aos três, ele é o centro do único círculo ortogonal aos três primeiros.

Porque o centro C do círculo ortogonal aos três deve fornecer tangentes iguais CT_1 , CT_2 e CT_3 (Figura 286) àqueles três círculos (número 258.1).

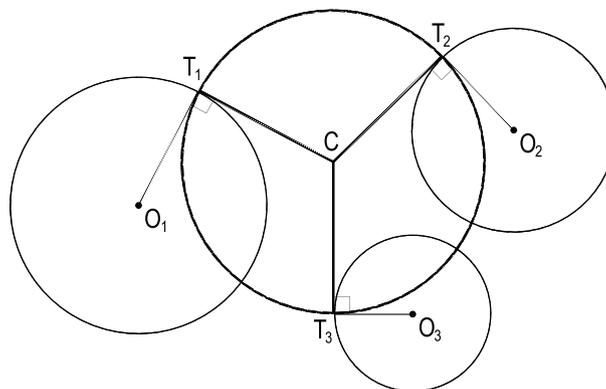


Figura 286

259 – Construção do eixo radical de dois círculos

Só há interesse em estudar a construção do eixo radical de dois círculos se eles forem exteriores ou interiores, pois quando eles possuem pelo menos um ponto comum, isto é, quando são tangentes ou secantes, é imediata a obtenção de seu eixo radical (números 254.3, 254.4 e 254.5).

Seguem dois processos bastante simples para a construção do eixo radical de dois círculos exteriores ou interiores:

1. Com centro num ponto J qualquer descreve-se um círculo auxiliar secante aos dois dados O e O' , respectivamente, segundo os pontos A e B e A' e B' (Figuras 287 e 288).

Como as retas AB e $A'B'$ são os eixos radicais do círculo auxiliar com cada um dos dois dados, o ponto C , comum a AB e a $A'B'$, será o centro radical dos três círculos em jogo, sendo, pois, ponto de passagem do eixo radical ER dos círculos dados O e O' . Assim, obtido o ponto C , traça-se, por ele, a perpendicular à linha dos centros OO' , que será o eixo radical ER procurado (Figuras 287 e 288).

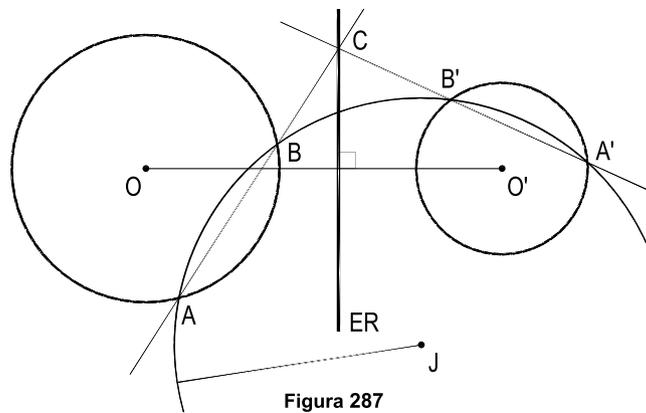


Figura 287

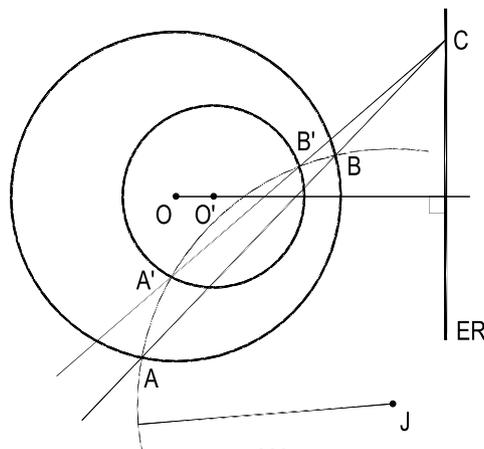


Figura 288

2. Traça-se duas tangentes iguais AT e $A'T'$ a cada um dos dois círculos dados e descreve-se os círculos concêntricos aos dados, pertencendo respectivamente aos pontos T e T' (Figuras 289 e 290).

Como os pontos de cada um desses círculos têm potências iguais (Figuras 289 e 290) em relação a cada um dos dois dados, basta determinar os pontos J e J' comuns aos dois círculos auxiliares e uni-los para que se obtenha o eixo radical procurado.

Naturalmente, as tangentes iguais arbitradas devem ser tais que os círculos auxiliares sejam secantes.

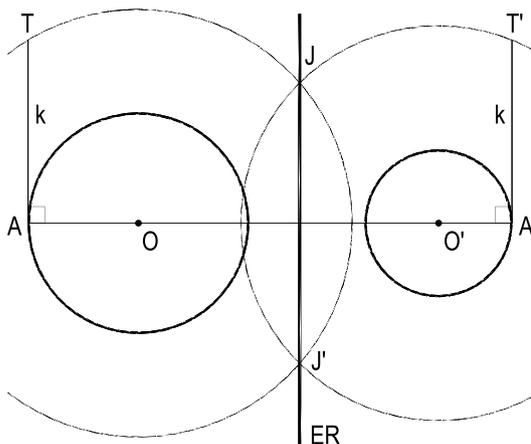


Figura 289

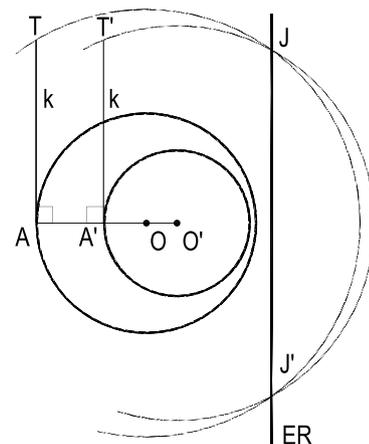


Figura 290

260 – Construção do centro radical de três círculos

A determinação do centro radical CR de três círculos dados O_1 , O_2 e O_3 se faz, naturalmente, pela construção de dois eixos radicais de pares daqueles círculos e pela consequente obtenção do ponto comum a eles.

Para os casos gerais, o processo mais rápido consiste (Figura 291) em utilizar um círculo auxiliar secante aos três dados para obter dois eixos radicais (número 259.1).

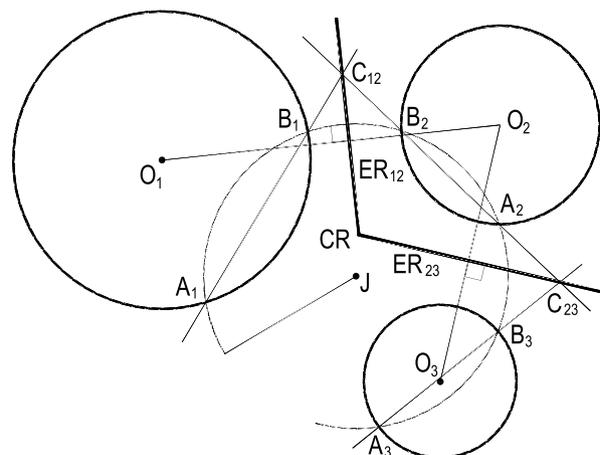


Figura 291

Em casos mais particulares (como, por exemplo, os das Figuras 292, 293 e 294), o processo acima descrito pode ser dispensado por ser imediato obter dois eixos radicais que determinam a posição do centro radical CR dos três círculos dados.

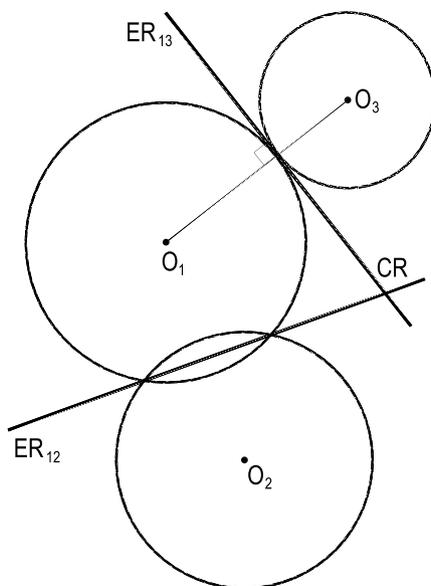


Figura 292

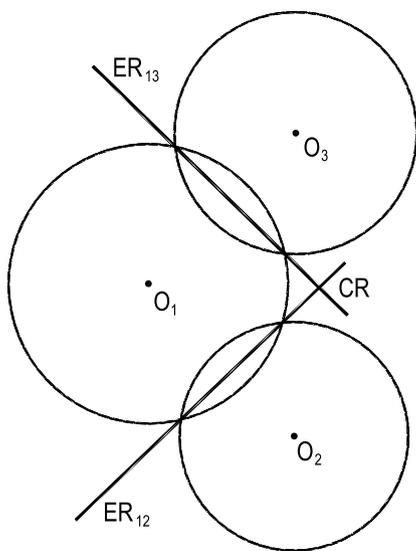


Figura 293

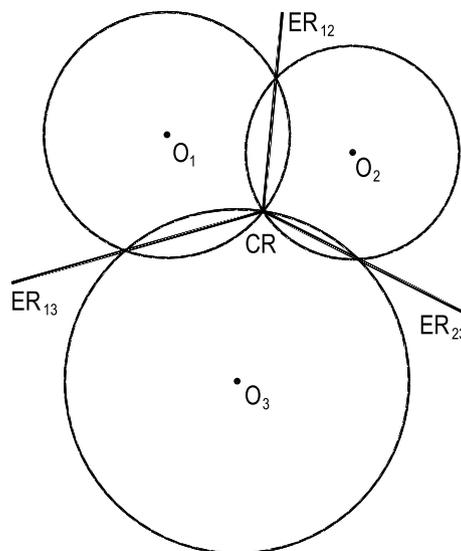


Figura 294

261 – Círculos tangentes exteriormente

Vamos desenvolver diversas propriedades relacionadas a pares de círculos tangentes externamente, suas tangentes comuns externas e internas, estas, como visto (número 254.4), coincidentes com seus eixos radicais.

Consideremos dois círculos (O, R) e (O', R') tangentes exteriormente no ponto T , bem como uma das tangentes externas comuns AB – A e B sendo seus pontos de contato com cada um dos dois círculos – e tracemos o eixo radical ER dos círculos (Figura 295) que, como vimos (número 254.4), coincide com a tangente interna comum aos dois círculos.

Já sabemos (número 254.1) que o ponto M comum a ER e a AB é o ponto médio de AB . E, como ER é também tangente aos dois círculos, os segmentos MT , MA e MB são iguais (Figura 295).

E porque MT é perpendicular à linha dos centros OO' e os ângulos OAM e MBO' são retos, concluímos (Figura 295) que, para dois círculos tangentes exteriormente, valem as seguintes propriedades:

1. O círculo que tem por diâmetro a tangente externa comum AB tangencia a linha dos centros OO' no ponto de contato T dos dois círculos e é ortogonal a estes dois círculos.

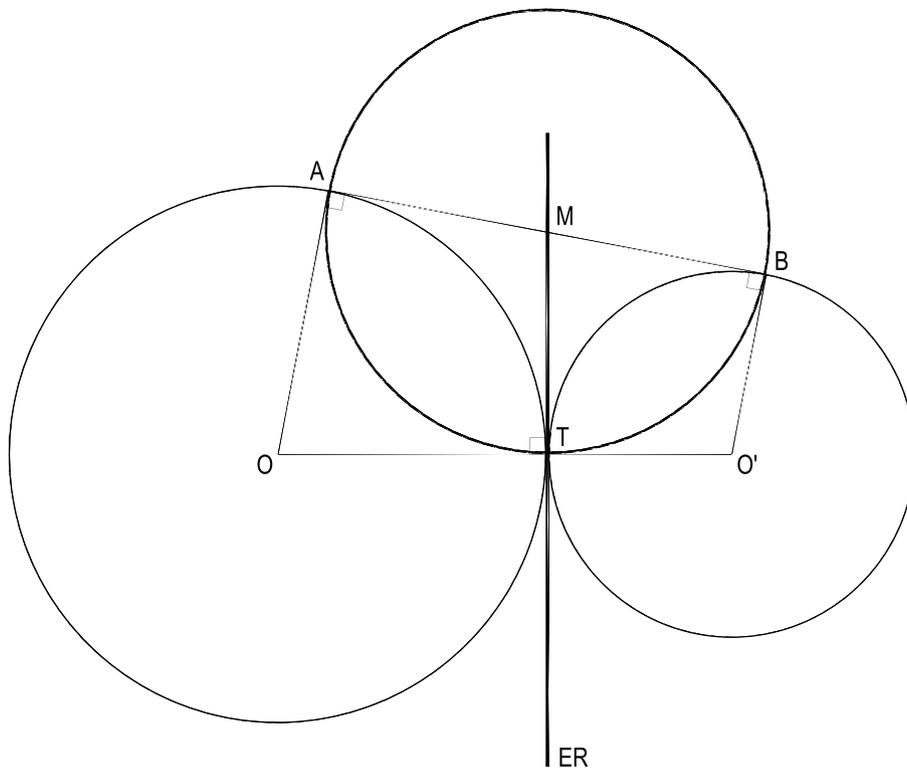


Figura 295

- O triângulo ATB formado pelos três pontos de contato é retângulo em T, pois (Figura 296) ele se inscreve num semicírculo.
- Consideremos agora os segmentos MO e MO' (Figura 297) que, sendo perpendiculares respectivamente às cordas TA e TB, são perpendiculares entre si. Assim, o triângulo MOO' formado pelo ponto médio M da tangente comum AB e pelos centros dos dois círculos é retângulo em M.
- O ponto J, médio de OO', é o centro do círculo circunscrito ao triângulo MOO' (Figura 298).

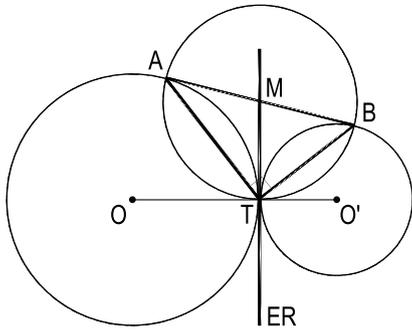


Figura 296

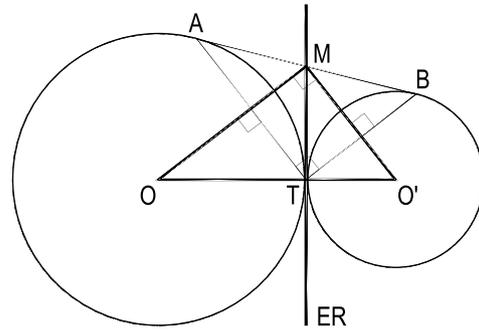


Figura 297

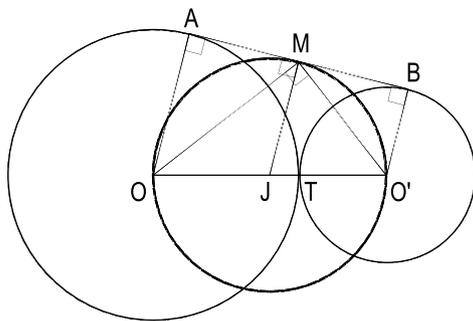


Figura 298

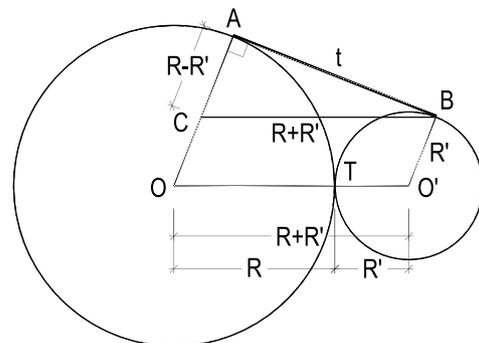


Figura 299

- E, porque o trapézio OO'BA é retângulo, sua base média JM é perpendicular a AB. Assim, o círculo que tem por diâmetro o segmento OO' formado pelos centros dos dois círculos é tangente à tangente comum AB, em seu ponto médio M (Figura 298).
- Designemos por R e R' os raios dos dois círculos e calculemos, em função deles, o valor t da tangente comum AB. Para tanto, consideremos a paralela BC à linha dos centros (Figura 299), formando o triângulo retângulo ABC, que permite escrever:

$$t^2 = (R + R')^2 - (R - R')^2$$

$$\therefore t^2 = R^2 + R'^2 + 2RR' - R^2 - R'^2 + 2RR' \quad \therefore t^2 = 4RR' \quad \boxed{t = (2R)(2R')}$$

A tangente comum AB é igual à média geométrica entre os diâmetros dos dois círculos.

CAPÍTULO XV

POLÍGONOS REGULARES

262 – Polígonos entrecruzados

Quando dois ou mais lados não consecutivos de um polígono se cortam, ele é denominado entrecruzado (como ABCDEF', na Figura 300).

Os pontos de interseção dos lados não consecutivos são os nós do polígono (X e Y, na Figura 300).

Evidentemente, todo polígono entrecruzado é não convexo (número 22).

Os polígonos entrecruzados regulares são comumente denominados regulares estrelados.

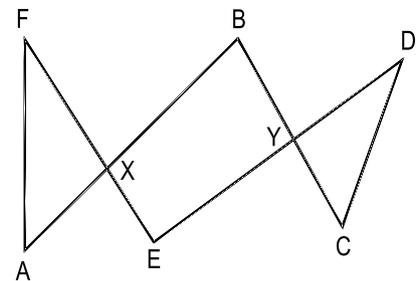


Figura 300

263 – Generalização dos conceitos de ângulos externos e internos

Consideremos um polígono qualquer e orientemos seu plano, isto é, consideremos um certo sentido para percorrer seus lados (Figura 301).

Nestas condições, denomina-se ângulo externo do polígono, em cada vértice, o menor ângulo de que se deve girar o lado que chega a esse vértice para que ele coincida em direção e sentido com o lado consecutivo (como e , na Figura 301).

Também por definição, ângulo interno i do polígono, em cada vértice, é o ângulo tal que somado ao externo, nesse vértice, fornece $+180^\circ$, de acordo com o sentido escolhido. Cabe notar, por exemplo, o ângulo interno no vértice E, para enfatizar este conceito.

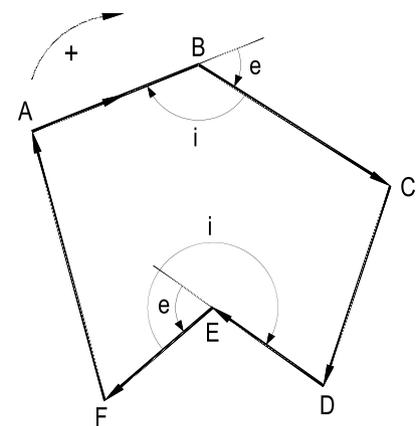


Figura 301

264 – Soma algébrica dos ângulos externos de um polígono

Consideremos um polígono qualquer ABCDEFG e orientemos seus ângulos externos. Para somar, graficamente, estes ângulos, tracemos, por um ponto O qualquer, semirretas paralelas aos lados do polígono com sentidos iguais aos deles (Figura 302).

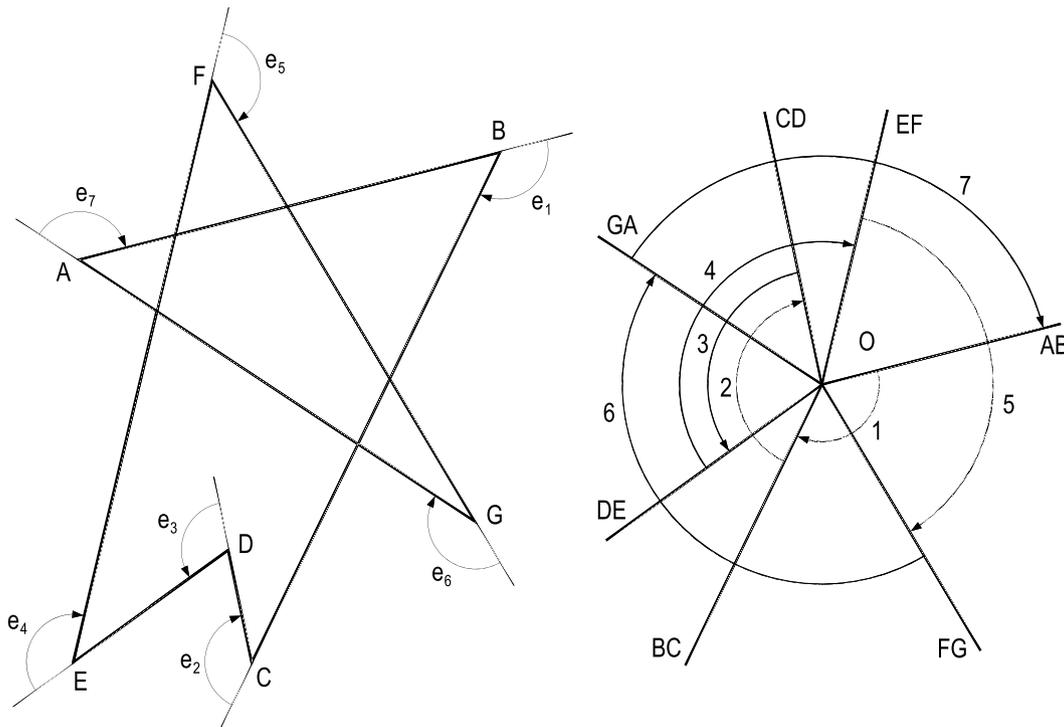


Figura 302

Assim, os ângulos externos do polígono repetir-se-ão, até em sentido, entre estas semirretas. E como, após a marcação de todos os ângulos externos, teremos retornado à primeira semirreta, a soma algébrica S_e desses ângulos será um número inteiro de voltas completas (k) em torno do ponto O. No exemplo referente à Figura 302, temos $k = 2$ e, em consequência, $S_e = 720^\circ$.

Podemos, pois, em termos gerais, escrever:

$$S_e = k \cdot 360^\circ$$

O fator k , como vimos, é necessariamente inteiro.

Convencionou-se, além disso, que k é, também, sempre positivo. Assim, quando, para uma certa orientação arbitrada, a soma algébrica dos ângulos externos apresentar valor negativo, entenderemos que deve ser utilizada a orientação contrária àquela, para que o fator k seja positivo.

265 – Soma algébrica dos ângulos internos de um polígono

Pela própria definição de ângulo interno, (número 263), podemos escrever, para cada um dos vértices de um polígono qualquer de n lados:

$$i_1 + e_1 = 180^\circ$$

$$i_2 + e_2 = 180^\circ$$

$$i_3 + e_3 = 180^\circ$$

· ·

· ·

$$i_n + e_n = 180^\circ$$

Somando membro a membro:
$$\frac{S_i + S_e = n \cdot 180^\circ}{\quad}$$

$$\therefore S_i = n \cdot 180^\circ - S_e = n \cdot 180^\circ - k \cdot 360^\circ \quad \therefore \boxed{S_i = (n - 2k) \cdot 180^\circ}$$

onde n é o gênero do polígono.

266 – Espécie de um polígono

O fator k acima introduzido e em função do qual estabelecemos as somas algébricas dos ângulos externos e internos de um polígono qualquer denomina-se espécie do polígono.

Assim, espécie de um polígono é o número inteiro de voltas completas descritas em torno de um ponto ao se marcar sucessivamente os ângulos externos orientados do polígono. Naturalmente, porque estes ângulos são somados algebricamente, duas voltas (ou partes delas) descritas em sentidos opostos se anulam, não interferindo, portanto, na soma total.

Então, espécie de um polígono é o número inteiro e positivo k , tal que as somas algébricas dos ângulos de polígonos sejam respectivamente $S_e = k \cdot 360^\circ$ e $S_i = (n - 2k) \cdot 180^\circ$.

267 – Observações

1. Todo polígono convexo tem espécie um.

De fato, porque todos os seus ângulos externos têm sentidos iguais, a soma algébrica desses ângulos tem módulo igual à soma de seus módulos. E como, para todo polígono convexo $S_e = 360^\circ$ (número 67), temos $k = 1$.

Evidentemente, a recíproca desta propriedade não é verdadeira, isto é, há polígonos não convexos de espécie um.

2. A expressão $D = \frac{n(n-3)}{2}$, anteriormente estabelecida (número 24) para o cálculo do número de diagonais de um polígono convexo, em função de seu gênero, é válida para os não convexos, uma vez que independe da posição relativa dos vértices e, em consequência, da posição relativa de seus lados.

268 – Teorema

Em todo polígono regular, as bissetrizes de todos os ângulos internos e as mediatrizes de todos os lados concorrem num mesmo ponto.

Demonstração: Consideremos as bissetrizes dos ângulos internos \widehat{A} e \widehat{B} de um polígono regular ABCD..., convexo (Figura 303) ou não (Figura 304), as quais, não sendo paralelas, cortam-se num certo ponto O.

O triângulo OAB assim formado é isósceles, por ter dois ângulos α iguais à metade do ângulo interno do polígono, por hipótese, regular.

Unamos o ponto O aos demais vértices do polígono, formando novos triângulos OBC, OCD, etc., todos iguais ao primeiro.

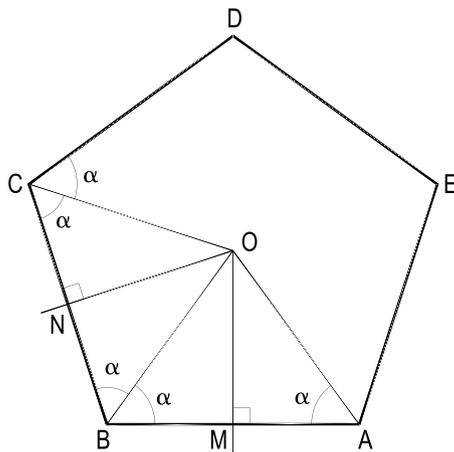


Figura 303

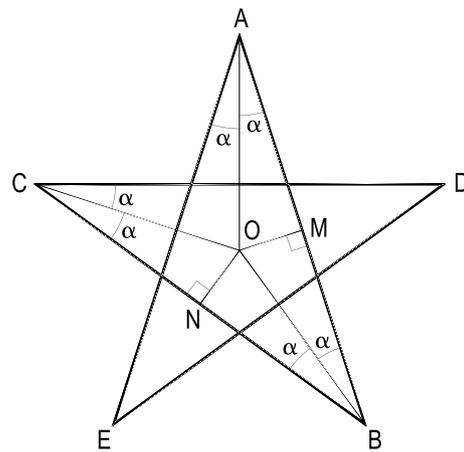


Figura 304

De fato, basta ver que os triângulos OAB e OBC, por exemplo, possuem dois lados respectivamente iguais ($AB = BC$ e OB comum) e o ângulo compreendido (α) igual.

Daí concluirmos que CO , DO , etc. serão as bissetrizes dos demais ângulos internos do polígono. Além disso, porque aqueles triângulos são todos iguais e isósceles, o ponto O equidistará de todos os vértices do polígono, sendo pois, necessariamente, o ponto comum a todas as mediatrizes dos lados do polígono.

Então, em todo polígono regular, as bissetrizes de todos os ângulos internos e as mediatrizes de todos os lados concorrem num mesmo ponto.

269 – Corolários

1. Todo polígono regular é inscritível num círculo. Porque o ponto O (Figuras 303 e 304) comum às mediatrizes de seus lados equidistará de todos os seus vértices e será, então, centro de um círculo (de raio $OA = OB = OC = \dots$) que passa por todos os seus vértices.
2. Todo polígono regular é circunscritível a um círculo. Porque esse mesmo ponto O (Figuras 303 e 304), sendo também o ponto comum às bissetrizes dos ângulos internos, equidistará de todos os lados do polígono, sendo, então, centro de um círculo interior ao polígono e tangente a todos os seus lados.

270 – Escólio

Os círculos circunscrito e inscrito a um polígono regular são concêntricos.

271 – Teorema

Quando se divide um círculo em um número qualquer n de partes iguais e se une os pontos de divisão de p em p (p sendo inteiro e menor que n), o polígono obtido é regular.

Demonstração: Para provar que o polígono formado segundo as condições estabelecidas na hipótese é regular, deve-se provar que ele é equilátero e equiângulo (número 23).

De fato, os lados do polígono são iguais (Figuras 305 e 306), como cordas relativas a arcos iguais.

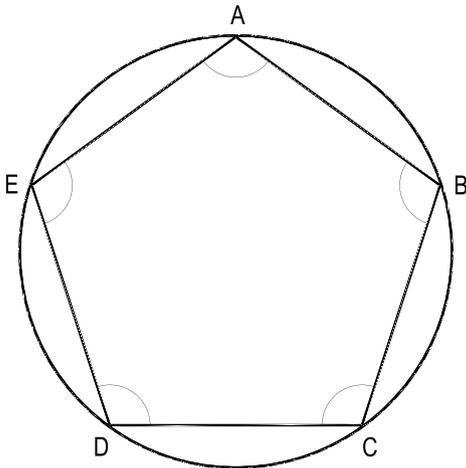


Figura 305

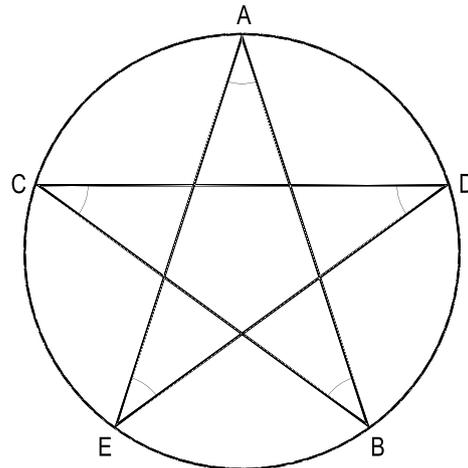


Figura 306

E seus ângulos internos são iguais, por serem inscritos, interceptando arcos iguais do círculo.

Assim, quando se divide um círculo em um número n de partes iguais e se une os pontos de divisão de p em p (p sendo inteiro e menor que n), o polígono obtido é regular.

272 – Teorema

Quando se divide um círculo em um número qualquer n de partes iguais, o polígono formado pelas tangentes ao círculo, traçadas pelos pontos de divisão, é regular.

Demonstração: Os ângulos internos do polígono são todos iguais entre si, por determinarem no círculo arcos respectivamente iguais (Figuras 307 e 308).

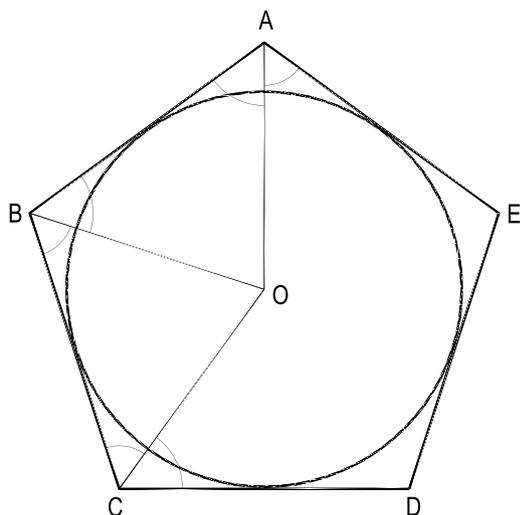


Figura 307

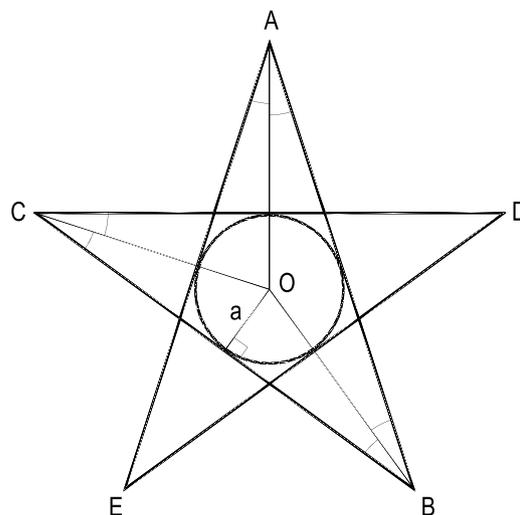


Figura 308

E porque as retas AO, BO, CO, etc. são bissetrizes dos ângulos internos do polígono (número 120.1), os triângulos OAB, OBC, OCD, etc. são isósceles e iguais entre si, o que acarreta a igualdade dos lados do polígono.

Assim, tal polígono será equilátero e equiângulo, logo, regular.

Então, quando se divide...

273 – Observações

1. O centro e o raio do círculo circunscrito a um polígono regular denominam-se, respectivamente, centro e raio do polígono.
2. Apótema de um polígono regular é o segmento de perpendicular traçado do centro a um qualquer dos lados. Evidentemente, o apótema é igual ao raio do círculo inscrito no polígono (como a , na Figura 308).
3. Ângulo central de um polígono regular é o ângulo central do círculo a ele circunscrito, correspondente a um qualquer de seus lados.

274 – Teorema

Em todo polígono regular, o ângulo externo é igual ao central.

Demonstração: De fato, basta ver que (Figura 309):

$$e = \frac{CD + DE}{2} = \frac{2CD}{2} = CD = c$$

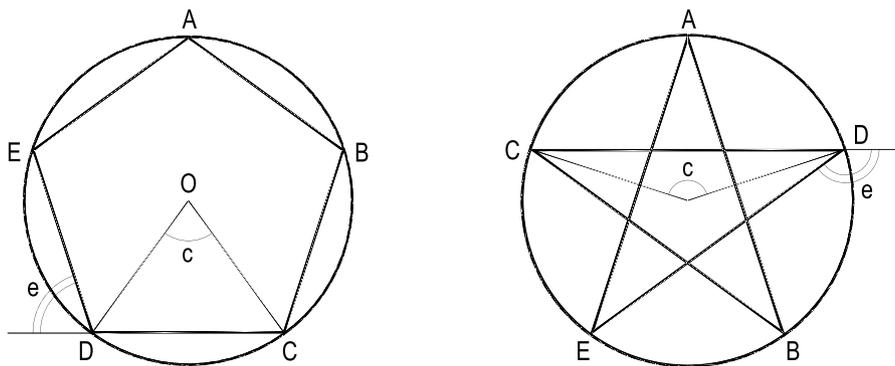


Figura 309

Observe-se que, em ambos os casos, os arcos CD e DE são os que chegam ao vértice D considerado e que, independentemente do gênero que se considere para os polígonos, o raciocínio permanece válido.

Então, em todo polígono regular...

275 – Corolário

A soma algébrica dos ângulos centrais de um polígono regular de espécie k é igual a $k \cdot 360^\circ$ (número 264).

276 – Obtenção dos polígonos regulares

Já demonstramos (número 271) que, dividindo um círculo em um número n, qualquer, de partes iguais e unindo-se os pontos de divisão de p em p (p inteiro e menor que n), obtém-se um certo polígono regular.

Vejamos agora como saber quantos e quais são os polígonos que podem ser construídos com a variação do valor de p.

1ª hipótese: p é um submúltiplo de n.

Dos n pontos de divisão utilizaremos apenas n/p, para a formação do polígono, o qual será obtido após uma volta em torno do centro do círculo, uma vez que a fração n/p é igual a um número inteiro.

Assim, o gênero do polígono será igual a n/p.

E como a soma algébrica de seus ângulos centrais será necessariamente igual a 360° (uma volta apenas em torno do centro), a espécie k do polígono será igual a um (número 275). De fato, o polígono tem de ser convexo, porque retornaremos ao vértice inicial sem que tenha havido cruzamento de lados não consecutivos.

Aliás, porque na formação do polígono só são aproveitados $1/p$ dos n pontos de divisão, conclui-se que podemos formar p polígonos iguais entre si.

2ª hipótese: n e p são primos entre si.

Porque a fração n/p , irredutível, não é igual a um número inteiro, após a primeira volta não completaremos o polígono. Em verdade, para que se o complete, isto é, para que se retorne ao vértice inicial, teremos de utilizar todos os n pontos de divisão, o que só será conseguido após p voltas em torno do centro do círculo.

De fato, porque, em cada volta, são utilizados aproximadamente n/p pontos de divisão (com rigor, o maior inteiro menor que n/p), só após p voltas teremos utilizado os n pontos.

Assim, o único polígono formado terá gênero n . E como as p voltas descritas em torno do centro acarretam que a soma algébrica de seus ângulos centrais seja igual a $p \cdot 360^\circ$, a espécie do polígono – que, então, será estrelado – será igual a p (número 275).

3ª hipótese: n e p admitem fator comum.

Quando n e p admitem fator comum, isto é, quando $n = fn'$ e $p = fp'$, tais que n' e p' sejam primos entre si, (f é, então, o maior divisor comum entre n e p), tudo se passa como se houvéssimos dividido o círculo em n' partes iguais e unido estes pontos de divisão de p' em p' .

Assim, teremos recaído na segunda hipótese, obtendo-se, pois, um polígono estrelado de gênero n' e espécie p' .

Aliás, porque há f grupos de n' pontos, poderemos formar f polígonos iguais entre si.

277– Observação

Quando se unem os n pontos de divisão de p em p ou de $(n - p)$ em $(n - p)$, obtém-se o mesmo polígono. De fato, a partir de um vértice qualquer, para se obter o consecutivo, pode-se descrever ou o menor arco que os une ou o maior.

Assim, para a pesquisa dos polígonos que podem ser obtidos dividindo-se um círculo em n partes iguais, basta estudar os valores de p inferiores a $n/2$, pois, após este valor, começarão a se repetir os polígonos.

278 – Resumo

Do exposto, pode-se organizar um quadro resumo, analisando, para as diversas possibilidades de união dos pontos de divisão, quais as naturezas, gêneros, espécies e quantidades de polígonos regulares criados.

Hipóteses	Polígonos Obtidos			
	Quantidade	Natureza	Gênero	Espécie
p é submúltiplo de n	p	Convexo	n/p	1
n e p são primos entre si	1	Estrelado	n	p
n e p admitem M.D.C. = f	f	Estrelado	n/f	p/f

279 – Observação

A título de exemplo, estudemos os polígonos regulares que podem ser formados dividindo-se um círculo em 20 partes iguais.

Dentre os valores possíveis de p (1 a 9, inclusive), os submúltiplos de $n = 20$ são 1, 2, 4 e 5; os primos são 3, 7 e 9 e os que admitem fator comum são 6 e 8.

Para $n = 20$ e $p = 6$, o maior divisor comum é $f = 2$.

Para $n = 20$ e $p = 8$, o maior divisor comum é $f = 4$.

Assim, podemos organizar o seguinte quadro:

p	Gênero	Espécie	Polígonos Obtidos	Figuras
1	20	1	1 icoságono convexo regular	310
2	10	1	2 decágonos convexos regulares	311
3	20	3	1 icoságono estrelado regular de espécie 3	312
4	5	1	4 pentágonos convexos regulares	313
5	4	1	5 quadrados	314
6	10	3	2 decágonos estrelados regulares de espécie 3	315
7	20	7	1 icoságono estrelado regular de espécie 7	316
8	5	2	4 pentágonos estrelados regulares de espécie 2	317
9	20	9	1 icoságono estrelado regular de espécie 9	318

As Figuras que se seguem (de 310 a 318) mostram, para cada uma dessas nove hipóteses possíveis, os polígonos criados. São quatro icoságonos (um convexo e três estrelados); dois tipos de decágonos (convexo e estrelado), com suas repetições; dois tipos de pentágonos (regular e estrelado), cada qual com quatro posições e, enfim, um quadrado, este com cinco posições.

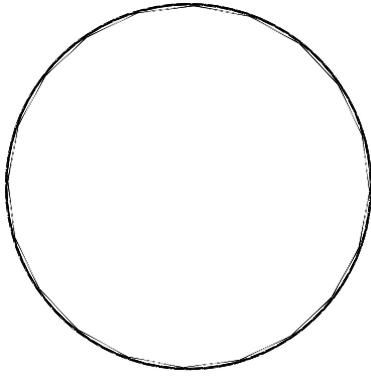


Figura 310

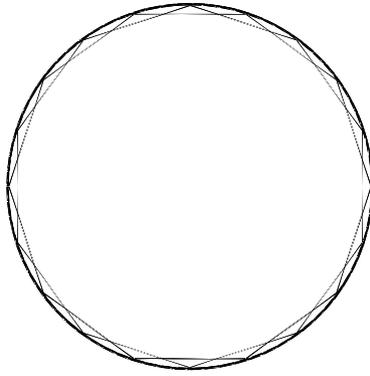


Figura 311

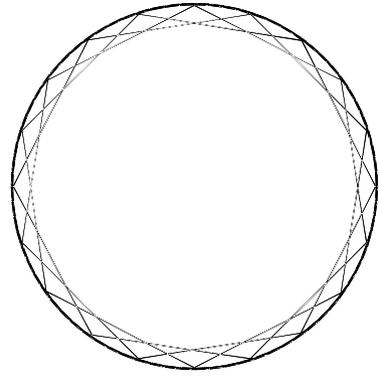


Figura 312

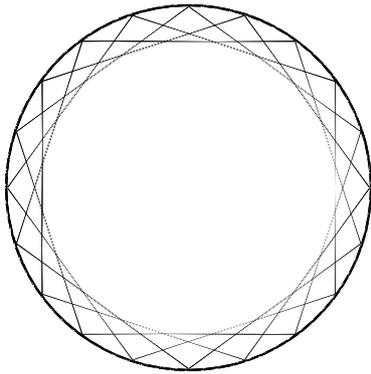


Figura 313

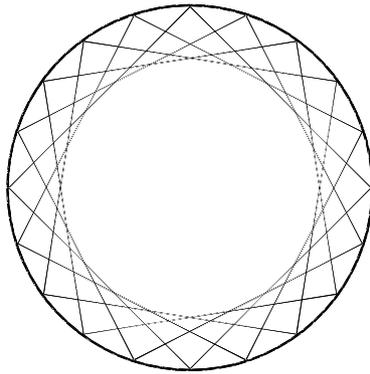


Figura 314

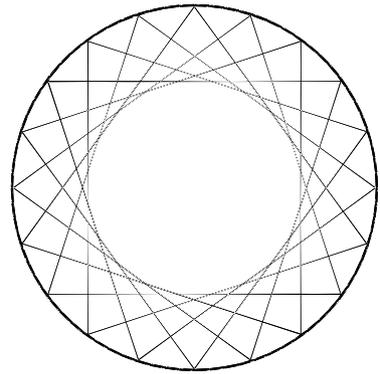


Figura 315

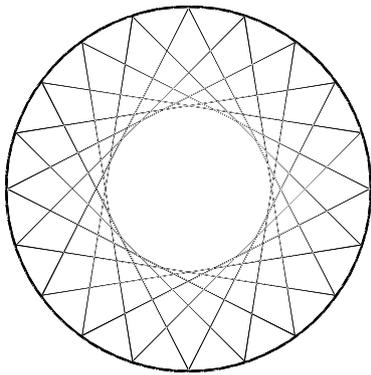


Figura 316

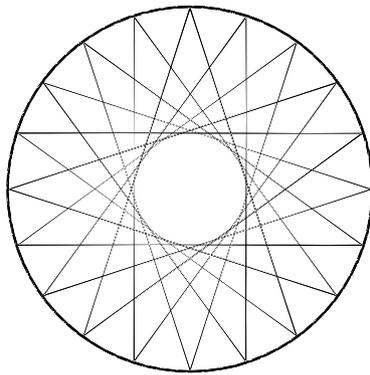


Figura 317

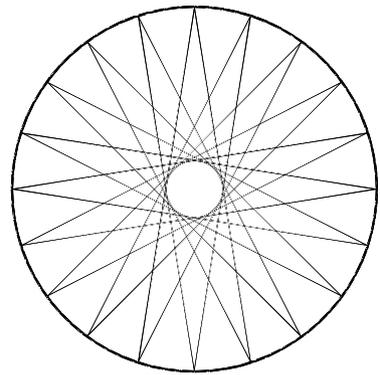


Figura 318

280 – Segmentos áureos – média e extrema razão

Diz-se que um segmento x é áureo de um outro segmento a , quando x é a média geométrica entre a e a diferença dos dois, isto é, quando existe a relação:

$$\boxed{x^2 = a(a-x)}$$

Desenvolvendo esta relação, temos:

$$x^2 = a^2 - ax \quad \therefore \quad x^2 + ax - a^2 = 0$$

$$\therefore \quad x = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 + 4a^2}}{2} = \frac{-a \pm a\sqrt{5}}{2}$$

$$\therefore \quad \boxed{x_1 = \frac{a}{2}(\sqrt{5} - 1)}$$

e
$$\boxed{x_2 = -\frac{a}{2}(\sqrt{5} + 1)}$$

As duas raízes x_1 e x_2 da equação acima representam os dois segmentos áureos de a . O primeiro é positivo e menor que a , o segundo, negativo e, em módulo, maior que a .

Assim, ao marcar os segmentos áureos de a sobre a reta suporte deste segmento, devemos considerar o interno \overline{AI} com o mesmo sentido que a e o externo \overline{AE} com sentido oposto (Figura 319).

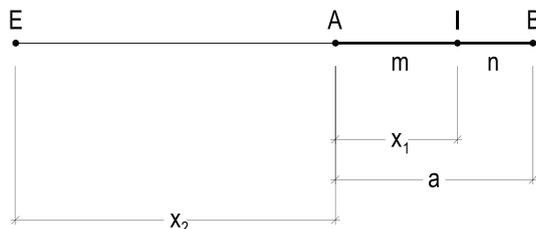


Figura 319

Quando sobre a reta r , suporte do segmento \overline{AB} , são marcados os segmentos áureos de AB (Figura 319), diz-se que seus extremos I e E dividem este segmento AB em média e extrema razão.

Da própria definição, pode-se escrever (Figura 319):

$$x^2 = a(a-x)$$

$$m^2 = a \cdot n \quad \therefore \quad \frac{m}{n} = \frac{a}{m}$$

Ou seja, a razão entre as duas partes m (a maior) e n (a menor) em que o ponto I (Figura 319) divide o segmento a considerado é igual à razão existente entre o próprio segmento a e a parte maior dessa divisão. Essa razão é um número irracional, de valor aproximadamente igual a 1,618 e habitualmente representada pela letra grega Φ , designada proporção áurea ou razão áurea.

O número Φ , tão famoso desde a Antiguidade, recebe vários outros títulos expressivos, tais como: número áureo, número de ouro e razão de Phídias, o escultor grego que tanto o utilizou em suas obras.

281 – Propriedades

1. O produto dos módulos dos segmentos áureos de um segmento a é igual ao quadrado deste segmento.

$$\text{De fato, } |x_1| \cdot |x_2| = \frac{a}{2} (\sqrt{5} - 1) \cdot \frac{a}{2} (\sqrt{5} + 1) = \frac{a^2}{4} (5 - 1) = a^2.$$

2. A diferença entre os módulos dos segmentos áureos de um segmento a é igual a este segmento. De fato,

$$|x_2| - |x_1| = \frac{a}{2} (\sqrt{5} + 1) - \frac{a}{2} (\sqrt{5} - 1) = \frac{a}{2} (\sqrt{5} + 1 - \sqrt{5} + 1) = a.$$

3. Isto significa que o módulo do segmento áureo externo de a é igual à soma de a com o seu áureo interno, pois a relação acima fornece: $|x_2| = a + x_1$

4. Se considerarmos um segmento unitário, isto é, $a = 1$, a primeira relação acima se escreve:

$$|x_2| \cdot |x_1| = a^2 = 1 \quad \therefore \quad |x_1| = \frac{1}{|x_2|}$$

Ou seja, no caso, os módulos dos segmentos áureos são um o inverso do outro.

5. Quando as dimensões de um retângulo são tais que, retirando-se dele um quadrado, reste outro retângulo, semelhante ao original, diz-se que ele é um retângulo áureo.

Para analisar a hipótese, consideremos o retângulo $ABCD$ (Figura 320) com dimensões $(a + b)$ e a , dele, retiremos o quadrado $AXYD$, de lado a , restando o retângulo $XBCY$, com dimensões b e a , por hipótese semelhante ao original, o que permite escrever:

$$\frac{b}{a} = \frac{a}{a + b}$$

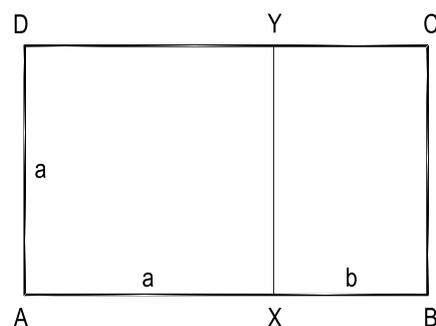


Figura 320

Desenvolvendo, vem:

$$\frac{b}{a} = \frac{a}{a+b} = \frac{a-b}{(a+b)-a}$$

$$\therefore \frac{b}{a} = \frac{a-b}{b}$$

$$\therefore b^2 = a(a-b)$$

O que implica em que o retângulo XBCY seja, também ele, áureo.

282 – Divisão de um segmento em média e extrema razão

Sendo dado o segmento AB, para dividi-lo em média e extrema razão, procede-se à seguinte construção: por B traça-se BC, perpendicular e igual à metade de AB. A seguir, constrói-se o círculo de centro C e raio CB e traça-se a reta ARS, contendo o ponto C (Figura 321).

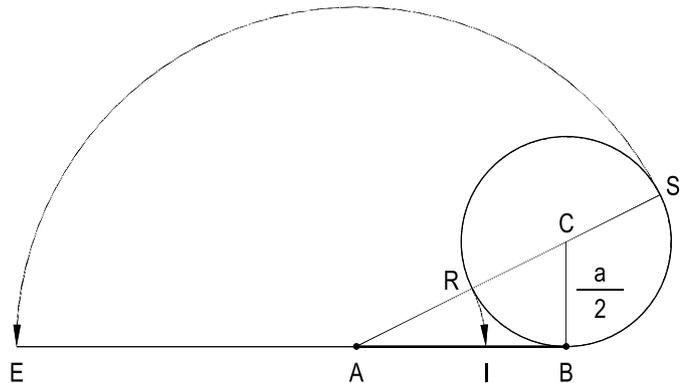


Figura 321

AR e AS são os segmentos áureos de AB. Assim, basta girá-los em torno de A, para que se obtenha os pontos I e E que dividem AB em média e extrema razão (Figura 321).

Para justificar o processo apresentado, fazendo $AB = a$ e $AR = x$, a potência de A em relação ao círculo C dá:

$$AR \cdot AS = AB^2 \quad \therefore x(x+a) = a^2 \quad \therefore x^2 = a^2 - ax \quad \therefore x^2 = a(a-x)$$

E como x é menor que a , concluímos que x , ou seja, AR, é o áureo interno de AB.

Como, finalmente,

$$AS = AR + RS = AR + 2BC = AR + AB = x + a,$$

decorre que AS é, em módulo, igual ao áureo externo de AB (número 281.3).

283 – Teorema

Quando o ângulo interno de um triângulo isósceles, oposto à base, é igual a 36° , a base do triângulo é igual ao segmento áureo interno dos lados iguais.

Demonstração: Seja o triângulo isósceles ABC, tal que $\hat{A} = 36^\circ$. Em consequência, $\hat{B} = \hat{C} = 72^\circ$. Tracemos a bissetriz interna CI (Figura 322). Os triângulos IAC e CIB assim formados são isósceles, uma vez que $\hat{A} = \hat{C} = 36^\circ$ e $\hat{B} = \hat{I} = 72^\circ$.

Assim, $AI = IC = BC$.

E, por terem ângulos iguais, $\Delta ABC \sim \Delta CIB$.

Logo:

$$\frac{BI}{BC} = \frac{BC}{AB} \quad \therefore BC^2 = AB \cdot BI = AB (AB - AI) \quad \therefore BC^2 = AB (AB - BC)$$

E, como BC é menor que AB, vem que BC é igual ao segmento áureo interno de AB.

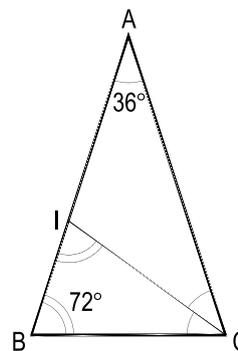


Figura 322

284 – Corolário

Seendo a, b e c os lados do triângulo isósceles acima estudado (Figura 322), temos:

$$a = \frac{b}{2} (\sqrt{5} - 1) = \frac{c}{2} (\sqrt{5} - 1)$$

285 – Teorema

Quando o ângulo interno de um triângulo isósceles, oposto à base, é igual a 108° , a base do triângulo é igual ao módulo do segmento áureo externo dos lados iguais.

Demonstração: Seja o triângulo isósceles ABC, tal que $\hat{A} = 108^\circ$. Em consequência, $\hat{B} = \hat{C} = 36^\circ$.

Tracemos a ceviana AJ, tal que $BJ = AB$ (Figura 323). Assim, para o triângulo isósceles BAJ formado, teremos $\hat{A} = \hat{J} = 72^\circ$. Por isso, o triângulo JAC é também isósceles, já que $\hat{A} = 108^\circ - 72^\circ = 36^\circ = \hat{C}$. Logo, $JA = JC$ e, então, $BC = BJ + JC = AB + JA$.

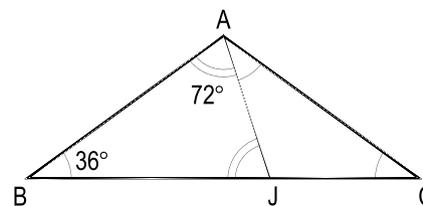


Figura 323

Como, pelo teorema anterior, JA é o áureo interno de AB, BC será (número 281.3) igual ao módulo do áureo externo de AB, como se queria provar.

286 – Corolário

Seendo a, b e c os lados do triângulo isósceles acima estudado (Figura 323), temos:

$$a = \frac{b}{2} (\sqrt{5} + 1) = \frac{c}{2} (\sqrt{5} + 1)$$

287 – Expressão geral do apótema de um polígono regular

Vamos instituir a relação que permita, para qualquer polígono regular, calcular o apótema em função do lado e do raio do círculo circunscrito.

Designemos por ℓ_n e a_n o lado e o apótema de um polígono regular de n lados inscrito num círculo de raio R (Figura 324) e calculemos o valor de a_n . Para tanto, utilizemos o triângulo OMB que fornece:

$$a_n^2 = R^2 - \left(\frac{\ell_n}{2}\right)^2 = R^2 - \frac{\ell_n^2}{4} = \frac{4R^2 - \ell_n^2}{4}$$

$$\therefore \boxed{a_n = \frac{1}{2} \sqrt{4R^2 - \ell_n^2}}$$

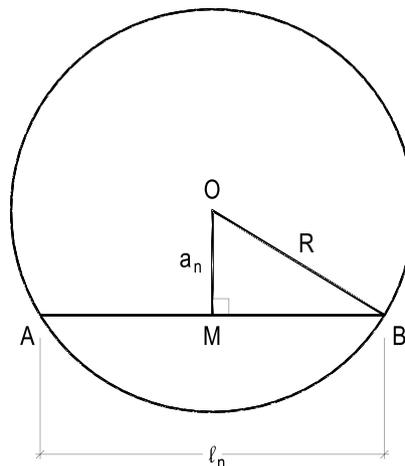


Figura 324

288 – Duplicação do gênero

Designemos por ℓ_n e ℓ_{2n} os lados dos polígonos convexos regulares de gêneros n e $2n$, respectivamente, inscritos num círculo de raio R e por a_n o apótema do primeiro. Sendo $AB = \ell_n$ (Figura 325) e OM o raio perpendicular a AB , AM será igual a ℓ_{2n} , uma vez que ao lado AB do primeiro polígono corresponderão dois lados (AM e MB) do segundo.

O triângulo AMN (Figura 325) fornece:

$$\ell_{2n}^2 = \left(\frac{\ell_n}{2}\right)^2 + (R - a_n)^2 = \frac{\ell_n^2}{4} + R^2 + a_n^2 - 2R a_n$$

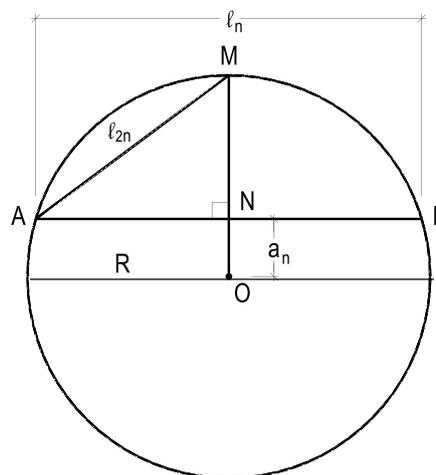


Figura 325

Utilizando a expressão geral do apótema a_n (número 287):

$$\ell_{2n}^2 = \frac{\ell_n^2}{4} + R^2 + R^2 - \frac{\ell_n^2}{4} - 2R \frac{1}{2} \sqrt{4R^2 - \ell_n^2}$$

$$\ell_{2n}^2 = 2R^2 - R \sqrt{4R^2 - \ell_n^2}$$

$$\boxed{\ell_{2n} = \sqrt{2R^2 - R \sqrt{4R^2 - \ell_n^2}}}$$

289 – Estudo dos polígonos regulares de gêneros da forma $2 \cdot 2^n$

Calculemos, em função do raio R do círculo circunscrito, lados e apótemas dos polígonos regulares cujos gêneros sejam da forma $2 \cdot 2^n$, ou seja, 4, 8, 16, 32..., isto é, $(2 \cdot 2^1)$, $(2 \cdot 2^2)$, $(2 \cdot 2^3)$..., $(2 \cdot 2^n)$:

a. Quadrado

Para o triângulo retângulo e isósceles OAB (Figura 326) temos (número 200.2):

$$AB = OA \cdot \sqrt{2} \quad \therefore \quad \boxed{\ell_4 = R\sqrt{2}}$$

$$\text{E, como } OM = \frac{AB}{2} \quad \therefore \quad \boxed{a_4 = \frac{R\sqrt{2}}{2}}$$

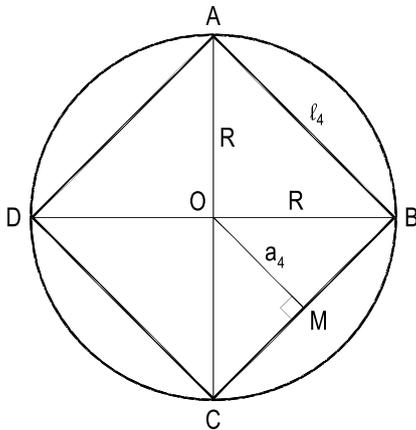


Figura 326

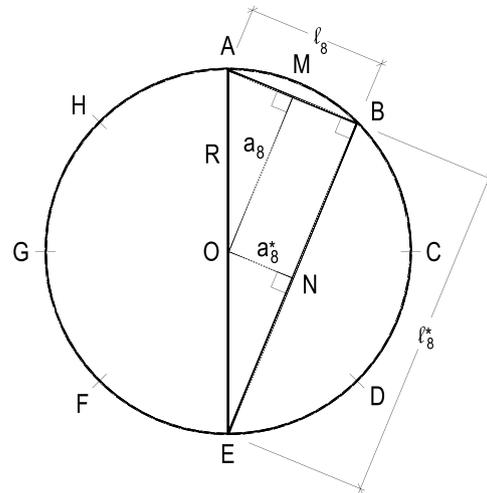


Figura 327

b. Octógonos regulares

Dividindo-se um círculo em 8 partes iguais e unindo-se os pontos de divisão 1 a 1 ou 3 a 3, obtém-se (número 278), respectivamente, um octógono regular convexo e um estrelado de espécie 3. Designemos por ℓ_8 e ℓ_8^* , respectivamente, seus lados e por a_n e a_n^* seus apótemas (Figura 327). Utilizando a expressão desenvolvida acima (número 288), temos:

$$\ell_8 = \sqrt{2R^2 - R \sqrt{4R^2 - \ell_4^2}}$$

$$\therefore \ell_8 = \sqrt{2R^2 - R \sqrt{4R^2 - 2R^2}}$$

$$\therefore \ell_8 = \sqrt{2R^2 - R^2 \sqrt{2}}$$

Simplificando:

$$\boxed{\ell_8 = R \sqrt{2 - \sqrt{2}}}$$

Como o triângulo ABE é retângulo (Figura 327), podemos escrever:

$$l_8^{*2} = 4R^2 - l_8^2$$

$$\therefore l_8^{*2} = 4R^2 - R^2(2 - \sqrt{2})$$

$$\therefore l_8^{*2} = R^2(4 - 2 + \sqrt{2})$$

$$\therefore \boxed{l_8^* = R \sqrt{2 + \sqrt{2}}}$$

Além disso, o mesmo triângulo fornece:

$$OM = \frac{EB}{2} \quad \therefore a_8 = \frac{l_8^*}{2}$$

$$\therefore \boxed{a_8 = \frac{R \sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}}$$

$$e \quad ON = \frac{AB}{2} \quad \therefore a_8^* = \frac{l_8}{2}$$

$$\therefore \boxed{a_8^* = \frac{R \sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}}$$

c. Polígono convexo regular de gênero 2.2^n

Aplicando reiteradamente a duplicação do gênero (número 288), temos:

$$l_{16} = \sqrt{2R^2 - R \sqrt{4R^2 - R^2(2 - \sqrt{2})}}$$

$$\therefore l_{16} = l_{2,2}^3 = R \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}}$$

$$l_{32} = \sqrt{2R^2 - R \sqrt{4R^2 - R^2(2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}})}}$$

$$\therefore l_{32} = l_{2,2}^4 = R \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}$$

e, analogamente:

$$l_{64} = l_{2,2}^5 = R \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}}$$

Como cada nova duplicação acarreta a inclusão de novo radical, chegaríamos a:

$$\boxed{l_{2,2}^n = R \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots}}}}}}$$

havendo n radicais sucessivos.

290 – Estudo dos polígonos regulares de gêneros da forma $3 \cdot 2^n$

Calculemos, agora, em função do raio R do círculo circunscrito, lados e apótemas dos polígonos regulares, cujos gêneros sejam da família $3 \cdot 2^n$, ou seja, 3, 6, 12, 24..., isto é: $(3 \cdot 2^0)$, $(3 \cdot 2^1)$, $(3 \cdot 2^2)$, $(3 \cdot 2^3)$..., $(3 \cdot 2^n)$:

a. Triângulo e Hexágono regulares

Dividindo-se um círculo em seis partes iguais e unindo-se os pontos de divisão de 1 em 1 ou de 2 em 2, obtém-se, respectivamente, um hexágono regular e um triângulo equilátero (Figura 328).

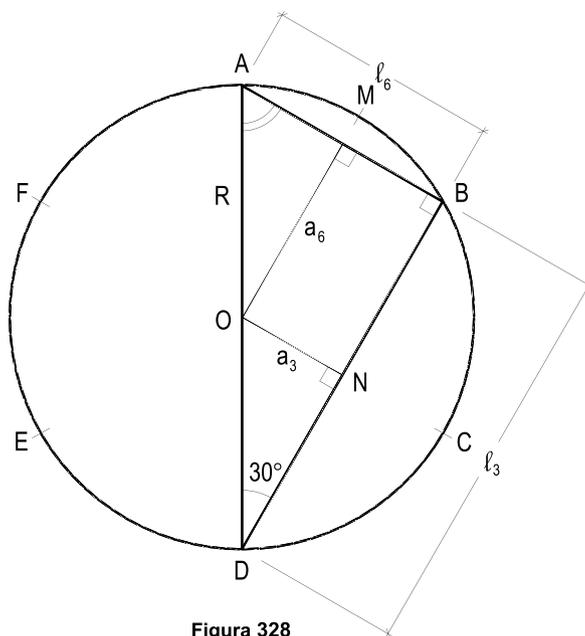


Figura 328

Para o triângulo retângulo ABD (Figura 328), porque os ângulos agudos valem 30° e 60° , podemos escrever (número 200.3):

$$l_3 = BD = \frac{AD}{2} \sqrt{3} \quad \therefore \quad \boxed{l_3 = R\sqrt{3}}$$

$$l_6 = AB = \frac{AD}{2} \quad \therefore \quad \boxed{l_6 = R}$$

E mais:

$$ON = \frac{AB}{2} \quad \therefore \quad a_3 = \frac{l_6}{2} \quad \therefore \quad \boxed{a_3 = \frac{R}{2}}$$

$$e \quad OM = \frac{BD}{2} \quad \therefore \quad a_6 = \frac{l_3}{2} \quad \therefore \quad \boxed{a_6 = \frac{R\sqrt{3}}{2}}$$

b. Dodecágonos regulares

Dividindo-se um círculo em 12 partes iguais e unindo-se os pontos de divisão 1 a 1 ou 5 a 5, obtém-se (número 278), respectivamente, o dodecágono convexo regular e o dodecágono estrelado regular de espécie 5 (Figura 329).

Designando por l_{12} , l_{12}^* , a_{12} e a_{12}^* seus lados e apótemas, podemos escrever (número 288):

$$l_{12} = \sqrt{2R^2 - R \sqrt{4R^2 - l_6^2}} = \sqrt{2R^2 - R \sqrt{4R^2 - R^2}}$$

$$l_{12} = \sqrt{2R^2 - R^2 \sqrt{3}} \quad \therefore \quad \boxed{l_{12} = R \sqrt{2 - \sqrt{3}}}$$

Para o triângulo retângulo ABG (Figura 329), temos:

$$l_{12}^{*2} = 4R^2 - l_{12}^2 = 4R^2 - R^2(2 - \sqrt{3})$$

$$l_{12}^{*2} = R^2(4 - 2 + \sqrt{3})$$

$$\therefore \quad \boxed{l_{12}^* = R \sqrt{2 + \sqrt{3}}}$$

E mais:

$$a_{12} = \frac{l_{12}^*}{2} \quad \therefore \quad \boxed{a_{12} = \frac{R \sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2}}$$

$$a_{12}^* = \frac{l_{12}}{2} \quad \therefore \quad \boxed{a_{12}^* = \frac{R \sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}}$$

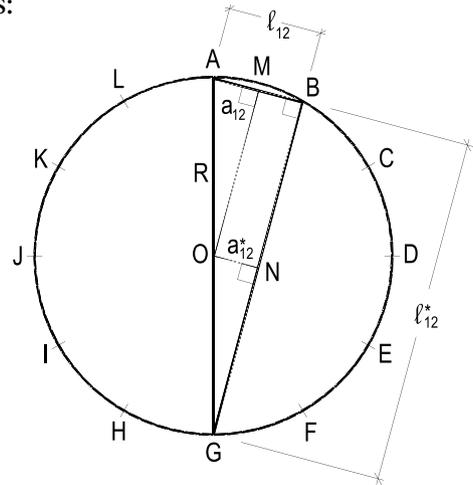


Figura 329

c. Polígono convexo regular de gênero 3.2^n

Aplicando reiteradamente a duplicação do gênero (número 288), a partir de l_{12} , obtemos:

$$l_{24} = \sqrt{2R^2 - R \sqrt{4R^2 - R^2(2 - \sqrt{3})}} \quad \therefore \quad l_{24} = l_{3.2}^3 = R \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{3}}}$$

$$l_{48} = \sqrt{2R^2 - R \sqrt{4R^2 - R^2(2 - \sqrt{2 + \sqrt{3}})}} \quad \therefore \quad l_{48} = l_{3.2}^4 = R \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}$$

e, analogamente, $l_{96} = l_{3.2}^5 = R \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}}$

Como cada nova duplicação acarreta a inclusão de novo radical, chegaríamos a:

$$\boxed{l_{3.2}^n = R \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{3}}}}}}}$$

havendo n radicais sucessivos.

291 – Estudo dos pentágonos e decágonos regulares

Quando se divide um círculo em 10 partes iguais e se os liga de p em p, pode-se obter os seguintes polígonos (número 278):

$p = 1$ – decágono convexo regular.

$p = 2$ – pentágono convexo regular.

$p = 3$ – decágono estrelado regular de espécie 3.

$p = 4$ – pentágono estrelado regular de espécie 2.

Sejam, então, $AB = \ell_{10}$, $BF = \ell_5^*$, $AI = \ell_5$ e $FI = \ell_{10}^*$ (Figura 330).

Porque os ângulos internos opostos às bases dos triângulos isósceles OAB e OFI são respectivamente iguais a 36° e 108° , concluímos que (números 283 e 285) ℓ_{10} e ℓ_{10}^* são os segmentos áureos interno e externo do raio R do círculo. Assim, podemos escrever (números 283 e 285):

$$\ell_{10} = \frac{R}{2} (\sqrt{5} - 1)$$

$$\ell_{10}^* = \frac{R}{2} (\sqrt{5} + 1)$$

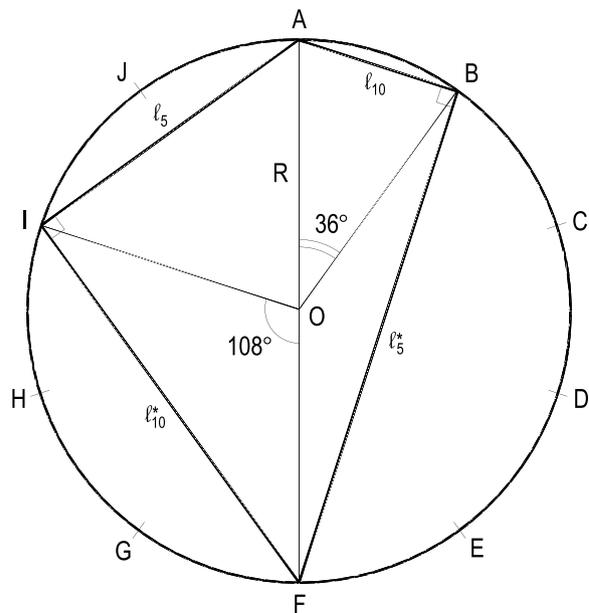


Figura 330

Porque os triângulos ABF e AFI são retângulos, para os cálculos de ℓ_5 e ℓ_5^* , temos:

$$\ell_5^2 = 4R^2 - \ell_{10}^{*2} = 4R^2 - \frac{R^2(5 + 1 + 2\sqrt{5})}{4}$$

$$\ell_5^2 = \frac{R^2}{4} (16 - 6 - 2\sqrt{5}) = \frac{R^2}{4} (10 - 2\sqrt{5})$$

$$\ell_5 = \frac{R}{2} (\sqrt{10 - 2\sqrt{5}})$$

$$\ell_5^{*2} = 4R^2 - \ell_{10}^2 = 4R^2 - \frac{R^2(5+1-2\sqrt{5})}{4}$$

$$\ell_5^{*2} = \frac{R^2}{4}(16-6+2\sqrt{5})$$

$$\ell_5^{*2} = \frac{R^2}{4}(10+2\sqrt{5}) \quad \therefore \quad \boxed{\ell_5^* = \frac{R}{2}(\sqrt{10+2\sqrt{5}})}$$

Para o cálculo dos diversos apótemas (Figura 331), basta observar que:

$$OQ = \frac{FI}{2} \quad \therefore \quad a_5 = \frac{\ell_{10}^*}{2} \quad \therefore \quad \boxed{a_5 = \frac{R}{4}(\sqrt{5}+1)}$$

$$ON = \frac{AB}{2} \quad \therefore \quad a_5^* = \frac{\ell_{10}}{2} \quad \therefore \quad \boxed{a_5^* = \frac{R}{4}(\sqrt{5}-1)}$$

$$OM = \frac{BF}{2} \quad \therefore \quad a_{10} = \frac{\ell_5^*}{2} \quad \therefore \quad \boxed{a_{10} = \frac{R}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$$

$$OP = \frac{AI}{2} \quad \therefore \quad a_{10}^* = \frac{\ell_5}{2} \quad \therefore \quad \boxed{a_{10}^* = \frac{R}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}}$$

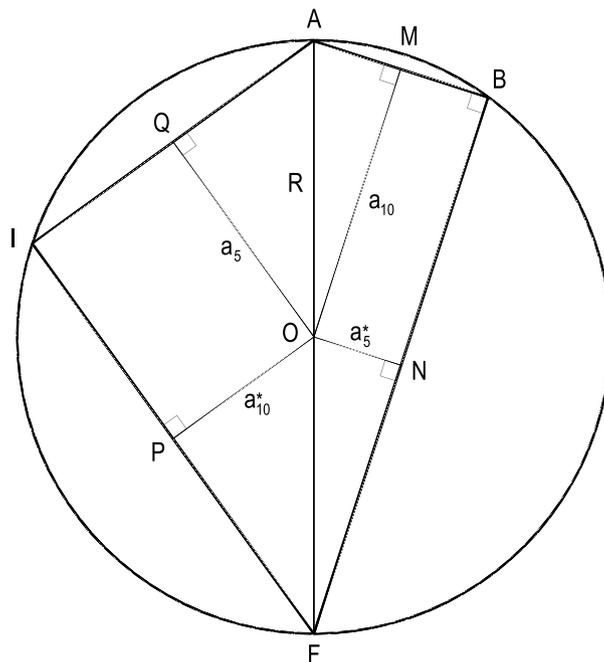


Figura 331

292 – Estudo dos pentadecágonos regulares

Existem quatro tipos de pentadecágonos regulares: o convexo e os estrelados de espécies 2, 4 e 7. Porque, para $n = 15$, os valores de p que fornecem pentadecágonos são o submúltiplo 1 e os primos 2, 4 e 7 (com 15), já que 3 e 5 são submúltiplos e 6 tem fator comum 3 (número 278). Representemos seus lados por l_{15} , $l_{15,2}^*$, $l_{15,4}^*$ e $l_{15,7}^*$, respectivamente, e calculemo-los.

Sendo AB um diâmetro de um círculo (Figura 332), consideremos os arcos $AD = 36^\circ$ e $BC = 120^\circ$.

Assim sendo, o arco CD vale: $180^\circ - (36^\circ + 120^\circ) = 24^\circ = 360^\circ / 15$.

Além disso, temos: $AC = 36^\circ + 24^\circ = 60^\circ$ e $BD = 120^\circ + 24^\circ = 144^\circ$.

Por isso, as cordas correspondentes a esses arcos serão simbolicamente:

$$AB = 2R, BC = l_3, CD = l_{15}, DA = l_{10}, AC = l_6 \text{ e } BD = l_5^*.$$

Para o quadrilátero convexo inscrito ABCD, podemos escrever (número 227.1):

$$AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot DA \quad \therefore \quad l_6 \cdot l_5^* = 2R \cdot l_{15} + l_3 \cdot l_{10}$$

$$\text{ou seja, } R \frac{R}{2} \sqrt{10 + 2\sqrt{5}} = 2R \cdot l_{15} + R \sqrt{3} \frac{R}{2} (\sqrt{5} - 1)$$

$$4 l_{15} = R \left[\sqrt{10 + 2\sqrt{5}} - \sqrt{3} (\sqrt{5} - 1) \right] \quad \therefore \quad \boxed{l_{15} = \frac{R}{4} (\sqrt{10 + 2\sqrt{5}} - \sqrt{15} + \sqrt{3})}$$

Para o cálculo de $l_{15,2}^*$, consideremos um círculo de diâmetro $AB = 2R$ e os arcos

$AD = 60^\circ$ e $BC = 72^\circ$ (Figura 333).

Assim, $AD = l_6$ e $BC = l_5$.

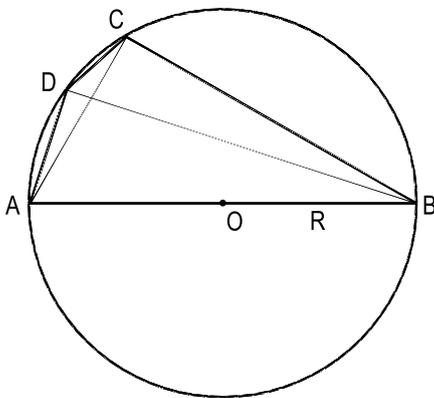


Figura 332

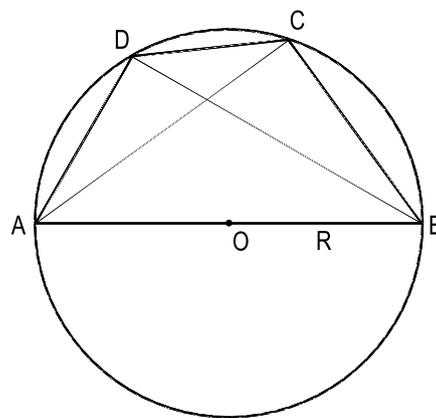


Figura 333

$$CD = 180^\circ - (60^\circ + 72^\circ) = 48^\circ = \frac{2}{15} \cdot 360^\circ \quad \therefore CD = \ell_{15,2}^*$$

$$AC = 180^\circ - 72^\circ = 108^\circ = \frac{3}{10} \cdot 360^\circ \quad \therefore AC = \ell_{10}^*$$

$$BD = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ \quad \therefore BD = \ell_3$$

Então, o quadrilátero inscrito ABCD fornece (número 227.1):

$$AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot DA$$

$$\therefore \ell_{10}^* \cdot \ell_3 = 2R \cdot \ell_{15,2}^* + \ell_5 \cdot \ell_6$$

$$\therefore \frac{R}{2} (\sqrt{5} + 1) R \sqrt{3} = 2R \ell_{15,2}^* + \frac{R}{2} \sqrt{10 - 2\sqrt{5}} R$$

$$\therefore \boxed{\ell_{15,2}^* = \frac{R}{4} (\sqrt{15} + \sqrt{3} - \sqrt{10 - 2\sqrt{5}})}$$

E, procedendo de forma análoga, chegaríamos a:

$$\boxed{\ell_{15,4}^* = \frac{R}{4} (\sqrt{10 + 2\sqrt{5}} + \sqrt{15} - \sqrt{3})}$$

$$\boxed{\ell_{15,7}^* = \frac{R}{4} (\sqrt{15} + \sqrt{3} + \sqrt{10 + 2\sqrt{5}})}$$

Para o cálculo dos apótemas, utilizando sua expressão geral (número 287), chegaríamos a:

$$\boxed{a_{15} = \frac{R}{8} (\sqrt{3} \sqrt{10 + 2\sqrt{5}} + \sqrt{5} - 1)}$$

$$\boxed{a_{15,2}^* = \frac{R}{8} (\sqrt{3} \sqrt{10 - 2\sqrt{5}} + \sqrt{5} + 1)}$$

$$\boxed{a_{15,4}^* = \frac{R}{8} (\sqrt{3} \sqrt{10 + 2\sqrt{5}} - \sqrt{5} + 1)}$$

$$\boxed{a_{15,7}^* = \frac{R}{8} (\sqrt{3} \sqrt{10 - 2\sqrt{5}} - \sqrt{5} - 1)}$$

293 – Teorema

O lado do pentágono convexo regular inscrito num círculo é a hipotenusa de um triângulo retângulo cujos catetos são, respectivamente, iguais aos lados do hexágono e do decágono convexo regulares inscritos no círculo.

Demonstração: Seja a corda AB do círculo (O, R) igual ao lado do decágono convexo regular inscrito no círculo (Figura 334). Prolonguemos AB e descrevamos o círculo de centro A e raio AO, obtendo o ponto C. Tracemos a tangente CT ao círculo, bem como o raio OT. Porque sabemos que AB é o segmento áureo interno do raio do círculo O, podemos escrever:

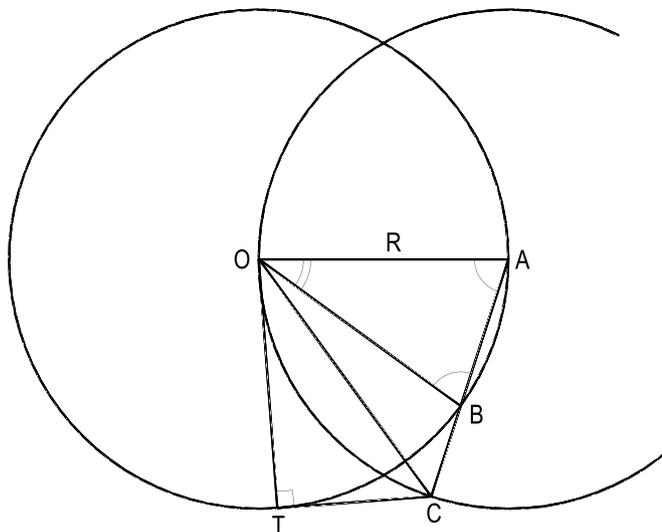


Figura 334

$$AB^2 = AC \cdot BC \quad (1)$$

Por outro lado, a potência do ponto C em relação ao círculo O dá:

$$CT^2 = AC \cdot BC \quad (2)$$

Comparando (1) e (2), concluímos que $AB = CT$.

Porque os ângulos iguais \hat{A} e \hat{B} do triângulo ABO valem 72° cada um, concluímos que a corda OC do círculo de centro A – igual, por construção, ao dado – representa o lado do pentágono convexo regular inscrito no círculo dado.

E, como o cateto OT do triângulo retângulo TOC vale o lado do hexágono regular inscrito no círculo O (por ser igual ao seu raio), fica provado o teorema.

De fato, basta ver que os catetos do triângulo retângulo TOC são $OT = \ell_6$ e $CT = \ell_{10}$ e que sua hipotenusa é $OC = \ell_5$.

294 – Corolário

Entre ℓ_5 , ℓ_6 e ℓ_{10} , relativos a um mesmo círculo, há a relação:

$$\boxed{\ell_5^2 = \ell_6^2 + \ell_{10}^2}$$

295 – Observação

Evidentemente, a relação $l_5^2 = l_6^2 + l_{10}^2$ poderia ser obtida independentemente da demonstração do teorema de número 293, mas diretamente a partir dos valores instituídos para os lados desses três polígonos. De fato, teríamos:

$$l_6^2 + l_{10}^2 = R^2 + \frac{R^2}{4} (5 + 1 - 2\sqrt{5}) = \frac{R^2}{4} (4 + 6 - 2\sqrt{5})$$

$$\therefore l_6^2 + l_{10}^2 = \left(\frac{R}{2} \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}\right)^2 \quad \text{ou:} \quad l_5^2 = l_6^2 + l_{10}^2$$

296 – Teorema

O lado do pentágono estrelado regular inscrito num círculo é a hipotenusa de um triângulo retângulo cujos catetos são, respectivamente, iguais aos lados do hexágono e do decágono estrelado regulares inscritos no círculo.

Demonstração: Consideremos a corda AB do círculo (O, R) igual ao lado do decágono estrelado regular inscrito no círculo e, prolongando AB e descrevendo o círculo de centro A e raio AO, determinemos o ponto C (Figura 335). Tracemos, ainda, a tangente CT ao círculo O.

Porque AB é o segmento áureo externo do raio do círculo O, podemos escrever:

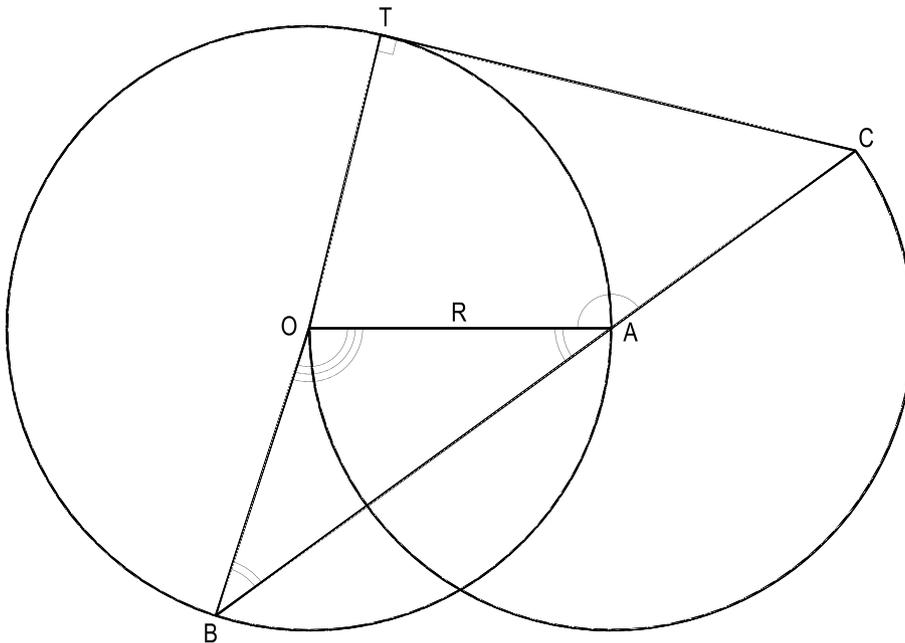


Figura 335

$$AB^2 = CB \cdot CA \quad (1)$$

Mas, a potência do ponto C, em relação ao círculo O, é:

$$CT^2 = CA \cdot CB \quad (2)$$

Comparando (1) e (2), concluímos que $AB = CT$.

Porque os ângulos iguais \widehat{A} e \widehat{B} do triângulo OAB valem 36° cada um, o ângulo central \widehat{OAC} vale 144° e, então, a corda CO do círculo A – igual, por construção, ao dado – representa o lado do pentágono regular estrelado inscrito no círculo dado.

E, como o cateto OT do triângulo retângulo TOC vale o lado do hexágono regular inscrito no círculo O, fica provado o teorema. De fato, basta ver que a hipotenusa do triângulo retângulo TOC é $CO = \ell_5^*$ e que seus catetos são $OT = \ell_6$ e $CT = \ell_{10}^*$.

297 – Corolário

Entre os lados ℓ_5^* , ℓ_6 e ℓ_{10}^* , respectivamente, do pentágono estrelado regular, do hexágono regular e do decágono estrelado regular inscritos num mesmo círculo há a relação:

$$\ell_5^{*2} = \ell_6^2 + \ell_{10}^{*2}$$

298 – Observação

A relação $\ell_5^{*2} = \ell_6^2 + \ell_{10}^{*2}$ poderia ser obtida independentemente da demonstração do teorema de número 296, mas diretamente a partir dos valores instituídos para os lados desses três polígonos. De fato, teríamos:

$$\ell_6^2 + \ell_{10}^{*2} = R^2 + \frac{R^2}{4} (5 + 1 + 2\sqrt{5}) = \frac{R^2}{4} (10 + 2\sqrt{5})$$

$$\therefore \ell_6^2 + \ell_{10}^{*2} = \left(\frac{R}{2} \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}\right)^2 \quad \therefore \ell_5^{*2} = \ell_6^2 + \ell_{10}^{*2}$$

299 – Comprimento da circunferência de um círculo

Dois círculos são sempre semelhantes, porque podem ser considerados como as posições limites ocupadas por polígonos convexos regulares inscritos de gêneros iguais, quando estes gêneros crescem indefinidamente.

E, porque a razão de semelhança entre duas figuras semelhantes é igual à razão entre duas de suas linhas homólogas e igual à razão entre seus perímetros, podemos concluir que a razão de semelhança entre dois círculos é igual à razão entre os seus diâmetros ou entre os comprimentos de suas circunferências.

Designando, então, por D e D' os diâmetros e por C e C' os comprimentos de duas circunferências de círculo, podemos escrever

$$\frac{D'}{D} = \frac{C'}{C} \quad \therefore \quad \frac{C}{D} = \frac{C'}{D'}$$

E, se mais círculos considerássemos, teríamos:

$$\frac{C}{D} = \frac{C'}{D'} = \frac{C''}{D''} = \frac{C'''}{D'''} = \dots$$

Esta razão constante entre o comprimento da circunferência de um círculo e seu diâmetro é simbolizada pela letra grega π e o cálculo de seu valor será em breve abordado.

Assim, o comprimento C da circunferência de um círculo de diâmetro D e raio R será:

$$\boxed{C = \pi D = 2\pi R}$$

300 – Comprimento de um arco de círculo

Consideremos um arco de um círculo que corresponda a um ângulo central α (Figura 336) e calculemos, em função deste ângulo e do raio R do círculo, o comprimento a do arco.

Porque, para um mesmo círculo, a razão entre dois arcos é igual à razão entre os ângulos centrais correspondentes, se α é medido em graus, podemos escrever:

$$\frac{a}{C} = \frac{\alpha}{360^\circ} \quad \therefore \quad a = \frac{\alpha}{360^\circ} C$$

$$\therefore \quad \boxed{a = \frac{\alpha}{360^\circ} 2\pi R}$$

Ou $\boxed{a = \frac{\alpha}{360^\circ} \pi D}$

Analogamente, se α é medido em graus, temos:

$$\frac{a}{C} = \frac{\alpha}{400\text{gr}}$$

$$\therefore \quad \boxed{a = \frac{\alpha}{400\text{gr}} 2\pi R}$$

Ou $\boxed{a = \frac{\alpha}{400\text{gr}} \pi D}$

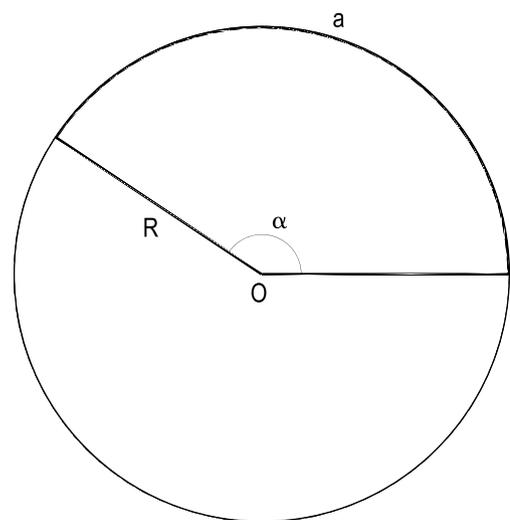


Figura 336

301 – O radiano

Por definição, radiano, cujo símbolo é rd, é o ângulo central que determina, no círculo, um arco de comprimento igual ao raio.

É claro que o valor do radiano independe do valor do raio do círculo considerado, pois se todos círculos são, aos pares, semelhantes, o ângulo central que num deles intercepte um arco de comprimento igual ao raio, interceptará num outro qualquer um arco de mesma propriedade (Figura 337).

Porque os ângulos centrais são proporcionais aos arcos correspondentes, concluímos que o ângulo correspondente a 360° será igual a 2π rd.

Assim, as conversões de radianos em graus ou grados e vice-versa são obtidas mediante a relação:

$$360^\circ = 400\text{gr} = 2\pi \text{ rd}$$

Convém observar que, quando um ângulo central é medido em radianos, o número que mede o arco interceptado é igual ao produto dos que medem o ângulo central e o raio do círculo, desde que, naturalmente, o raio e o arco sejam expressos na mesma unidade.

De fato (número 300), temos (Figura 336):

$$a = \frac{\alpha}{2\pi} \cdot 2\pi R \quad \therefore \quad \boxed{a = \alpha R}$$

302 – Cálculo de π

Apresentaremos, para o cálculo da constante π , dois métodos clássicos: o primeiro (dos perímetros) devido a Arquimedes e o segundo (dos isoperímetros), desenvolvido por Descartes.

1. Método dos perímetros

Considera-se um círculo de raio unitário e calcula-se o perímetro do polígono convexo regular inscrito de 2^n lados.

Porque $C = 2\pi R$, no caso presente ($R = 1$), temos:

$$C = 2\pi \quad \therefore \quad \pi = \frac{C}{2}$$

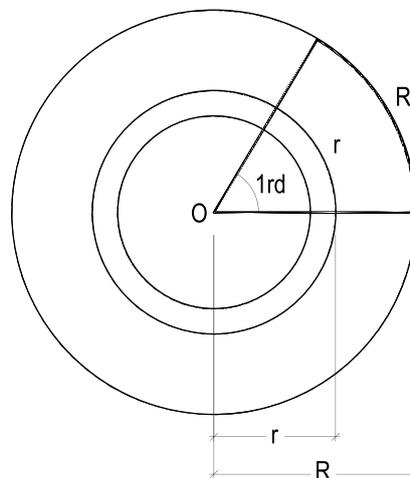


Figura 337

Como C é o valor limite adquirido pelo perímetro do polígono inscrito quando n cresce indefinidamente, podemos escrever (número 289.c) para o polígono de 2^{n+1} lados:

$$2\pi = 2^{n+1} \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots}}}} \quad (n \text{ radicais sucessivos})$$

$$\pi = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1} \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots}}}}}{2} \quad (n \text{ radicais sucessivos})$$

$$\pi = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^n \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots}}}} \quad (n \text{ radicais sucessivos})$$

Assim, obteremos valores de π tão mais precisos quanto maiores forem os valores atribuídos a n .

2. Método dos isoperímetros

Consideremos um polígono convexo regular ABCD... e um círculo (O, R) de perímetros iguais, bem como os círculos circunscrito e inscrito naquele polígono (Figura 338). Vamos demonstrar que o raio R do círculo (O, R) é o limite co-

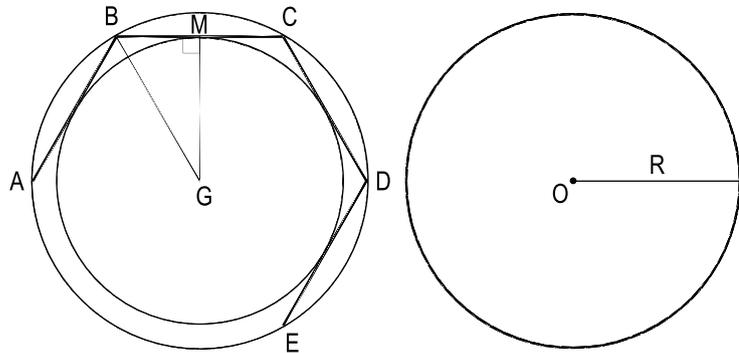


Figura 338

omum para o qual tendem os raios GB e os apótemas GM dos polígonos isoperímetros com o círculo (O, R) quando seus gêneros crescem indefinidamente.

Como o perímetro $2\pi R$ do polígono considerado está compreendido entre os comprimentos das circunferências dos círculos de raios GB e GM, podemos escrever:

$$2\pi GB > 2\pi R > 2\pi GM \quad \therefore \quad GB > R > GM \quad (1)$$

Para o triângulo GBM, temos: $GB - GM < BM$.

Como BM tende a zero, quando o número de lados do polígono cresce indefinidamente, a relação (1) prova que R é o limite comum dos raios GB e dos apótemas GM dos polígonos isoperímetros com o círculo (O, R).

O processo dos isoperímetros se resume, então, em calcular, para polígonos convexos regulares de perímetros iguais a um valor prefixado, os valores de seus raios e de seus apótemas, a partir dos quais se obterá o valor de π . Naturalmente, quanto maior for o gênero do polígono considerado, mais preciso será o valor obtido para π .

Necessitamos, então, para desenvolver o processo, instituir expressões que permitam, a partir de um polígono convexo regular de n lados, obter o raio e o apótema do polígono isoperímetro de $2n$ lados.

Para tanto, admitamos que AB , r e a são o lado, o raio e o apótema do primeiro polígono (com n lados) e tracemos GM , perpendicular a $G'A$ (Figura 339), bem como MN paralelo a AB .

Porque $MN = \frac{AB}{2}$ e $\widehat{AG'B} = \frac{\widehat{AGB}}{2}$, MN , r' e a' serão o lado, o raio e o apótema do polígono isoperímetro com $2n$ lados.

Os triângulos semelhantes $G'MN$ e $G'AB$ (Figura 339) fornecem:

$$a' = \frac{G'J}{2} \quad \therefore \quad \boxed{a' = \frac{a+r}{2}}$$

E o triângulo retângulo $GG'M$:

$$r'^2 = a'r \quad \therefore \quad \boxed{r' = \sqrt{a'r}}$$

Fixemos, então, em 4 unidades o comprimento da circunferência do círculo (O, R) e, em consequência, o perímetro dos polígonos em estudo. Teremos:

$$C = 2\pi R \quad \therefore \quad 4 = 2\pi R \quad \therefore \quad 2 = \pi R \quad \therefore \quad \pi = \frac{2}{R} \quad (1)$$

Mas, como provamos, sabemos que:

$$r > R > a; \quad r' > R > a'; \quad r'' > R > a''; \quad \text{etc.}$$

Consequentemente:

$$\frac{2}{r} < \frac{2}{R} < \frac{2}{a}; \quad \frac{2}{r'} < \frac{2}{R} < \frac{2}{a'}; \quad \frac{2}{r''} < \frac{2}{R} < \frac{2}{a''}; \quad \text{etc.}$$

Em termos gerais, para um polígono isoperímetro de 2^n lados, teremos (1):

$$\boxed{\frac{2}{r_{2^n}} < \pi < \frac{2}{a_{2^n}}}$$

Esta expressão permite calcular o valor de π , tão mais precisamente quanto maior for o valor de n .

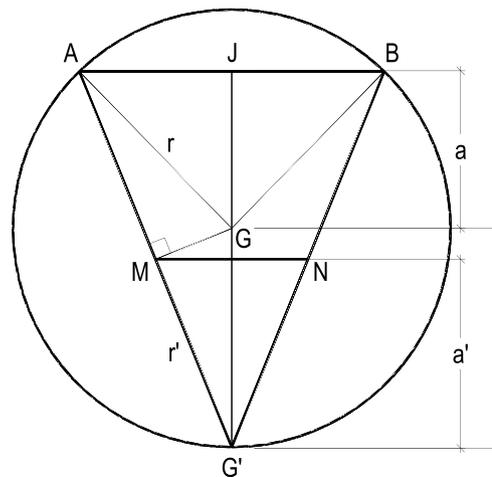


Figura 339

CAPÍTULO XVI

ÁREAS

303 – Equivalência

A extensão, conceito primitivo, da superfície ocupada por uma figura plana é denominada área da figura.

É claro que duas figuras, independentemente de suas formas, podem ocupar extensões iguais de superfície, isto é, podem possuir áreas iguais. Neste caso, diz-se que as figuras são equivalentes.

Em caso contrário, isto é, quando duas figuras possuem áreas diferentes, dizemos que a de maior área é supervalente em relação à segunda e que esta é subvalente em relação à primeira.

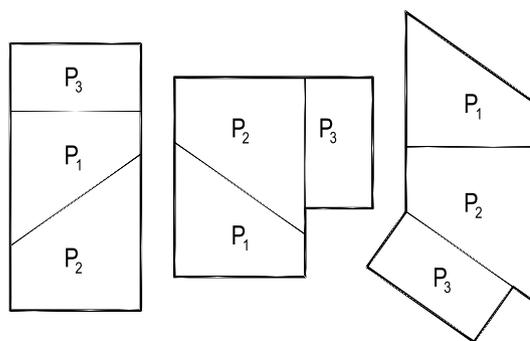


Figura 340

Dois polígonos são ditos equicompostos quando são formados por outros polígonos, respectivamente iguais, mas agrupados em formações que podem ser diferentes (Figura 340).

Como principais propriedades, temos:

1. Dois polígonos equicompostos são equivalentes, muito embora dois polígonos equivalentes possam não ser equicompostos.
2. Dois polígonos equicompostos a um terceiro são equicompostos entre si e, em consequência, equivalentes (como os da Figura 340).
3. Dois polígonos equicompostos podem ser divididos em um mesmo número de triângulos respectivamente iguais.
4. Dois polígonos iguais podem ser considerados equicompostos e são necessariamente equivalentes.

304 – Teorema

Se dois retângulos possuem uma dimensão igual, a razão entre suas áreas é igual à razão entre suas dimensões diferentes.

Demonstração: Sejam os retângulos R_1 e R_2 (Figura 341) que possuem bases b iguais e alturas h_1 e h_2 diferentes.

Admitamos que exista um comprimento a divisor comum de h_1 e h_2 , isto é, tal que tenhamos $h_1 = ma$ e $h_2 = na$.

Pelos pontos de divisão das alturas tracemos paralelas às bases dos retângulos, decompondo-os em outros retângulos, todos iguais entre si.

Designando por S_1 , S_2 e S , respectivamente, as áreas dos retângulos R_1 , R_2 e dos retângulos parciais formados, podemos escrever:

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{m \cdot S}{n \cdot S} = \frac{m}{n} = \frac{m \cdot a}{n \cdot a} = \frac{h_1}{h_2}$$

Quando não houver um valor a comensurável com h_1 e h_2 , escolheremos um valor tão pequeno para dividir as alturas que as faixas de áreas que restarem possam ser desprezadas perante os valores das áreas de R_1 e R_2 , operando, então, como o acima indicado.

Então, se dois retângulos...

305 – Observação

Se os retângulos R_1 e R_2 tivessem alturas iguais h e bases diferentes b_1 e b_2 , com raciocínio inteiramente análogo ao apresentado na demonstração acima, chegaríamos a:

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{b_1}{b_2}$$

306 – Teorema

A razão entre as áreas de dois retângulos quaisquer é igual à razão entre os produtos de suas dimensões.

Demonstração: Sejam os retângulos R_1 e R_2 de dimensões b_1 , h_1 e b_2 , h_2 e de áreas S_1 e S_2 , respectivamente.

Consideremos um retângulo auxiliar de área S que tenha base b_1 igual a de R_1 e altura h_2 igual a de R_2 .

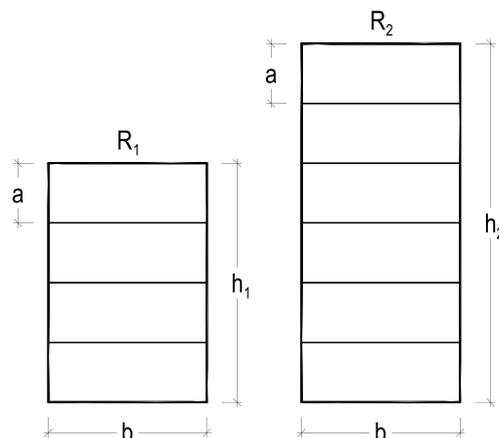


Figura 341

Podemos, então (número 304), escrever:

$$\frac{S_1}{S} = \frac{h_1}{h_2} \quad \text{e} \quad \frac{S}{S_2} = \frac{b_1}{b_2}$$

Multiplicando membro a membro essas relações, chegamos a:

$$\frac{S.S_1}{S.S_2} = \frac{b_1 h_1}{b_2 h_2} \quad \therefore \quad \frac{S_1}{S_2} = \frac{b_1 h_1}{b_2 h_2}$$

Então, a razão entre as áreas...

307 – Unidade de área

Por convenção, a unidade de área é a área do quadrado de lado unitário. No sistema decimal, sendo 1 m o lado desse quadrado, a área unitária será o metro quadrado (m^2).

Além da unidade, utilizaremos habitualmente seus submúltiplos (dm^2 , cm^2 e mm^2) e seu múltiplo (km^2).

308 – Área do retângulo

Comparando a área S de um retângulo genérico de dimensões b e h com a do quadrado unitário (número 306), temos (Figura 342):

$$\frac{S}{1} = \frac{bh}{1.1} \quad \therefore \quad \boxed{S = bh}$$

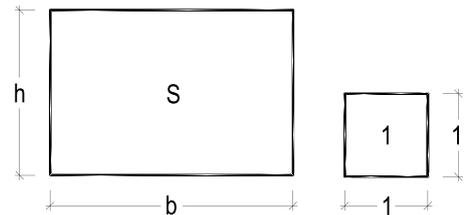


Figura 342

309 – Área do quadrado

Por aplicação do item anterior, a área S de um quadrado de lado ℓ será:

$$S = \ell . \ell \quad \therefore \quad \boxed{S = \ell^2}$$

310 – Área do paralelogramo

Seja o paralelogramo $ABCD$ de base b e altura h (Figura 343).

Tracemos as perpendiculares AD' e BC' às bases, formando o retângulo $ABC'D'$, de base e altura iguais às do paralelogramo.

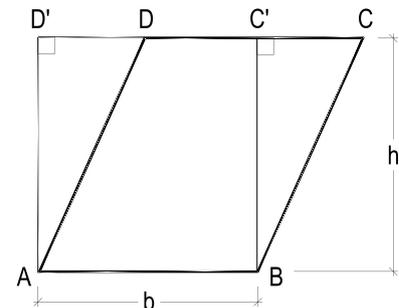


Figura 343

Porque o retângulo formado é equicomposto ao paralelogramo $ABCD$, a área deste será medida pela expressão instituída para o retângulo. Assim, teremos:

$$\boxed{S = bh}$$

Mesmo no caso menos favorável (Figura 344) em que C' deixa de ser interior ao segmento CD vale a expressão acima. De fato, basta considerar o paralelogramo $ABDE$, formado com a diagonal BD do original, que é equicomposto ao paralelogramo $ABCD$ e ao retângulo $ABC'D'$.

Assim (número 303.2), serão equivalentes $ABCD$ e $ABC'D'$.

311 – Área do triângulo

Seja o triângulo ABC de base b e altura h . Tracemos (Figura 345), por A e C , as paralelas aos lados opostos formando o paralelogramo $ABCD$. Porque os triângulos ABC e ACD são iguais, a área S do triângulo considerado ABC será igual à metade da área do paralelogramo formado.

Assim, teremos:

$$S = \frac{bh}{2}$$

312 – Área do losango

Porque o losango é um paralelogramo, designando por ℓ o lado e por h a distância entre dois lados opostos (Figura 346), temos:

$$S = \ell h$$

Como h é o dobro do raio r do círculo inscrito no losango, temos também:

$$S = 2 \ell r$$

Finalmente, porque os triângulos ABC e ADC são iguais, a área S do losango será o dobro da área de um desses triângulos, podendo-se, pois, escrever:

$$S = 2 \frac{D \cdot d}{2} \quad \therefore \quad S = \frac{Dd}{2}$$

onde D e d são as diagonais do losango.

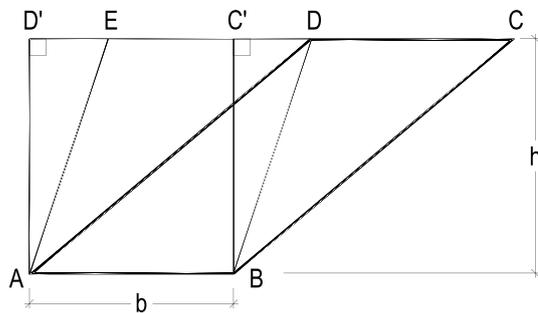


Figura 344

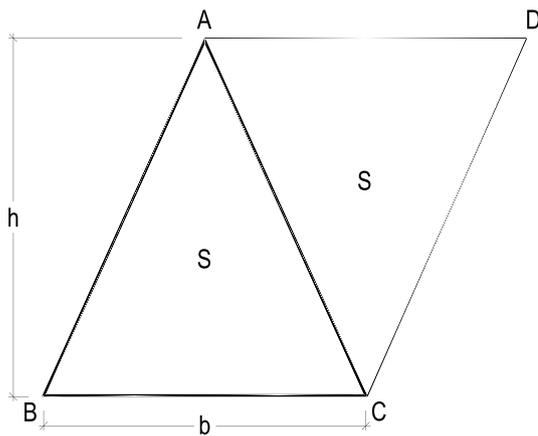


Figura 345

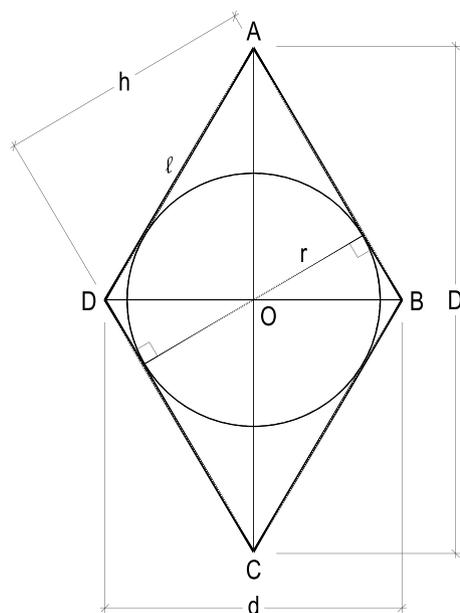


Figura 346

313 – Área do trapézio

Seja um trapézio de bases B e b e altura h .
Tracemos uma de suas diagonais (Figura 347),
dividindo-o em dois triângulos de áreas S_1 e S_2 .

Para a área S do trapézio, temos:

$$S = S_1 + S_2 = \frac{Bh}{2} + \frac{bh}{2}$$

$$\therefore \boxed{S = \frac{(B + b) h}{2}}$$

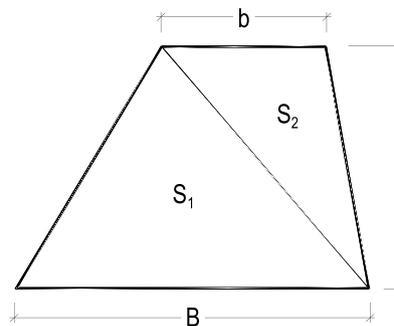


Figura 347

Como a base média b_m do trapézio é igual à semissoma de suas bases (número 88.2),
podemos, também, escrever:

$$\boxed{S = b_m \cdot h}$$

314 – Áreas do polígono convexo regular e do setor poligonal convexo regular

Sendo a e ℓ , respectivamente, o apótema e o lado do polígono (ou do setor poligonal),
tracemos (Figura 348) os raios do círculo circunscrito relativos a todos os vértices.

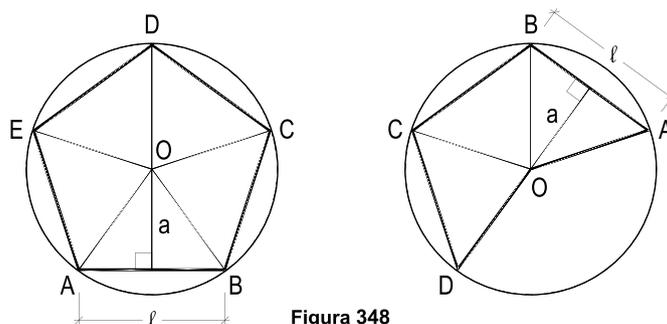


Figura 348

Para cada um dos n triângulos formados, a área será $\frac{\ell a}{2}$ (número 311).

Assim, para o polígono, teremos:

$$S = n \left(\frac{a\ell}{2} \right) = \frac{n\ell}{2} \cdot a$$

$$S = \frac{2p}{2} \cdot a \quad \therefore \boxed{S = p \cdot a}$$

onde p é o semiperímetro do polígono.

E, sendo p o semiperímetro da poligonal regular limítrofe do setor poligonal, igualmente por soma dos triângulos iguais que o formam, temos:

$$\boxed{S = p \cdot a}$$

315 – Área do polígono convexo circunscrito a um círculo

Sejam l_1, l_2, l_3, \dots os lados de um polígono convexo circunscrito a um círculo de raio r . Tracemos os segmentos que unem o centro do círculo a cada um dos vértices do polígono (Figura 349), decompondo o polígono em triângulos, todos com altura r e bases respectivamente iguais a l_1, l_2, l_3, \dots .

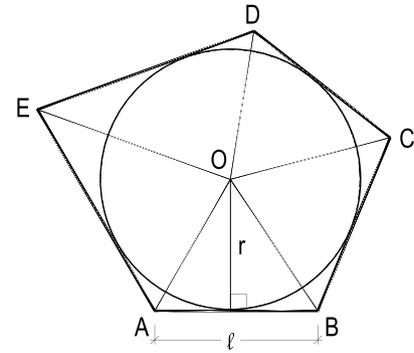


Figura 349

Por soma das áreas desses triângulos:

$$S = \frac{l_1 r}{2} + \frac{l_2 r}{2} + \frac{l_3 r}{2} + \dots = \frac{(l_1 + l_2 + l_3 + \dots) r}{2} = \frac{2pr}{2} \quad \therefore \quad \boxed{S = pr}$$

onde p é o semiperímetro do polígono.

316 – Área do círculo

Admitindo o círculo como a posição limite ocupada pelo polígono convexo regular inscrito quando seu gênero cresce indefinidamente, podemos medir sua área pela expressão instituída para os polígonos regulares (número 314). E, como o apótema e o perímetro do polígono regular tenderão, respectivamente, ao raio R e ao comprimento $2\pi R$ da circunferência do círculo, teremos, para a sua área, a relação:

$$S = \pi R \cdot R \quad \therefore \quad \boxed{S = \pi R^2}$$

Em função do diâmetro D do círculo, vem:
$$S = \pi \left(\frac{D}{2}\right)^2 \quad \therefore \quad \boxed{S = \frac{\pi D^2}{4}}$$

317 – Área do setor circular

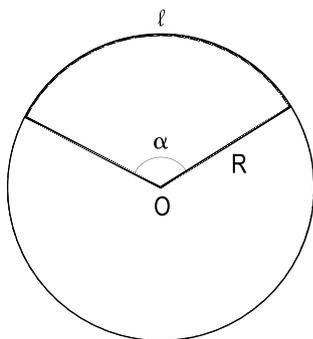


Figura 350

Por ser a posição limite ocupada pelo setor poligonal convexo regular inscrito, quando seu gênero cresce indefinidamente, sendo l o comprimento de seu arco e R seu raio, sua área será (número 314):

$$\boxed{S = \frac{lR}{2}}$$

Por outro lado, porque o setor circular é uma fração $\frac{\alpha}{360^\circ}$ do círculo (onde α é o ângulo central do setor medido em graus), temos:

$$\boxed{S = \frac{\alpha}{360^\circ} \pi R^2}$$

318 – Área do segmento circular

Consideremos (Figura 351) um segmento circular genérico limitado por um arco de comprimento ℓ e por uma corda de comprimento b , afastada de um valor h do centro do círculo, de raio R .

Porque a área do segmento circular é a subtração entre as áreas de um setor circular e de um triângulo isósceles, teremos (Figura 351):

$$S = S_{\text{setor}} - S_{\Delta OAB}$$

$$S = \frac{\ell R}{2} - \frac{bh}{2}$$

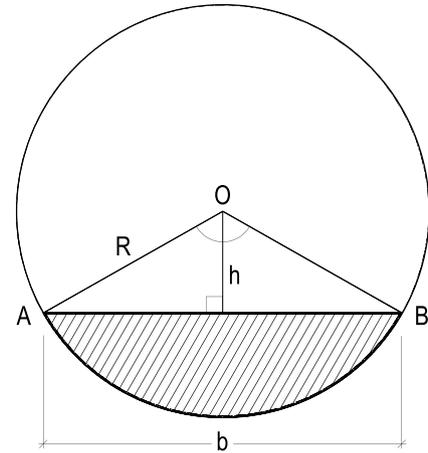


Figura 351

319 – Área da coroa circular

Sendo R e r os raios dos círculos que limitam uma coroa circular genérica, porque sua área é igual à subtração das áreas desses círculos, temos:

$$S = \pi R^2 - \pi r^2 \quad \therefore \quad S = \pi (R^2 - r^2)$$

O triângulo retângulo MAO (Figura 352) fornece:

$$R^2 - r^2 = t^2$$

Logo,

$$S = \pi t^2$$

Onde t é a metade da corda do círculo maior tangente ao menor.

Finalmente, calculemos a área da coroa em função de sua largura ℓ (distância entre as circunferências dos círculos limítrofes) e do comprimento C_m da circunferência equidistante das que limitam a coroa. Podemos, a partir do acima instituído, escrever (Figura 353):

$$S = \pi (R^2 - r^2) = \pi (R + r) (R - r)$$

$$S = \pi \left(r_m + \frac{\ell}{2} + r_m - \frac{\ell}{2} \right) \ell$$

$$S = \pi (2 r_m) \ell$$

$$S = 2\pi r_m \cdot \ell \quad \therefore \quad S = C_m \cdot \ell$$

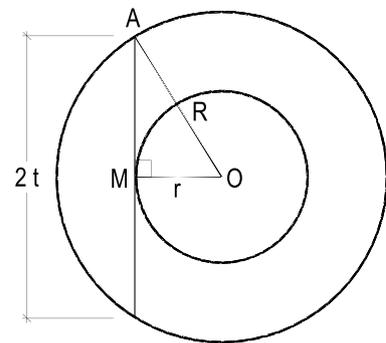


Figura 352

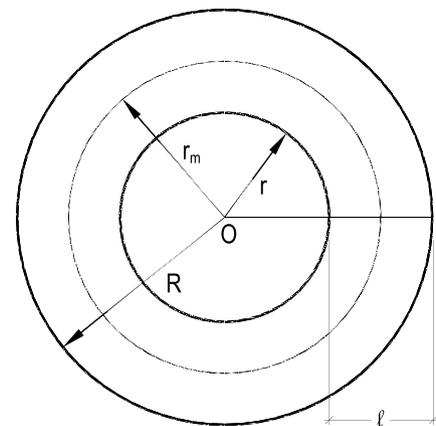


Figura 353

320 – Área do setor de coroa circular

Setor de coroa circular (ou trapézio circular) é a porção de uma coroa circular limitada por dois raios quaisquer (Figura 354).

Consideremos, então, um setor de coroa circular, com ângulo central α , medido em graus e limitado por dois círculos de raios R e r , respectivamente.

Porque o setor de coroa é uma fração da coroa, podemos escrever para sua área:

$$S = \frac{\alpha}{360^\circ} \pi (R^2 - r^2)$$

Por outro lado, sendo a , b e m os comprimentos dos arcos que limitam o setor e do arco interior ao setor, pertencente à circunferência equidistante das que limitam a coroa (Figura 355), podemos escrever:

$$S = \frac{\alpha}{360^\circ} \pi (R + r)(R - r)$$

$$S = \frac{\alpha}{360^\circ} \pi \left(r_m + \frac{\ell}{2} + r_m - \frac{\ell}{2} \right) \ell$$

$$S = \frac{\alpha}{360^\circ} 2\pi r_m \cdot \ell$$

$$S = \frac{\alpha}{360^\circ} C_m \ell \quad \therefore \quad \boxed{S = m \cdot \ell}$$

E, como o comprimento do arco m é igual à semissoma dos comprimentos dos arcos a e b , cabe, ainda, anotar:

$$\boxed{S = \frac{(a + b) \ell}{2}}$$

321 – Área do triângulo em função dos lados

Dado um triângulo de lados a , b e c , vimos (número 311) que sua área é medida pelo semi-produto de um de seus lados pela altura relativa a esse lado.

$$\text{Assim, teremos: } S = \frac{a \cdot h_a}{2}$$

Utilizando o demonstrado no número 209, temos:

$$h_a = \frac{2}{a} \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$S = \frac{a}{2} \cdot \frac{2}{a} \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$\therefore \quad \boxed{S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$$

onde p é o semiperímetro do triângulo.

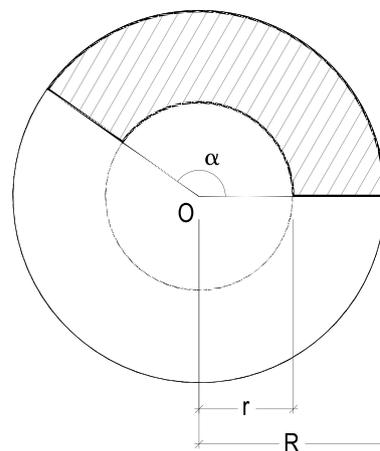


Figura 354

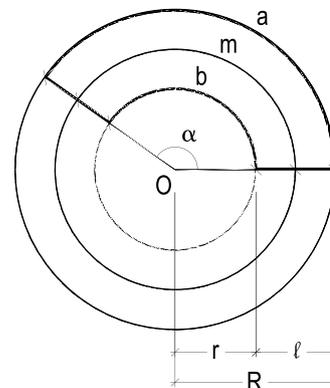


Figura 355

322 – Área do triângulo em função dos lados e do raio do círculo circunscrito

Sendo a , b e c os lados e R o raio do círculo circunscrito a um triângulo, vimos (número 214) que:
$$R = \frac{abc}{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$$

E, segundo o número 321,

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Logo,
$$R = \frac{abc}{4S} \quad \therefore \quad \boxed{S = \frac{abc}{4R}}$$

323 – Área do triângulo em função do raio do círculo inscrito e do perímetro

Sendo r o raio do círculo inscrito num triângulo de perímetro $2p$, pelo que vimos anteriormente (número 315), sua área S é medida pela relação:
$$\boxed{S = pr}$$

Aliás, tal relação pode também ser obtida imediatamente a partir do valor do raio do círculo inscrito num triângulo, em função de seus lados.

De fato, (números 215 e 321), temos:

$$r = \frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{p} = \frac{S}{p} \quad \therefore \quad \boxed{S = pr}$$

324 – Área do triângulo em função do perímetro, de um dos lados e do raio do círculo exinscrito ao triângulo relativo a esse lado

Sendo a , b e c os lados, $2p$ o perímetro de um triângulo e R_a o raio do círculo exinscrito relativo ao lado a , vimos (números 215 e 321) que:

$$R_a = \frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{p-a} = \frac{S}{p-a} \quad \therefore \quad \boxed{S = (p-a)R_a}$$

Analogamente:

$$\boxed{S = (p-b)R_b}$$

$$\boxed{S = (p-c)R_c}$$

325 – Área do triângulo em função dos raios dos círculos inscrito e exinscritos

Tomemos as relações instituídas nos dois itens anteriores:

$$S = pr, \quad S = (p-a)R_a, \quad S = (p-b)R_b \quad \text{e} \quad S = (p-c)R_c$$

Multiplicando membro a membro: $S^4 = p(p-a)(p-b)(p-c)rR_aR_bR_c$

$$S^4 = S^2 r R_a R_b R_c \quad \therefore \quad S^2 = r R_a R_b R_c \quad \therefore \quad \boxed{S = \sqrt{r R_a R_b R_c}}$$

326 – Área do triângulo em função das alturas e do raio do círculo circunscrito

Para a área S do triângulo, sabemos (número 314) que:

$$S = \frac{1}{2} (a h_a)$$

$$S = \frac{1}{2} (b h_b)$$

$$S = \frac{1}{2} (c h_c)$$

Multiplicando membro a membro: $S^3 = \frac{abc h_a h_b h_c}{8}$ (1)

Como $S = \frac{abc}{4R}$ (número 322), temos $abc = 4RS$ (2)

Substituindo (2) em (1), vem: $S^3 = \frac{4RS h_a h_b h_c}{8}$

$$S^2 = \frac{2R h_a h_b h_c}{4} \quad \therefore \quad \boxed{S = \frac{1}{2} \sqrt{2R h_a h_b h_c}}$$

327 – Área do triângulo equilátero em função do lado

Sejam a o lado e h a altura do triângulo equilátero ABC . Sabemos (número 200.3) que (Figura 356):

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Assim, para a área S do triângulo, teremos:

$$S = \frac{ah}{2} = \frac{a}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \quad \therefore \quad \boxed{S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}}$$

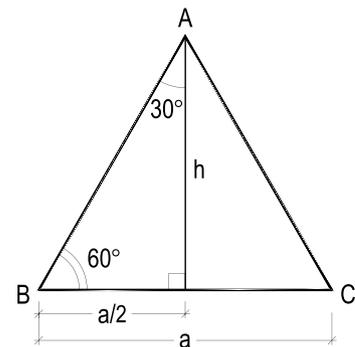


Figura 356

328 – Equivalências entre as figuras planas usuais

Das relações acima instituídas, podemos concluir diversas equivalências entre as figuras planas mais utilizadas. Dentre todas, citaremos as seguintes:

1. Dois retângulos ou dois paralelogramos são equivalentes quando são iguais os produtos de suas dimensões. Ou, o que é o mesmo, quando suas bases são inversamente proporcionais às suas alturas.
2. Um retângulo (ou um paralelogramo) é equivalente ao quadrado cujo lado é a média geométrica entre suas dimensões (base e altura).

3. Todos os triângulos que possuem a mesma base e alturas iguais são equivalentes. Assim, quando se fixam dois vértices de um triângulo e se faz o terceiro percorrer uma reta paralela ao lado fixo, a área do triângulo permanece constante (Figura 357).

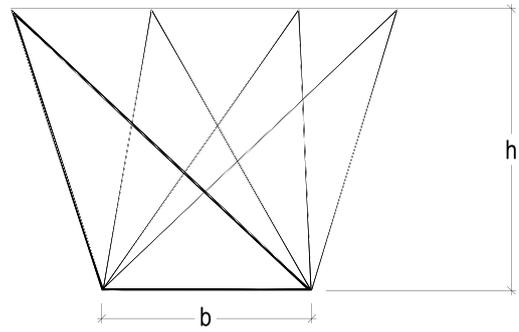


Figura 357

4. Um losango é equivalente ao retângulo cujas base e altura são respectivamente iguais a uma das diagonais do losango e à metade da outra.

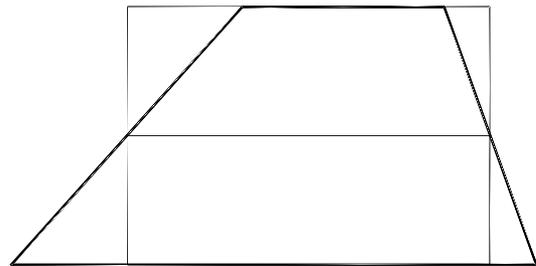


Figura 358

5. Um losango é equivalente a um triângulo cujas base e altura são respectivamente iguais às diagonais do losango.

6. Um trapézio é equivalente ao retângulo, cujas dimensões são respectivamente iguais à base média e à altura do trapézio (Figura 358).

7. Um trapézio é equivalente a um triângulo de mesma altura que o trapézio e de base igual à soma das bases do trapézio (Figura 359).

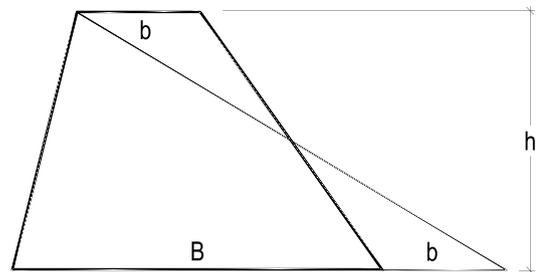


Figura 359

8. Dois trapézios de bases e alturas respectivamente iguais, embora possam ser figuras diferentes, são equivalentes. Assim, quando se fixa uma das bases de um trapézio e se faz a outra descrever uma reta paralela à fixa, sem mudar de valor (Figura 360), mantém-se constante a área do trapézio.

9. Todos os trapézios que possuem alturas e bases médias respectivamente iguais são equivalentes.

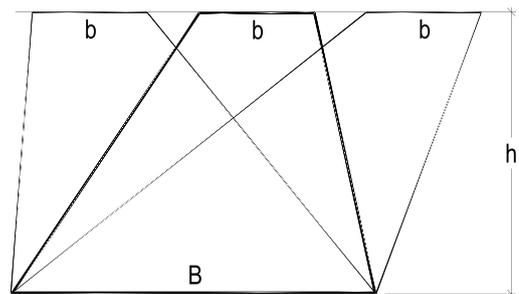


Figura 360

10. Um polígono regular é equivalente ao retângulo de base igual ao seu semiperímetro e de altura igual ao seu apótema.
11. Um polígono regular é equivalente a um triângulo que tenha base igual ao seu perímetro e altura igual ao seu apótema.
12. Um polígono regular é equivalente ao quadrado de lado igual à média geométrica entre seu semiperímetro e seu apótema.
13. Todos os polígonos isoperímetros circunscritíveis a um mesmo círculo (ou a círculos iguais) são equivalentes.
14. Um círculo é equivalente ao retângulo de base igual à semirretificação de sua circunferência e de altura igual ao seu raio.
15. Um círculo é equivalente a um triângulo de base igual à retificação de sua circunferência e de altura igual ao seu raio.
16. Um setor circular é equivalente a um triângulo de base igual à retificação do arco que limita o setor e de altura igual ao raio do setor.
17. Um setor circular é equivalente ao retângulo cujas dimensões são respectivamente iguais à semirretificação do arco que limita o setor e ao raio do setor.

18. Uma coroa circular é equivalente ao círculo, cujo diâmetro é igual à corda do maior círculo que limita a coroa, tangente ao menor círculo limítrofe da coroa (Figura 361).

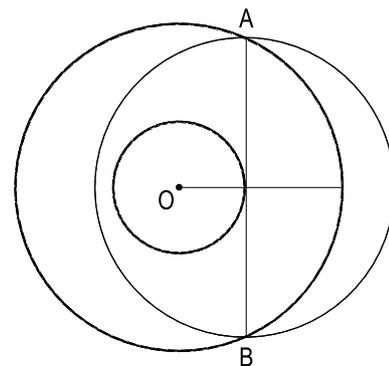


Figura 361

19. Uma coroa circular é equivalente ao retângulo de base igual ao comprimento da circunferência equidistante das limítrofes da coroa e de altura igual à largura da coroa.

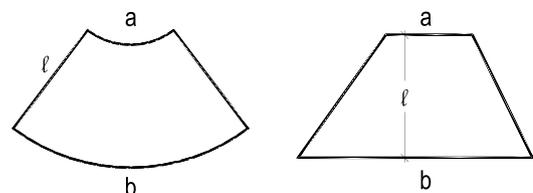


Figura 362

20. Um setor de coroa circular é equivalente ao trapézio de bases respectivamente iguais às retificações dos arcos limítrofes do setor e de altura igual à largura da coroa, à qual pertence o setor (Figura 362).

329 – Teorema

Quando dois triângulos possuem um par de ângulos correspondentes iguais ou suplementares, a razão entre suas áreas é igual à razão entre os produtos dos lados que formam estes ângulos.

Demonstração: Sejam os triângulos ABC e $AB'C'$ segundo a hipótese, isto é, tais que seus ângulos \widehat{BAC} e $\widehat{B'AC'}$ sejam iguais (Figura 363) ou suplementares (Figura 364).

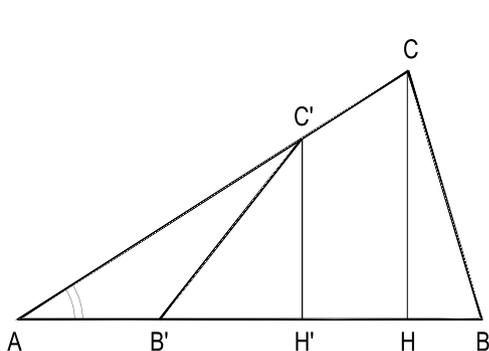


Figura 363

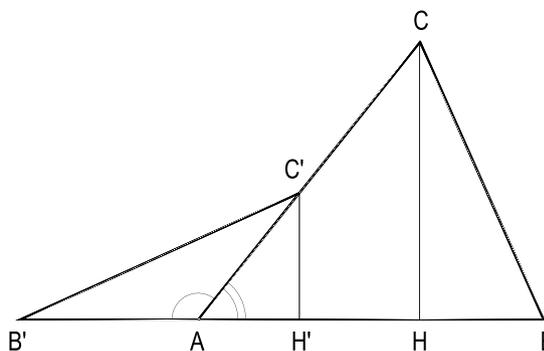


Figura 364

Tracemos suas alturas CH e $C'H'$ e designemos por S e S' , respectivamente, as áreas dos triângulos em estudo.

Teremos, em ambas as hipóteses:

$$\frac{S'}{S} = \frac{(\frac{1}{2})AB' \cdot C'H'}{(\frac{1}{2})AB \cdot CH} = \frac{AB'}{AB} \cdot \frac{C'H'}{CH} \quad (1)$$

Mas como, para os dois casos, são semelhantes os triângulos retângulos $AC'H'$ e ACH , temos:

$$\frac{C'H'}{CH} = \frac{AC'}{AC} \quad (2)$$

Substituindo (2) em (1), vem: $\boxed{\frac{S'}{S} = \frac{AB' \cdot AC'}{AB \cdot AC}}$

Então, quando dois triângulos possuem um par de ângulos correspondentes iguais ou suplementares, a razão entre suas áreas é igual à razão entre os produtos dos lados que formam estes ângulos.

330 – Teorema

A razão entre as áreas de duas figuras semelhantes é igual ao quadrado de sua razão de semelhança.

Demonstração: Consideremos, inicialmente, dois triângulos ABC e AB'C' (Figura 365) semelhantes na razão k, isto é, tais que:

$$\frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC} = \frac{B'C'}{BC} = k$$

Porque os ângulos homólogos dos triângulos são iguais, o teorema anterior se aplica e fornece, para suas áreas S e S', a relação:

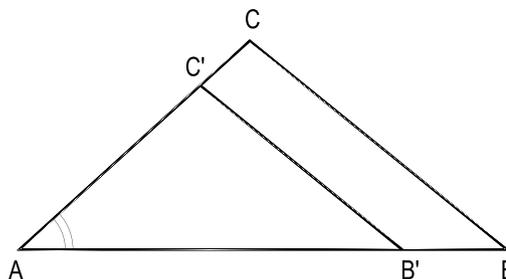


Figura 365

$$\frac{S'}{S} = \frac{AB' \cdot AC'}{AB \cdot AC} = \frac{AB'}{AB} \cdot \frac{AC'}{AC} = k \cdot k \quad \therefore \quad \boxed{\frac{S'}{S} = k^2}$$

Sejam, agora, dois polígonos semelhantes numa razão k.

Porque tais polígonos podem ser decompostos em um mesmo número de triângulos respectivamente semelhantes, naquela mesma razão k (número 185), designando por S_1, S_2, S_3 , etc. e S'_1, S'_2, S'_3 , etc. as áreas desses triângulos e por S e S' as dos polígonos, teremos:

$$\frac{S'_1}{S_1} = \frac{S'_2}{S_2} = \frac{S'_3}{S_3} = \dots = k^2$$

$$\frac{S'_1 + S'_2 + S'_3 + \dots}{S_1 + S_2 + S_3 + \dots} = k^2$$

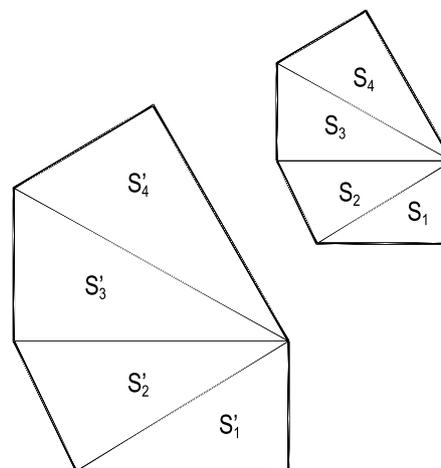


Figura 366

Então, por soma, chega-se a

$$\boxed{\frac{S'}{S} = k^2}$$

Considerando, finalmente, duas figuras quaisquer semelhantes, numa razão k, como posições limites ocupadas por polígonos semelhantes (na mesma razão k) nelas inscritas, quando seus gêneros crescem indefinidamente, concluímos que a razão entre suas áreas é ainda igual ao quadrado k^2 daquela razão de semelhança.

Assim, a razão entre as áreas de duas figuras semelhantes é igual ao quadrado da razão de semelhança dessas duas figuras.

331 – Teorema de Pitágoras

A área do quadrado construído sobre a hipotenusa de um triângulo retângulo é igual à soma das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos do triângulo.

Demonstração: Sejam o triângulo retângulo ABC e os quadrados BCEF, ABMN e ACXY construídos sobre seus lados (Figura 367). Tracemos a altura AH relativa à hipotenusa BC, à qual divide o maior quadrado em dois retângulos BHIF e CHIE, e provemos que tais retângulos são respectivamente equivalentes aos quadrados construídos sobre os catetos AB e AC.

Para tanto, consideremos os triângulos ABF e CBM. Tais triângulos são iguais por possuírem dois lados respectivamente iguais ($AB = BM$ e $BF = BC$) e o ângulo compreendido igual ($90^\circ + B$). E, por serem iguais, são equivalentes.

Façamos A descrever a reta AH paralela ao lado BF do triângulo ABF, transformando este triângulo em um outro equivalente HBF (número 328.3).

Analogamente, fazendo C descrever a reta CA, paralela ao lado BM do triângulo CBM, transformamos este triângulo em um outro equivalente ABM.

Como os triângulos ABF e CBM são equivalentes, HBF e ABM também o são. E, como as áreas destes triângulos são respectivamente iguais às metades das áreas do retângulo BHIF e do quadrado ABMN, concluímos que são equivalentes este quadrado e este retângulo.

Analogamente provaríamos a equivalência do quadrado ACXY e do retângulo CHIE.

Como, finalmente, a soma das áreas dos retângulos BHIF e CHIE é igual à área do quadrado BCEF, concluímos que:

$$S_{BCEF} = S_{ABMN} + S_{ACXY}, \text{ relação que prova o teorema.}$$

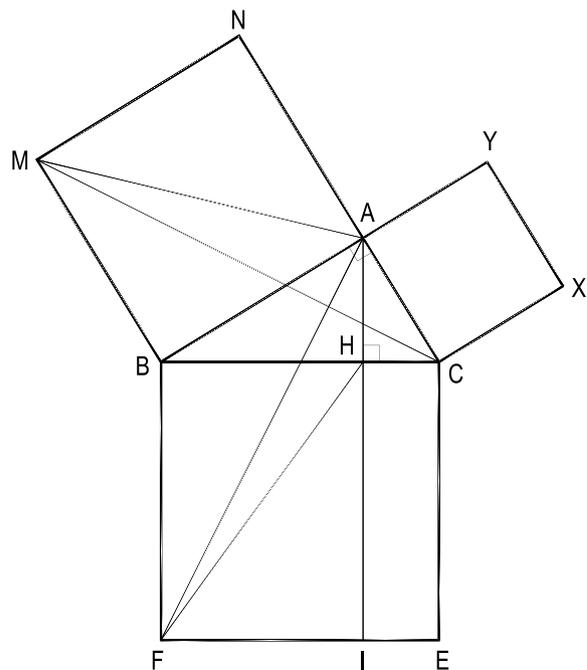


Figura 367

332 – Corolário

O quadrado da hipotenusa de um triângulo retângulo é igual à soma dos quadrados de seus catetos.

De fato, basta ver que sendo a a hipotenusa, e b e c os catetos, o teorema de Pitágoras fornece (Figura 367):

$$S_{BCEF} = S_{ABMN} + S_{ACXY} \quad \therefore \quad \boxed{a^2 = b^2 + c^2}$$

333 – Teorema

Três figuras semelhantes quaisquer construídas sobre os lados de um triângulo retângulo são tais que a área da construída sobre a hipotenusa é igual à soma das áreas das construídas sobre os catetos.

Demonstração: Sejam S , S_1 e S_2 as áreas das figuras construídas respectivamente sobre a hipotenusa a e sobre os catetos b e c do triângulo (Figura 368).

Porque as figuras são, por hipótese, semelhantes, podemos escrever (número 330):

$$\frac{S_1}{S} = \left(\frac{b}{a}\right)^2 = \frac{b^2}{a^2} \quad \therefore \quad S_1 = \frac{b^2}{a^2} S \quad (1)$$

$$\frac{S_2}{S} = \left(\frac{c}{a}\right)^2 = \frac{c^2}{a^2} \quad \therefore \quad S_2 = \frac{c^2}{a^2} S \quad (2)$$

Somando, membro a membro, as relações (1) e (2), vem:

$$S_1 + S_2 = \frac{b^2}{a^2} S + \frac{c^2}{a^2} S$$

$$S_1 + S_2 = \frac{b^2 + c^2}{a^2} S$$

E, como (número 332) $b^2 + c^2 = a^2$, vem:

$$S_1 + S_2 = \frac{a^2}{a^2} S \quad \therefore \quad \boxed{S = S_1 + S_2}$$

relação que prova o teorema.

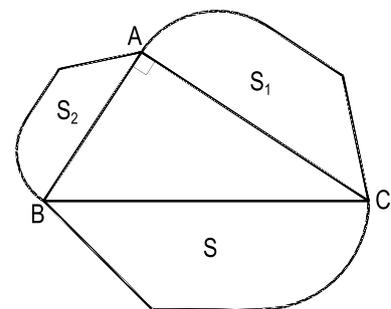


Figura 368

334 – Corolários

1. A área do triângulo equilátero construído sobre a hipotenusa de um triângulo retângulo é igual à soma das áreas dos triângulos equiláteros construídos sobre seus catetos (Figura 369).
2. A área de um polígono convexo regular construído sobre a hipotenusa de um triângulo retângulo é igual à soma das áreas dos polígonos convexos regulares, de mesmos gêneros que aquele, construídos sobre cada um dos catetos (Figura 369).

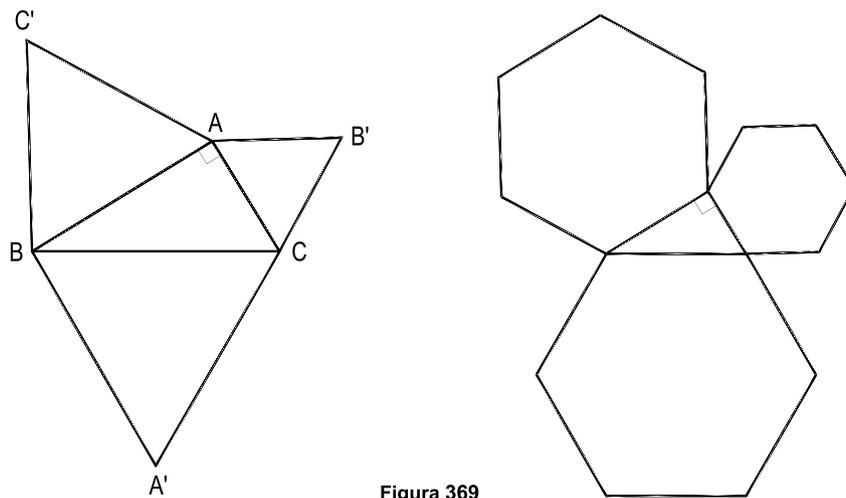


Figura 369

3. A área do círculo circunscrito a um triângulo retângulo é igual à soma das áreas dos círculos circunscritos aos dois triângulos retângulos parciais formados pela altura relativa à hipotenusa (Figura 370). Porque estes dois círculos terão por diâmetros cada um dos dois catetos.

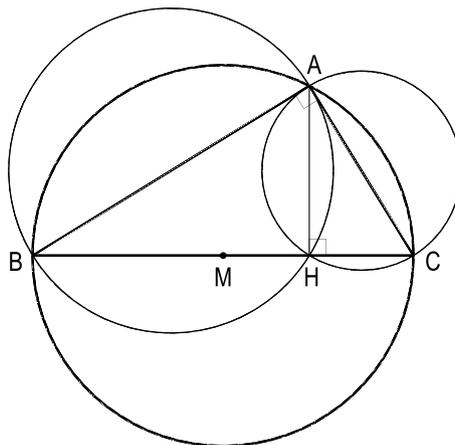


Figura 370

335 – Teorema

A soma das áreas das lúnulas de Hipócrates construídas sobre os dois catetos de um triângulo retângulo é igual à área do triângulo.

Por definição, lúnula é a figura limitada por dois arcos de círculo de raios quaisquer.

Dentre todas as muitíssimas lúnulas, as mais famosas são as lúnulas de Hipócrates, construídas sobre cada um dos catetos de um triângulo retângulo e exteriores ao semicírculo que circunscreve tal triângulo.

Assim são as lúnulas L_1 e L_2 , relativas aos catetos AB e AC do triângulo retângulo ABC da Figura 371. Sua denominação é homenagem a seu criador, o geômetra Hipócrates de Quios.

Demonstração: Consideremos um triângulo retângulo e os semicírculos tendo como diâmetros cada um de seus lados, os relativos aos catetos, sendo externos ao triângulo, e o terceiro circunscrevendo-o (Figura 371).

Designando por S_1 e S_2 as áreas das duas lúnulas construídas sobre cada um dos dois catetos, por S a área do triângulo e por S'_1 e S'_2 as áreas dos dois segmentos circulares assim formados (Figura 371), podemos escrever (número 333):

$$(S_1 + S'_1) + (S_2 + S'_2) = (S + S'_1 + S'_2)$$

simplificando,

$$\boxed{S_1 + S_2 = S}$$

relação que demonstra o teorema.

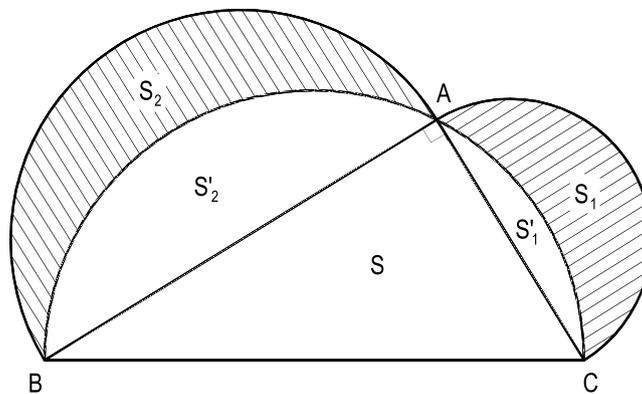


Figura 371

CAPÍTULO XVII

ELIPSE

336 – Definições

Elipse é a curva plana cujos pontos possuem a mesma soma de distâncias a dois pontos fixos de seu plano. Os pontos fixos são denominados focos da elipse e a distância entre eles distância focal. Os segmentos MF e MF' formados por um ponto M corrente da elipse e por cada um dos focos são denominados raios vetores do ponto M (Figura 372).

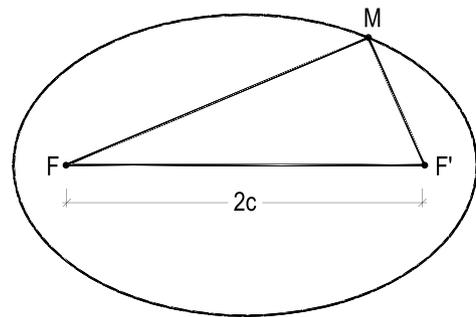


Figura 372

337 – Condição de existência

Designemos por $2c$ a distância focal e por $2a$ a soma constante dos raios vetores de cada ponto da elipse. Para que exista a curva, ou, o que é o mesmo, para que existam os triângulos MFF' (Figura 372), é necessário e suficiente que: $FF' < MF + MF'$ ou $2c < 2a$

Assim, para que exista uma elipse é necessário e suficiente que sua distância focal seja menor que a soma – constante – das distâncias de cada um de seus pontos aos focos.

Por isso que os focos da elipse são sempre interiores a ela.

338 – Propriedades

Do processo espontâneo para a construção da elipse, utilizando-se círculos com centros nos focos e raios tais que somem o valor constante estabelecido $2a$, é imediato notar que cada quatro pontos M_1, M_2, M_3 e M_4 assim obtidos (Figura 373) são, aos pares, simétricos em relação à reta que contém os focos F e F' e à mediatriz do segmento FF' e, por consequência, ao ponto O em que elas se cruzam. Daí, conclui-se que:

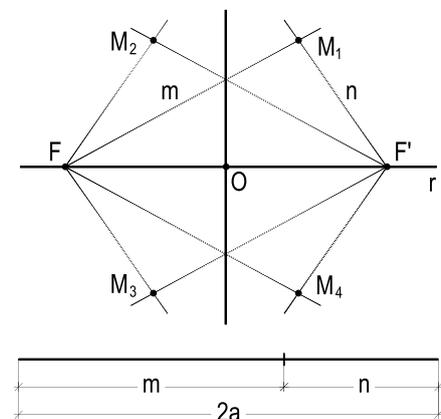


Figura 373

1. A elipse possui dois eixos.

O eixo AA' (Figura 374), que contém os focos, é denominado transverso, real ou focal; o eixo BB' pertencente à mediatriz do segmento FF' (Figura 374) é denominado não transverso, imaginário ou não focal.

2. A elipse possui quatro vértices.

São os extremos A, A', B e B' de cada um dos eixos (Figura 374).

3. A elipse possui centro.

É o ponto O , comum aos eixos (Figura 374).

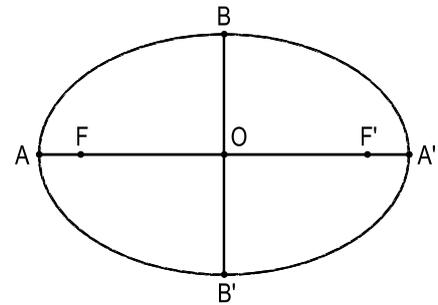


Figura 374

4. A elipse é uma curva contínua e fechada. Contínua, porque cada acréscimo infinitésimo atribuído a um raio vetor corresponde à obtenção de um novo ponto da curva, infinitesimalmente distante do primeiro; fechada, porque, além de contínua, não pode possuir ponto impróprio, uma vez que a soma dos raios vetores de cada um de seus pontos é constantemente finita.

339 – Relações métricas

1. O eixo transverso tem comprimento igual à soma dos raios vetores de cada ponto da elipse.

Sejam AA' o eixo transverso e $2a$ a soma, constante, dos raios vetores dos pontos de uma elipse de focos F e F' (Figura 375). Porque A pertence à curva, vem: $AF' + AF = 2a$

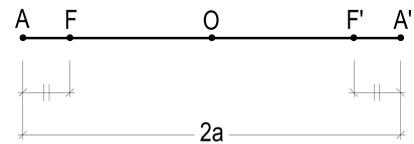


Figura 375

Mas como $AF = F'A'$, $AF' + F'A' = 2a$

Logo,

$$\boxed{AA' = 2a}$$

2. Relação entre os eixos e a distância focal.

Sendo $2b$ e $2c$, respectivamente, o eixo não transverso e a distância focal, como $AA' = 2a$ e, porque B pertence à curva e à mediatriz de FF' , temos (Figura 376):

$$BF = BF' = a$$

e

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2}$$

$$\therefore 4a^2 = 4b^2 + 4c^2$$

$$\therefore (2a)^2 = (2b)^2 + (2c)^2 \text{ ou } \boxed{AA'^2 = BB'^2 + FF'^2}$$

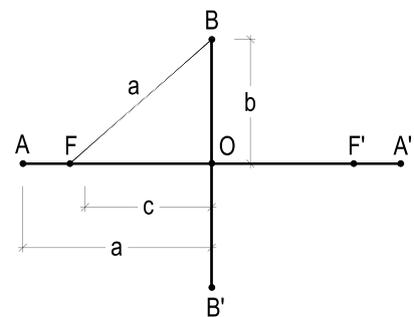


Figura 376

3. Porque $BF > BO$, como hipotenusa e cateto, respectivamente, do triângulo BOF (Figura 376), temos:

$$a > b \quad \therefore \quad 2a > 2b$$

Isto é, o eixo transversal AA' é necessariamente o maior dos dois. Por isso que habitualmente designaremos os eixos AA' e BB' (Figura 376) por eixo maior e menor, respectivamente.

4. Corda focal – parâmetro.

Corda focal de uma elipse é a que, passando por um dos focos, é perpendicular ao eixo transversal. Assim é $RS = c_f$, na Figura 377.

Parâmetro de uma elipse é a ordenada, em relação ao eixo transversal, do ponto da curva cuja projeção ortogonal sobre esse eixo coincide com um dos focos ($RF = p$, na mesma Figura 377).

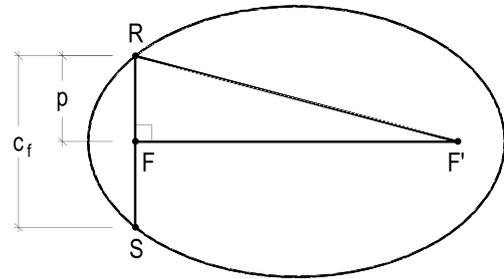


Figura 377

Naturalmente, o parâmetro vale a metade da corda focal.

Para o cálculo da corda focal c_f e do parâmetro p , consideremos o triângulo retângulo RFF' (Figura 377) que dá:

$$RF'^2 = RF^2 + FF'^2 \quad (1)$$

Como R é ponto da curva e $RF = p$, vem:

$$RF + RF' = 2a \quad \therefore \quad RF' = 2a - p$$

Assim, a relação (1) se escreve:

$$(2a - p)^2 = p^2 + (2c)^2 \quad \therefore \quad 4a^2 + p^2 - 4ap = p^2 + 4c^2 \quad \therefore \quad 4a^2 - 4ap = 4c^2$$

$$\therefore \quad a^2 - ap = c^2 \quad \therefore \quad ap = a^2 - c^2 = b^2 \quad \therefore \quad \boxed{p = \frac{b^2}{a}}$$

E como $c_f = 2p$,

$$\boxed{c_f = \frac{2b^2}{a}}$$

Para a corda focal pode-se, ainda, escrever: $c_f = \frac{4b^2}{2a} \quad \therefore \quad \boxed{c_f = \frac{(2b)^2}{2a}}$

5. Excentricidade.

Excentricidade (e) de uma elipse é a razão entre a semidistância focal e o semieixo transverso.

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}} = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2}$$

Assim, a excentricidade e será calculada por uma das seguintes expressões:

$$e = \frac{c}{a}$$

$$e = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2}$$

6. Porque $0 < c < a$, conclui-se que a excentricidade de uma elipse está necessariamente compreendida entre zero e um.

$$0 < e < 1$$

7. Quando, mantido fixo o eixo maior de uma elipse, faz-se tender a zero o valor da excentricidade, c tende a zero, os focos aproximam-se, tendendo ao centro da curva. Nestas condições, o eixo menor tende a igualar o maior e a elipse degenera num círculo de diâmetro coincidente com o eixo maior.

8. Quando, mantido fixo o eixo maior de uma elipse, faz-se tender a um o valor da excentricidade, c tende a igualar o semieixo maior, os focos afastam-se, tendendo cada um a cada extremo do eixo real. Nestas condições, o eixo menor tende a se anular e a elipse degenera num segmento de reta – seu eixo maior.

9. A excentricidade pode ser expressa em função do eixo transverso e do parâmetro (ou da corda focal). De fato (números 339.4 e 339.5):

$$e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{1 - \left(\frac{b^2}{a} \cdot \frac{1}{a}\right)} \quad \therefore \quad e = \sqrt{1 - \frac{p}{a}}$$

$$e = \sqrt{1 - \left(\frac{p}{a}\right)} = \sqrt{1 - \frac{2p}{2a}} \quad \therefore \quad e = \sqrt{1 - \frac{c_f}{2a}}$$

Do que foi acima detalhado conclui-se que a excentricidade de uma elipse é um parâmetro adimensional, mediante o qual se pode interpretar o quanto a forma da elipse em estudo se aproxima ou se afasta da forma circular. A excentricidade traduz, pois, quanto menos, ou mais, achatada é a elipse.

Também o parâmetro ou a corda focal, se comparados a um dos eixos da elipse, permitem avaliar este índice.

340 – Teorema

O lugar geométrico dos pontos cujas somas de distâncias a dois pontos fixos é constante é a elipse de eixo maior igual àquela constante, tendo por focos os dois pontos fixos.

Demonstração: Sejam F e F' os pontos fixos e $2a$ – maior que FF' – a soma constante.

Consideremos a elipse de eixo maior igual a $2a$, com focos F e F' (Figura 378).

Já foi visto (números 336 e 339.1) que, para todos os pontos M da curva:

$$MF + MF' = 2a \quad (1)$$

Sendo J e L pontos respectivamente exterior e interior à elipse (Figura 378), por envolventes e envolvidas, vem:

$$JF + JF' > MF + MF' \quad \therefore JF + J'F' > 2a \quad (2)$$

$$LF + LF' < MF + MF' \quad \therefore LF + LF' < 2a \quad (3)$$

As relações (1), (2) e (3) demonstram o teorema.

Assim, o lugar geométrico dos pontos cujas somas de distâncias a dois pontos fixos é constante é a elipse, que tem eixo maior igual àquela constante e por focos os dois pontos fixos.

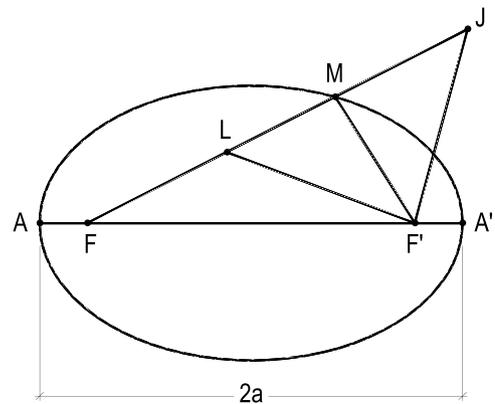


Figura 378

341 – Escólio

A elipse divide seu plano em duas regiões: a externa, à qual pertencem os pontos cujas somas de distâncias aos focos são maiores que o eixo transverso e a interna, à qual pertencem os pontos cujas somas de distâncias aos focos são menores que o eixo transverso da curva.

342 – Definições

Círculos diretores de uma elipse são os dois círculos que têm por centros cada um dos focos e raios iguais ao eixo transverso da elipse.

Círculo principal de uma elipse é o que tem por diâmetro o eixo maior da elipse.

Círculo auxiliar é o que tem por diâmetro seu eixo menor.

343 – Teorema

A bissetriz do ângulo externo formado pelos raios vetores relativos a um ponto corrente da elipse é tangente à curva nesse ponto.

Demonstração: Sejam F e F' os focos e M um ponto corrente de uma elipse de eixo transversal $2a$ e a reta r a bissetriz do ângulo externo formado pelos raios vetores MF e MF' (Figura 379).

Tracemos por F' a perpendicular a r , obtendo S no prolongamento do raio vetor MF .

Porque o triângulo MSF' é isósceles, S é o simétrico de F' em relação à reta r . Assim, para todos os pontos de r (Figura 379), vale escrever:

$$JS = JF' \quad (1)$$

$$MS = MF'$$

E, por axioma:

$$JF + JS > FS$$

$$\therefore JF + JS > MF + MS \quad (2)$$

Utilizando as relações (1) e (2), vem:

$$JF + JF' > MF + MF'$$

$$\therefore JF + JF' > 2a$$

E, se todos os pontos J de r – exceto M – possuem somas de distâncias aos focos maiores que $2a$, pode-se concluir que todos esses pontos J são exteriores à elipse (número 341). Ora, isto é o mesmo que dizer que existe apenas um ponto – M – comum à reta r e à elipse.

E, porque a elipse é uma curva fechada, fica provado que a reta r é a tangente, em M , à elipse.

344 – Corolário

A bissetriz do ângulo interno formado pelos raios vetores relativos a um ponto qualquer da elipse é normal à curva nesse ponto (Figura 380).

Porque essa bissetriz é perpendicular à bissetriz do ângulo externo formado por esses raios vetores, que é a tangente à curva, nesse ponto.

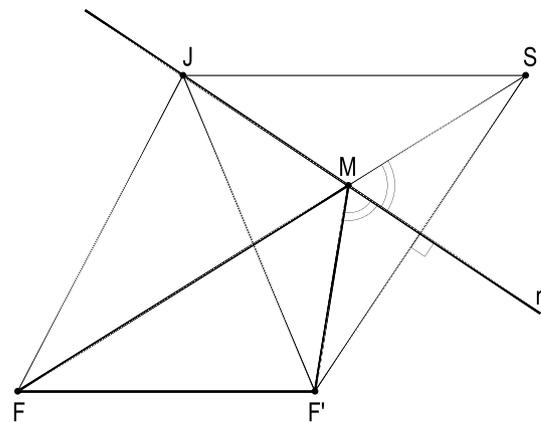


Figura 379

345 – Propriedades

1. Os pontos de interseção da tangente e da normal relativas a um ponto corrente, com a reta definida pelos focos formam, com os focos, uma divisão harmônica.

De fato, os pés R e R' da normal e da tangente relativas a um ponto M corrente são os próprios pés das bissetrizes relativas ao vértice M (Figura 380) do triângulo FMF' (número 166).

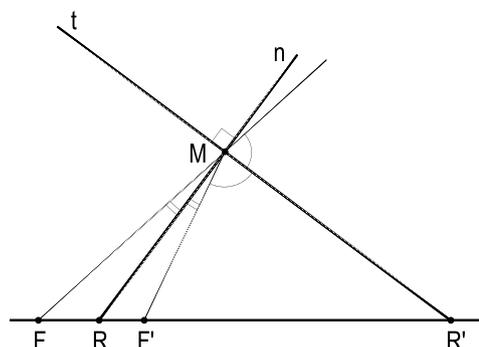


Figura 380

2. As tangentes, nos vértices, são paralelas aos eixos.

É equivalente dizer que as normais, nos vértices, coincidem com os eixos da curva.

3. Um dos focos, o ponto de contato de uma tangente qualquer, e o simétrico do outro foco em relação a essa tangente são, sempre, colineares (Figura 379).

4. O lugar geométrico dos simétricos de um foco em relação às tangentes é o círculo diretor relativo ao outro foco.

De fato, sendo r a tangente, num ponto genérico M, a uma elipse de focos F e F' e eixo maior 2a e S o simétrico de F' em relação a r, o triângulo isósceles SMF' (Figura 381) dá:

$$MF' = MS.$$

E como

$$MF + MF' = 2a, \text{ vem:}$$

$$MF + MS = 2a$$

$$\text{Ou seja: } FS = 2a.$$

Assim, o lugar dos simétricos S do foco F', em relação às tangentes, é o círculo (F, 2a), diretor, relativo ao foco F.

É claro, portanto, que o lugar geométrico dos simétricos dos focos em relação às tangentes a uma elipse consiste no par de círculos diretores da curva.

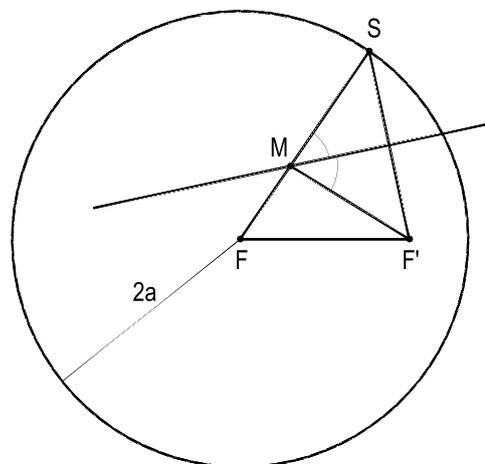


Figura 381

5. O lugar geométrico dos pontos equidistantes de um círculo e de um ponto fixo interior ao círculo é a elipse, para a qual o ponto fixo é um dos focos e o círculo é o diretor relativo ao outro foco.

Sendo $(F, 2a)$ o círculo, F' o ponto fixo interior e M um ponto equidistante dos dois (Figura 381), pode-se escrever:

$$MS = MF'$$

$$\text{Mas como, } FM + MS = FS = 2a,$$

$$\text{temos } MF + MF' = 2a$$

Assim, M descreve a elipse de focos F e F' e eixo maior $2a$ (para a qual o círculo considerado é um dos diretores).

6. O lugar geométrico dos centros dos círculos pertencentes a um ponto fixo, interior a um círculo dado, e tangentes a este círculo é a elipse, para a qual o ponto fixo é um dos focos e o círculo dado é o diretor relativo ao outro foco.

Porque sendo $(F, 2a)$ e F' o círculo e o ponto fixo dados e M o centro de um círculo pertencente a F' e tangente – em S – ao dado (Figura 382), M será equidistante do círculo e do ponto fixo dados.

Assim, retornamos à propriedade anterior.

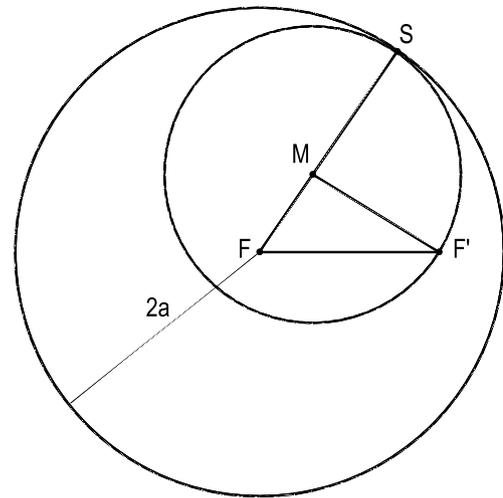


Figura 382

346 – Teorema de La Hire

O lugar geométrico das projeções ortogonais dos focos de uma elipse sobre as tangentes à curva é seu círculo principal.

Demonstração: Seja t uma tangente qualquer à elipse de focos F e F' e de eixo maior $AA' = 2a$ (Figura 383).

Porque o simétrico S de F' em relação àquela tangente pertence ao círculo diretor $(F, 2a)$ relativo ao outro foco (número 345.4), vem $FS = 2a$.

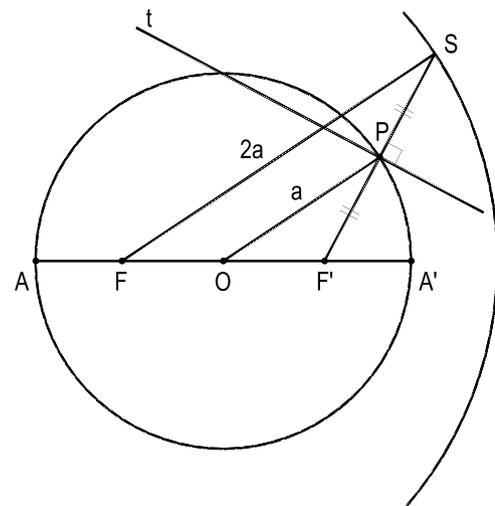


Figura 383

O ponto P, médio de F'S, é a projeção ortogonal de F' sobre t, em estudo. E, porque o ponto O, médio de FF', é o próprio centro da elipse (Figura 383), o triângulo FF'S dá:

$$OP = \frac{FS}{2} = \frac{1}{2} \cdot 2a = a$$

Assim, porque a projeção P de um dos focos sobre uma tangente genérica dista a do centro O da elipse, conclui-se que o lugar geométrico dos pontos P é o círculo (O, a), principal da elipse.

Então o lugar geométrico das projeções...

347 – Teoremas de Poncelet

1. As tangentes traçadas por um ponto exterior a uma elipse são duas cevianas isogonais do triângulo formado por esse ponto e pelos dois focos da elipse.
2. A reta que une um foco de uma elipse a um ponto exterior é a bissetriz do ângulo formado pelas retas que unem aquele foco aos pontos de contato das duas tangentes traçadas pelo ponto exterior.

Demonstrações: Sejam t e t' as tangentes de um ponto J qualquer a uma elipse de focos F e F' e de eixo maior 2a.

Sendo S e S' os simétricos de F e de F', respectivamente em relação a t e a t' (Figura 384), podemos escrever:

$$JS = JF \quad (1) \quad \text{e} \quad JF' = JS' \quad (2)$$

E, como FS' e F'S são raios dos dois círculos diretores da elipse (número 345.4), temos:

$$F'S = FS' \quad (3)$$

As relações (1), (2) e (3) asseguram a igualdade dos triângulos JSF' e JS'F (3º caso). Daí decorre a igualdade dos ângulos $(2\alpha + \beta)$ e $(\beta + 2\gamma)$, opostos aos lados iguais F'S e FS'.

$$\text{Então: } 2\alpha + \beta = \beta + 2\gamma \quad \therefore \quad 2\alpha = 2\gamma \quad \therefore \quad \boxed{\alpha = \gamma}$$

Assim, para o triângulo JFF', t e t' são duas cevianas isogonais, tal como se queria demonstrar.

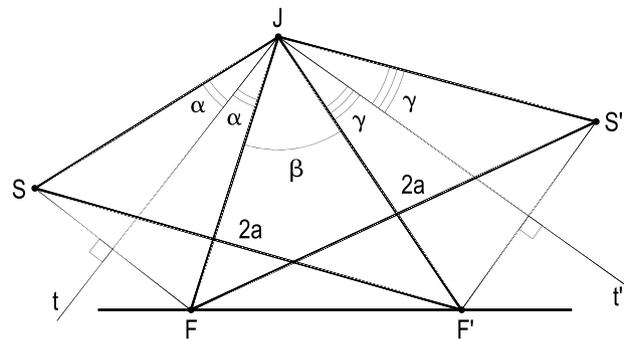


Figura 384

Além do que já foi considerado, incluíamos os pontos de contato M e M' das tangentes t e t' (Figura 385).

Os triângulos iguais JSF' e $JS'F$ dão:

$$\theta = \varphi \quad (1)$$

E a simetria dos pontos S e F – e consequentemente dos triângulos JSM e JFM – em relação à tangente t permite escrever:

$$\theta = \rho \quad (2)$$

De (1) e (2), vem: $\varphi = \rho$

Isto é, FJ é a bissetriz do ângulo formado pelas retas FM e FM' , como se queria provar.

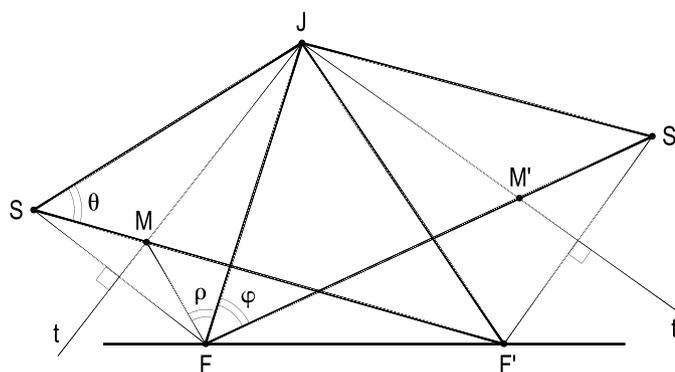


Figura 385

348 – Corolário do primeiro teorema de Poncelet

Dados um ângulo $t \hat{J} t'$ e um ponto F interior a ele, o lugar geométrico dos focos F' das elipses que têm um foco fixo F e que são tangentes às retas t e t' é a semirreta Jw isogonal de JF em relação aos lados do ângulo dado (Figura 386), exceto, naturalmente, o ponto J .

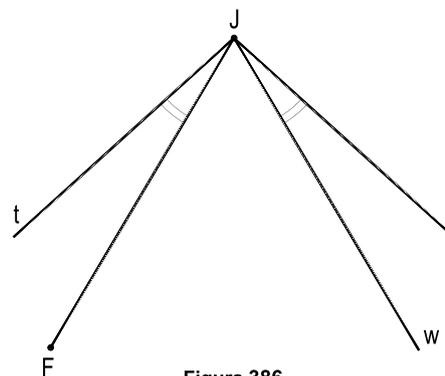


Figura 386

349 – Teorema

O lugar geométrico dos pontos dos quais se pode traçar tangentes perpendiculares a uma elipse é o círculo concêntrico com ela, tendo raio igual à hipotenusa de um triângulo retângulo cujos catetos são os semieixos da elipse.

Demonstração: Seja J um ponto qualquer do lugar, isto é, tal que as tangentes t e t' de J à elipse de focos F e F' sejam perpendiculares entre si.

Consideremos o simétrico S , de F , em relação à tangente t , que nos dá (Figura 387):

$$\alpha = \varphi \quad (1)$$

$$e JS = JF \quad (2)$$

$$\text{Do primeiro teorema de Poncelet, temos: } \alpha = \gamma \quad (3)$$

$$(1) \text{ e } (3) \text{ dão: } \varphi = \gamma \quad (4)$$

A hipótese e a relação (4) permitem escrever:

$$\gamma + \alpha + \beta = 90^\circ \quad \therefore \quad \varphi + \alpha + \beta = 90^\circ$$

Assim, o triângulo JSF' é retângulo em J (Figura 387). Logo:

$$JS^2 + JF'^2 = F'S^2$$

Como F'S = 2a (número 345.4) e JS = JF (relação 2):

$$JF^2 + JF'^2 = (2a)^2$$

E, porque, então, a soma dos quadrados das distâncias de J aos pontos fixos F e F' é constante, o lugar desses pontos J é um círculo que tem por centro o ponto O, médio de FF' (Figura 387) e raio OJ, calculável (número 204.1) pela expressão:

$$OJ = \frac{1}{2} \sqrt{2(JF^2 + JF'^2) - FF'^2}$$

$$\therefore OJ^2 = \frac{1}{4} [2(2a)^2 - (2c)^2] = \frac{1}{4} (8a^2 - 4c^2)$$

$$\therefore OJ^2 = \frac{4}{4} (2a^2 - c^2) = a^2 + (a^2 - c^2)$$

E como (número 339.2), $a^2 - c^2 = b^2$, vem:

$$\boxed{OJ^2 = a^2 + b^2}$$

Assim, o lugar geométrico dos pontos...

350 – Observações

O círculo, lugar geométrico dos pontos dos quais se pode traçar tangentes perpendiculares a uma elipse, instituído no teorema anterior, denomina-se círculo órtico da elipse ou, em homenagem a seu criador, círculo de Monge da elipse.

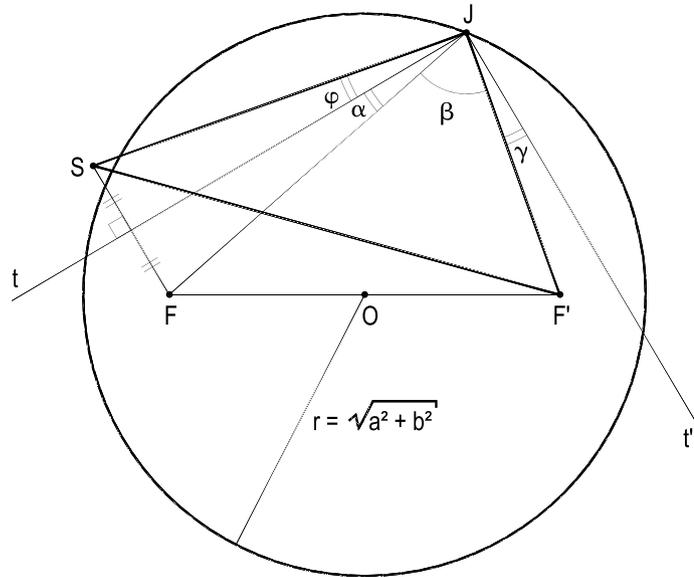


Figura 387

351 – Afinidade Plana

Diz-se que duas figuras pertencentes a um plano são afins quando se correspondem ponto a ponto e reta a reta de modo tal que pares de pontos correspondentes pertençam a retas paralelas e pares de retas correspondentes concorram sobre uma reta fixa. Esta reta fixa é denominada eixo da afinidade e as retas paralelas definem a direção de tal afinidade.

Conforme a direção d e o eixo de uma afinidade sejam perpendiculares (Figura 388) ou oblíquos (Figura 389), a afinidade diz-se, respectivamente, ortogonal ou oblíqua.

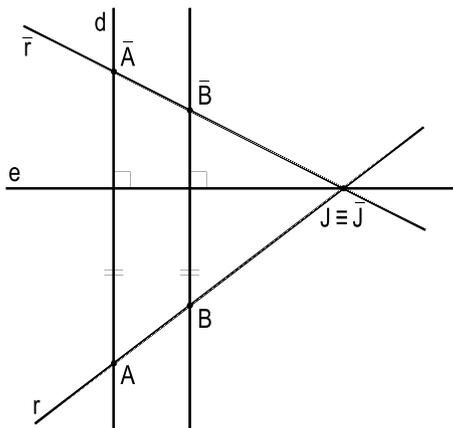


Figura 388

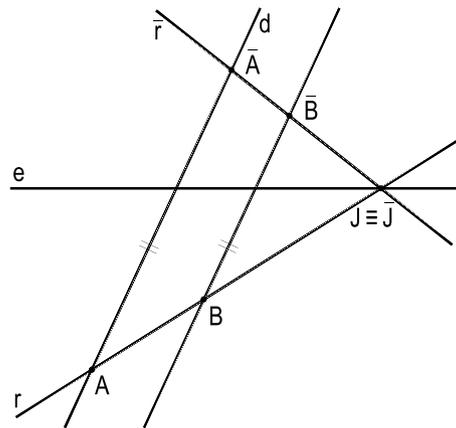


Figura 389

352 – Observações

- Um sistema de afinidade fica precisamente determinado pelo conhecimento do eixo e e de um par de pontos afins (A e \bar{A}). De fato, a partir desses dados, para obter o afim de um ponto qualquer B , basta traçar a reta BA e construir sua afim (que passará por \bar{A} e pelo ponto $J \equiv \bar{J}$ em que BA encontra o eixo) (Figura 390).

O ponto \bar{B} , procurado, pertencerá à reta $\bar{J}\bar{A}$ e à paralela a $A\bar{A}$ (direção de afinidade), traçada por B .

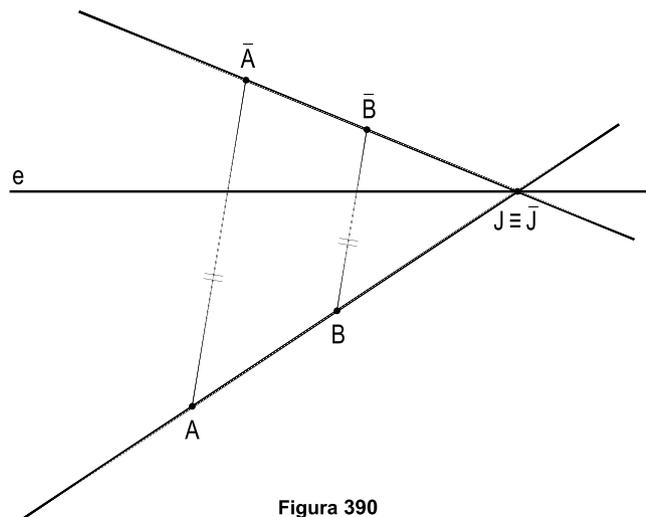


Figura 390

E, com construção igual, é possível transportar qualquer figura de um sistema ao outro.

2. Dadas duas curvas afins, a reta afim de uma tangente a uma delas é tangente à outra e os pontos de contato são afins (Figura 391).

De fato, essas duas tangentes são as posições limites ocupadas por duas secantes afins às duas curvas. E os pontos de contato (afins) são os de convergência dos pares afins dos pontos de secância.

3. De um modo mais geral, dadas duas curvas tangentes (Figura 392), suas transformadas, mediante uma afinidade qualquer, são outras duas curvas tangentes. E os pontos de contato são afins.

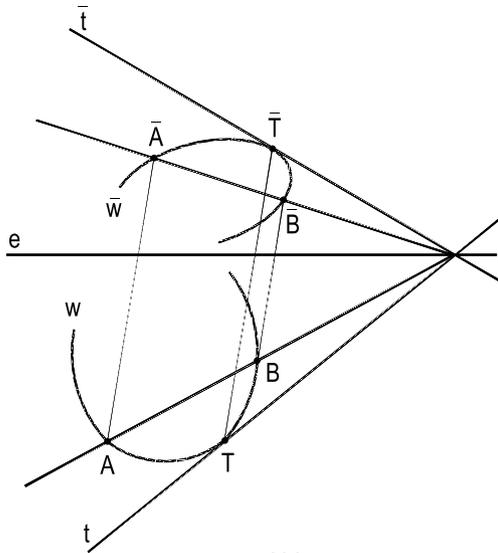


Figura 391

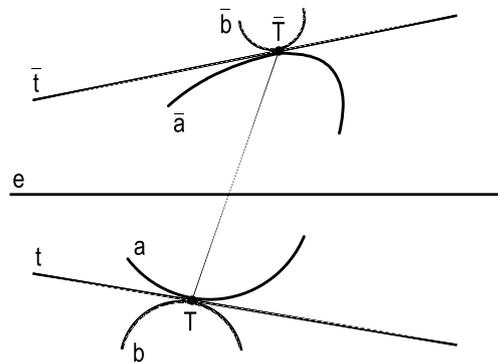


Figura 392

353 – Estudo da elipse como transformada, por afinidade ortogonal, do círculo

1. Na afinidade ortogonal a razão entre as distâncias dos pares de pontos afins ao eixo é constante.

De fato, considerando uma transformação por afinidade ortogonal entre dois sistemas de pontos A, B, C, D, ... e A-bar, B-bar, C-bar, D-bar, ... (Figura 393), os triângulos semelhantes JA A-bar e JB B-bar, IB B-bar e IC C-bar, LC C-bar e LD D-bar, etc. permitem escrever:

$$\frac{1A}{1A\bar{A}} = \frac{2B}{2B\bar{B}}, \frac{2B}{2B\bar{B}} = \frac{3C}{3C\bar{C}}, \frac{3C}{3C\bar{C}} = \frac{4D}{4D\bar{D}}, \text{ etc.}$$

Ou seja:

$$\frac{1A}{1A\bar{A}} = \frac{2B}{2B\bar{B}} = \frac{3C}{3C\bar{C}} = \frac{4D}{4D\bar{D}} = \dots = k, \text{ constante.}$$

A constante k é denominada razão dessa afinidade.

Essa constante k pode, naturalmente, ser maior, menor ou igual a um.

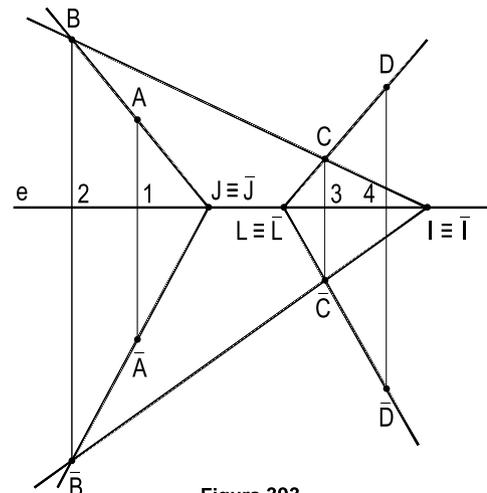


Figura 393

2. A transformada por afinidade ortogonal de um círculo, sendo o eixo da afinidade a reta suporte de um dos diâmetros do círculo, é uma elipse.

Porque a transformação implica em multiplicar as ordenadas dos pontos do círculo por uma constante. E, nessas condições, a figura transformada do círculo é uma elipse.

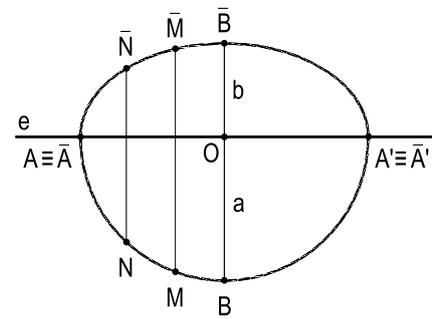


Figura 394

3. Conforme a transformação faça diminuir ou aumentar as distâncias dos pontos ao eixo, o eixo da afinidade servirá de suporte, respectivamente, ao eixo maior (Figura 394) ou menor (Figura 395) da elipse obtida.
4. Então, toda elipse pode ser considerada como transformada por afinidade ortogonal de seu círculo principal (Figura 394) ou de seu círculo auxiliar (Figura 395), funcionando como eixos, nessas afinidades, respectivamente, o eixo maior AA' ou o menor BB' da elipse.

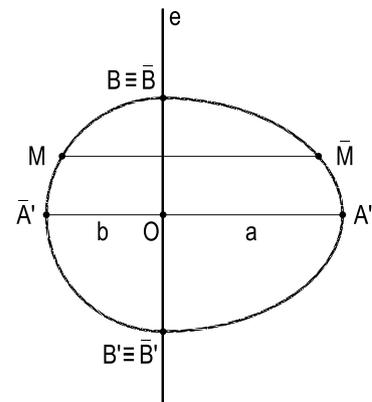


Figura 395

5. Construção da elipse a partir dos eixos.

Dados os dois eixos, AA' e BB' , para construir a elipse, basta traçar seu círculo principal (Figura 396) e estabelecer o sistema de afinidade ortogonal existente entre ele e a elipse – mediante o par de pontos afins B e \bar{B} e um par qualquer de retas afins r e \bar{r} – e arbitrar um número qualquer de pontos \bar{M} do círculo (Figura 396), os quais, transformados por aquela afinidade, fornecerão pontos M da elipse.

Naturalmente, seria equivalente operar com o círculo auxiliar da elipse.

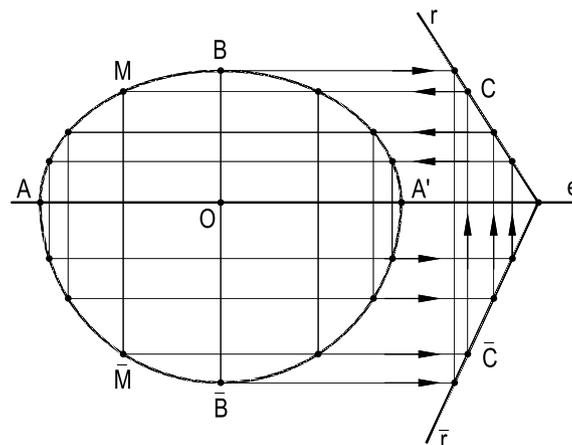


Figura 396

354 – Diâmetros da elipse

Por definição, diâmetro de uma curva, relativo a uma certa direção, é o lugar geométrico dos pontos médios das cordas que têm tal direção. É claro que, havendo tangente à curva num extremo de um diâmetro seu, por posição limite, tal tangente há de ser paralela às cordas relativas a esse diâmetro.

Todos os diâmetros da elipse são retilíneos.

De fato, consideremos um dos círculos afins da elipse de eixo real AA' (Figura 397) e o diâmetro \bar{d} , do círculo, relativo a uma direção genérica $\bar{\Delta}$.

Porque a transformação por afinidade conserva o paralelismo e a divisão proporcional e porque a figura afim de uma reta é outra reta, conclui-se que às cordas do círculo paralelas a $\bar{\Delta}$ corresponderão cordas paralelas da elipse e , ao diâmetro \bar{d} do círculo, um diâmetro d da elipse, necessariamente retilíneo (Figura 397).

Vale observar que:

1. Os diâmetros da elipse são segmentos de reta que têm por ponto médio comum o centro da curva.

Porque todos os diâmetros do círculo afim têm seus pontos médios coincidentes com o centro desse círculo.

2. Os eixos real e imaginário da elipse são, respectivamente, o maior e o menor diâmetros da curva.
3. Dois diâmetros simétricos em relação a um dos eixos da elipse são iguais. E reciprocamente.
4. As tangentes a uma elipse, nos extremos de um diâmetro, são paralelas às cordas que definem o diâmetro (Figura 398).

Porque também são assim suas afins no círculo afim da elipse.

5. Reciprocamente, os pontos de contato de duas tangentes paralelas são os extremos do diâmetro relativo à direção das tangentes.

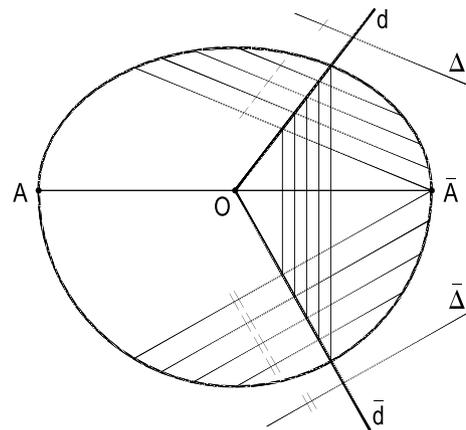


Figura 397

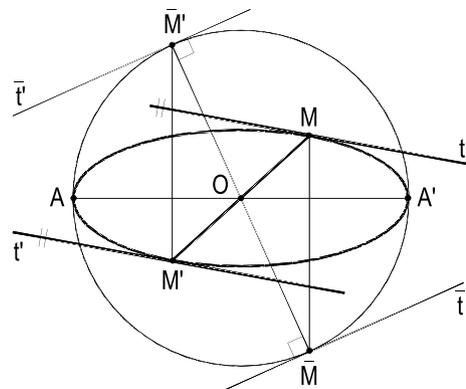


Figura 398

355 – Diâmetros conjugados da elipse

Por definição dois diâmetros retílineos de uma curva são ditos conjugados quando cada um é paralelo à direção que define o outro.

Para que dois diâmetros de um círculo sejam conjugados é necessário e suficiente que sejam perpendiculares, pois que, só assim, cada um deles contém os pontos médios das cordas paralelas ao outro.

Como o paralelismo se conserva na transformação por afinidade ortogonal, conclui-se que dois diâmetros conjugados de uma elipse são afins de dois diâmetros perpendiculares do círculo principal (Figura 399) ou do círculo auxiliar da elipse.

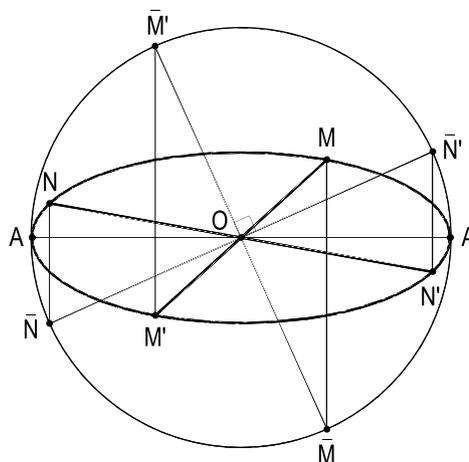


Figura 399

Assim, a todo diâmetro de uma elipse corresponde um conjugado.

Toda elipse possui, então, uma infinidade de pares de diâmetros conjugados.

Os próprios eixos são dois diâmetros conjugados da elipse.

356 – Determinação dos eixos, a partir de dois diâmetros conjugados, dados em grandeza e posição

Análise: Consideremos, de uma elipse de eixos AA' e BB' , os círculos principal e auxiliar, bem como dois semidiâmetros conjugados OM e ON (Figura 400), aos quais correspondem, por afinidade ortogonal, no círculo principal, os raios perpendiculares \overline{OM} e \overline{ON} (número 355).

Completemos o retângulo $L\overline{N}\overline{N}M_1$ e prolonguemos sua diagonal NM_1 , obtendo-se X e Y sobre os suportes dos eixos da elipse (Figura 400).

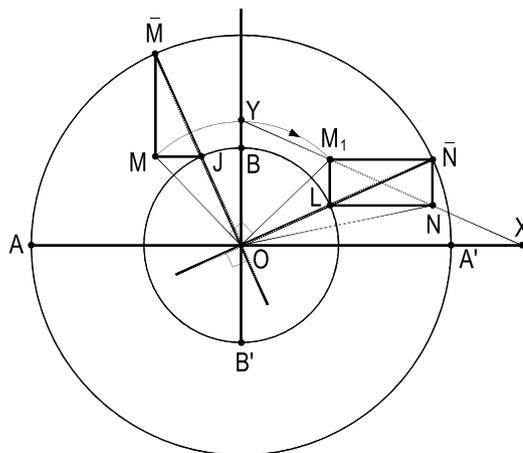


Figura 400

Os triângulos $J\overline{M}\overline{M}$, $L\overline{N}\overline{N}$ e $L\overline{M}_1\overline{N}$ são iguais. Os dois primeiros por terem lados respectivamente perpendiculares e hipotenusas iguais e os dois últimos por terem os catetos respectivamente paralelos e a hipotenusa comum.

Assim, porque são iguais os triângulos $J\overline{M\overline{M}}$ e $LM_1\overline{N}$ e porque a hipotenusa $L\overline{N}$ pode ser obtida por uma rotação de 90° de $J\overline{M}$, em torno de O (Figura 400), M_1 pode também ser considerado como proveniente de uma rotação de 90° de M , em torno do centro O da elipse.

Enfim, os trapézios isósceles $OLNX$ e OLM_1Y formados (Figura 400) fornecem:

$$XN = YM_1 = OL \quad \therefore \quad XN = YM_1 = b$$

$$XM_1 = YN = O\overline{N} \quad \therefore \quad XM_1 = YN = a$$

Assim, conhecidos dois diâmetros conjugados MM' e NN' de uma elipse, para determinar seus eixos, basta girar um daqueles diâmetros – em verdade, um semidiâmetro (OM , na Figura 401) de 90° – e determinar o ponto C , médio de M_1N , construindo-se, então, o círculo de diâmetro M_1N . Ligando-se O a C (Figura 401) obtém-se $L\overline{N}$. Os lados do retângulo $LN\overline{N}M_1$ fornecem as direções dos eixos da elipse e as distâncias OL e $O\overline{N}$ os valores dos semieixos da elipse.

357 – Construção do círculo por pontos – aplicações à elipse

Análise: Consideremos um círculo e um quadrado a ele circunscrito e apliquemos, sobre o lado QR e sobre o raio OM que lhe é perpendicular, dois segmentos QJ e OL iguais (Figura 402).

O ponto P , comum às retas AL e BJ , pertence ao círculo considerado.

De fato, os triângulos retângulos AOL e BQJ , iguais, tendo catetos respectivamente perpendiculares, têm, também, hipotenusas perpendiculares (Figura 402).

E, sendo reto o ângulo APB , seu vértice P é necessariamente pertencente ao círculo de diâmetro AB (número 128.2).

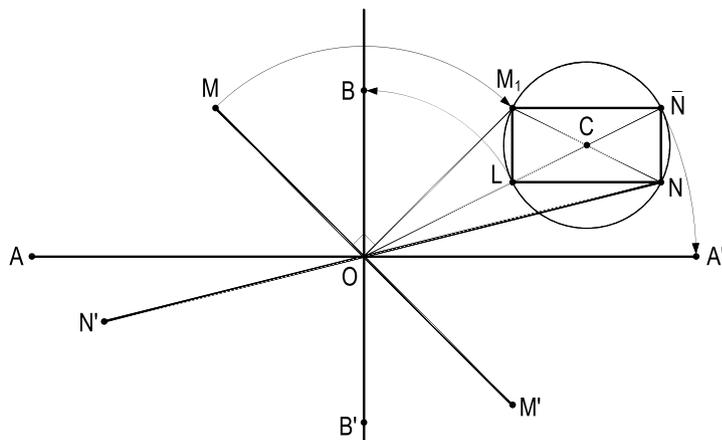


Figura 401

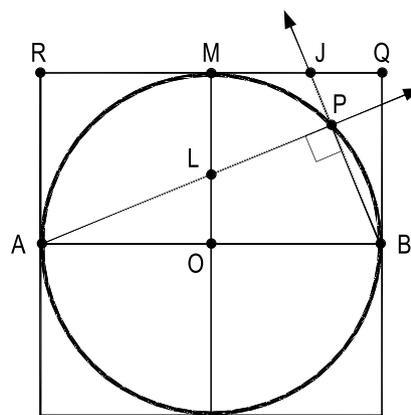


Figura 402

Construção: Resulta, imediatamente dessa propriedade, um processo cujo interesse é estritamente teórico, para a construção, por pontos, de um círculo de diâmetro AB.

Constrói-se o quadrado que tem por pontos médios de dois lados opostos aqueles pontos A e B e divide-se o raio OM, perpendicular ao diâmetro AB, e o segmento QM (Figura 403) em um mesmo número de partes iguais. No exemplo apresentado na Figura 403, escolhemos quatro partes iguais, quantidade, aliás, comumente utilizada.

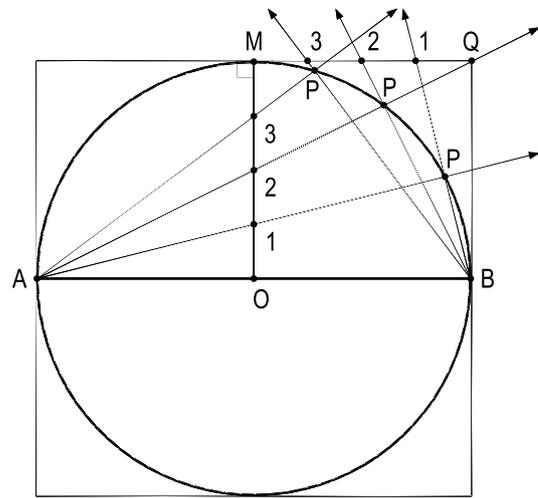


Figura 403

As retas que unem A e B aos pontos de divisão correspondentes dos segmentos OM e QM cortam-se, produzindo pontos P do círculo (Figura 403).

Aplicações: Mediante uma afinidade, ortogonal ou oblíqua, que tenha por eixo um diâmetro do círculo considerado, transforma-se o círculo em elipse e o quadrado em retângulo ou paralelogramo, respectivamente (Figuras 404 e 405).

E, porque a divisão de um segmento em partes iguais se conserva em qualquer afinidade, o processo apresentado para a construção do círculo é exatamente o mesmo a ser empregado para a construção da elipse da qual são dados os dois eixos AA' e BB' (Figura 404) ou dois diâmetros conjugados MM' e NN' (Figura 405).

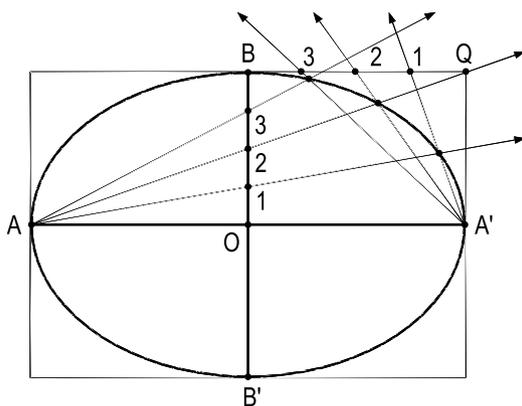


Figura 404

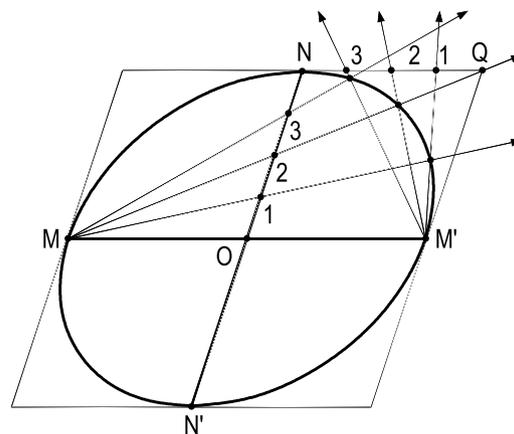


Figura 405

CAPÍTULO XVIII

HIPÉRBOLE

358 – Definições

Hipérbole é a curva plana cujos pontos possuem a mesma diferença, naturalmente não nula, de distâncias a dois pontos fixos de seu plano (Figura 406).

Os pontos fixos (F e F' , na Figura 406) são denominados focos da hipérbole e a distância entre eles distância focal.

Os segmentos formados por um ponto corrente da curva e cada um dos focos são os raios vetores relativos ao ponto considerado.

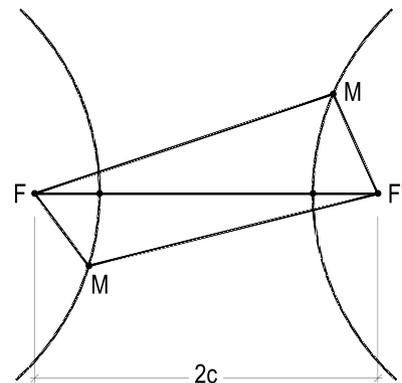


Figura 406

359 – Condição de existência

Designando por $2c$ e $2a$ a distância focal e o valor constante da diferença dos raios vetores dos pontos da hipérbole, para que exista a curva, isto é, para que existam os triângulos MFF' (Figura 406), é necessário e suficiente que:

$$FF' > MF - MF' \quad \therefore \quad \boxed{2c > 2a}$$

360 – Observações

Tal como a elipse, a hipérbole é uma curva contínua. Mas, ao contrário daquela, a hipérbole é aberta, pois um ponto corrente, desde que conserve constante o valor da diferença de seus raios vetores, pode se afastar indefinidamente dos focos.

Conforme se considere o ponto corrente M mais próximo de F' ou de F , respectivamente, pode-se escrever:

$$MF - MF' = 2a \quad \text{ou} \quad MF' - MF = 2a$$

Daí se concluir que a hipérbole consta de dois ramos distintos (Figura 406).

361 – Eixos e centro de simetria

Do próprio processo espontâneo de construção da hipérbole decorre a igualdade dos triângulos M_1FF' , M_2FF' , M_3FF' e M_4FF' (3º caso), e, então, a simetria de M_1 e M_4 e de M_2 e M_3 em relação à reta que contém os focos e de M_1 e M_2 e de M_3 e M_4 em relação à mediatriz do segmento FF' (Figura 407).

Pode-se, então, afirmar que:

1. A hipérbole possui dois eixos.

O eixo AA' (Figura 407) colinear com os focos é denominado real, transverso ou focal; o segundo eixo – mediatriz de FF' – não toca a curva, pois seus pontos equidistam dos focos, sendo denominado imaginário, não transverso ou não focal.

2. A hipérbole possui dois vértices e centro.

Os vértices são os pontos A e A' em que o eixo transverso encontra a curva (Figura 407); o centro é o ponto O comum aos dois eixos (médio de AA').

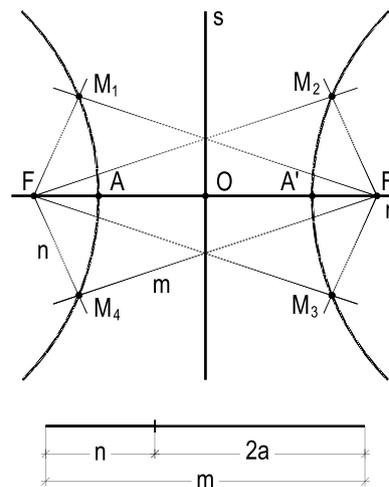


Figura 407

362 – Relações métricas

1. O segmento AA' que representa o eixo transverso é igual à diferença constante $2a$ dos raios vetores de todos os pontos da curva.

De fato, porque A' pertence à curva, podemos escrever: $FA' - A'F' = 2a$.

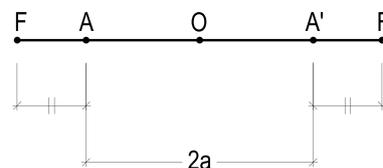


Figura 408

E como (Figura 408), $A'F' = FA$, vem $FA' - FA = 2a \quad \therefore \quad \boxed{AA' = 2a}$

2. Convenciona-se atribuir ao eixo não transverso um valor $2b$ representado por um segmento BB' . E de tal modo que os dois semieixos sejam os catetos de um triângulo retângulo de hipotenusa igual à semidistância focal.

Isto implica em que (Figura 409) o retângulo construído sobre os eixos AA' e BB' seja necessariamente inscritível no círculo que tem por diâmetro a distância focal FF' .

Naturalmente os extremos B e B' do segmento criado para representar o eixo imaginário não são vértices da hipérbole.

3. Relação entre os eixos e a distância focal.

O triângulo BOA (Figura 409) dá:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Tal relação também se escreve:

$$4c^2 = 4a^2 + 4b^2 \quad \therefore (2c)^2 = (2a)^2 + (2b)^2$$

$$\therefore \boxed{FF'^2 = AA'^2 + BB'^2}$$

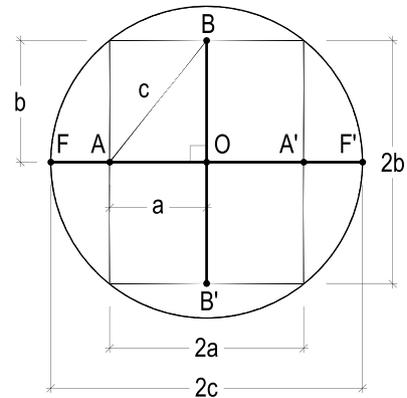


Figura 409

4. Ao contrário do que ocorre com a elipse, para a hipérbole, o eixo real não é, necessariamente, maior que o imaginário. E, porque AA' pode ser maior, igual ou menor que BB' , não se usam, para a hipérbole, as denominações eixo maior e eixo menor.

5. Corda focal – parâmetro.

As definições são as mesmas apresentadas para a elipse.

Sendo $MM' = c_f$ uma das cordas focais, para o cálculo do parâmetro p , consideremos o triângulo retângulo MFF' (Figura 410) que fornece:

$$MF^2 = FF'^2 + MF'^2 \quad (1)$$

E, porque M pertence à curva:

$$MF - MF' = 2a \quad \therefore MF - p = 2a \quad \therefore MF = 2a + p$$

Assim, a relação (1) fica:

$$(2a + p)^2 = (2c)^2 + p^2 \quad \therefore 4a^2 + p^2 + 4ap = 4c^2 + p^2$$

$$\therefore 4a^2 + 4ap = 4c^2 \quad \therefore a^2 + ap = c^2$$

$$\therefore ap = c^2 - a^2 = b^2 \quad \therefore \boxed{p = \frac{b^2}{a}}$$

E, duplicando,

$$\boxed{c_f = \frac{2b^2}{a}}$$

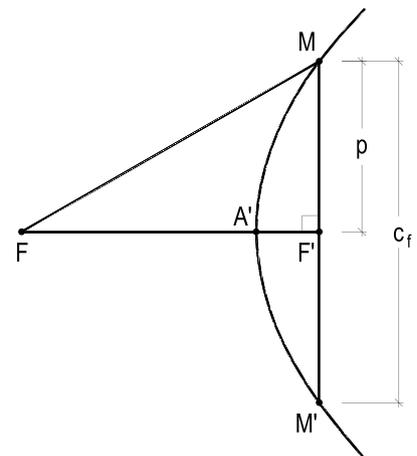


Figura 410

6. Excentricidade.

Excentricidade (e) de uma hipérbole é a razão entre a semidistância focal e o semi-eixo real.

A excentricidade (e) de uma hipérbole se calcula por uma das seguintes expressões:

$$e = \frac{c}{a}$$

$$\text{ou } e = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{a^2}} \quad \therefore$$

$$e = \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2}$$

7. A excentricidade da hipérbole é necessariamente maior que um.

De fato, porque $c > a$ (número 359), vem:

$$\frac{c}{a} > 1 \quad \therefore \quad e > 1$$

8. Quando, mantido fixo o valor $2c$ da distância focal, faz-se tender a um a excentricidade, a tende a c e, então, os vértices A e A' aproximam-se, respectivamente, dos focos F e F' . Assim, b tende a zero e a hipérbole degenera segundo duas semirretas de sentidos contrários, exteriores uma à outra, com origens em F e F' , tendo por suporte comum a reta FF' .

9. Quando, mantidos fixos os focos, faz-se crescer indefinidamente o valor da excentricidade, a tende a zero e, conseqüentemente, os vértices A e A' aproximam-se simultaneamente do ponto médio de FF' . Assim, a hipérbole degenera segundo uma reta: a própria mediatriz do segmento FF' .

10. A excentricidade de uma hipérbole pode ser expressa em função de seu eixo transverso e de seu parâmetro (ou de sua corda focal). De fato (números 362.5 e 326.6):

$$e = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a} \cdot \frac{1}{a}} \quad \therefore \quad e = \sqrt{1 + \frac{p}{a}}$$

$$e = \sqrt{1 + \frac{p}{a}} = \sqrt{1 + \frac{2p}{2a}} \quad \therefore \quad e = \sqrt{1 + \frac{c_f}{2a}}$$

363 – Hipérbole equilátera

Por definição, uma hipérbole é dita equilátera quando são iguais seus dois eixos.

Decorre, então, que, para toda hipérbole equilátera:

1. A razão entre a distância focal e qualquer um dos dois eixos é constante e igual a $\sqrt{2}$.

De fato (número 362.3), se os eixos são iguais, temos:

$$c^2 = 2a^2 = 2b^2 \quad \therefore \quad \boxed{c = a\sqrt{2} = b\sqrt{2}}$$

2. O parâmetro é igual aos dois semieixos (Figura 411). De fato (número 362.5), se $a = b$,

$$p = \frac{b^2}{a} = \frac{a^2}{a} \quad \therefore \quad \boxed{p = a = b}$$

3. A corda focal é igual aos eixos.

$$\boxed{c_f = 2a = 2b}$$

4. A excentricidade é igual a $\sqrt{2}$.

$$e = \frac{c}{a} = \frac{a\sqrt{2}}{a} \quad \therefore \quad \boxed{e = \sqrt{2}}$$

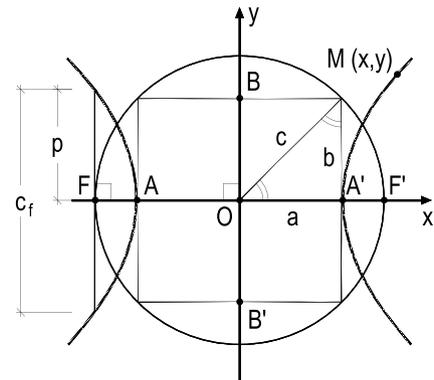


Figura 411

364 – Teorema

O lugar geométrico dos pontos M, para os quais a diferença $(MF - MF')$ das distâncias a dois pontos fixos F e F' é constante, é um ramo da hipérbole de focos F e F' e eixo transversal igual àquela constante.

Demonstração: Seja $2a$ o valor constante da diferença $(MF - MF')$. Consideremos, da hipérbole de focos F e F' e eixo transversal $2a$, o ramo relativo a F', para o qual $MF - MF' = 2a$ (1)

Sejam J e L dois pontos quaisquer não pertencentes à curva (Figura 412), temos:

$$JF < MF + JM \quad \therefore \quad JF - JF' < MF + JM - JF' \quad \therefore \quad JF - JF' < MF - (JF' - JM)$$

$$\therefore \quad JF - JF' < MF - MF' \quad \therefore \quad JF - JF' < 2a \quad (2)$$

$$LF' < LM' + M'F' \quad \therefore \quad LF' - LF < LM' + M'F' - LF$$

Multiplicando os dois membros por (-1) , vem:

$$LF - LF' > (LF - LM') - M'F'$$

$$\therefore \quad LF - LF' > M'F - M'F' \quad \therefore \quad LF - LF' > 2a \quad (3)$$

As relações (1), (2) e (3) demonstram o teorema.

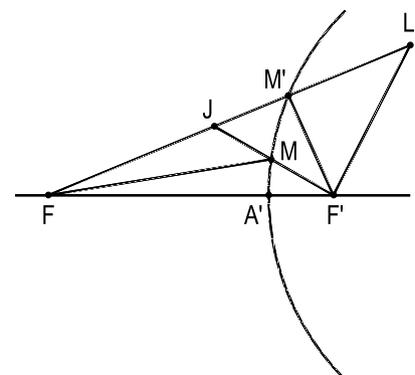


Figura 412

365 – Escólios

1. Uma hipérbole de focos F e F' e eixo transversal $2a$ é o lugar geométrico dos pontos, para os quais as diferenças das distâncias a F e a F' têm módulo constante e igual a $2a$.
2. A hipérbole divide seu plano em duas regiões: a exterior (entre os dois ramos), à qual pertencem os pontos cujas diferenças de distâncias aos focos são menores que o valor do eixo real, e a interna, composta pelas duas porções situadas nas concavidades de cada um dos ramos, à qual pertencem os pontos cujas diferenças de distâncias aos focos são, em módulo, maiores que o eixo real da curva.

366 – Definições

Círculos diretores de uma hipérbole são os que têm por centros cada um dos focos e raios iguais ao eixo real.

Círculo principal de uma hipérbole é o que tem por diâmetro o eixo real da curva.

367 – Teorema

A bissetriz do ângulo interno formado pelos raios vetores relativos a um ponto qualquer da hipérbole é tangente à curva nesse ponto.

Demonstração: Sejam M um ponto qualquer de uma hipérbole de focos F e F' , de eixo transversal $2a$, e r a bissetriz do ângulo interno formado pelos raios vetores de M (Figura 413).

Sendo $F'S$ perpendicular a r , o triângulo isósceles $MF'S$ garante a simetria de F' e S , em relação a r . Assim, para todo ponto J de r , mesmo que não coincidente com M (Figura 413), vale escrever:

$$JS = JF'$$

$$\text{E, no triângulo } JFS: JF - JS < SF.$$

$$\text{ou: } JF - JF' < MF - MS$$

$$\text{e como } MS = MF',$$

$$JF - JF' < MF - MF'$$

$$\text{ou: } JF - JF' < 2a$$

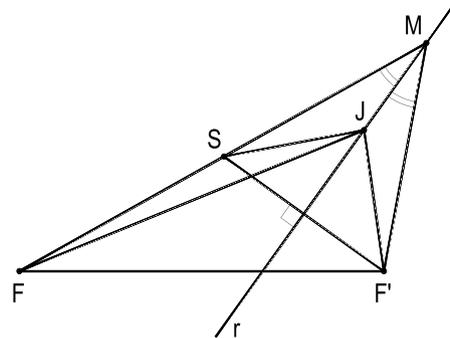


Figura 413

Assim, todos os pontos J de r , exceto M , por possuírem diferenças de distâncias aos focos menores que o valor do eixo real, são exteriores à curva (número 365.2). E, então, a bissetriz interna r , tendo apenas em comum com a curva o ponto M , e todos os seus demais pontos no exterior da curva, é tangente a ela, em M .

368 – Corolário

A bissetriz do ângulo externo formado pelos raios vetores relativos a um ponto corrente da hipérbole é normal à curva, nesse ponto.

De fato, basta ver que essa bissetriz é perpendicular à interna.

369 – Propriedades

1. Os pontos da interseção da tangente e da normal relativos a um ponto corrente com a reta suporte do eixo real formam, com os focos, uma divisão harmônica (Figura 414).

Porque tais pontos são os pés das bissetrizes, interna e externa, relativas ao vértice M do triângulo $MF'F$ (número 166).

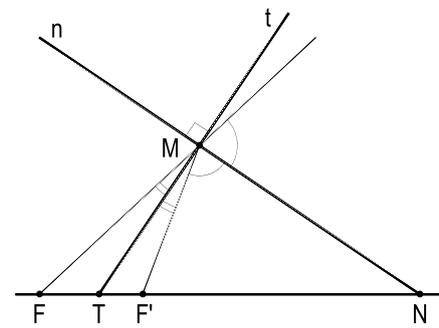


Figura 414

2. As tangentes, nos vértices, são perpendiculares ao eixo real.
3. Um dos focos, o ponto de contato de uma tangente qualquer, e o simétrico do outro foco em relação a essa tangente são, sempre, colineares (Figura 413).
4. O lugar geométrico dos simétricos de um foco em relação às tangentes é o círculo diretor relativo ao outro foco.

De fato, sendo r a tangente num ponto M qualquer da hipérbole de focos F e F' e eixo real $2a$ (Figura 415) e S o simétrico de F' em relação a r , o triângulo isósceles $MF'S$ dá:

$$MF' = MS$$

E como $MF - MF' = 2a$, vem:

$$MF - MS = 2a \quad \therefore \quad FS = 2a$$

Assim, o lugar geométrico dos simétricos de um foco em relação às tangentes é o círculo diretor relativo ao outro foco.

De um modo completo, tem-se, então, que o lugar geométrico dos simétricos dos focos em relação às tangentes à hipérbole consiste no par de círculos diretores da curva.

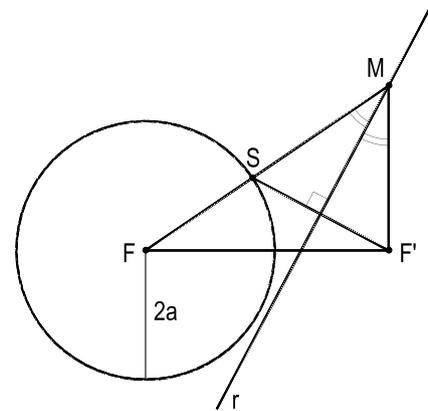


Figura 415

5. O lugar geométrico dos pontos equidistantes de um círculo e de um ponto fixo exterior ao círculo é um dos ramos de uma hipérbole, para a qual o ponto fixo é um dos focos e o círculo é o diretor relativo ao outro foco.

Sendo $(F, 2a)$ o círculo, F' o ponto fixo exterior e M um ponto equidistante dos dois (Figura 415), $MS = MF'$.

Mas como $MF - MS = FS = 2a$, vem $MF - MF' = 2a$.

Assim, M descreve um dos ramos da hipérbole de focos F e F' e eixo real $2a$ – o relativo ao foco F . O círculo considerado é, então, um dos diretores da hipérbole.

6. O lugar geométrico dos centros dos círculos pertencentes a um ponto fixo, exterior a um círculo dado, e tangentes a este círculo é um ramo da hipérbole para o qual o ponto fixo é um dos focos e o círculo dado é o diretor relativo ao outro foco.

Sejam $(F, 2a)$ o círculo e F' o ponto fixo dados. Se M é o centro de um círculo, pertencente ao ponto F' e tangente exteriormente ao círculo dado (Figura 416), vale escrever: $MS = MF'$.

Logo, $MF - MS = 2a \quad \therefore \quad MF - MF' = 2a$

Isto significa que o lugar dos centros M dos círculos pertencentes a F' e tangentes exteriormente ao círculo $(F, 2a)$ é o ramo da hipérbole de focos F e F' , relativo ao foco F' .

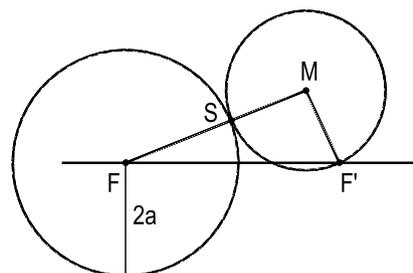


Figura 416

7. Sendo, agora, N o centro de um círculo pertencente a F' e tangente interiormente ao círculo $(F, 2a)$ dado (Figura 417), temos: $NS = NF'$

Logo, $NS - NF = 2a \quad \therefore \quad NF' - NF = 2a$

Por isso que o lugar dos centros N dos círculos pertencentes a F' e tangentes interiormente ao círculo $(F, 2a)$ é o ramo da hipérbole de focos F e F' , relativo ao foco F .

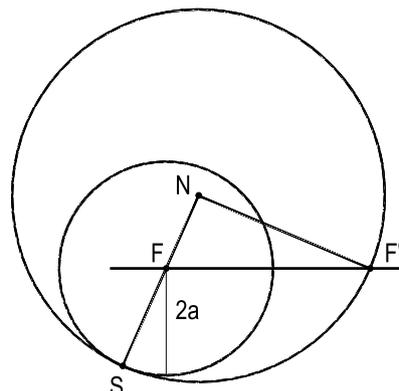


Figura 417

8. E, como o círculo dado é um dos diretores da hipérbole obtida, conclui-se que o lugar geométrico dos centros dos círculos pertencentes ao ponto F' e tangentes exterior ou interiormente ao círculo $(F, 2a)$ é a hipérbole, para a qual o círculo e o ponto dados são um diretor e um foco.

370 – Teorema de La Hire

O lugar geométrico das projeções ortogonais dos focos de uma hipérbole sobre as tangentes é o círculo principal da curva.

Demonstração: Seja t uma tangente qualquer à hipérbole de focos F e F' , centro O e eixo real $2a$ (Figura 418).

Como o simétrico S' do foco F' em relação a t pertence ao círculo diretor relativo a F (número 369.4), vem:

$$FS' = 2a.$$

E, porque o ponto P , projeção ortogonal de F' sobre t , é o ponto médio do segmento $F'S'$, o triângulo $FF'S'$ fornece:

$$OP = \frac{1}{2} \cdot FS' \quad \therefore \quad OP = \frac{1}{2} \cdot 2a \quad \therefore \quad OP = a$$

E, se o ponto P , projeção ortogonal do foco F' sobre uma tangente qualquer t , dista a do centro O da curva, conclui-se que o lugar geométrico dos pontos P é o círculo (O, a) , principal da hipérbole.

Tudo se passa da mesma forma para os pontos Q , projeções ortogonais de outro foco F sobre as tangentes à hipérbole (Figura 418).

Então, o lugar geométrico das projeções ortogonais dos focos de uma hipérbole sobre as tangentes é o círculo principal da curva, como se queria demonstrar.

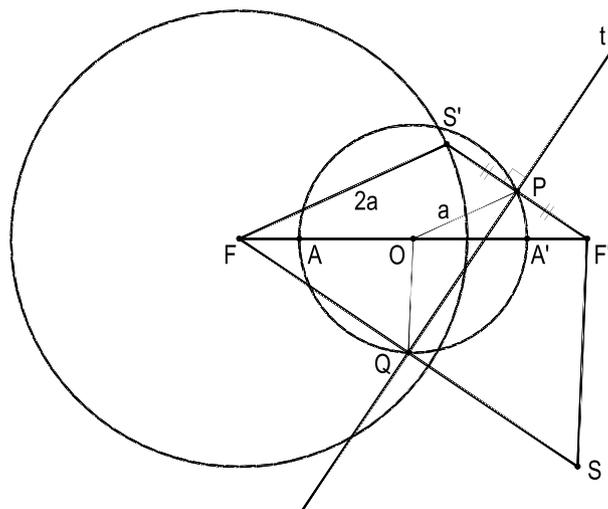


Figura 418

371 – Teoremas de Poncelet

1. As tangentes traçadas por um ponto exterior a uma hipérbole são duas cevianas isogonais do triângulo formado por esse ponto e pelos focos da hipérbole.
2. A reta que une um foco de uma hipérbole a um ponto exterior é a bissetriz do ângulo externo formado pelas retas que unem aquele foco aos pontos de contato das duas tangentes traçadas pelo ponto exterior.

Demonstração: Consideremos as tangentes t e t' de um ponto qualquer J a uma hipérbole de focos F e F' e eixo transverso $2a$. Sendo S e S' os simétricos de F e de F' em relação a t e a t' , respectivamente (Figura 419), temos $JS = JF$ (1) e $JS' = JF'$ (2).

E, como FS' e $F'S$ são raios de cada um dos círculos diretores da hipérbole, podemos escrever: $FS' = F'S$ (3).

Das relações (1), (2) e (3), conclui-se a igualdade dos triângulos JFS' e $JF'S$ (3º caso) e, conseqüentemente, a igualdade $\widehat{FJS'} = \widehat{S'JF'}$ dos ângulos opostos aos lados iguais FS' e $F'S$ (Figura 419).

Então, $\widehat{FJS'} = \widehat{S'JF'} \quad \therefore \quad \alpha + \beta - \gamma = \gamma + \beta - \alpha$

$\therefore \quad \alpha - \gamma = \gamma - \alpha \quad \therefore \quad 2\alpha = 2\gamma \quad \therefore \quad \alpha = \gamma,$

relação que demonstra o primeiro teorema.

Incluamos agora os pontos de contato das tangentes t e t' . Sabe-se que o ponto M' de contato da tangente t' pertence à reta formada pelo foco F e pelo simétrico S' do outro foco F' em relação àquela tangente (número 369.3).

E que, analogamente, o ponto M de contato da tangente t pertence à reta $F'S$ (Figura 420).

Os triângulos iguais JFS' e $JF'S$ permitem (número 371.1) escrever: $\theta = \varphi$ (1)

E, da simetria dos pontos S' e F' em relação à tangente t' , ou seja, da igualdade dos triângulos $JS'M'$ e $JF'M'$ (Figura 420), vem: $\theta = \rho$ (2)

De (1) e (2): $\varphi = \rho$

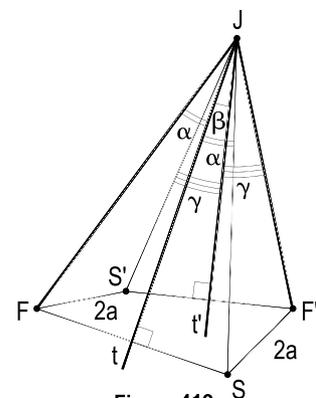


Figura 419

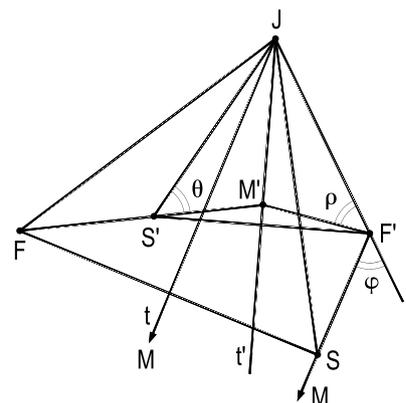


Figura 420

Assim, a reta formada pelo foco F' e pelo ponto J , comum às tangentes t e t' à hipérbole, é a bissetriz do ângulo externo formado pelas retas que unem F' aos pontos de contato daquelas duas tangentes, como se queria demonstrar.

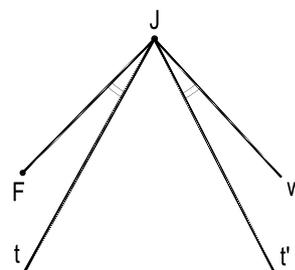


Figura 421

372 – Corolário do primeiro teorema de Poncelet

Dados um ângulo $t\hat{J}t'$ e um ponto F a ele exterior, o lugar geométrico dos focos F' das hipérboles que têm um foco fixo F e que são tangentes a t e a t' é a semirreta Jw (exceto, naturalmente, o ponto J), isogonal de JF em relação aos lados do ângulo dado (Figura 421).

373 – Teorema

O lugar geométrico dos pontos dos quais se pode traçar tangentes perpendiculares a uma hipérbole é o círculo concêntrico com ela, tendo raio igual ao segundo cateto de um triângulo retângulo cuja hipotenusa e cujo primeiro cateto são, respectivamente, iguais aos semieixos real e imaginário.

Demonstração: Seja a hipérbole de focos F e F' , eixos $2a$ e $2b$ e distância focal $2c$.

Seja J um ponto do lugar procurado, isto é, tal que as tangentes t e t' de J à hipérbole sejam perpendiculares e sendo S' o simétrico do foco F' em relação à tangente t' (Figura 422), o primeiro teorema de Poncelet fornece: $\alpha = \beta$ (1)

E, da simetria existente entre F' e S' em relação a t' , vem:

$$\beta = \gamma \quad (2) \quad \text{e} \quad JS' = JF' \quad (3)$$

$$\text{Comparando as relações (1) e (2), vem: } \gamma = \alpha \quad (4)$$

E como, por hipótese, $\gamma + \rho = 90^\circ$, a relação (4) permite escrever: $\alpha + \rho = 90^\circ$.

Assim, o triângulo JFS' é retângulo em J (Figura 422). E, porque sua hipotenusa FS' é um raio do círculo diretor relativo ao foco F , temos:

$$JF^2 + JS'^2 = (2a)^2$$

$$\text{Aplicando a relação (3), vem: } JF^2 + JF'^2 = (2a)^2.$$

Mas então, se a soma dos quadrados das distâncias do ponto J em estudo a dois pontos fixos F e F' é constante, o lugar desses pontos é um círculo que tem por centro o ponto O , médio de FF' (centro da hipérbole), e raio OJ (número 204.1) dado pela expressão:

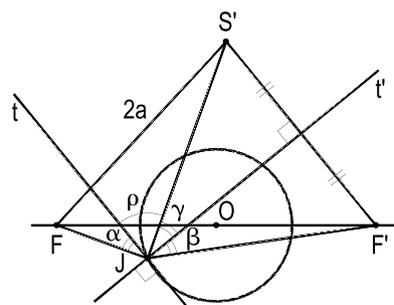


Figura 422

$$OJ = \frac{1}{2} \sqrt{2(JF^2 + JF'^2) - FF'^2}$$

$$OJ^2 = \frac{1}{4} [2(JF^2 + JF'^2) - FF'^2] = \frac{1}{4} [2(2a)^2 - (2c)^2] = \frac{1}{4} (8a^2 - 4c^2)$$

$$OJ^2 = \frac{4}{4} (2a^2 - c^2) = 2a^2 - c^2 = a^2 - (c^2 - a^2)$$

Mas como (número 362.3), $c^2 - a^2 = b^2$, vem: $OJ^2 = a^2 - b^2$

Assim, o lugar geométrico dos pontos dos quais se pode traçar tangentes perpendiculares a uma hipérbole é o círculo concêntrico com ela, tendo raio igual ao segundo cateto de um triângulo retângulo cuja hipotenusa e cujo primeiro cateto são respectivamente iguais aos semieixos real e imaginário, tal como se queria demonstrar.

374 – Observações

1. O círculo, lugar geométrico dos pontos dos quais se pode traçar tangentes perpendiculares a uma hipérbole, instituído no teorema anterior, denomina-se círculo órtico da hipérbole ou, em homenagem a seu criador, círculo de Monge da hipérbole.
2. Naturalmente só existe o círculo órtico, acima instituído, quando a hipérbole tem eixo real $2a$ maior que o imaginário $2b$.

De fato, para que exista o círculo é preciso que:

$$r > 0 \quad \therefore \sqrt{a^2 - b^2} > 0 \quad \therefore a > b \quad \therefore \boxed{2a > 2b}$$

3. No caso particular da hipérbole equilátera (número 363), temos:

$$a = b \quad \therefore r = 0$$

Isto significa que apenas o centro da hipérbole equilátera é capaz de enviar, à curva, tangentes perpendiculares.

375 – Definição

Assíntota de uma curva é a tangente a ela num ponto impróprio. Assim, quando uma reta tangente a uma curva tem seu ponto de contato rejeitado ao infinito, essa tangente é assíntota da curva (Figura 423).

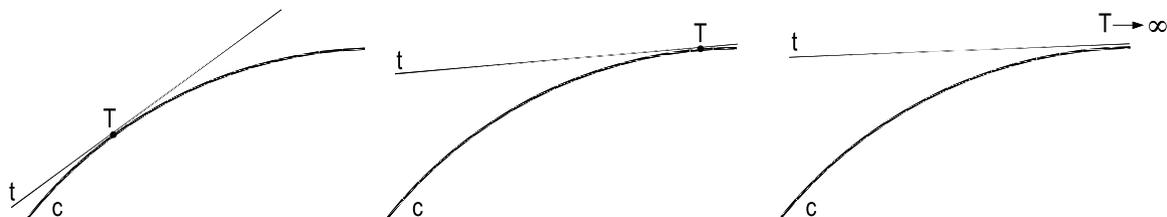


Figura 423

376 – Teorema

A hipérbole possui duas assíntotas.

Demonstração: Para efeito de análise, consideremos uma tangente genérica t a uma hipérbole de focos F e F' e eixo transverso $2a$. Sabe-se que o simétrico S do foco F' em relação àquela tangente pertence ao círculo diretor $(F, 2a)$ relativo ao outro foco (número 369.4) e que o ponto de contato M daquela tangente é (número 369.3) o ponto comum a ela e à reta FS (Figura 424).

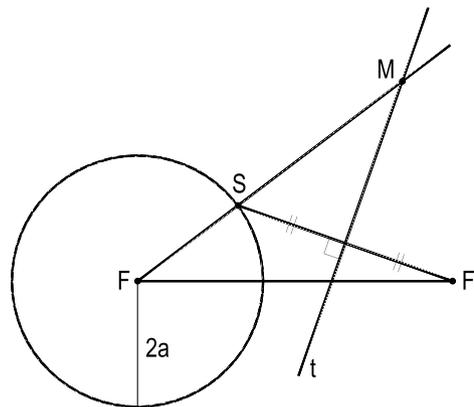


Figura 424

Para que exista assíntota à hipérbole é necessário e suficiente que o ponto M seja impróprio, o que só se conseguirá se o ângulo FSF' for reto.

Pois, para examinar a existência de um ponto do círculo diretor $(F, 2a)$ que aviste o segmento FF' sob um ângulo reto, tracemos o círculo de diâmetro FF' , arco capaz de 90° para o segmento FF' (Figura 425).

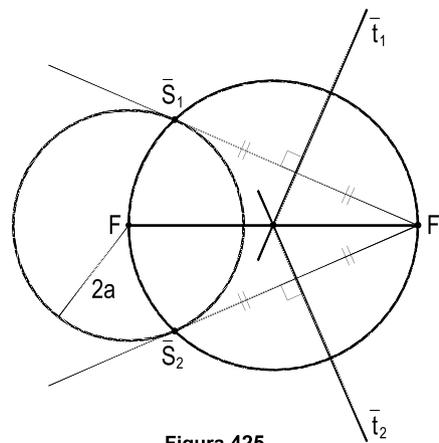


Figura 425

Porque F' é necessariamente exterior ao círculo diretor $(F, 2a)$, os dois círculos considerados são secantes (Figura 425), existindo, pois, dois pontos \bar{S}_1 e \bar{S}_2 , segundo a condição imposta.

Consequentemente, existem duas (e apenas duas) assíntotas: as mediatrizes \bar{t}_1 e \bar{t}_2 dos segmentos $F'\bar{S}_1$ e $F'\bar{S}_2$ (Figura 425).

377 – Observações

1. Os simétricos \bar{S}_1 e \bar{S}_2 do foco F' em relação às assíntotas (Figura 425) são os pontos de contato das tangentes traçadas de F' ao círculo diretor relativo ao foco F .
2. Os pontos pertencentes ao menor arco $\bar{S}_1 \bar{S}_2$ do círculo diretor de centro F (Figura 425) são simétricos de F' em relação às tangentes ao ramo relativo ao foco F' ; os pontos pertencentes ao maior arco $\bar{S}_1 \bar{S}_2$ daquele círculo são simétricos de F' em relação às tangentes ao ramo relativo ao foco F .

378 – Propriedades

1. As assíntotas passam pelo centro da hipérbole.

Porque são mediatrizes de duas cordas $F'\bar{S}_1$ e $F'\bar{S}_2$ do círculo, cujo diâmetro é o segmento FF' (Figura 426).

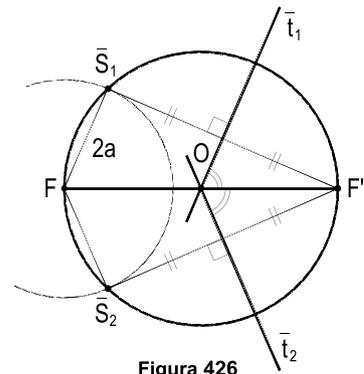


Figura 426

2. Os eixos da hipérbole pertencem às bissetrizes dos ângulos formados pelas assíntotas, pois (Figura 426) as assíntotas são simétricas em relação ao eixo transversal e contêm o centro da hipérbole.

3. A distância de um foco a uma assíntota é igual ao semi-eixo imaginário, pois os triângulos retângulos $F'OP'$ e $F'F\bar{S}_1$ são semelhantes na razão $(\frac{1}{2})$ (Figura 427).

Assim, como $OF' = c$ e $OP' = a$ (número 370),

temos $F'P' = b$

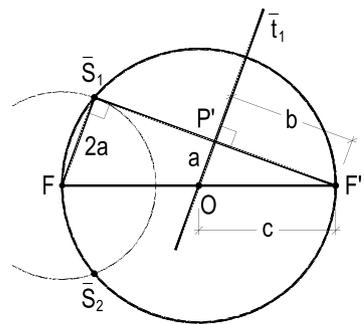


Figura 427

4. As assíntotas são os suportes das diagonais do retângulo construído sobre os eixos da hipérbole.

Sendo α os ângulos que as assíntotas formam com o eixo real (Figura 428), o triângulo FOP dá:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{b}{a} \quad (1)$$

Sendo β o ângulo que as diagonais do retângulo $CDD'C'$ (construído sobre os eixos) formam com o eixo real (Figura 429), o triângulo OAC dá:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{b}{a} \quad (2)$$

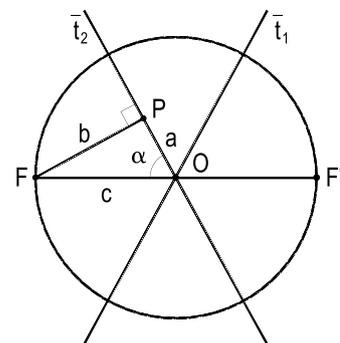


Figura 428

Comparando (1) e (2), vem $\alpha = \beta$, o que assegura a propriedade.

5. O cosseno do ângulo que a assíntota forma com o eixo real é igual ao inverso da excentricidade da hipérbole.

De fato, temos (Figura 429):

$$\cos \beta = \frac{a}{c} \quad \therefore \quad \boxed{\cos \beta = \frac{1}{e}}$$

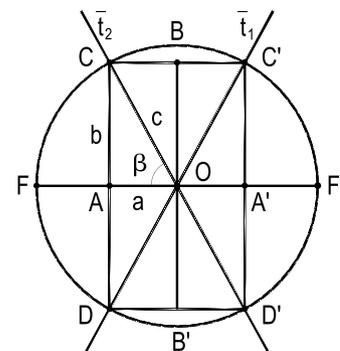


Figura 429

379 – Observação

Todas as propriedades apresentadas para as tangentes à hipérbole são, evidentemente, válidas para as assíntotas.

Assim, por exemplo, vimos que o simétrico de um foco em relação a uma assíntota pertence ao círculo diretor relativo ao outro foco e que as projeções ortogonais dos focos sobre as assíntotas pertencem (Figura 430) ao círculo principal da hipérbole.

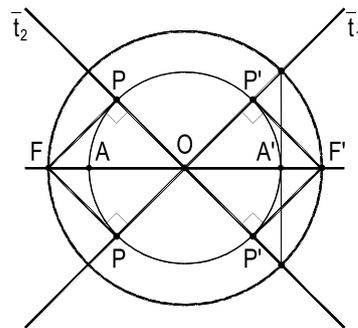


Figura 430

380 – Hipérbole equilátera

Do que foi visto resultam, para a hipérbole equilátera, as seguintes propriedades (Figura 431):

1. As assíntotas são perpendiculares entre si, formando 45° com os dois eixos da hipérbole.
2. As distâncias dos focos às assíntotas são iguais aos semi-eixos (iguais) da hipérbole.

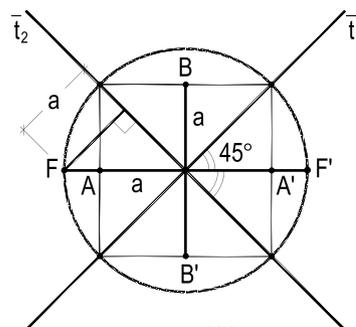


Figura 431

381 – Hipérboles conjugadas

Por definição, duas hipérboles são ditas conjugadas quando o eixo real de uma é o imaginário da outra, e reciprocamente (Figura 432).

É claro, então, que duas hipérboles conjugadas possuem as mesmas assíntotas e a mesma distância focal. E mais, os focos de uma das hipérboles podem ser considerados como resultantes de uma rotação de 90° , em torno do centro comum, dos focos da outra (Figura 432).

Como caso particular notável, vale observar que, dada uma hipérbole equilátera, a que lhe é conjugada é também equilátera e igual à dada, podendo ser considerada como proveniente da rotação de 90° da primeira, em torno do centro comum às duas (Figura 433).

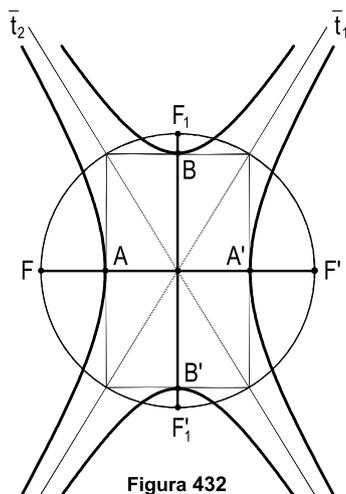


Figura 432

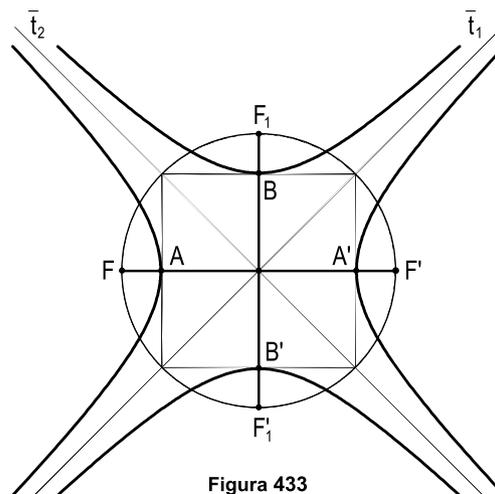


Figura 433

382 – Teorema

Para toda hipérbole, os segmentos formados sobre uma reta paralela a um dos eixos entre um ponto corrente e as assíntotas têm por média geométrica o semieixo considerado.

Demonstração: Analisemos uma hipérbole referida a um sistema cartesiano em que os eixos da curva sejam os próprios coordenados, os focos pertencendo ao das abscissas e, por um ponto M qualquer da curva, tracemos as paralelas r e s , respectivamente aos eixos real e imaginário, obtendo, sobre as assíntotas, respectivamente, os pontos P e Q (Figura 434) e K e L (Figura 435).

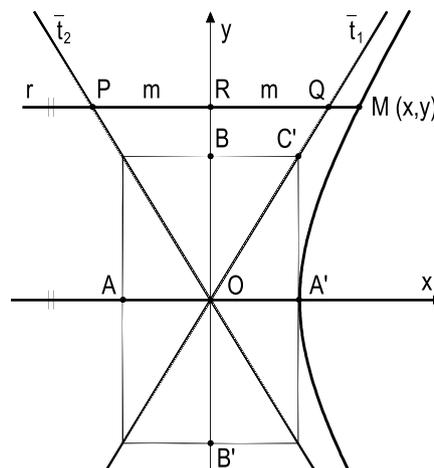


Figura 434

Deseja-se instituir as relações $MP \cdot MQ = a^2$ e $MK \cdot ML = b^2$.

Façamos $PR = RQ = m$ (Figura 434) e $KJ = JL = n$ (Figura 435).

Os triângulos ORQ (Figura 434) e OJK (Figura 435), semelhantes a OBC' , fornecem:

$$\frac{m}{y} = \frac{a}{b} \quad \therefore m = \frac{ay}{b}$$

$$\frac{n}{x} = \frac{b}{a} \quad \therefore n = \frac{bx}{a}$$

Assim,

$$MP \cdot MQ = (x + m)(x - m) = x^2 - m^2$$

$$MK \cdot ML = (n - y)(n + y) = n^2 - y^2$$

$$MP \cdot MQ = x^2 - \left(\frac{ay}{b}\right)^2 = \frac{b^2 x^2 - a^2 y^2}{b^2}$$

$$MK \cdot ML = \left(\frac{bx}{a}\right)^2 - y^2 = \frac{b^2 x^2 - a^2 y^2}{a^2}$$

Mas, como $b^2 x^2 - a^2 y^2 = a^2 b^2$,

$$\text{chegamos a: } MP \cdot MQ = \frac{a^2 b^2}{b^2} \quad \therefore \boxed{MP \cdot MQ = a^2}$$

$$MK \cdot ML = \frac{a^2 b^2}{a^2} \quad \therefore \boxed{MK \cdot ML = b^2}$$

Então, os segmentos formados...

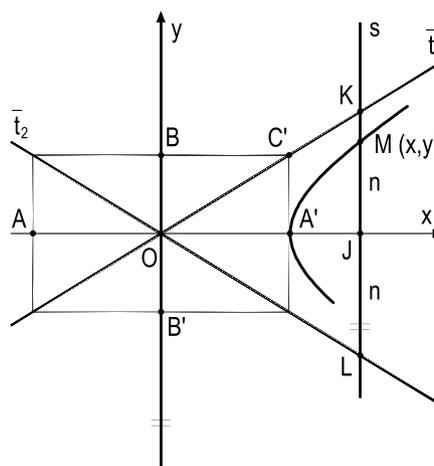


Figura 435

383 – Teorema

O produto das distâncias de um ponto qualquer de uma hipérbole às assíntotas é constante.

Demonstração: Consideremos uma hipérbole de eixos AA' e BB' e assíntotas \bar{t}_1 e \bar{t}_2 e tracemos, por um ponto M qualquer da curva, as perpendiculares MQP , MG e MH , respectivamente ao eixo imaginário e às assíntotas (Figura 436).

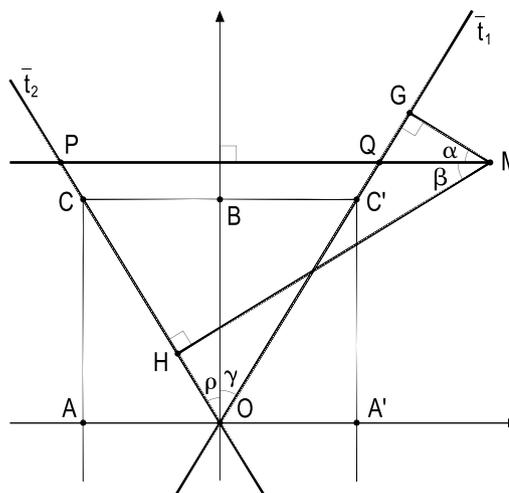


Figura 436

Por terem lados respectivamente perpendiculares, temos:

$$\alpha = \gamma \quad (1) \quad \text{e} \quad \beta = \rho \quad (2)$$

Porque as assíntotas são simétricas em relação ao eixo imaginário, vem:

$$\gamma = \rho \quad (3)$$

As relações (1), (2) e (3) permitem escrever:

$$\alpha = \beta = \gamma$$

e, então, concluir que os triângulos MGQ e MHP são semelhantes ao triângulo OBC' .

Pois, fazendo $MG = d_1$ e $MH = d_2$, aquelas semelhanças fornecem:

$$\frac{MG}{MQ} = \frac{OB}{OC'} \quad \therefore \quad \frac{d_1}{MQ} = \frac{b}{c} \quad (4)$$

$$\frac{MH}{MP} = \frac{OB}{OC'} \quad \therefore \quad \frac{d_2}{MP} = \frac{b}{c} \quad (5)$$

Multiplicando, membro a membro, as relações (4) e (5), temos:

$$\frac{d_1 d_2}{MP \cdot MQ} = \frac{b^2}{c^2} \quad \therefore \quad d_1 d_2 = MP \cdot MQ \cdot \frac{b^2}{c^2}$$

E como (número 382), $MP \cdot MQ = a^2$, vem:

$$d_1 d_2 = \frac{a^2 b^2}{c^2}$$

A fração $\frac{a^2 b^2}{c^2}$ é constante para qualquer ponto da hipérbole considerada.

Então, o produto da distâncias...

384 – Teorema

Uma hipérbole e suas assíntotas determinam, sobre uma secante qualquer, três segmentos consecutivos, sendo iguais o primeiro e o terceiro.

Demonstração: Sendo r uma secante genérica a uma hipérbole, designemos por M e M' os pontos em que ela encontra a curva e por X e X' os pontos segundo os quais ela corta as assíntotas \bar{t}_1 e \bar{t}_2 da hipérbole.

Deseja-se provar a igualdade dos segmentos XM e $X'M'$ formados entre a curva e cada assíntota, quer a secante corte apenas um dos ramos, (Figura 437), quer ela corte os dois ramos (Figura 438) da hipérbole.

Estudemos a primeira hipótese (a segunda tem demonstração análoga). Para tanto, consideremos as perpendiculares MG , MH , $M'G'$ e $M'H'$ às assíntotas e os triângulos retângulos XGM , $XG'M'$, $X'H'M'$ e $X'HM$ (Figura 437), semelhantes aos pares, o que permite escrever:

$$\frac{XM}{XM'} = \frac{MG}{M'G'} \text{ e } \frac{X'M}{X'M'} = \frac{MH}{M'H'}$$

que, multiplicadas membro a membro, dão:

$$\frac{XM \cdot X'M}{XM' \cdot X'M'} = \frac{MG \cdot MH}{M'G' \cdot M'H'}$$

Mas, como (número 383), $MG \cdot MH = M'G' \cdot M'H'$, vem:

$$\frac{XM \cdot X'M}{XM' \cdot X'M'} = 1 \quad \therefore \quad XM \cdot X'M = XM' \cdot X'M'$$

Ou seja (Figura 437), $m(q+n) = (q+m)n$.

$$\therefore \quad mq + mn = qn + mn \quad \therefore \quad mq = qn \quad \therefore \quad m = n$$

$$\therefore \quad \boxed{XM = X'M'}$$

Então, uma hipérbole e suas assíntotas...

385 – Corolário

O ponto de contato de uma tangente genérica é o ponto médio do segmento limitado sobre a tangente pelas assíntotas.

Porque, sendo a tangente a posição limite ocupada por uma secante, quando se aproximam os pontos M e M' que ela tem em comum com a curva, dos três segmentos XM , MM' e $M'X'$, anulando-se o central (Figura 439), restam apenas o primeiro e o último, iguais.

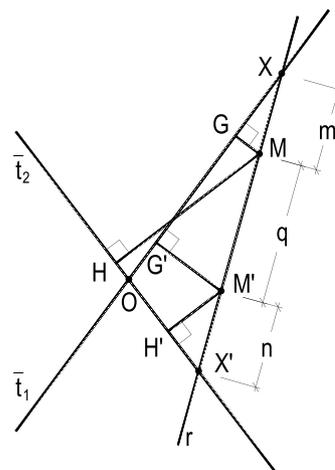


Figura 437

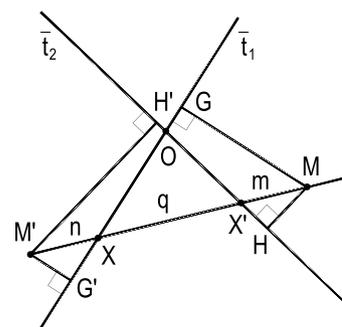


Figura 438

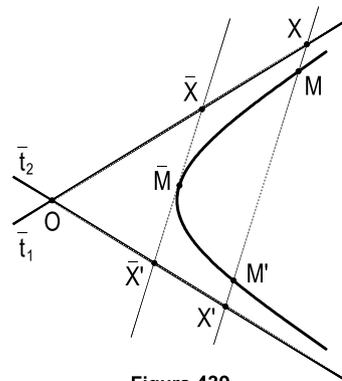


Figura 439

386 – Diâmetros da hipérbole

Consideremos um sistema genérico de cordas paralelas de uma hipérbole de assíntotas \bar{t}_1 e \bar{t}_2 e estudemos o diâmetro relativo à direção d , dessas cordas.

Para tanto, analisemos uma corda qualquer NN' do sistema (Figura 440). Porque $XN = X'N'$ (número 384), o ponto médio M da corda NN' será também o médio do segmento XX' limitado entre as assíntotas sobre a reta que serve de suporte àquela corda (Figura 440).

Mas então, porque os triângulos OXX' formados são todos – aos pares – homotéticos, em relação ao centro O da hipérbole, é imediato concluir que os pontos médios de todas as cordas do sistema pertencem a uma reta que contém o centro O da hipérbole.

Finalmente, porque entre os pontos C e C' comuns àquela reta e à hipérbole não existem cordas (Figura 440), o diâmetro obtido consta de duas semirretas Cz e $C'z'$ (Figura 441).

Como a direção d das cordas escolhidas foi genérica, conclui-se que a hipérbole possui uma infinidade de diâmetros, cada um constituído por um par de semirretas exteriores, com sentidos opostos, limitados pelos dois ramos da curva, tendo por suporte uma reta pertencente ao centro da hipérbole (Figura 440).

Por questões de interesse métrico, convencionou-se, no entanto, designar por diâmetro da hipérbole, relativo a uma direção d , o segmento CC' limitado entre os dois ramos da curva (Figuras 440 e 441), isto é, entre as origens C e C' daquelas semirretas Cz e $C'z'$.

Assim, passaremos a dizer, em obediência ao que foi convencionado, que os diâmetros da hipérbole são segmentos limitados entre os dois ramos da curva, todos tendo por ponto médio o centro O da hipérbole.

Embora evidente, vale observar que as tangentes t e t' nos extremos de um diâmetro são paralelas às cordas que definem esse diâmetro (Figura 441).

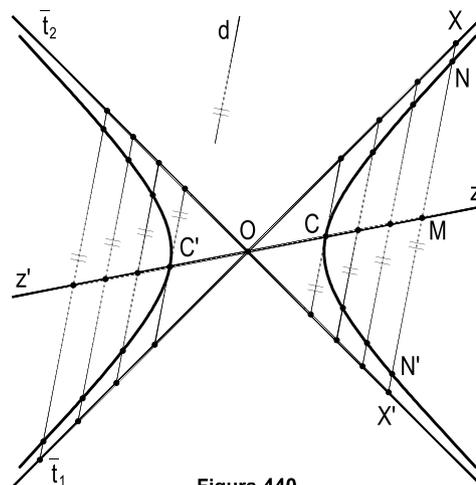


Figura 440

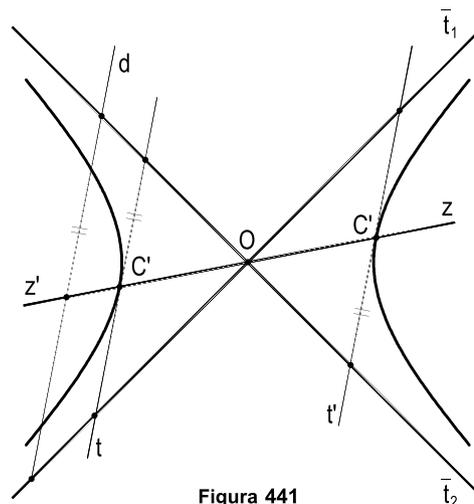


Figura 441

387 – Diâmetros conjugados da hipérbole

Consideremos, para uma hipérbole de assíntotas \bar{t}_1 e \bar{t}_2 , o diâmetro MM' relativo a uma direção genérica d , bem como as tangentes GG' e HH' nos extremos do diâmetro e completemos o paralelogramo $GG'H'H$, cujos vértices são os pontos de encontro daquelas duas tangentes, com as assíntotas da hipérbole (Figura 442).

Evidentemente, por homotetia, de centro O (Figura 442), o lugar geométrico dos pontos médios dos segmentos paralelos ao diâmetro MM' e apoiados pelos extremos nas duas assíntotas da curva é uma reta s (Figura 442) que, por passar pelos pontos N e N' , médios dos lados GH e $G'H'$ do paralelogramo $GG'H'H$, é paralela à reta d .

Embora NN' não seja diâmetro da hipérbole, porque os segmentos paralelos a MM' não são cordas da hipérbole (mas sim da hipérbole conjugada da que estamos considerando), conveniona-se dizer que o segmento NN' é o diâmetro conjugado de MM' .

Assim, dois diâmetros conjugados de uma hipérbole são tais que um sempre encontra a curva e o outro não, e inversamente em relação à hipérbole conjugada da considerada.

E mais: o paralelogramo construído sobre dois diâmetros conjugados tem suas diagonais sobre as assíntotas da hipérbole.

Quando a hipérbole é equilátera, porque as assíntotas são perpendiculares (número 380.1), o paralelogramo construído sobre dois diâmetros conjugados quaisquer é um losango (Figura 443) e, em consequência, os dois diâmetros são sempre iguais entre si e simétricos em relação a cada assíntota (Figura 443).

Reciprocamente, apenas a hipérbole equilátera tem diâmetros conjugados iguais.

De fato, essa igualdade implica na perpendicularidade das assíntotas, o que só ocorre quando a hipérbole é equilátera.

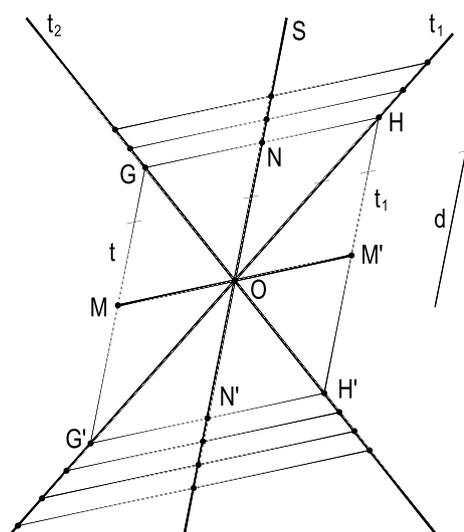


Figura 442

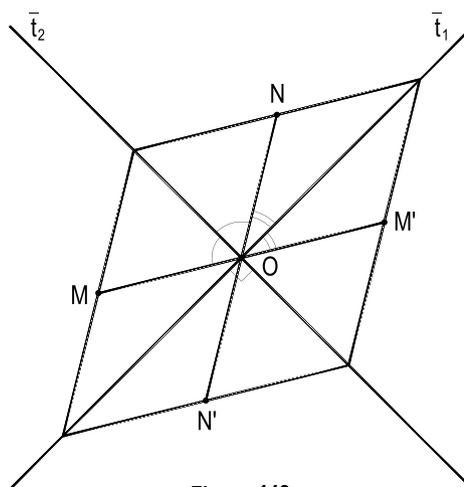


Figura 443

CAPÍTULO XIX

PARÁBOLA

388 – Definições

Parábola é a curva plana cujos pontos equidistam de uma reta e de um ponto, fixos, pertencentes ao seu plano, respectivamente denominados diretriz e foco da curva.

O segmento formado por um ponto corrente M e pelo foco F (Figura 444) é denominado raio vetor do ponto M .

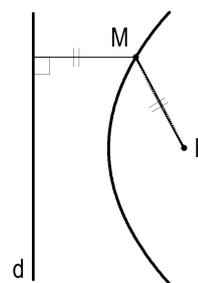


Figura 444

389 – Condição de existência

Para que exista a parábola é necessário e suficiente que o foco F seja exterior à diretriz d (Figura 444). De fato, se F pertencesse a d , os únicos pontos equidistantes dos dois seriam os pertencentes à reta perpendicular a d traçada por F . Isto é, não existiria a curva.

390 – Propriedades

A parábola é uma curva contínua e aberta, constituída por um único ramo, o qual se situa inteiramente no semiplano (limitado pela diretriz) em que se encontra o foco.

Contínua, porque cada acréscimo infinitésimo atribuído ao raio vetor corresponde a um aumento infinitésimo da distância do ponto corrente à diretriz; aberta, porque, naturalmente, o valor do raio vetor pode ser tão grande quanto se deseje, o que permite aumentar indefinidamente a distância do ponto corrente à diretriz.

E constituída de apenas um ramo, porque não pode haver qualquer ponto da curva no semiplano (limitado pela diretriz) oposto àquele em que se encontra o foco.

De fato, todo ponto J situado no semiplano oposto ao do foco é necessariamente mais próximo da diretriz que do foco da parábola, visto que o segmento JJ' (Figura 445) perpendicular à diretriz é obrigatoriamente menor que a oblíqua JP à diretriz, a qual é, naturalmente, menor que a distância de J ao ponto fixo F .

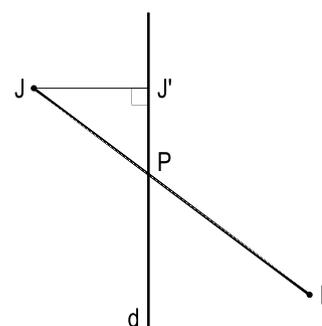


Figura 445

391 – Processo espontâneo para a construção da parábola

A própria definição da curva proporciona o seguinte processo (Figura 446):

Arbitrando-se um valor m maior que a metade da distância de foco à diretriz constrói-se a paralela à diretriz distante dela de um valor igual a m , a paralela traçada pertencendo, naturalmente, ao mesmo semiplano (em relação à diretriz) em que se encontra o foco e , com centro no foco e raio m , descreve-se um arco de círculo que corta aquela paralela segundo os pontos M_1 e M_2 da curva (Figura 446). A mudança do valor de m fornece, por repetição das construções indicadas, novos pares de pontos da parábola.

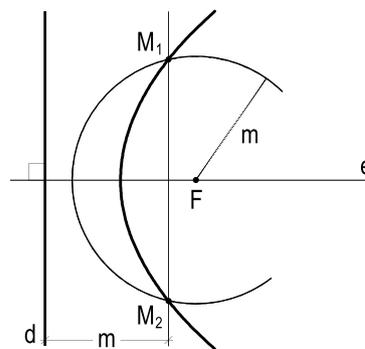


Figura 446

392 – Eixo e vértice

Do próprio processo espontâneo acima decorre a simetria dos pares de pontos da curva (como M_1 e M_2 , na Figura 446) em relação à reta e pertencente ao foco e perpendicular à diretriz.

Conclui-se, então, que a parábola possui um eixo e um vértice.

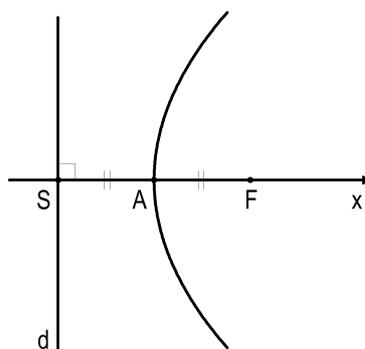


Figura 447

O vértice, o ponto A em que aquela reta encontra a curva, é, evidentemente, o ponto médio do segmento FS perpendicular à diretriz e limitado entre ela e o foco (Figura 447); o eixo é, então, a semirreta Ax pertencente àquela reta e situada no mesmo semiplano (em relação à diretriz) do foco.

393 – Corda focal – parâmetro

Corda focal de uma parábola é a que pertence ao foco e é perpendicular ao eixo da curva (MM' , na Figura 448).

Aceita-se, também, designar por corda focal toda corda pertencente ao foco. Faz-se, então, referência à sua posição.

Parâmetro é a ordenada, em relação ao eixo, do ponto da curva cuja projeção ortogonal sobre o eixo coincide com o foco. O valor do parâmetro é, pois, igual à metade da corda focal.

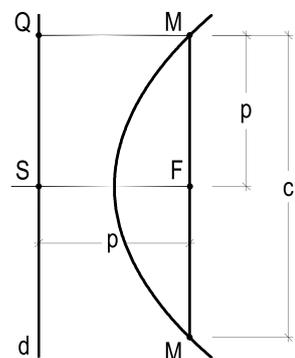


Figura 448

Note-se que o ponto M , da parábola, extremo do parâmetro MF , por equidistar do foco e da diretriz, proporciona a existência do quadrado $MFSQ$ (Figura 448). Assim – e é o que habitualmente se faz –, o parâmetro da parábola pode ser medido pela distância FS , do foco à diretriz.

394 – Observação

Porque, quanto à grandeza, uma parábola fica perfeitamente determinada pela fixação de seu parâmetro (ou seja, da distância entre foco e diretriz), resulta que todas as parábolas são semelhantes. E que a razão de semelhança entre duas parábolas é igual à existente entre seus parâmetros.

395 – Teorema

O lugar geométrico dos pontos equidistantes de uma reta e de um ponto fixos, exteriores, é a parábola que tem por diretriz e foco a reta e o ponto fixos.

Demonstração: Sejam d e F a reta e o ponto fixos.

Consideremos a parábola de diretriz d e foco F .

Sabe-se, por definição, que para todos os pontos M da curva vale (Figura 449):

$$MF = MQ \quad (1)$$

Consideremos, agora, dois outros pontos genéricos L e J , respectivamente, interior (em sua concavidade) e exterior (na área de sua convexidade) à curva.

Os triângulos JMF e LMF (Figura 449) fornecem, respectivamente:

$$MJ + JF > MF \quad (2)$$

$$LF - LM < MF \quad (3)$$

Desenvolvendo estas relações e aplicando (1), vem:

$$MQ - JQ + JF > MF$$

$$\therefore -JQ + JF > 0 \quad \therefore JF > JQ \quad (4)$$

$$LF - (LQ - MQ) < MF$$

$$\therefore LF - LQ < 0 \quad \therefore LF < LQ \quad (5)$$

As relações (1), (4) e (5) demonstram o teorema.

396 – Escólio

A parábola divide seu plano em duas regiões: a externa, à qual pertencem os pontos mais próximos da diretriz que do foco, e a interna, à qual pertencem os pontos mais próximos do foco que da diretriz (Figura 450).

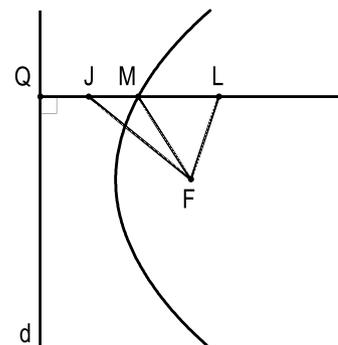


Figura 449

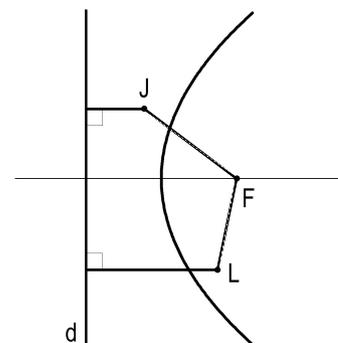


Figura 450

397 – Teorema

Seja M um ponto qualquer de uma parábola, MF seu raio vetor e MS a perpendicular baixada à diretriz, a bissetriz do ângulo \widehat{SMF} é tangente à parábola, em M .

Demonstração: Sejam F e d o foco e a diretriz e M um ponto corrente de uma parábola. Consideremos o raio vetor MF , a perpendicular MS à diretriz (S em d) e a bissetriz r do ângulo SMF (Figura 451). Porque M é ponto da curva, o triângulo MSF é isósceles, resultando daí a simetria dos pontos F e S em relação àquela reta r .

Assim, para todo ponto J de r , vale escrever (Figura 451):

$$JF = JS \quad (1)$$

E, no triângulo retângulo JSQ :

$$JS > JQ \quad (2)$$

As relações (1) e (2) fornecem:

$$JF > JQ$$

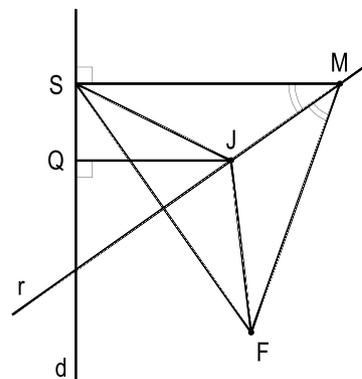


Figura 451

E, se todos os pontos J (exceto M) da bissetriz considerada são mais próximos da diretriz que do foco, conclui-se (número 396) que todos esses pontos J são exteriores à parábola. Ou seja, que a bissetriz r (Figura 451) do ângulo \widehat{SMF} é tangente à curva, no ponto M , como se queria demonstrar.

398 – Corolário

A bissetriz n do ângulo formado entre o raio vetor MF e a semirreta paralela (e de mesmo sentido) ao eixo, traçada por um ponto M corrente (Figura 452), é normal à parábola nesse ponto.

Porque essa bissetriz é perpendicular à tangente t , no ponto M considerado (número 12.3).

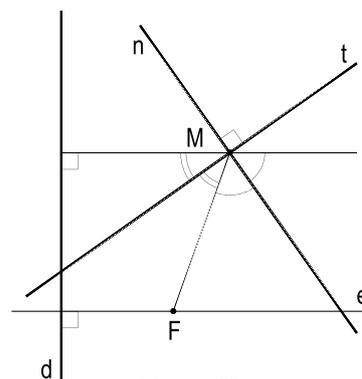


Figura 452

399 – Propriedades

1. A reta formada pelo ponto de contato de uma tangente qualquer e pelo simétrico do foco em relação à tangente é, sempre, paralela ao eixo da parábola.

Porque, segundo se viu (número 397), o simétrico S do foco F em relação a uma tangente genérica r (Figura 451) é o pé da perpendicular do ponto de contato M à diretriz.

2. O foco é o centro do semicírculo que, passando por um ponto corrente, tem por diâmetro o segmento formado pelos pés, no eixo, da tangente e da normal relativas àquele ponto corrente.

Sendo M um ponto genérico de uma parábola de foco F e diretriz d e T e N os pés (no eixo) da tangente e da normal à curva, nesse ponto M (Figura 453), temos:

$$\hat{\alpha} = \hat{\beta} \text{ (número 397) e } \hat{\alpha} = \hat{\gamma} \text{ (alternos internos).}$$

Logo, $\hat{\beta} = \hat{\gamma}$ e $\hat{\beta}' = \hat{\gamma}'$ (complementos de $\hat{\beta}$ e de $\hat{\gamma}$).

Assim, os triângulos isósceles FMT e FMN asseguram a igualdade dos segmentos FM, FT e FN, o que vale concluir ser o foco F o centro do semicírculo que, passando por M, tem por diâmetro o segmento TN (Figura 453).

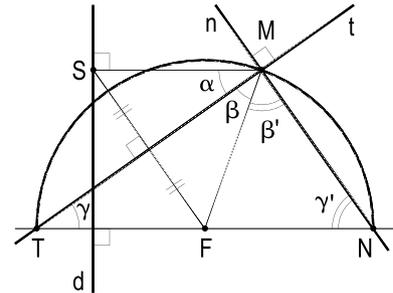


Figura 453

3. Os segmentos formados, no eixo, pelo foco e pelos pés da tangente e da normal relativas a um ponto qualquer da parábola são iguais entre si e iguais ao raio vetor daquele ponto.
4. A tangente, no vértice, é paralela à diretriz.
5. O lugar geométrico dos simétricos do foco em relação às tangentes é a diretriz da parábola.

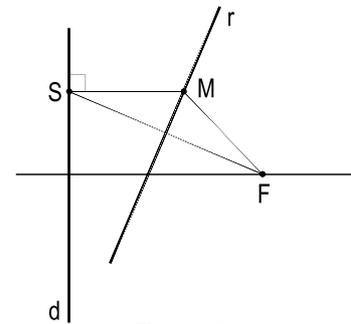


Figura 454

Porque o simétrico S do foco F em relação a uma tangente genérica r (Figura 454) coincide, sempre, com o pé da perpendicular MS, baixada do ponto de contato M da tangente à diretriz.

6. Dados um ponto F e uma reta d exteriores, fixos, o lugar geométrico dos centros dos círculos pertencentes ao ponto F e tangentes à reta d é a parábola que tem por foco e por diretriz o ponto e a reta dados.

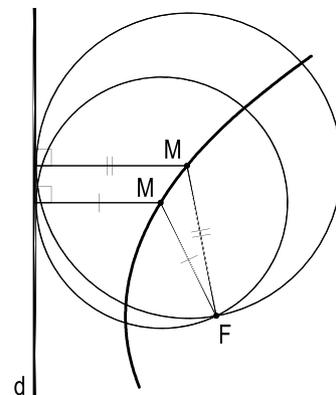


Figura 455

Porque (Figura 455), os centros M de todos esses círculos devem ser equidistantes do ponto F e da reta d, dados, tendo, por isso, que, passando por F, tangenciar a reta d.

E, por equidistarem de F e de d, todos devem pertencer à parábola considerada.

400 – Teorema de La Hire

O lugar geométrico das projeções ortogonais do foco sobre as tangentes a uma parábola é a tangente à curva, no seu vértice.

Demonstração: Seja t uma tangente genérica a uma parábola de foco F e diretriz d . Consideremos o simétrico S do foco, em relação a t , e a projeção ortogonal P do foco sobre t (Figura 456).

Porque, ao variar a tangente, o lugar geométrico de S é a diretriz d (número 399.5) e, porque P é o homotético de S , para o polo F na razão $\frac{1}{2}$, o lugar de P será uma reta w paralela à diretriz, equidistante dela e do foco. Tal reta passará, então, pelo ponto médio do segmento FQ (Figura 456), ou seja, pelo vértice A da parábola.

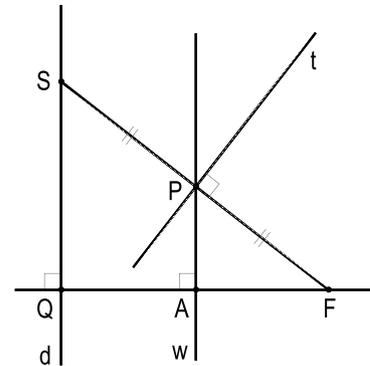


Figura 456

E, como esta reta w é perpendicular ao eixo, ela é tangente à curva, no vértice A .

Então, o lugar geométrico das projeções...

401 – Teoremas de Poncelet

1. As tangentes traçadas por um ponto exterior a uma parábola são isogonais em relação aos lados do ângulo formado pela reta que une aquele ponto ao foco e pela paralela ao eixo, traçada por aquele ponto.
2. A reta que une o foco de uma parábola a um ponto exterior é a bissetriz do ângulo formado pelas retas que unem o foco aos pontos de contato das duas tangentes traçadas à curva pelo ponto exterior.

Demonstrações: Sejam t e t' as tangentes do ponto J , genérico, a uma parábola de foco F e diretriz d e S e S' os simétricos de F , respectivamente em relação a t e a t' , naturalmente (número 399.5) pertencentes à diretriz d (Figura 457).

Como t e t' são, respectivamente, mediatrizes dos segmentos FS e FS' , seu ponto de concurso J é o centro do círculo pertencente aos pontos F , S e S' .

Consideremos a semirreta Jm paralela (e de mesmo sentido) ao eixo da parábola (Figura 457).

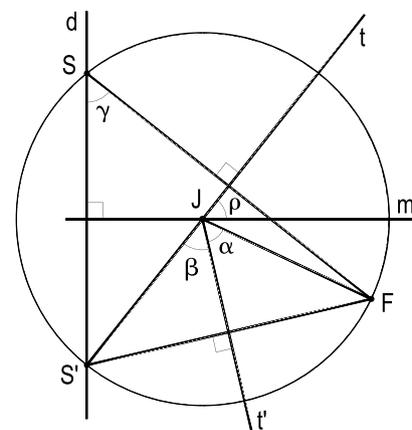


Figura 457

Da simetria de F e S' em relação a t', vem:

$$\alpha = \beta \quad (1)$$

Por terem lados respectivamente perpendiculares,

$$\gamma = \rho \quad (2)$$

E, no círculo considerado, como inscrito e central, respectivamente, subtendendo o mesmo arco FS', temos:

$$\gamma = \frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$\text{Logo, } \gamma = \frac{\alpha + \alpha}{2} = \alpha \quad (3)$$

Das relações (2) e (3) resulta: $\alpha = \rho$.

Assim, as tangentes t e t' são isogonais em relação aos lados do ângulo \widehat{FJM} , formado pela reta JF que une o ponto J considerado ao foco F da parábola e pela semirreta Jm, paralela ao eixo, e de mesmo sentido que ele, o que demonstra o primeiro teorema.

Além do que já foi considerado, incluímos os pontos de contato M e M' das tangentes t e t' à parábola de foco F e diretriz d (Figura 458).

Das simetrias existentes entre os triângulos FJM e SJM e FJM' e S'JM', respectivamente em relação a t e a t', vem:

$$\theta = \rho \quad (1) \quad \text{e} \quad \lambda = \delta \quad (2)$$

E, da simetria dos pontos S e S' em relação ao diâmetro m do círculo (J, JF) (Figura 458), temos:

$$\rho = \delta \quad (3)$$

As relações (1), (2) e (3) fornecem: $\theta = \lambda$

Assim, a reta formada pelo foco F e pelo ponto J exterior à parábola é a bissetriz do ângulo formado pelas retas que unem o foco F aos pontos de contato M e M' das duas tangentes t e t' de J à curva, demonstrando o segundo teorema.

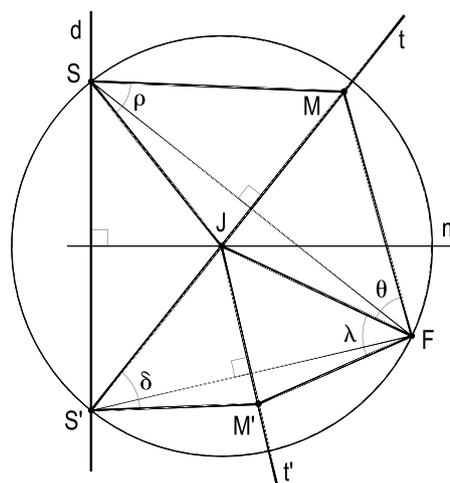


Figura 458

402 – Teorema

O lugar geométrico dos pontos dos quais se pode traçar tangentes perpendiculares entre si a uma parábola é a própria diretriz da curva.

Demonstração: Seja J um ponto qualquer do lugar, isto é, tal que as tangentes t_1 e t_2 por ele traçadas à parábola de foco F e diretriz d sejam perpendiculares entre si.

Consideremos os simétricos S_1 e S_2 do foco, em relação àquelas tangentes. Porque o triângulo FS_1S_2 é necessariamente retângulo (da própria hipótese) e porque t_1 e t_2 são as mediatrizes de seus catetos (Figura 459), J será o circuncentro do triângulo, devendo, por isso, J pertencer à hipotenusa S_1S_2 . Em verdade, J é o ponto médio de S_1S_2 .

Mas como S_1 e S_2 são pontos da diretriz (número 399.5), J forçosamente pertence a essa reta.

Então, o lugar geométrico dos pontos...

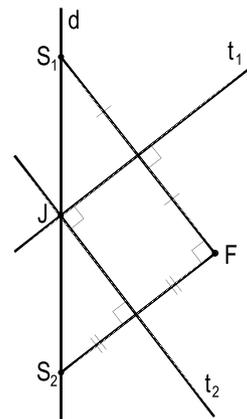


Figura 459

403 – Teorema

A parábola é a posição limite ocupada por uma elipse (ou por uma hipérbole) quando são mantidos fixos um foco e o vértice mais próximo, enquanto o outro foco se afasta indefinidamente sobre o eixo real.

Demonstração: Consideremos uma elipse (Figura 460), ou uma hipérbole (Figura 462) de focos F e F' e eixo real AA' , bem como, em ambos os casos, o círculo diretor relativo ao foco F' .

Sabe-se (números 345.5 e 369.5) que um ponto M qualquer da elipse ou do ramo da hipérbole, relativo ao foco F , equidista do foco F e do círculo diretor relativo ao foco F' , valendo, pois (Figuras 460 e 462), escrever:

$$MF = MQ \quad (1)$$

Fixemos, então, o foco F e o vértice A mais próximo de F e façamos o outro foco F' descrever o eixo real, afastando-se, cada vez mais, do fixo (Figuras 461 e 463).

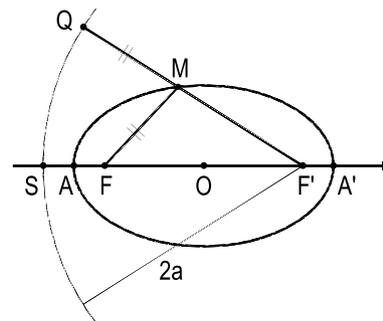


Figura 460

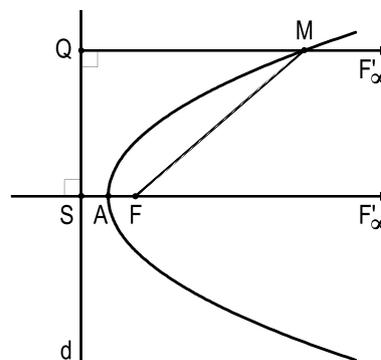


Figura 461

Porque F e A são mantidos fixos, o ponto S , simétrico de F em relação a A (comum ao eixo real e ao círculo diretor considerado), resta fixo também.

Pois então, em ambos os casos, quando F' chega a ser o ponto impróprio da reta AF , o círculo diretor relativo a F' degenera segundo a reta d (Figuras 461 e 463) pertencente ao ponto fixo S e perpendicular ao eixo AF . E como a relação (1) permanece válida, nesta posição final (Figuras 461 e 463), o segmento MQ , devendo ser paralelo à reta AF (por ter seu suporte pertencente ao ponto impróprio F' da reta AF), resulta perpendicular àquela reta d .

E, nestas condições, a elipse (ou hipérbole) degenera segundo uma curva tal que seus pontos (como M) são equidistantes do ponto fixo F e da reta fixa d . Em outras palavras, segundo a parábola de foco F e diretriz d (Figuras 461 e 463).

Então, a parábola é a posição limite...

404 – Observações

1. Mantidos fixos F e A , o deslocamento de F' acarreta que também o centro O da elipse (ou da hipérbole) deva se afastar indefinidamente de F . Assim, o círculo principal (O, OA) da elipse (Figura 464) – ou da hipérbole (Figura 465) – no instante final (F' impróprio) degenera segundo a tangente a ele no ponto A . Ou seja, a posição limite ocupada pelo círculo principal da elipse (Figura 464) – ou da hipérbole (Figura 465) – é a tangente w à parábola, no seu vértice.
2. Considerar a parábola como posição limite ocupada por uma cônica de dois focos (segundo as condições acima estabelecidas) permite deduzir, para a parábola, uma série de propriedades válidas para a elipse e para a hipérbole, desde que, naturalmente, se possa adaptá-las às condições dessa posição limite.

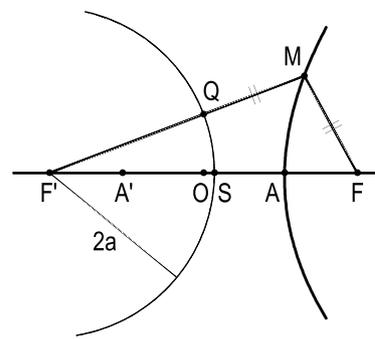


Figura 462

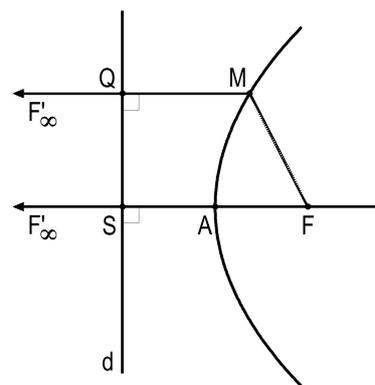


Figura 463

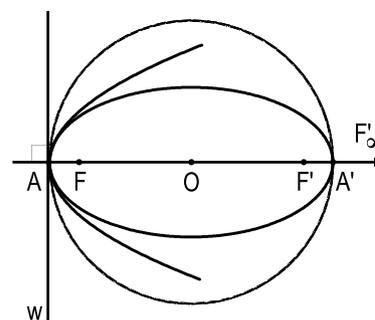


Figura 464

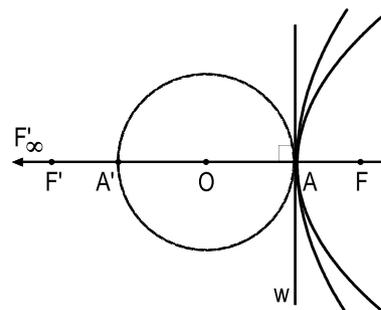


Figura 465

De um modo geral, para obter uma propriedade para a parábola a partir de uma válida para a elipse ou para a hipérbole, basta reenunciá-la, admitindo impróprio (na direção do eixo real) um dos focos da elipse ou da hipérbole.

Assim é que a maioria das propriedades instituídas diretamente para a parábola poderiam ser extraídas da teoria desenvolvida para a elipse ou para a hipérbole. Por exemplo:

- a. A tangente à parábola, num ponto corrente M , é a bissetriz do ângulo formado pelo raio vetor de M e pela perpendicular baixada de M à diretriz (número 397).

Porque (Figura 466), ao se transformar a elipse ou a hipérbole em parábola, o segundo raio vetor MF' adquire a direção do eixo da parábola. E a tangente à elipse, ou à hipérbole, é (números 343 e 367) a bissetriz do ângulo \widehat{SMF} formado pelos dois raios vetores de M .

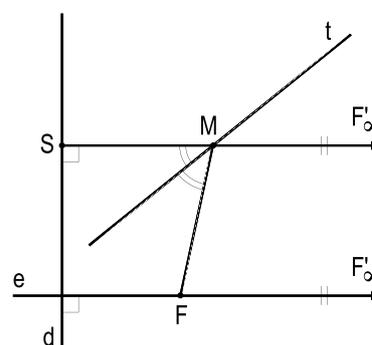


Figura 466

- b. O lugar geométrico dos simétricos do foco da parábola em relação às tangentes é a sua diretriz (número 399.5).

Porque a diretriz é a posição limite ocupada pelo círculo diretor da elipse (ou da hipérbole) relativo ao foco impróprio.

- c. A reta formada pelo ponto de contato de uma tangente qualquer a uma parábola e pelo simétrico do foco em relação à tangente é paralela ao eixo da curva (número 399.1).

Porque, para a elipse ou para a hipérbole, essa reta deve conter o segundo foco (números 345.3 e 369.3). E este, na posição limite da parábola, é o ponto impróprio F' (Figura 467) do eixo da curva.

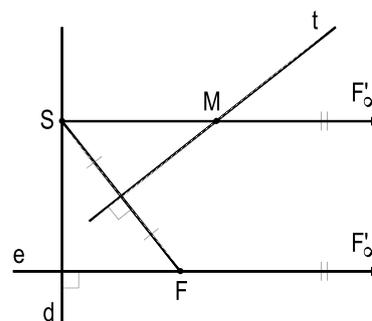


Figura 467

- d. O lugar geométrico das projeções ortogonais do foco sobre as tangentes é a tangente à parábola no seu vértice (La Hire).

Porque essa tangente é a posição limite ocupada pelo círculo principal da elipse ou da hipérbole, quando estas curvas degeneram segundo a parábola (número 404.1).

e. As duas tangentes traçadas de um ponto J exterior a uma parábola à curva são isogonais em relação ao ângulo formado pela reta que liga J ao foco F da parábola e pela semirreta Jx paralela ao eixo (Figura 468) (primeiro teorema de Poncelet).

Porque esta semirreta Jx é a posição limite ocupada pelo segundo raio vetor do ponto J , quando o segundo foco da elipse (ou da hipérbole) é rejeitado ao infinito.

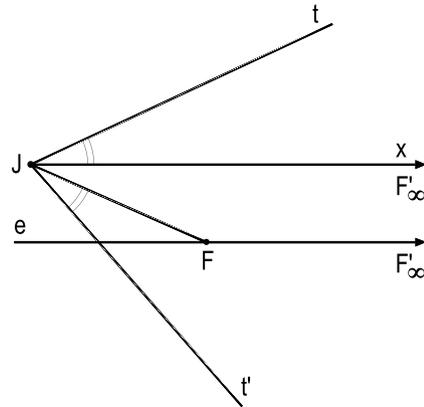


Figura 468

405 – Subtangente e subnormal

Subtangente TK e subnormal KN relativas a um ponto M qualquer de uma parábola são as projeções, sobre o eixo da curva, das porções da tangente e da normal, relativas àquele ponto M , limitadas entre ele e o eixo da parábola (Figura 469).

406 – Teorema

Para todos os pontos de uma parábola:

1. As subtangentes têm sempre por ponto médio o vértice da curva.
2. As subnormais são todas iguais entre si e iguais ao parâmetro da parábola.

Demonstração: Sejam M um ponto corrente, t e n a tangente e a normal – relativas a M – a uma parábola de foco F e diretriz d e TK e KN (Figura 469) a subtangente e a subnormal correspondentes.

Porque $FM = FT$ (número 399.2), o triângulo FMT é isósceles. Consequentemente, o ponto P , projeção ortogonal do foco F sobre a tangente t , é o médio de TM .

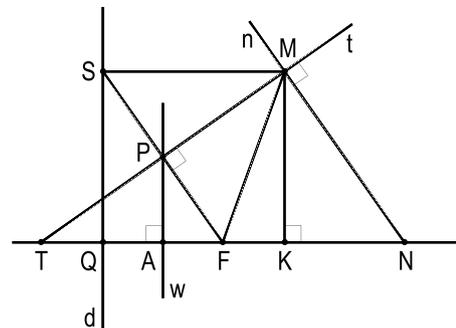


Figura 469

Mas, como P deve pertencer à tangente w à parábola, em seu vértice A (número 400), PA é paralela a MK . Assim, no triângulo retângulo TMK , se P é o médio da hipotenusa e PA é paralela ao cateto MK , A será o ponto médio do cateto TK (subtangente), com o que fica demonstrada a primeira parte do teorema.

E, como MN e SF são paralelas (ambas perpendiculares à tangente t) e $MK = SQ$, os triângulos retângulos MKN e SQF (Figura 469) são iguais.

Logo, a subnormal KN é igual ao parâmetro QF da parábola, como se queria provar na segunda parte do teorema.

407 – Escólio

O foco F é o centro de um semicírculo que, ao passar por um ponto M corrente, qualquer, contém os pés T e N (sobre o eixo) da tangente e da normal à parábola naquele ponto M (Figura 469).

408 – Construção da parábola pela utilização de suas subtangentes e subnormais

Para construir uma parábola, conhecidos seu foco F e sua diretriz d , basta escolher um ponto 1, qualquer de seu eixo e , com centro no foco F , descrever o círculo de raio $F1$, que volta a cortar o eixo no ponto 3 (Figura 470).

Marcando-se, sobre o eixo, o segmento 32 igual ao parâmetro FS e, traçando-se, por 2, a perpendicular ao eixo, obtém-se dois pontos M e M' da curva.

Além disso, a utilização das retas $1M$ e $1M'$, tangentes à curva, empresta considerável ajuda ao traçado da parábola (Figura 470).

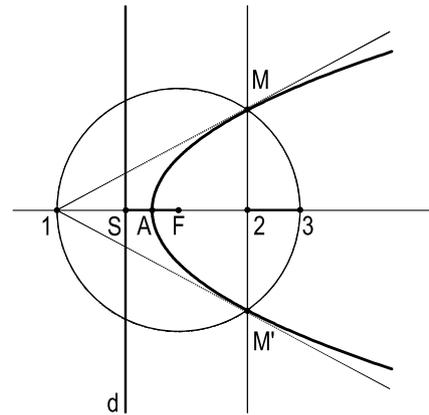


Figura 470

A escolha de novos pontos 1 proporciona a obtenção de novos pares de pontos correntes M e M' e das tangentes à parábola procurada, nesses pontos (Figura 471).

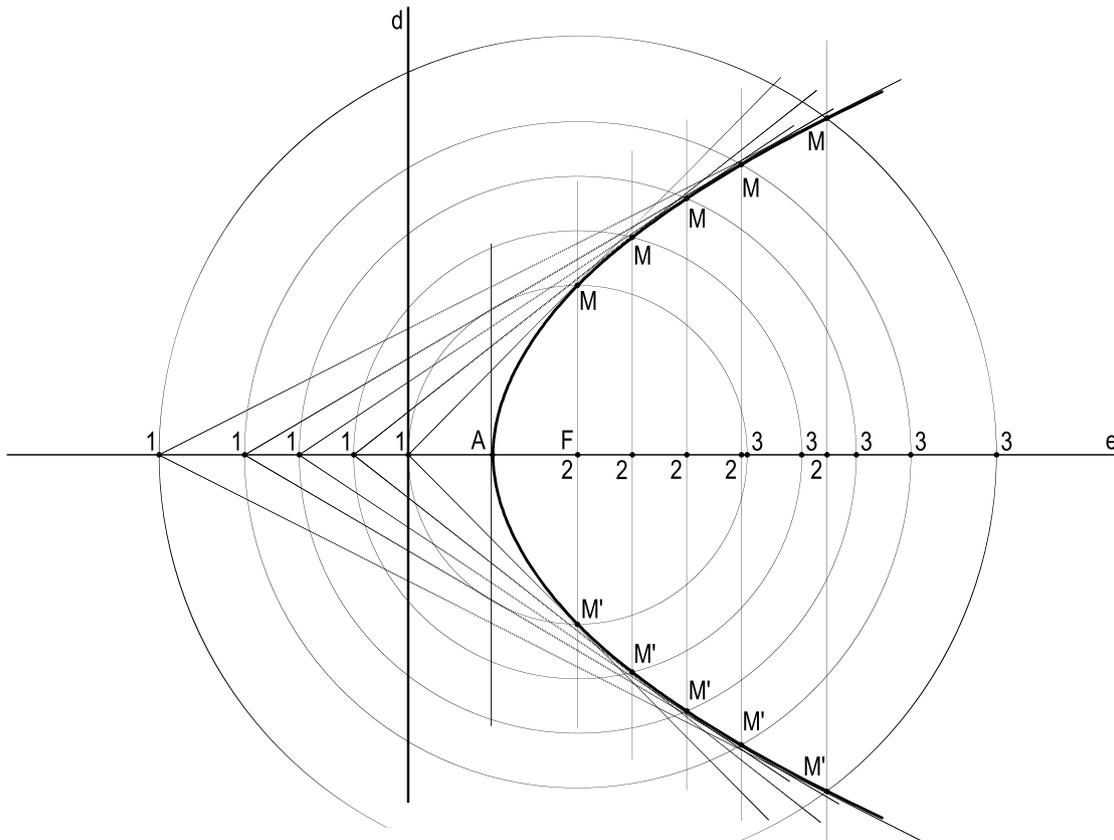


Figura 471

409 – Teorema

O lugar geométrico dos pontos médios das cordas de uma parábola paralelas a uma reta genérica é uma semirreta paralela ao eixo, limitada pela parábola e situada em seu interior.

Demonstração: Consideremos uma corda genérica NN' de uma parábola de foco F e diretriz d , bem como os círculos pertencentes ao foco, tendo por centros os extremos N e N' daquela corda. Tais círculos, evidentemente tangentes à diretriz (número 399.6), voltam a se cortar no ponto S , simétrico de F , em relação a NN' (Figura 472).

Sendo \bar{N} e \bar{N}' os pontos de contato dos dois círculos considerados com a diretriz, porque a reta SF é o eixo radical desses círculos, o ponto \bar{M} , segundo o qual ela corta a diretriz, é o médio do segmento $\bar{N}\bar{N}'$ (número 254).

Assim, a paralela ao eixo da parábola, traçada por \bar{M} , por ser suporte da base média do trapézio retângulo $N\bar{N}\bar{N}'N'$, conterá o ponto M , médio da corda NN' (Figura 472).

E, se considerarmos outras cordas paralelas a NN' , porque F é fixo, a reta $F\bar{M}$, sempre perpendicular à direção comum r dessas cordas (Figura 473), permanecerá fixa.

Mas então, sendo fixo o ponto \bar{M} , os pontos M , médios de todas as cordas paralelas à reta r (Figura 473), pertencerão à paralela ao eixo da parábola, traçada por \bar{M} .

E, porque todos os pontos médios das cordas em estudo são, evidentemente, interiores à parábola, da paralela ao eixo pertencente ao ponto \bar{M} , é útil apenas a parte interior à parábola (Figura 473).

Tal semirreta é o diâmetro da parábola referente àquela direção r .

Então, o lugar geométrico dos pontos médios...

410 – Corolário

A parábola possui uma infinidade de diâmetros. Todos eles são semirretas paralelas ao eixo, limitadas pela curva, com o mesmo sentido do eixo. De fato, basta observar que a direção r das cordas acima estudadas (número 409) foi arbitrária, sendo válida, pois, a propriedade para qualquer sistema de cordas paralelas da parábola.

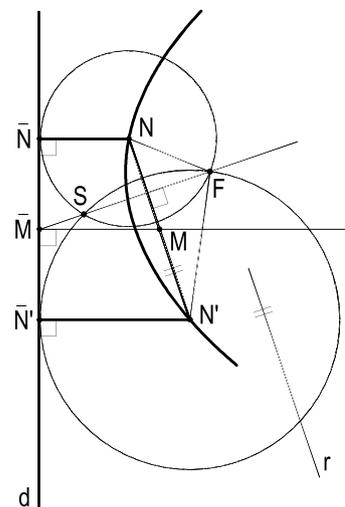


Figura 472

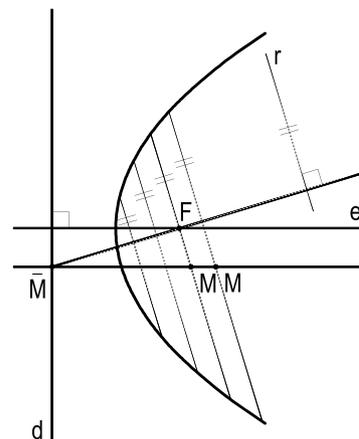


Figura 473

411 – Observações

1. O diâmetro relativo a uma direção é denominado diâmetro conjugado dessa direção. Assim são, na Figura 474, a direção r , genérica, e o diâmetro Jx .
2. Há apenas uma direção à qual não corresponde qualquer diâmetro: a própria direção do eixo. Porque toda reta paralela ao eixo possui apenas um ponto próprio em comum com a curva, não produzindo, por isso, cordas na curva.

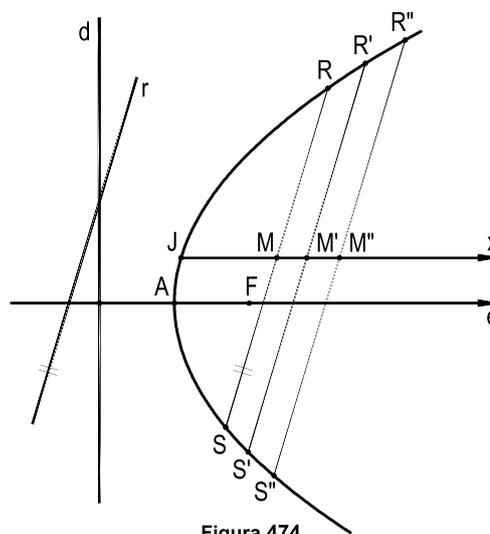


Figura 474

412 – Propriedades

1. A tangente à parábola no extremo de um diâmetro é paralela às cordas que definem esse diâmetro.

Assim (Figura 475), a tangente à parábola num ponto M da curva e o diâmetro, relativo a esse ponto, têm direções conjugadas.

2. Dadas duas cordas paralelas $N_1N'_1$ e $N_2N'_2$ de uma parábola, as secantes N_1N_2 e $N'_1N'_2$, à curva, cortam-se sobre a reta que serve de suporte ao diâmetro M_1M_2 relativo àquelas cordas (Figura 476).

Porque os pontos N_1 , N'_1 e M_1 , sendo homotéticos, respectivamente de N_2 , N'_2 e M_2 , obrigam a existência de um ponto J (o centro dessa homotetia) comum às retas $N_1N'_1$, $N_2N'_2$ e M_1M_2 .

3. E a reta formada pelos pontos M_1 e M_2 , médios das cordas paralelas consideradas, é a que serve de suporte ao diâmetro relativo a essas cordas (Figura 476).

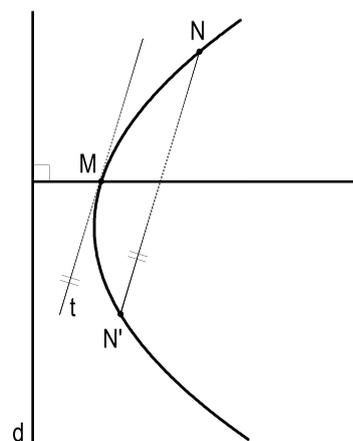


Figura 475

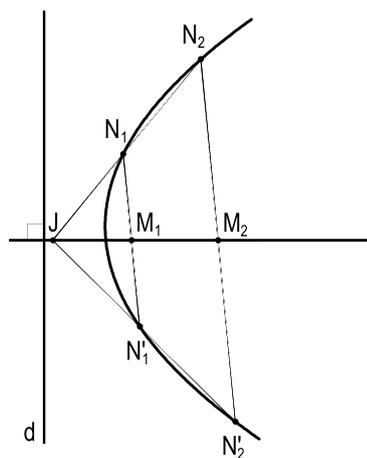


Figura 476

4. As tangentes nos extremos de uma corda cortam-se sobre a reta suporte do diâmetro relativo àquela corda (Figura 477).

De fato, basta ver que essas tangentes podem ser consideradas como as posições limites ocupadas por duas secantes N_1N_2 e $N'_1N'_2$ (Figura 476) formadas pelos extremos de duas cordas paralelas $N_1N'_1$ e $N_2N'_2$ da parábola, quando essas cordas, aproximando-se, tendem a se transformar numa única.

Esta propriedade pode, aliás, ser provada diretamente. Para tanto, consideremos as tangentes t e t' nos extremos N e N' de uma corda genérica NN' de uma parábola, bem como os simétricos S e S' do foco F , em relação àquelas tangentes (Figura 478). Porque t e t' são as mediatrizes dos lados FS e FS' do triângulo FSS' (número 399.5), o ponto J comum a elas é o circuncentro desse triângulo. Assim, a mediatriz de SS' passa por J (Figura 478). Mas essa mediatriz, por ser paralela ao eixo e passar pelo ponto médio da corda NN' (a mediatriz de SS' , sendo o suporte da base média do trapézio retângulo $SS'N'N$, passa pelo médio do lado NN'), é a reta que serve de suporte ao diâmetro relativo àquela corda.

E, então, as tangentes a uma parábola nos extremos de uma corda qualquer da curva cortam-se sobre a reta suporte do diâmetro relativo àquela corda (Figura 477).

5. Reciprocamente, a reta formada pelo ponto J comum a duas tangentes t e t' e pelo ponto médio M da corda que une os pontos de contato N e N' daquelas tangentes serve de suporte ao diâmetro relativo à corda NN' , sendo, pois, paralela ao eixo da parábola (Figura 478), por ser o suporte da base média do trapézio formado pelos pontos de contato N e N' das duas tangentes consideradas e pelos simétricos do foco da parábola em relação a essas tangentes.

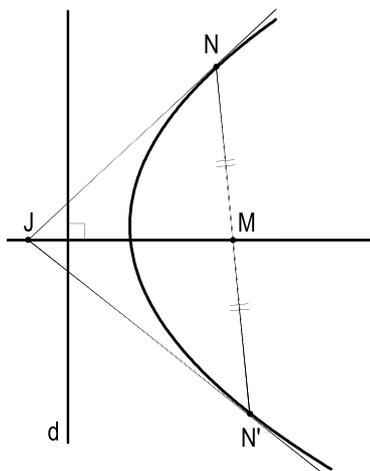


Figura 477

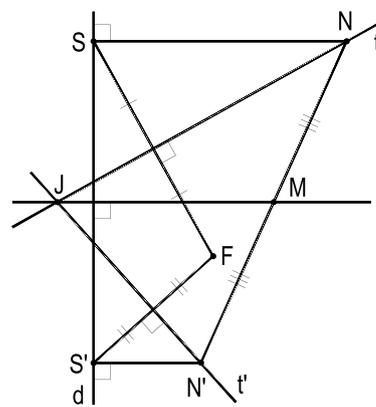


Figura 478

6. No caso particular em que a corda NN' que une os pontos de contato de duas tangentes t e t' a uma parábola é paralela à sua diretriz, tais tangentes cortam-se sobre o próprio eixo da parábola, sendo, aliás, simétricas em relação ao eixo.

Porque o trapézio $SNN'S'$ (Figura 478) do caso genérico degenera no retângulo $SNN'S'$ (Figura 479), para esta posição especial. E, então, o triângulo JNN' tem de ser isósceles, o que faz com que a mediatriz da corda NN' venha a passar pelo foco F , resultando ser o próprio eixo da parábola.

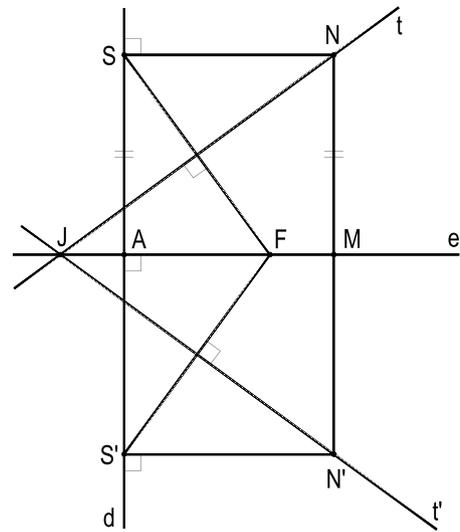


Figura 479

No caso ainda mais particular em que as duas tangentes à parábola são perpendiculares entre si, tal retângulo passa a ser um quadrado e seu ponto de concurso é o traço da diretriz da parábola com seu eixo, confirmando que a diretriz é o lugar geométrico dos pontos dos quais é possível enviar tangentes perpendiculares entre si à parábola (número 402).

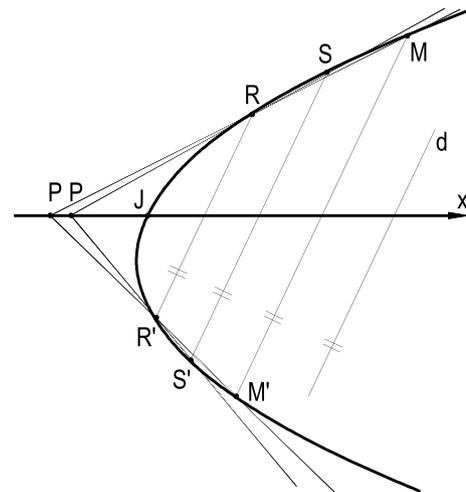


Figura 480

7. A reta suporte do diâmetro relativo a uma direção genérica é o lugar geométrico dos pontos de concurso das retas que unem os extremos de cada par de cordas que têm aquela direção (Figura 480).

Porque todos os pontos P comuns às retas suportes de pares de secantes correspondentes, como RS e $R'S'$ e como RM e $R'M'$, pertencem a tal reta (número 412.2).

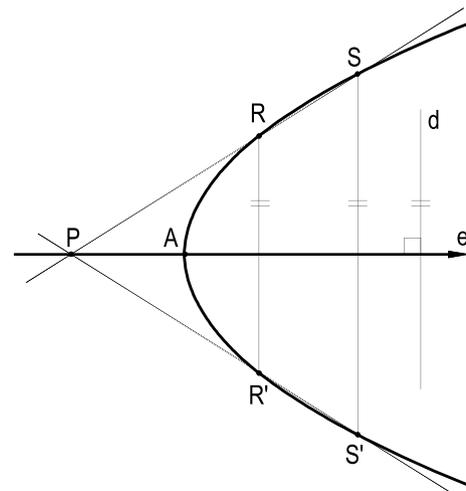


Figura 481

8. No caso particular em que essa direção d é perpendicular ao eixo da parábola, tal lugar geométrico é o próprio eixo e da curva (Figura 481), como concluído no item 412.6, acima.

CAPÍTULO XX

PROBLEMAS RESOLVIDOS

O presente capítulo, adicionado nesta segunda edição, inclui uma centena de problemas, propostos e resolvidos, que foram escolhidos visando passar por todas as partes teóricas antes detalhadas, enfatizar algumas decorrências conceituais e exemplificar suas aplicações práticas.

Como em toda a teoria desenvolvida, os problemas estão sequentemente numerados e suas resoluções, quando necessário, fazem referência aos itens teóricos em que se apoiam.

Seguem, então, tais problemas:

1. Um ângulo $\widehat{A\hat{O}B}$, de valor qualquer, tem seu vértice O fixo sobre uma reta r , fixa também. Pede-se demonstrar que, enquanto o ângulo gira, em torno de seu vértice, mantendo-se sempre num dos semiplanos definidos pela reta r , o ângulo que sua bissetriz forma com r vale a média aritmética dos ângulos que os lados do ângulo formam com r , independentemente do valor de $\widehat{A\hat{O}B}$.

Resolução: Consideremos uma posição genérica do ângulo $\widehat{A\hat{O}B}$, apoiado por seu vértice O na reta r (Figura 482).

Sendo OX a bissetriz de $\widehat{A\hat{O}B}$, designemos por α , β e γ , os ângulos que OA , OX e OB formam com r , e por 2θ o valor do ângulo $\widehat{A\hat{O}B}$.

Pode-se, então, escrever:

$$\alpha = \beta + \theta$$

$$\gamma = \beta - \theta$$

somando, membro a membro:

$$\alpha + \gamma = 2\beta$$

\therefore

$$\boxed{\beta = \frac{\alpha + \gamma}{2}}$$

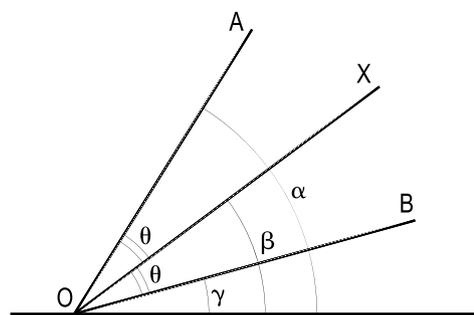


Figura 482

Como a posição e o valor do ângulo $\widehat{A\hat{O}B}$ foram aleatoriamente escolhidos, a relação instituída vale para qualquer ângulo $\widehat{A\hat{O}B}$, nas condições impostas, demonstrando a proposição.

2. Dadas quatro semirretas OA, OB, OC e OD, nesta ordem, calcule os ângulos α , β , γ e φ , respectivamente iguais a $\widehat{A\hat{O}B}$, $\widehat{B\hat{O}C}$, $\widehat{C\hat{O}D}$ e $\widehat{D\hat{O}A}$, sabendo que: α e γ são suplementares, que $\alpha = 2\beta$ e que β e φ são diretamente proporcionais a 2 e 7.

Resolução: Por completarem uma volta em torno do ponto O, os quatro ângulos considerados somam 360° (número 12.2) (Figura 483).

Assim, pode-se organizar, com os demais dados, o sistema:

$$\alpha + \beta + \gamma + \varphi = 360^\circ \quad (1)$$

$$\alpha + \gamma = 180^\circ \quad \therefore \quad \gamma = 180^\circ - \alpha \quad (2)$$

$$\alpha = 2\beta \quad \therefore \quad \beta = \frac{\alpha}{2} \quad (3)$$

$$\frac{\beta}{2} = \frac{\varphi}{7} \quad \therefore \quad \varphi = \frac{7\beta}{2} \quad (4)$$

Levando (2), (3) e (4) a (1), vem:

$$\alpha + \frac{\alpha}{2} + 180^\circ - \alpha + \frac{7}{2} \cdot \frac{\alpha}{2} = 360^\circ$$

$$\therefore \quad \frac{(2+7)\alpha}{4} = 180^\circ \quad \therefore \quad \frac{\alpha}{4} = 20^\circ \quad \therefore \quad \boxed{\alpha = 80^\circ}$$

E, retornando ao sistema,

$$\boxed{\beta = 40^\circ, \gamma = 100^\circ \text{ e } \varphi = 140^\circ}$$

3. São dados dois ângulos adjacentes $\widehat{A\hat{O}B}$ e $\widehat{B\hat{O}C}$. Sabendo que o primeiro vale 70° e que a bissetriz do segundo é perpendicular a OA, pede-se calcular o ângulo α que OC forma com a bissetriz de $\widehat{A\hat{O}B}$.

Resolução: A própria Figura 484, representativa da questão, soluciona o problema, visto que a bissetriz OY do ângulo $\widehat{O\hat{A}B}$ forma 35° com seus dois lados e que, por ter de ser perpendicular a OA, a bissetriz OX do ângulo $\widehat{B\hat{O}C}$ tem de se inclinar de 20° , em relação a OB, o que implica em que o ângulo $\widehat{B\hat{O}C}$ valha 40° .

E que, então, o ângulo pedido α seja:

$$\alpha = 35^\circ + 20^\circ + 20^\circ \quad \text{Assim,}$$

$$\boxed{\alpha = 75^\circ}$$

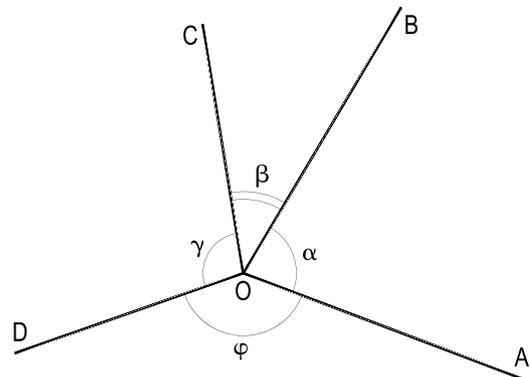


Figura 483

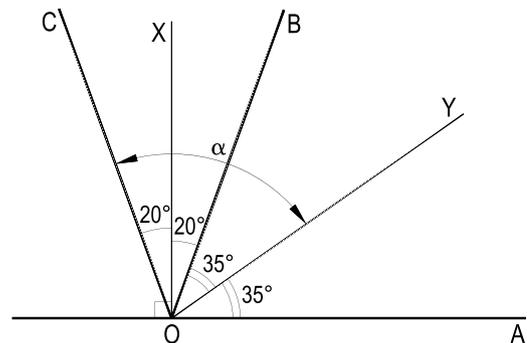


Figura 484

4. **Aumentando-se o gênero de um polígono em 3 unidades, a quantidade de suas diagonais aumenta em 21 unidades. Quantas diagonais possui o polígono original?**

Resolução: Sendo n e D o gênero e o número de diagonais do polígono original e D' o número de diagonais do segundo, pode-se (número 24) escrever:

$$D = \frac{n(n-3)}{2} \quad (1)$$

$$D' = \frac{(n+3)(n+3-3)}{2} \quad (2)$$

E, pelos dados: $(D + 21) = \frac{(n+3)(n+3-3)}{2} \quad (3)$

Reunindo (1) e (3), vem: $\frac{n(n-3)}{2} + 21 = \frac{(n+3)n}{2}$

$$\therefore (n+3)n - n(n-3) = 42$$

$$\therefore n^2 + 3n - n^2 + 3n = 42 \quad \therefore 6n = 42 \quad \therefore n = 7$$

Assim, o número D de diagonais do polígono original, um heptágono, será

$$D = \frac{7(7-3)}{2} = \frac{7 \cdot 4}{2} \quad \therefore \boxed{D = 14}$$

5. **Prove que, em todo quadrilátero côncavo, o ângulo reentrante vale a soma dos três ângulos internos não adjacentes àquele.**

Resolução: Consideremos um quadrilátero côncavo genérico ABCD, sendo C o vértice de sua reentrância, e tracemos por esse vértice C as paralelas Cx e Cy aos lados AB e AD (Figura 485).

Como alternos internos (número 56), temos:

$$\varphi = \beta \quad (1)$$

e $\rho = \gamma \quad (2)$

E, por serem agudos com lados paralelos (número 61):

$$\theta = \alpha \quad (3)$$

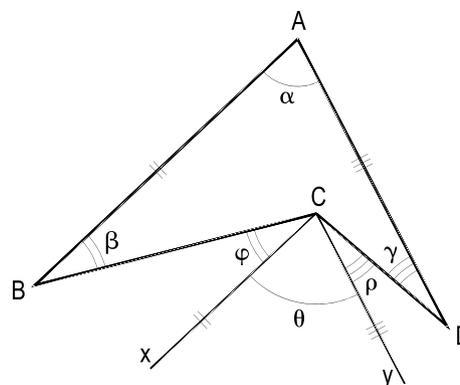


Figura 485

Reunindo essas 3 relações, vem: $\boxed{\varphi + \theta + \rho = \alpha + \beta + \gamma}$

Ora, como o quadrilátero côncavo ABCD é genérico, tal propriedade se aplica a todos os dessa natureza.

6. São dados duas retas oblíquas r e s e dois pontos genéricos J e L (Figura 486).

Pede-se determinar todos os pontos P que, equidistando das retas dadas, formem triângulos isósceles PJL , em que JL seja a base.

Resolução: Para equidistar das duas retas oblíquas dadas r e s , o ponto P procurado deve pertencer a uma das bissetrizes dos ângulos que elas formam (número 43). E, para ser vértice de um triângulo isósceles com base JL (dada), esse ponto P , equidistando de J e de L , tem de pertencer à mediatriz m do segmento JL (número 39).

Assim, basta construir essa mediatriz m , bem como as bissetrizes b_1 e b_2 dos ângulos formados pelas retas r e s . Os pontos P_1 e P_2 , interseções de b_1 e de b_2 com m , resolvem a questão (Figura 486).

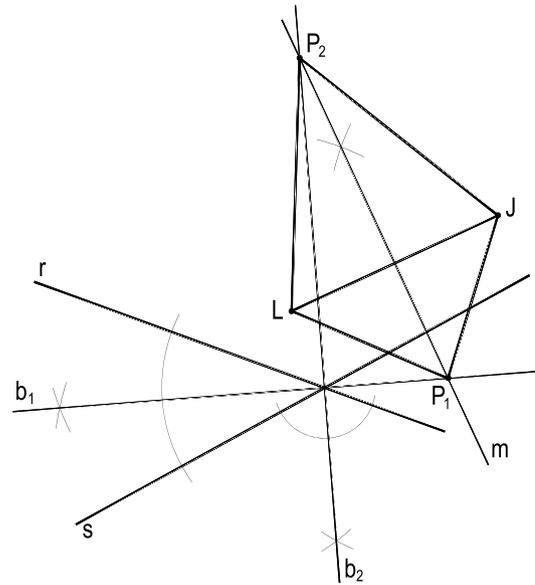


Figura 486

É claro que o problema poderia apresentar apenas uma solução, no caso particular em que m fosse paralela a uma das bissetrizes (b_1 , na Figura 487), ou uma infinidade de soluções se, em caso ainda mais particular, m coincidissem com uma daquelas bissetrizes (b_1 , na Figura 488).

E, por último, nenhuma solução haveria na situação muitíssimo particular em que o ponto comum a r e s fosse o ponto M , médio do segmento JL , sem que qualquer das bissetrizes b_1 e b_2 coincidissem com a mediatriz m , anulando a formação de triângulos com os dois pontos dados (Figura 489).

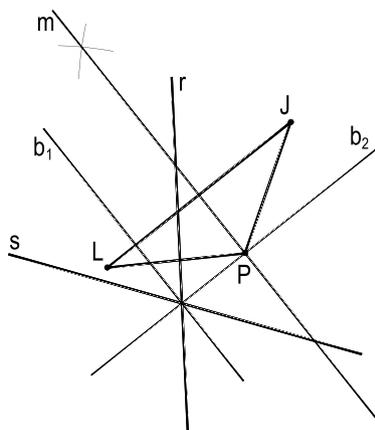


Figura 487

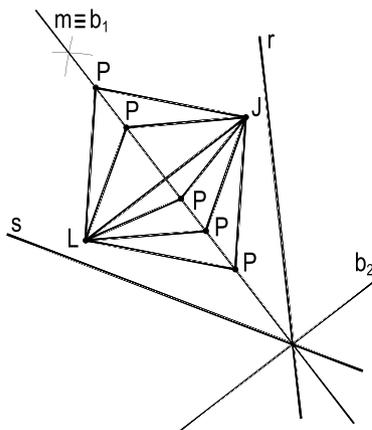


Figura 488

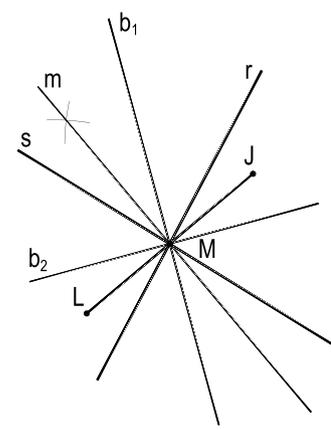


Figura 489

7. Três polígonos convexos têm gêneros respectivamente iguais a n , $n + 1$ e $n + 2$.

Calcule o valor de n , sabendo que a soma de todos os ângulos internos dos três polígonos é igual a 2700° .

Resolução: Para a soma dos ângulos internos dos três polígonos, pode-se (número 66) escrever:

$$\therefore S_i = (n - 2) 2r + (n + 1 - 2) 2r + (n + 2 - 2) 2r$$

$$\therefore 2700^\circ = (n - 2 + n - 1 + n) 180^\circ$$

$$\therefore 3n - 3 = 15 \quad \therefore n - 1 = 5 \quad \therefore \boxed{n = 6}$$

8. As bissetrizes internas dos ângulos B e C de um triângulo acutângulo ABC formam um ângulo de 116° .

Calcule o menor ângulo formado pelas alturas relativas aos lados AB e AC.

Resolução: Consideremos um triângulo acutângulo ABC, suas bissetrizes BI e CI, relativas aos ângulos internos B e C, seu incentro I, bem como suas alturas CH e BL (Figura 490).

Observando o triângulo BIC, podemos anotar, pela lei angular de Thales (número 64):

$$\frac{B}{2} + \frac{C}{2} + 116^\circ = 180^\circ$$

$$\therefore \frac{B}{2} + \frac{C}{2} = 180^\circ - 116^\circ = 64^\circ \quad \therefore B + C = 128^\circ \quad (1)$$

O ângulo α pedido, por ser agudo, com lados perpendiculares aos dos lados AB e AC do triângulo dado, é igual a A, também agudo (número 63.1).

Assim (número 64), o triângulo ABC fornece:

$$\therefore A + B + C = 180^\circ$$

$$\therefore A = 180^\circ - (B + C)$$

Utilizando a relação (1), vem:

$$\therefore A = 180^\circ - 128^\circ = 52^\circ \quad \therefore \boxed{\alpha = 52^\circ}$$

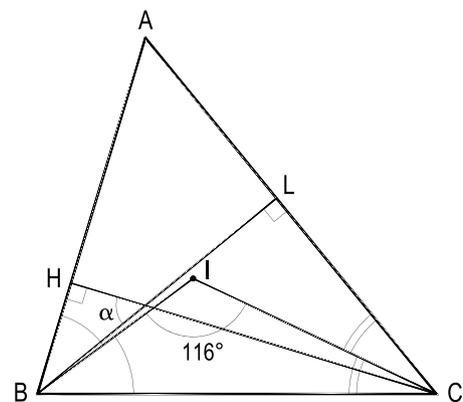


Figura 490

9. Dado um triângulo equilátero ABC, traçando, por um ponto J qualquer, interior a ele, as paralelas JA', JB' e JC' a seus lados, tal como indicado na Figura 491, pede-se provar que a soma JA' + JB' + JC' é constante, para todos os pontos J interiores ao triângulo, calculando o valor dessa constante.

Resolução: Prolongando as paralelas JB' e JC', aos lados AC e AB, obtém-se os pontos P e R e, com a paralela a AC, por A', o ponto Q (Figura 491).

Por terem lados respectivamente paralelos aos de ABC, são equiláteros os triângulos A'PJ e A'BQ. E, considerando os paralelogramos APJC' e A'JB'Q, pode-se anotar:

$$JA' = A'P \quad (1)$$

$$JB' = A'Q = BA' \quad (2)$$

e $JC' = PA \quad (3)$

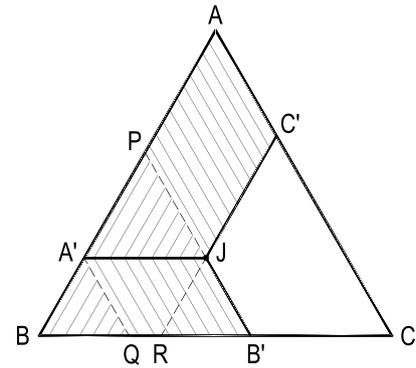


Figura 491

Somando, membro a membro, as relações (1), (2) e (3), vem:

$$JA' + JB' + JC' = BA' + A'P + PA = BA \quad \therefore \quad \boxed{JA' + JB' + JC' = BA}$$

Como J foi um ponto arbitrariamente escolhido no interior do triângulo ABC, conclui-se ser constante a soma das três paralelas consideradas. E mais, que essa soma constante é igual ao próprio lado do triângulo equilátero dado.

10. Calcular o ângulo formado pela altura e pela mediana relativas à hipotenusa BC de um triângulo retângulo ABC, cujos ângulos agudos são diretamente proporcionais aos números 7 e 11.

Resolução: Para os ângulos agudos B e C, temos: $B + C = 90^\circ$

E, pelos dados:

$$\frac{B}{7} = \frac{C}{11} \quad \therefore \quad B = \frac{7}{11} C$$

$$\text{Assim: } \frac{7}{11} C + C = 90^\circ \quad \therefore \quad \frac{18}{11} C = 90^\circ$$

$$\therefore \quad \frac{C}{11} = 5^\circ \quad \therefore \quad C = 55^\circ \text{ e } B = 35^\circ$$

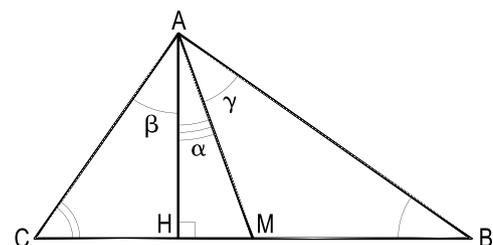


Figura 492

Como (Figura 492), o triângulo MAB é isósceles (número 77) e AHC é retângulo, temos:

$$\beta = 90^\circ - C = 90^\circ - 55^\circ = 35^\circ \text{ e } \gamma = B = 35^\circ$$

$$\text{Assim, o ângulo } \alpha, \text{ pedido, será: } \alpha = 90^\circ - 35^\circ - 35^\circ \quad \therefore \quad \boxed{\alpha = 20^\circ}$$

11. Dado um quadrado ABCD, considere dois triângulos equiláteros ABJ e BCL, o primeiro interior e o segundo exterior ao quadrado. Pede-se provar que os pontos D, J e L são colineares.

Resolução: Porque ABJ é equilátero, seus ângulos internos valem 60° (número 65.6) (Figura 493).

No triângulo isósceles ADJ, temos:

$$2\alpha = 180^\circ - 30^\circ \quad \therefore \quad \alpha = 75^\circ$$

E, no triângulo isósceles B JL:

$$2\beta = 180^\circ - 30^\circ - 60^\circ \quad \therefore \quad \beta = 45^\circ$$

Assim, os segmentos DJ e JL (Figura 493) formam, entre si, um ângulo igual a:

$$\alpha + 60^\circ + \beta = 75^\circ + 60^\circ + 45^\circ = 180^\circ$$

E, por isso (número 12.1), os pontos D, J e L têm de ser colineares.

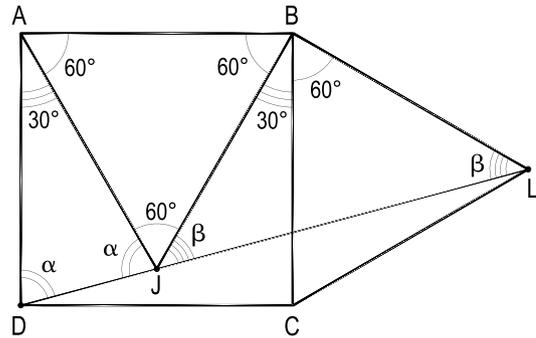


Figura 493

12. Um trapézio escaleno é tal que os extremos de sua mediana de Euler dividem sua base média em três partes iguais. Prove que, nessas condições, a base maior do trapézio deve valer o dobro de sua base menor.

Resolução: Consideremos um trapézio escaleno de bases B e b, tal que os extremos R e S de sua mediana de Euler dividam sua base média MN em três partes iguais, que designaremos por a (Figura 494).

Pode-se, então, escrever (números 88 e 90):

$$MN = \frac{B + b}{2} = 3a \quad (1)$$

$$RS = \frac{B - b}{2} = a \quad (2)$$

Somando e subtraindo essas relações, membro a membro, vem:

$$\frac{B + b}{2} + \frac{B - b}{2} = 4a \quad \therefore \quad \frac{B + B}{2} = 4a \quad \therefore \quad B = 4a \quad (3)$$

$$\text{e} \quad \frac{B + b}{2} - \frac{B - b}{2} = 2a \quad \therefore \quad \frac{b + b}{2} = 2a \quad \therefore \quad b = 2a \quad (4)$$

As relações (3) e (4) proporcionam $B = 2b$, como se queria provar.

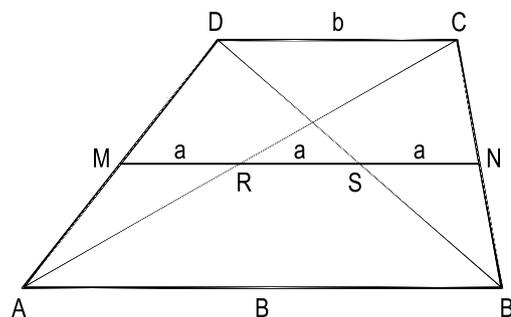


Figura 494

13. Dado um triângulo escaleno ABC, considere o pé J da bissetriz interna AJ e o paralelogramo BJLW, tal que L e W pertençam respectivamente aos lados AC e AB do triângulo. Prove que os segmentos AL e BW são iguais.

Resolução: Porque AJ é bissetriz do ângulo interno A (Figura 495), temos:

$$\alpha = \beta \quad (1)$$

E porque JL e AB são paralelos, como alternos internos (número 56.1), vem:

$$\alpha = \gamma \quad (2)$$

As relações (1) e (2) acarretam:

$$\beta = \gamma \quad (3)$$

Por isso, o triângulo LAJ é isósceles, implicando em que

$$AL = JL \quad (4)$$

Finalmente, o paralelogramo BJLW (Figura 495) fornece

$$JL = BW \quad (5)$$

As relações (4) e (5), então, dão $AL = BW$, como se queria provar.

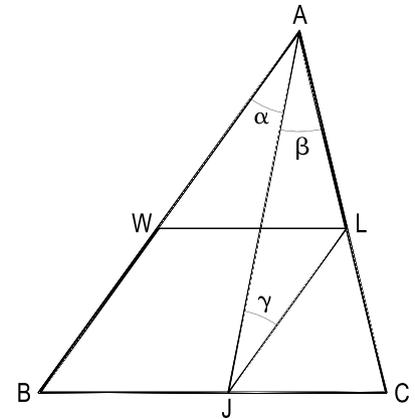


Figura 495

14. Dado um quadrado ABCD, considere os triângulos equiláteros ABR e CDS, conforme a Figura 496, assim como o triângulo RCD e calcule os ângulos α , β e γ indicados.

Resolução: O triângulo isósceles ADR, de base DR e de ângulo interno $A = 90^\circ + 60^\circ = 150^\circ$, dá:

$$2\alpha + 150^\circ = 180^\circ \quad \therefore \quad \boxed{\alpha = 15^\circ}$$

Os triângulos iguais BCR e ADR dão

$$\varphi = \alpha \quad \therefore \quad \boxed{\varphi = 15^\circ}$$

$$E, \text{ então, } \beta = 30^\circ - \varphi \quad \therefore \quad \boxed{\beta = 15^\circ}$$

Por último, a lei angular de Thales (número 64) para o triângulo isósceles RCD fornece:

$$\gamma + 2(60^\circ + \beta) = 180^\circ$$

$$\therefore \quad \gamma + 2(75^\circ) = 180^\circ \quad \therefore \quad \boxed{\gamma = 30^\circ}$$

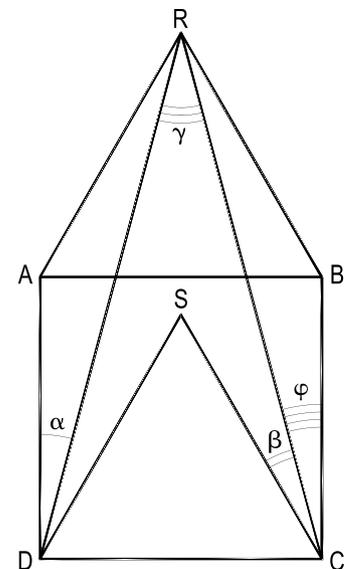


Figura 496

15. Sendo J o ponto médio da mediana AM de um triângulo escaleno qualquer ABC e E o pé da ceviana BJ, prove que $AC = 3 \cdot AE$

Resolução: Consideremos, na Figura 497, conforme a hipótese, a reta r , traçada por M e paralela ao lado AB, e o ponto F em que ela corta AC.

Os triângulos AMF e BCE permitem (número 85) escrever:

$$AE = EF \text{ e } EF = FC$$

$$\therefore AE = EF = FC$$

$$\therefore AC = AE + EF + FC \quad \therefore \boxed{AC = 3 AE}$$

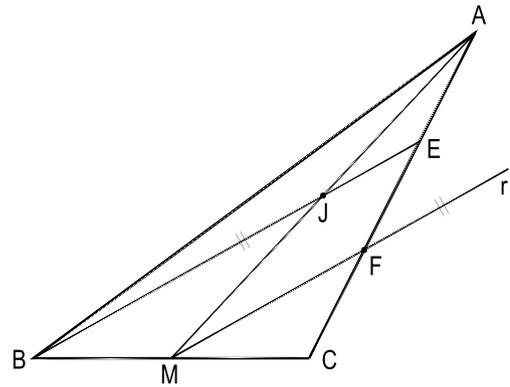


Figura 497

16. Um trapézio é tal que sua base menor é igual à soma de seus dois lados oblíquos. Prove que o ponto de concurso das bissetrizes internas dos ângulos adjacentes à base maior pertence à base menor do trapézio.

Resolução: Seja o trapézio ABCD conforme a hipótese, isto é, tal que $b = \ell + \ell'$ (Figura 498) e consideremos as bissetrizes AJ e BL dos ângulos internos junto à base maior AB do trapézio.

Como alternos internos, temos:

$$\alpha = \gamma \quad (1)$$

$$\text{e } \varphi = \rho \quad (2)$$

E como AJ e BL são bissetrizes:

$$\alpha = \beta \quad (3)$$

$$\text{e } \varphi = \theta \quad (4)$$

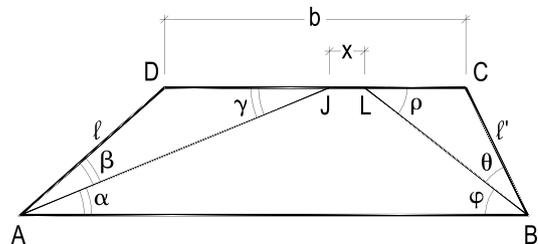


Figura 498

Comparando (1) com (3) e (2) com (4), conclui-se que $\beta = \gamma$ e $\theta = \rho$, ou seja, que os triângulos DAJ e CBL são isósceles, o que permite escrever:

$$DJ = AD = \ell \quad (5)$$

$$\text{e } CL = BC = \ell' \quad (6)$$

$$\text{Por soma, } DJ + CL = \ell + \ell' \quad (7)$$

$$\text{E, como, por hipótese, } DC = \ell + \ell' \quad (8),$$

vem que (Figura 498) o segmento x seja nulo, ou seja, que os pontos J e L devem coincidir, como se pediu demonstrar.

17. Dado um triângulo escaleno qualquer ABC , fixo, considere uma reta r , móvel, pertencendo ao vértice A e exterior ao triângulo. Quando r se movimenta, a soma de suas distâncias aos pontos fixos B e C varia. Pede-se determinar a posição de r que corresponda ao máximo valor de tal soma, estabelecendo o valor desse máximo.

Resolução: Consideremos, como proposto, um triângulo qualquer ABC fixo e uma reta r , móvel, girando em torno de seu vértice A , sem atravessá-lo (Figura 499), e tracemos as perpendiculares BB' e CC' a r , para estudar a soma de suas distâncias BB' e CC' aos pontos fixos B e C .

Observe-se (Figura 499) que há, então, a formação do trapézio retângulo $BCC'B'$, cujas bases representam tais distâncias e que, ao se introduzir a mediana AM , a base média MM' desse trapézio, por valer a semissoma daquelas distâncias (número 88.2), há de interpretar a variação da soma em estudo, durante o movimento de r .

Incluamos, para análise, a circunferência de diâmetro AM (Figura 499).

Como MM' é cateto do triângulo retângulo $M'MA$, que tem a hipotenusa AM fixa, o triângulo se inscreve no semicírculo de diâmetro AM e MM' atinge seu valor máximo quando iguala tal hipotenusa, ou seja, quando a reta r assume a posição r_M , perpendicular àquela mediana AM (Figura 500).

E, nessas condições, o valor máximo que a soma das distâncias BB' e CC' , em estudo, pode alcançar equivale ao dobro da mediana fixa AM do triângulo ABC dado.

Observe-se (Figura 501) que a análise permanece válida para qualquer tipo de triângulo, ficando como única restrição ao estudo desenvolvido que a reta móvel r não atravesse o triângulo ABC , pois, neste caso, as distâncias a ela dos vértices B e C teriam orientações contrárias.

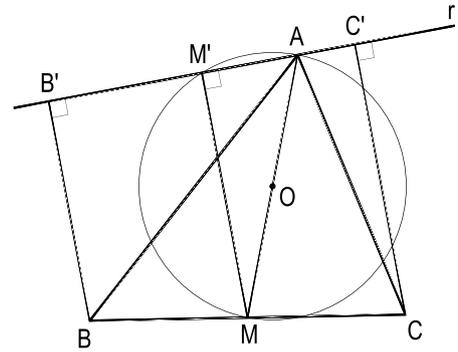


Figura 499

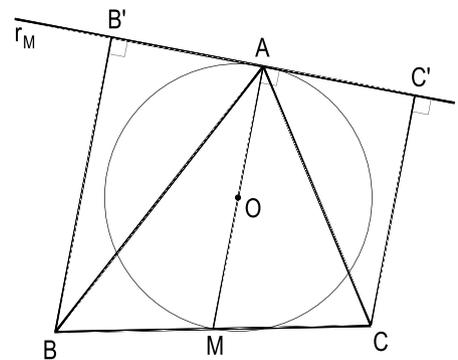


Figura 500

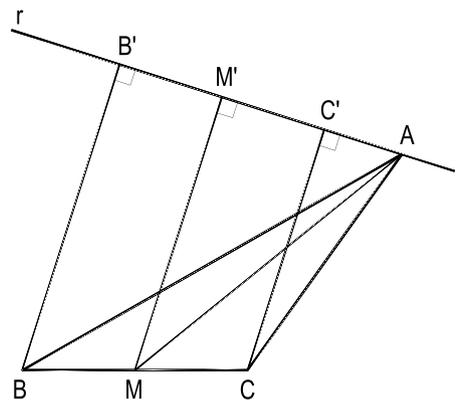


Figura 501

18. Dados dois círculos (O, R) e (O', R') tangentes exteriormente no ponto T , considere dois raios OA e $O'A'$ paralelos, um em cada círculo, e prove que:

- estando num mesmo semiplano limitado pela reta OO' , o ângulo $\widehat{ATA'}$ é reto;
- estando em semiplanos opostos em relação à linha dos centros OO' , os pontos A , T e A' são colineares.

Resolução: Consideremos os círculos (O, R) e (O', R') , conforme a hipótese, e dois de seus raios OA e $O'A'$, paralelos, situados num mesmo semiplano definido pela linha dos centros OO' (Figura 502) ou em semiplanos opostos (Figura 503).

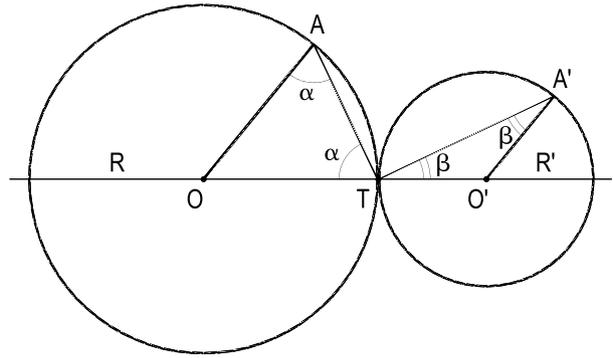


Figura 502

Por terem os lados OA e $O'A'$ paralelos, os ângulos \widehat{AOT} e $\widehat{A'O'T}$ são suplementares (Figura 502) ou iguais (Figura 503) (número 61).

E, pela lei angular de Thales, para os dois triângulos AOT e $A'O'T$ (número 64), pode-se escrever:

$$\widehat{AOT} + 2\alpha + \widehat{A'O'T} + 2\beta = 4r$$

Assim, para a primeira hipótese (Figura 502), temos:

$$2\alpha + 2\beta = 4r - (\widehat{AOT} + \widehat{A'O'T}) = 4r - 2r = 2r \therefore \alpha + \beta = r,$$

Assim, TA e TA' são perpendiculares, como foi pedido demonstrar.

E, para a segunda hipótese (Figura 503):

$$2\alpha + \widehat{AOT} = 2\beta + \widehat{A'O'T} \therefore 2\alpha = 2\beta \therefore \alpha = \beta$$

Assim, os segmentos TA e TA' têm de ser colineares, já que os ângulos \widehat{ATO} e $\widehat{A'TO'}$, tendo alinhados seus lados OT e TO' , são, obrigatoriamente, opostos pelo vértice (número 16).

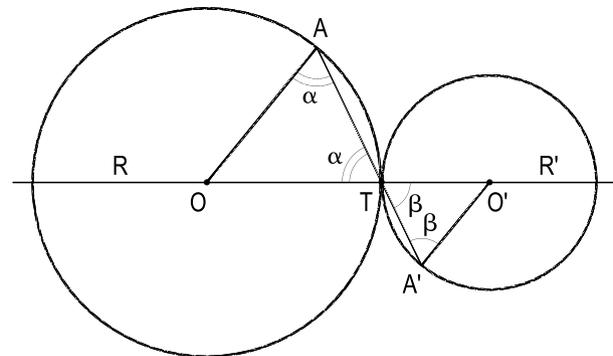


Figura 503

19. Na figura dada, ABCD é um trapézio inscrito no círculo (O) e J é o ponto de encontro das retas suportes de seus lados oblíquos AD e BC.

Provar que o quadrilátero JBOD é inscritível.

Resolução: Bastará provar (número 128.5) que dois ângulos opostos do quadrilátero convexo JBOD são suplementares.

Tracemos a bissetriz JO do ângulo \hat{J} e designemos por a e b, respectivamente, os pares de arcos iguais AM e MB e CN e ND (Figura 504). Como os arcos BC e DA são iguais, (número 108), façamos $BC = DA = c$.

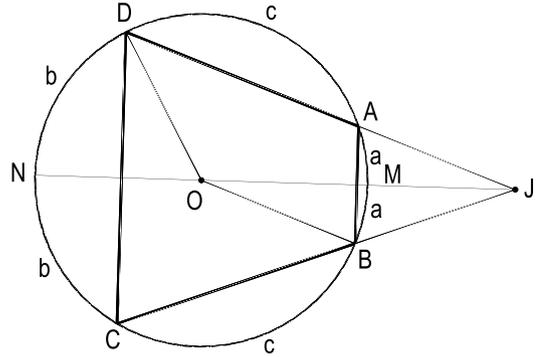


Figura 504

Para os ângulos internos opostos \hat{O} e \hat{J} do quadrilátero JBOD, podemos escrever:

$$\hat{O} = \widehat{BD} = 2a + c$$

$$\hat{J} = \frac{CD - AB}{2} = \frac{2CN - 2BM}{2} = CN - MB = b - a$$

Somando membro a membro, vem:

$$\hat{O} + \hat{J} = 2a + c + b - a = a + c + b = \frac{2a + 2c + 2b}{2} = \frac{360^\circ}{2} = 180^\circ$$

Logo, JBOD é inscritível num círculo.

20. Na figura dada, I é o incentro do triângulo ABC. Provar que $\alpha = \beta$.

Resolução: Designando por A, B e C os ângulos internos do triângulo ABC (Figura 505), temos (número 65.1):

No triângulo ABI:

$$\alpha = \frac{\hat{A}}{2} + \frac{\hat{B}}{2} = \frac{\hat{A} + \hat{B}}{2}$$

No triângulo CIH (número 65.5):

$$\beta = 90^\circ - \frac{\hat{C}}{2} = \frac{180^\circ - \hat{C}}{2}$$

Pela lei angular de Thales (número 64), sabemos que: $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$.

$$\text{Logo: } \hat{A} + \hat{B} = 180^\circ - \hat{C} \quad \therefore \quad \frac{\hat{A} + \hat{B}}{2} = \frac{180^\circ - \hat{C}}{2} \quad \therefore \quad \boxed{\alpha = \beta}$$

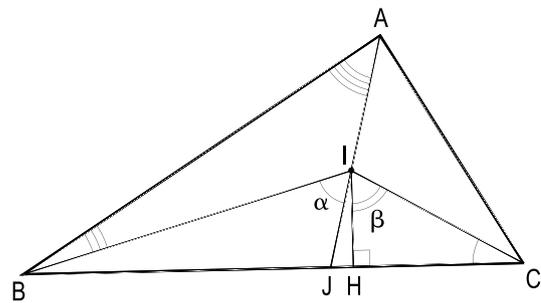


Figura 505

21. Dado um segmento fixo BC, pede-se determinar o lugar geométrico dos baricentros dos triângulos ABC, retângulos em A.

Resolução: Consideremos uma posição genérica do vértice A e o baricentro G do triângulo retângulo ABC (Figura 506).

Porque (número 128.3) a mediana OA, relativa à hipotenusa, vale a metade da hipotenusa BC e porque (número 147) o segmento OG vale um terço da mediana OA, temos:

$$OG = \frac{1}{3} \cdot OA = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot BC = \frac{1}{6} BC.$$

Assim, o valor de OG é constante e, conseqüentemente, o baricentro G descreve um círculo, cujo centro é o ponto O, médio de BC e cujo raio vale $\frac{BC}{6}$.

E como, para que exista o triângulo ABC é preciso que A não coincida com B, nem com C, o lugar geométrico dos baricentros G é a circunferência $(O, \frac{BC}{6})$, exceto os pontos P e Q, segundo os quais ela corta a reta BC (Figura 506).

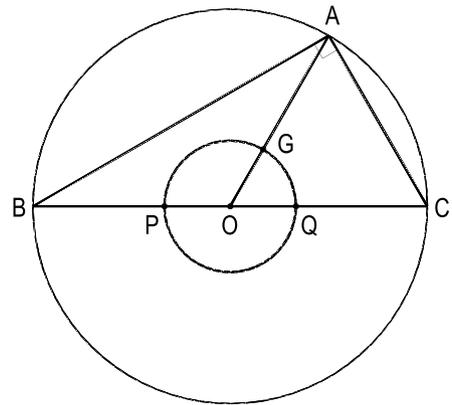


Figura 506

22. Dados o trapézio ABCD, inscrito no círculo (O), e a tangente t, em D, calcular os ângulos α e β , sabendo que $\widehat{A\hat{O}B} = 70^\circ$ e que o triângulo OBC é equilátero (Figura 507).

Resolução: Porque o triângulo OBC é equilátero, o ângulo $\widehat{B\hat{O}C}$ e, em consequência, o arco BC valem 60° .

Como $\widehat{A\hat{O}B} = 70^\circ$, temos:

$$\alpha = \frac{\widehat{ABC}}{2} = \frac{70^\circ + 60^\circ}{2} = 65^\circ$$

Mas os arcos AD e BC são iguais, por corresponderem a cordas iguais. Então:

$$\beta = \frac{\widehat{BD} - \widehat{AD}}{2} = \frac{\widehat{BC} + \widehat{CD} - \widehat{AD}}{2} = \frac{\widehat{CD}}{2}$$

$$\text{Ora, } \widehat{CD} = 360^\circ - (\widehat{AB} + \widehat{BC} + \widehat{AD}) = 360^\circ - (70^\circ + 60^\circ + 60^\circ) = 170^\circ$$

$$\text{Logo, } \beta = \frac{170^\circ}{2} = 85^\circ$$

Respostas: $\alpha = 65^\circ$ e $\beta = 85^\circ$

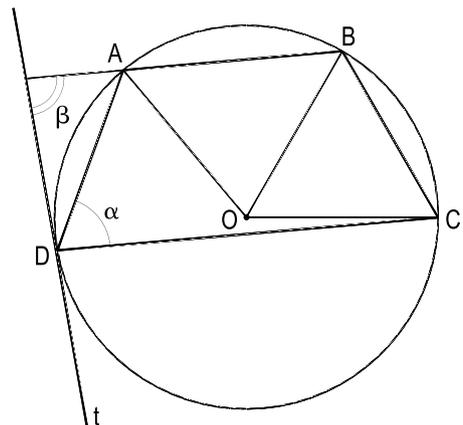


Figura 507

23. Sendo M o ponto médio do menor arco EF de um círculo dado e D e C os pontos em que duas cordas genéricas MA e MB do círculo cortam a corda EF (Figura 508), pede-se provar que o quadrilátero convexo ABCD é inscrito num círculo.

Resolução: Consideremos, no círculo O, uma corda qualquer EF, o ponto M, médio do menor arco EF, outra corda qualquer AB e as duas cordas MA e MB, que cortem EF nos pontos D e C, respectivamente (Figura 508).

Sabe-se (número 128.5) que é condição necessária e suficiente para que o quadrilátero convexo ABCD, em análise, seja inscrito num círculo que ele tenha dois ângulos internos opostos suplementares.

Passemos, então a calcular os ângulos α e β desse quadrilátero (Figura 508), em função dos arcos formados pelas cordas em jogo.

Para tanto, designemos por a cada um dos dois arcos, por hipótese iguais, EM e MF, e por b, c e d os arcos FB, BA e AE, respectivamente.

Para calcular os ângulos α e β , podemos (números 127 e 136) anotar:

$$\alpha = \frac{MB}{2} = \frac{FB + MF}{2} \quad \therefore \quad \alpha = \frac{a + b}{2} \quad (1)$$

$$\text{e } \beta = \frac{BE + MF}{2} = \frac{BA + AE + MF}{2} \quad \therefore \quad \beta = \frac{c + d + a}{2} \quad (2)$$

Somando (1) e (2), temos:

$$\alpha + \beta = \frac{a + b}{2} + \frac{c + d + a}{2}$$

$$\therefore \quad \alpha + \beta = \frac{a + b + c + d + a}{2} \quad \therefore \quad \alpha + \beta = \frac{2a + b + c + d}{2} = 180^\circ$$

E, então, sendo os ângulos internos opostos α e β do quadrilátero ABCD suplementares, ele há de ser inscrito num círculo (número 128.5).

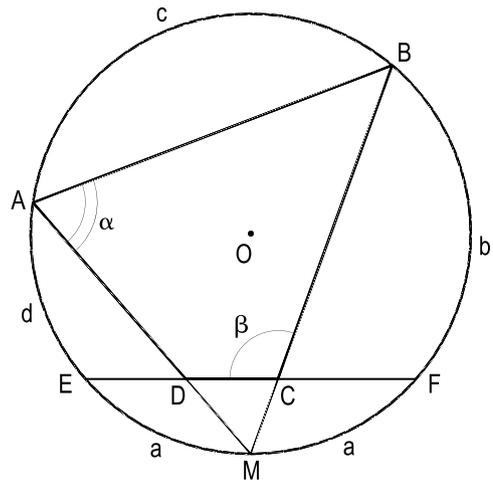


Figura 508

24. Considere um triângulo retângulo qualquer ABC , de hipotenusa BC e dois quadrados, o primeiro, $RSTU$, inscrito em ABC , tendo o lado RS sobre a hipotenusa e os outros dois vértices sobre cada um dos catetos, e o segundo, $BCDE$, exterior ao triângulo dado.

Prove que os centros dos dois quadrados são colineares com o vértice A e que a ceviana que eles formam no triângulo dado ABC é a bissetriz interna do ângulo reto A .

Resolução: Sejam os quadrados $RSTU$, inscrito no triângulo dado ABC , conforme os dados, e $BCDE$, construído sobre sua hipotenusa BC e O e O' seus respectivos centros (Figura 509).

Tracemos as perpendiculares por O e por O' às retas suportes dos catetos AB e AC , dando formação aos triângulos retângulos OUU' , OTT' , $O'BB'$ e $O'CC'$.

Como agudos, com lados respectivamente perpendiculares, são iguais os ângulos $\widehat{B'OB'}$ e $\widehat{C'OC'}$ e, porque as diagonais do quadrado são iguais, resulta a igualdade dos triângulos $O'BB'$ e $O'CC'$ e, por isso, a das distâncias $O'B'$ e $O'C'$ do centro do segundo quadrado às retas AB e AC , o que implica na pertinência do ponto O' à bissetriz do ângulo interno A do triângulo dado (Figura 509).

Da mesma forma conclui-se pela igualdade dos triângulos OUU' e OTT' , das distâncias OU' e OT' de O aos catetos e, enfim, pela pertinência do centro O do quadrado inscrito à bissetriz do ângulo interno A do triângulo ABC , o que demonstra as propriedades propostas.

Aliás, observe-se que bastaria provar a pertinência do centro de um dos dois quadrados à bissetriz interna do ângulo A , visto que o segundo quadrado resulta de uma homotetia do primeiro, a partir do vértice A , sendo, então, respectivamente homotéticos os pontos U e B e os pontos T e C , o que garante serem colineares os centros O e O' dos dois quadrados, pertencentes, pois, a um raio de homotetia, a partir do vértice A .

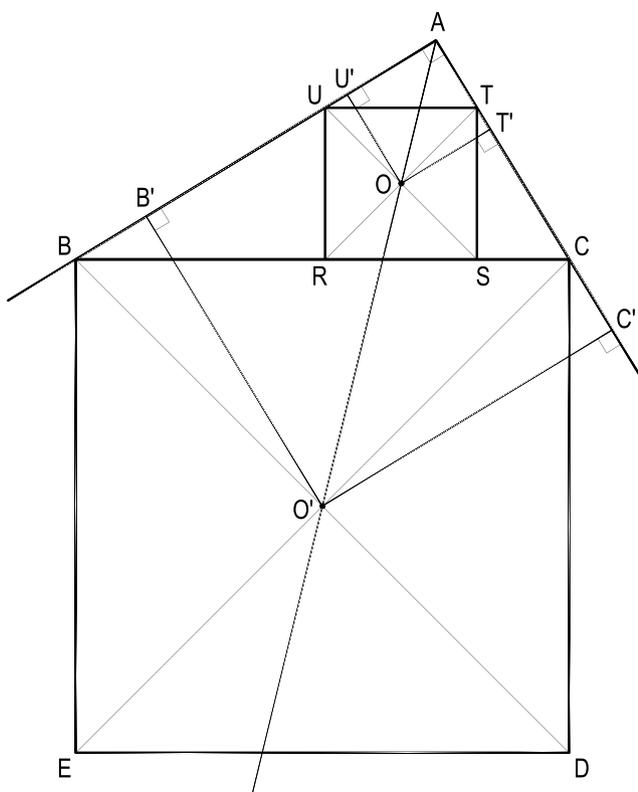


Figura 509

25. Na figura 510, dada, AB é uma corda qualquer do círculo O e BC é igual ao raio desse círculo. Calcular α em função de β .

Resolução: Para a Figura 510, construída segundo os dados, podemos (número 65.1) anotar, para os triângulos OAC e BOC (número 65.1):

$$\alpha = \beta + \varphi \quad (1)$$

$$\varphi = \beta + \gamma \quad (2)$$

E como o triângulo BOC é isósceles,

$$\beta = \gamma \quad (3)$$

Assim, (1), (2) e (3) dão:

$$\alpha = \beta + \beta + \beta \quad \therefore \quad \boxed{\alpha = 3\beta}$$

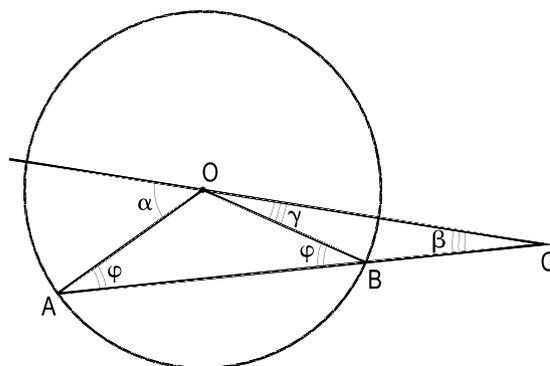


Figura 510

26. Considere as tangentes PA e PB, de um ponto P, qualquer, a um círculo de centro O (A e B sendo os pontos de contato) e o ponto C diametralmente oposto a B.

Prove que as retas PO e AC são paralelas.

Resolução: Por serem iguais os triângulos retângulos PAO e PBO temos (Figura 511): $\alpha = \gamma$

E, para os ângulos de vértice O, em relação à reta BC, vem:

$$\varphi + \alpha + \gamma = \varphi + 2\alpha = 180^\circ$$

$$\therefore \quad \varphi = 180^\circ - 2\alpha \quad (1)$$

Para o triângulo isósceles OCA:

$$\varphi + 2\beta = 180^\circ \quad \therefore \quad \varphi = 180^\circ - 2\beta \quad (2)$$

Comparando (1) e (2), vem: $\alpha = \beta$.

Enfim, por serem iguais os ângulos alternos internos $\widehat{AOP} = \alpha$ e $\widehat{OAC} = \beta$, são paralelas as retas PO e AC (número 57.2), como se queria provar.

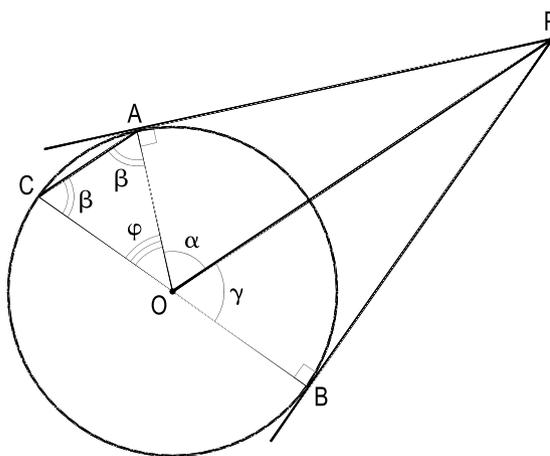


Figura 511

27. Prolonga-se o raio OA de um círculo O de um comprimento AB igual ao seu raio e traça-se uma tangente t ao círculo, sobre a qual levantam-se as perpendiculares AN e BC (Figura 512).

Sendo 126° o valor do ângulo \widehat{OAC} , pede-se calcular o ângulo \widehat{ACB} (IME, vestibular de 1964).

Resolução: Sendo T o ponto de contato da tangente t ao círculo considerado, AN será a base média do trapézio retângulo OTCB (Figura 512) e, assim, restará isósceles o triângulo ACT, o que dá

$$\beta = \gamma \quad (1)$$

Como alternos internos entre as paralelas OT e AN, para a secante AT, vem

$$\beta = \alpha \quad (2)$$

Da mesma forma, para a secante AC às paralelas BC e AN, temos

$$\gamma = \theta \quad (3)$$

Reunindo (1), (2) e (3), vem: $\alpha = \beta = \gamma = \theta$

Como, por hipótese, $\widehat{OAC} = 126^\circ$,

temos: $\alpha + \beta + \gamma = 126^\circ$,

ou $3\gamma = 126^\circ \therefore \gamma = 42^\circ$

Então, $\widehat{ACB} = \theta = \gamma = 42^\circ$

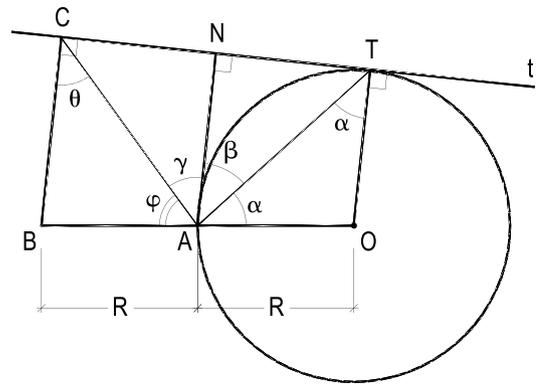


Figura 512

28. São dados um círculo de centro O e duas tangentes JA e JB a ele, A e B sendo os pontos de contato. Considere um ponto P qualquer do segmento JA e a tangente PM ao círculo dado, M sendo o ponto de contato. Prove que $\widehat{JOP} = \widehat{BAM}$.

Resolução: Apreciando a Figura 513, obediente ao enunciado, tracemos a corda AB, que une os pontos de contato A e B das duas tangentes consideradas, que sabemos (número 120.3) ser perpendicular à reta JO.

Tomemos um ponto P qualquer do segmento JA e tracemos a tangente PM ao círculo dado, notando que, tanto quanto acima destacado, a corda AM e a reta PO são perpendiculares (número 120.3).

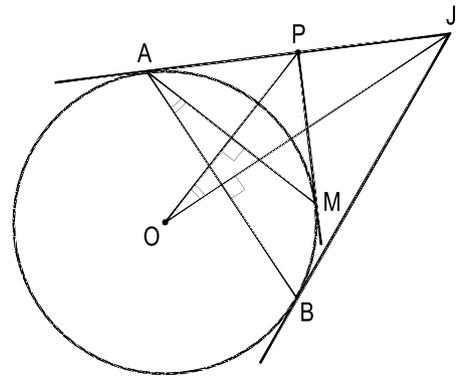


Figura 513

Assim, para todo ponto P de JA, os ângulos agudos \widehat{JOP} e \widehat{BAM} têm seus lados JO e OP respectivamente perpendiculares a BA e a AM, o que obriga (número 61) sua igualdade, como se queria provar.

29. Num círculo de centro O inscreve-se um triângulo escaleno ABC , de incentro I . Sendo M o ponto médio do arco BC , oposto ao vértice A , pede-se provar que M é o circuncentro do triângulo BIC .

Resolução: Consideremos o círculo O , um triângulo escaleno ABC qualquer nele inscrito e o ponto M , médio do arco BC oposto ao vértice A (Figura 514), e seja I o incentro de ABC .

Sabe-se (número 134) que o ponto M , médio do arco BC pertence à bissetriz AI e, da mesma forma, que as retas BI e CI cortam a circunferência do círculo O nos pontos N e P , respectivamente médios dos arcos AC e AB , por serem as bissetrizes internas dos ângulos B e C do triângulo ABC . Designemos, então, por a , b e c os pares de arcos iguais formados (Figura 514).

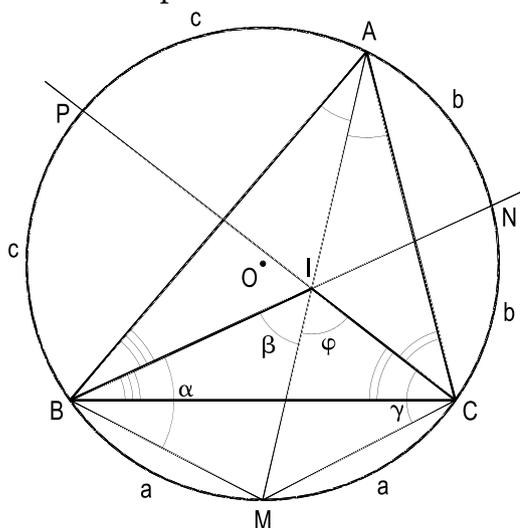


Figura 514

Podemos (números 127 e 136) escrever:

$$\alpha = \frac{MCN}{2} = \frac{MC + CN}{2} = \frac{a + b}{2} \quad (1)$$

$$\text{e} \quad \beta = \frac{BM + AN}{2} = \frac{a + b}{2} \quad (2)$$

$$\text{Comparando (1) e (2), temos: } \alpha = \beta \quad (3)$$

Por isso, o triângulo MBI é isósceles.

$$\text{E, então, para os lados de extremos } M : MB = MI \quad (4)$$

$$\text{E mais, } \gamma = \frac{MBP}{2} = \frac{MB + BP}{2} = \frac{a + c}{2} \quad (5)$$

$$\varphi = \frac{MC + AP}{2} \quad \therefore \quad \varphi = \frac{a + c}{2} \quad (6)$$

$$\text{Comparando (5) e (6), vem } \gamma = \varphi \quad (7)$$

$$\text{Como consequência, o triângulo } MIC \text{ é isósceles. E, por isso, } MC = MI \quad (8)$$

As relações (4) e (8) dão $MB = MI = MC$, o que implica em ser M o ponto equidistante dos vértices B , I e C do triângulo BIC .

Ou seja, em ser M o circuncentro de triângulo BIC , como se pediu demonstrar.

30. De quanto é preciso prolongar o maior lado de um triângulo de lados iguais a 12 m, 22 m e 30 m, para que ele encontre a bissetriz do ângulo externo relativo ao vértice oposto?

Resolução: Sendo AE a bissetriz do ângulo externo A do triângulo ABC, referente ao maior lado BC, conforme os dados, pelo teorema das bissetrizes (número 164), podemos escrever (Figura 515):

$$\frac{CE}{BE} = \frac{AC}{AB} \quad \therefore \quad \frac{CE}{BC + CE} = \frac{AC}{AB}$$

$$\therefore \quad \frac{x}{30 + x} = \frac{12}{22} = \frac{6}{11}$$

$$\therefore \quad 180 + 6x = 11x$$

$$\therefore \quad 5x = 180 \quad \therefore \quad \boxed{x = 36 \text{ m}}$$

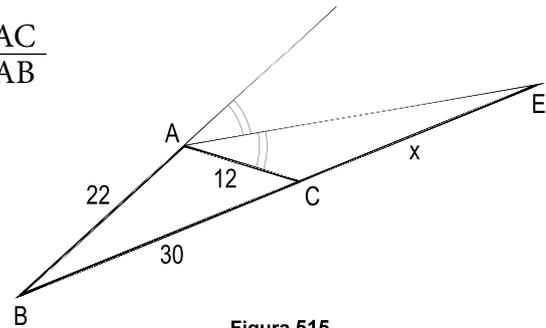


Figura 515

31. Um triângulo ABC tem lados AB = 6 cm, AC = 8 cm e BC = 10 cm.

Pede-se calcular a distância entre os pés das bissetrizes interna BI e externa BE.

Resolução: Utilizando o teorema das bissetrizes (número 164), temos (Figura 516):

$$\frac{IA}{IC} = \frac{BA}{BC} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

$$\frac{x}{8 - x} = \frac{3}{5} \quad \therefore \quad 24 - 3x = 5x$$

$$\therefore \quad 8x = 24 \quad \therefore \quad x = 3$$

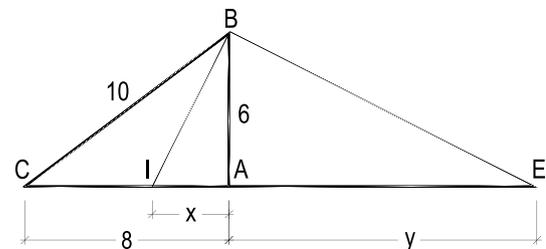


Figura 516

Mais uma vez, pelo teorema das bissetrizes (número 164), vem:

$$\frac{EA}{EC} = \frac{BA}{BC} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

$$\therefore \quad \frac{y}{8 + y} = \frac{3}{5} \quad \therefore \quad 5y = 24 + 3y$$

$$\therefore \quad 2y = 24 \quad \therefore \quad y = 12$$

Assim, a distância pedida é $IE = x + y = 3 + 12 = 15 \text{ cm}$

Resposta: $\boxed{15 \text{ cm}}$

32. Duas circunferências O e O' , secantes, são tais que o centro de O é interior ao círculo O' . A tangente TA à circunferência O , num dos pontos T comuns às circunferências, encontra a linha dos centros OO' em A e é tal que são colineares os pontos T , O e J , este último sendo o extremo do raio $O'J$, perpendicular à linha OO' e situado no semiplano oposto a T em relação a OO' .

Pede-se provar que, nestas condições, os pontos A e O dividem harmonicamente o diâmetro EF do círculo O' , colinear com A .

Resolução: Consideremos (Figura 517) as circunferências O e O' conforme proposto e a tangente TA à primeira e tracemos o raio $O'J$, perpendicular à linha dos centros OO' .

Com isso, TJ há de ser a bissetriz interna do triângulo TEF , referente ao vértice T (número 134).

E como TA é perpendicular a TO , TA é a bissetriz externa, em T (número 12.3).

Assim, como pés dessas duas bissetrizes (número 166), os pontos A e O dividem harmonicamente o segmento EF , como se queria demonstrar.

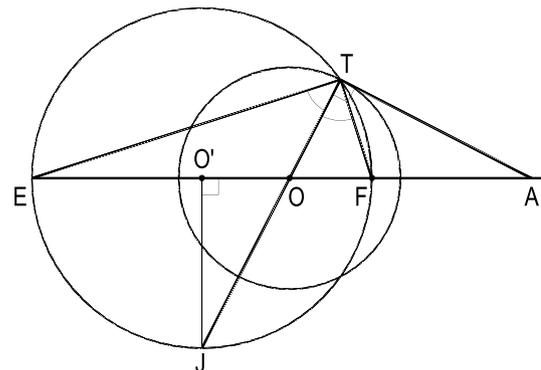


Figura 517

33. Na Figura 518, a diferença entre os ângulos B e C do triângulo ABC é igual a um reto.

Sendo H o ortocentro de ABC , demonstre a igualdade dos triângulos ABC e HBC .

Resolução: Seja o triângulo ABC , conforme a hipótese, e tracemos suas alturas, referentes aos vértices A e B , obtendo seu ortocentro H (Figura 518).

Como agudos com lados respectivamente perpendiculares, são iguais os ângulos \widehat{AHy} e \widehat{ACB} (número 63). Assim:

$$\beta = \alpha$$

E, como alternos internos para AH e Bx :

$$\alpha = \gamma$$

$$\text{Logo } \beta = \gamma$$

$$\text{Por isso, } BH = AB \text{ e } CH = AC$$

Assim, por terem lados respectivamente iguais, são iguais (3º caso) os triângulos ABC e HBC , como se queria provar.

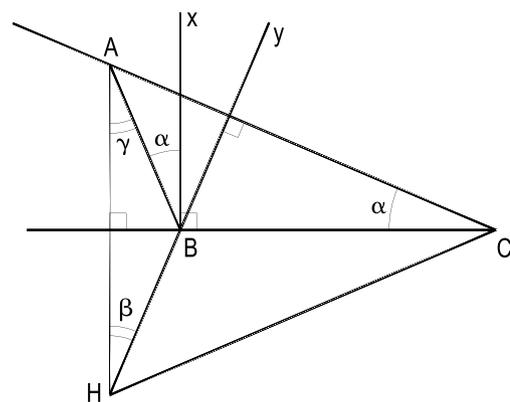


Figura 518

34. O triângulo ABC tem 18 cm de perímetro. Sabendo que BC = 6 cm e que o segmento limitado pelos pés das bissetrizes interna e externa relativas ao vértice A mede 8 cm, calcular AB, AC, bem como as bissetrizes AI e AE (Figura 519).

Resolução: Sejam o triângulo ABC e AI e AE as bissetrizes relativas a seu vértice A (Figura 519).

Porque I e E dividem harmonicamente a base BC (número 166), podemos escrever:

$$\frac{IB}{IC} = \frac{EB}{EC}$$

$$\therefore \frac{x}{6-x} = \frac{8+x}{8-(6-x)}$$

$$\therefore 2x + x^2 = 48 + 6x - 8x - x^2$$

$$\therefore 2x^2 + 4x - 48 = 0$$

$$\therefore x^2 + 2x - 24 = 0$$

$$\therefore x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+96}}{2} = \frac{-2 \pm 10}{2} = 4 \text{ (abandonada a segunda raiz por igualar o lado BC).}$$

Assim, IB = 4 cm e IC = 2 cm

Pelo teorema das bissetrizes (número 164), temos:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{IB}{IC} = \frac{4}{2} = 2 \quad \therefore \quad AB = 2AC$$

$$\text{Pelos dados, } 2p = 18 \quad \therefore \quad 18 = 6 + 2AC + AC$$

$$\therefore 3AC = 12 \quad \therefore \quad \boxed{AC = 4 \text{ cm}}$$

$$\text{E, então, } AB = 2AC \quad \therefore \quad \boxed{AB = 8 \text{ cm}}$$

E, para os cálculos das bissetrizes AI e AE, podemos (números 207 e 208) escrever:

$$BC = a = 6, \quad AB = c = 8, \quad AC = b = 4, \quad p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{18}{2} = 9$$

$$AI = \frac{2}{b+c} \sqrt{bcp(p-a)} = \frac{2}{12} \sqrt{4 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 3} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 3}{12} \sqrt{8 \cdot 3}$$

$$AI = \frac{12 \cdot 2}{12} \sqrt{6} \quad \therefore \quad \boxed{AI = 2\sqrt{6} \text{ cm}}$$

$$AE = \frac{2}{c-b} \sqrt{bc(p-b)(p-c)} = \frac{2}{4} \sqrt{4 \cdot 8 \cdot 5 \cdot 1} = \frac{2 \cdot 4}{4} \sqrt{2 \cdot 5}$$

$$AE = \frac{8}{4} \sqrt{10} \quad \therefore \quad \boxed{AE = 2\sqrt{10} \text{ cm}}$$

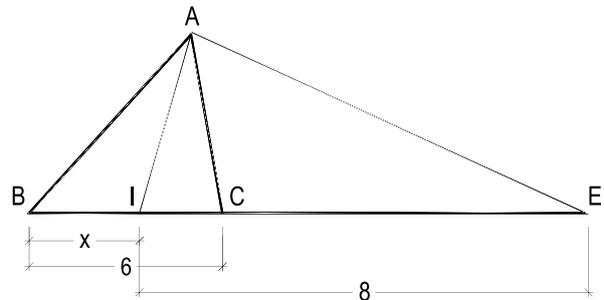


Figura 519

35. Calcule os ângulos internos do triângulo órtico de um triângulo escaleno acutângulo ABC em função dos ângulos internos deste.

Resolução: Consideremos um triângulo escaleno acutângulo ABC qualquer e seu triângulo órtico A'B'C' (Figura 520).

Porque são retângulos os triângulos BB'C e BCC', eles se inscrevem no semicírculo de diâmetro BC.

Assim (Figura 520), o valor do ângulo interno C' do triângulo órtico é:

$$C' = 180^\circ - (\alpha + \beta) \quad (1)$$

E como (número 145.2) o lado AB do triângulo original é a bissetriz externa relativa ao vértice C' do órtico, pode-se anotar:

$$\alpha = \beta \quad (2)$$

Levando (2) a (1), vem: $C' = 180^\circ - 2\alpha$

Ora, sabe-se que $\alpha = \frac{a+b}{2}$ e que $C = \frac{a+b}{2}$

Por isso, $\alpha = C$ e, então, $C' = 180^\circ - 2C$

E, analogamente, chegaríamos a $A' = 180^\circ - 2A$ e $B' = 180^\circ - 2B$

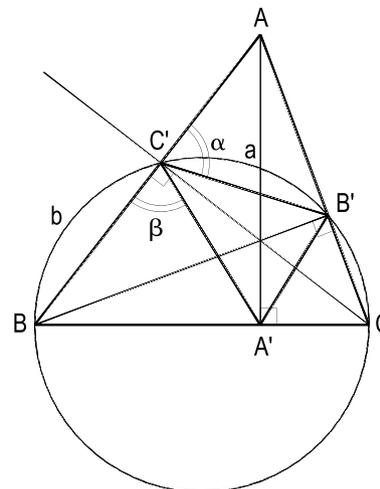


Figura 520

36. Dado um triângulo isósceles ABC, tal que AB = AC = 8 cm, considere o círculo a ele circunscrito e a corda AJ = 10 cm, desse círculo.

Pede-se calcular o valor PJ da porção dessa corda limitada entre a base do triângulo e a circunferência a ele circunscrita.

Resolução: Sendo AQ a ceviana isogonal de AP (Figura 521), porque os ângulos inscritos C e J são iguais (valem, ambos, a metade do arco AB), os triângulos AJB e ACQ são semelhantes (1º caso), o que permite escrever:

$$\frac{AB}{AJ} = \frac{AQ}{AC} \quad (1)$$

Mas, se ABC é isósceles, APQ também o é.

$$\text{Logo } AP = AQ \quad (2)$$

Reunindo (1) e (2), vem:

$$\frac{AB}{AJ} = \frac{AP}{AC} = \frac{AJ - x}{AC} \quad \therefore \quad \frac{8}{10} = \frac{10 - x}{8} \quad \therefore \quad 64 = 100 - 10x \quad \therefore \quad 10x = 36$$

E, então, $PJ = x = 3,6$

Resposta: $PJ = 3,6 \text{ cm}$

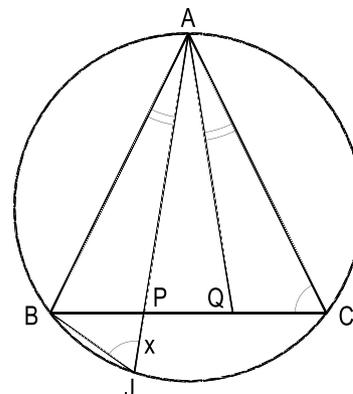


Figura 521

37. Um retângulo tem a base igual ao dobro da altura. Calcule a razão, maior que um, entre as projeções de dois lados consecutivos do retângulo sobre a diagonal que os une.

Resolução: Seja ABCD o retângulo conforme os dados e AJ e JC as projeções de dois lados consecutivos sobre a diagonal AC (Figura 522).

Por terem os ângulos A e B iguais (agudos, com lados perpendiculares), são semelhantes os triângulos retângulos ABJ, BCJ e ABC, o que permite anotar:

$$\frac{AJ}{AB} = \frac{BJ}{BC} \quad \therefore \quad \frac{AJ}{BJ} = \frac{AB}{BC} = 2 \quad (1)$$

e
$$\frac{BJ}{JC} = \frac{AB}{BC} \quad \therefore \quad \frac{BJ}{JC} = 2 \quad (2)$$

(1) e (2) dão: $AJ = 2BJ = 2(2JC) \quad \therefore \quad AJ = 4JC$

A razão pedida é, pois, igual a 4.

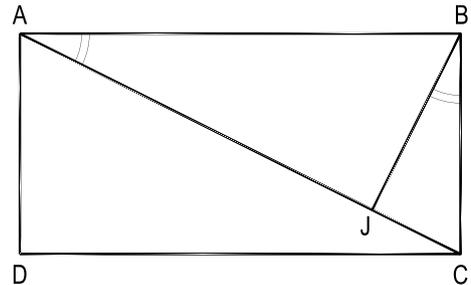


Figura 522

38. Um trapézio escaleno de altura dada h tem a base maior igual ao dobro da menor. Calcule a distância à base menor da reta a ela paralela que forma três segmentos consecutivos iguais entre os lados oblíquos e as diagonais do trapézio.

Resolução: Inicialmente, observemos que há duas posições para a paralela às bases do trapézio ABCD que provoca três segmentos consecutivos iguais entre lados oblíquos e diagonais (Figura 523). Para calcular as distâncias pedidas x e y , utilizemos as semelhanças de triângulos abaixo.

$$\triangle DAB \sim \triangle DPQ \quad \therefore \quad \frac{m}{b} = \frac{h-x}{h} \quad (1)$$

$$\triangle ADC \sim \triangle APR \quad \therefore \quad \frac{2m}{2b} = \frac{x}{h} \quad (2)$$

(1) e (2), iguais, dão: $\frac{h-x}{h} = \frac{x}{h} \quad \therefore \quad h-x = x \quad \therefore \quad 2x = h \quad \therefore \quad \boxed{x = \frac{h}{2}}$

$$\triangle ADC \sim \triangle AEF \quad \therefore \quad \frac{n}{2b} = \frac{y}{h} \quad (3)$$

$$\triangle DAB \sim \triangle DEG \quad \therefore \quad \frac{2n}{b} = \frac{h-y}{h} \quad (4)$$

Dividindo, membro a membro: $\frac{1}{4} = \frac{y}{h-y} \quad \therefore \quad h-y = 4y \quad \therefore \quad \boxed{y = \frac{h}{5}}$

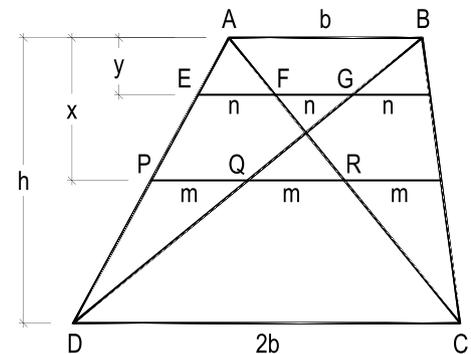


Figura 523

39. Prove que, para todo trapézio, a paralela às bases, traçada pelo ponto comum às diagonais, determina, entre os lados oblíquos, um segmento igual à média harmônica das bases.

Resolução: Seja r a paralela às bases do trapézio genérico ABCD, traçada pelo ponto M comum às suas diagonais (Figura 524), dando formação ao segmento PQ.

De início, observe-se que M é o ponto médio do segmento PQ, já que:

$$\frac{PM}{b} = \frac{MQ}{b} = \frac{h-d}{h} = 1 - \frac{d}{h} \quad (1)$$

Os triângulos semelhantes APM e ADC fornecem:

$$\frac{PM}{B} = \frac{d}{h} \quad \therefore h = \frac{Bd}{PM} \quad (2)$$

Levando (2) a (1), temos: $\frac{PM}{b} = 1 - \frac{d}{Bd/PM}$

Ou seja: $\frac{PM}{b} = 1 - \frac{d \cdot PM}{Bd}$

$$\therefore \frac{x}{2b} = 1 - \frac{x}{2B} \quad \therefore 1 = \frac{x}{2B} + \frac{x}{2b} \quad \therefore \boxed{\frac{2}{x} = \frac{1}{B} + \frac{1}{b}}$$

relação que demonstra (número 162) a propriedade proposta.

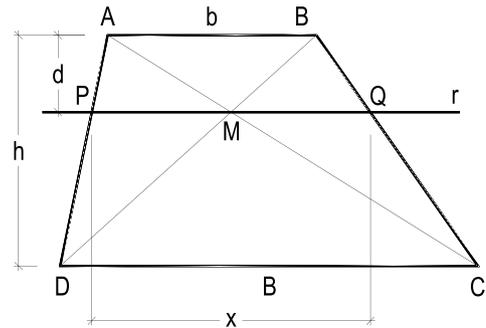


Figura 524

40. Determinar, graficamente, os conjugados harmônicos dos extremos A e B de um segmento dado AB, numa razão conhecida m/n.

Resolução: Procura-se determinar os pontos M e N, tais que $\frac{MA}{MB} = \frac{NA}{NB} = \frac{m}{n}$.

Para tal, basta traçar por A e por B duas paralelas quaisquer, sobre as quais são aplicados os valores dados m e n, m apenas num sentido, mas n nos dois (Figura 525).

As retas que unem os extremos dos segmentos assim construídos cortam a reta AB produzindo os conjugados harmônicos M e N procurados, tais as semelhanças dos triângulos AA'M e BB''M e dos triângulos AA'N e BB'N, assim formados, em ambos os casos em razões iguais à fração m/n.

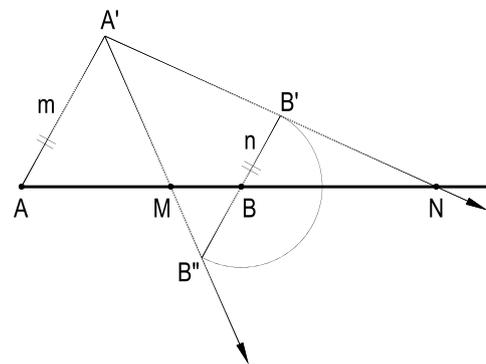


Figura 525

41. Instituir uma relação que envolva os raios dos círculos inscrito r , circunscrito R e exinscrito R' relativo à hipotenusa de um triângulo retângulo qualquer.

Resolução: Sendo a e p , respectivamente, a hipotenusa e o semiperímetro do triângulo, temos (número 218):

$$R' = p \quad \text{e} \quad r = p - a$$

$$\text{Então, } R' - r = p - (p - a) = a \quad (1)$$

E como (número 218) $R = \frac{a}{2}$, a relação (1) também se escreve: $R' - r = 2R$

42. Calcular a altura h de um triângulo retângulo, relativo à sua hipotenusa, em função dos raios r do círculo inscrito, R do circunscrito e R_a, R_b e R_c de seus três exinscritos.

Resolução: Sabe-se (números 218 e 209) que:

$$r = p - a, \quad R = \frac{a}{2}, \quad R_a = p, \quad R_b = p - c, \quad R_c = p - b$$

$$h = \frac{2}{a} \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \quad \therefore$$

$$h = \frac{\sqrt{r \cdot R_a \cdot R_b \cdot R_c}}{R}$$

43. Calcular o raio r do círculo inscrito num triângulo isósceles, cujo maior lado mede $(4 + 2\sqrt{3})\text{m}$, sabendo que um de seus ângulos internos vale 120° .

Resolução: O ângulo de 120° há de ser o oposto à base do triângulo, que será, por isso, seu maior lado.

Introduzido o círculo inscrito, para calcular seu raio r , basta considerar o triângulo retângulo ITA (Figura 526), cujo ângulo interno I vale 30° , o que permite (número 200.3) escrever:

$$AT = \frac{r}{\sqrt{3}} \quad \text{e} \quad AI = \frac{2r}{\sqrt{3}}$$

$$AM = AI + IM = \frac{2r}{\sqrt{3}} + r,$$

O triângulo AMB dá:

$$BM = (AM) \sqrt{3} = \left(\frac{2r}{\sqrt{3}} + r\right) \sqrt{3}$$

$$\therefore \quad BM = 2r + r\sqrt{3}$$

Como $BM = \frac{BC}{2} = \frac{4 + 2\sqrt{3}}{2}$,

temos $2 + \sqrt{3} = r(2 + \sqrt{3})$

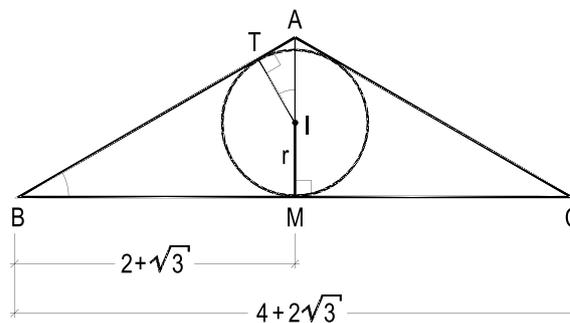


Figura 526

$$\therefore \quad r = 1\text{m}$$

44. Calcular o raio do círculo inscrito num setor circular de 60° e 6 cm de raio.

Resolução: Sejam OAB o setor circular de 60° e (C) o círculo nele inscrito (Figura 527).

Para o cálculo do raio r desse círculo, basta utilizar o triângulo retângulo OCJ, que (número 200.3) dá:

$$\begin{aligned} OC = 2r & \quad \therefore \quad OT = OC + CT = 3r \\ \therefore 6 = 3r & \quad \therefore \quad \boxed{r = 2 \text{ cm}} \end{aligned}$$

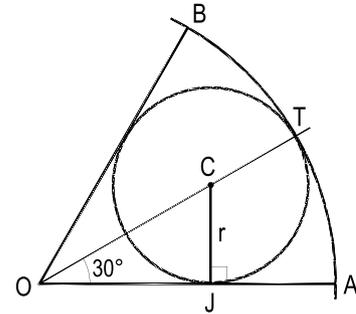


Figura 527

45. As tangentes JA e JB à circunferência (O, r) têm A e B como pontos de contato com ela. Sabendo que AB = 12 cm e que o triângulo JAB tem perímetro igual a 32 cm, pede-se calcular r.

Resolução: A partir do perímetro 32 do triângulo JAB, e sabendo que AB = 12, chega-se a JA = JB = 10 e, então, o triângulo retângulo JMA (Figura 528) é Pitagórico (número 200.1).

Mas, por ter os ângulos agudos J e A iguais (lados perpendiculares), o triângulo MAO, sendo semelhante a JMA, também será Pitagórico e, então:

$$AO = \left(\frac{5}{4}\right) AM \quad \therefore \quad \boxed{r = 7,5 \text{ cm}}$$

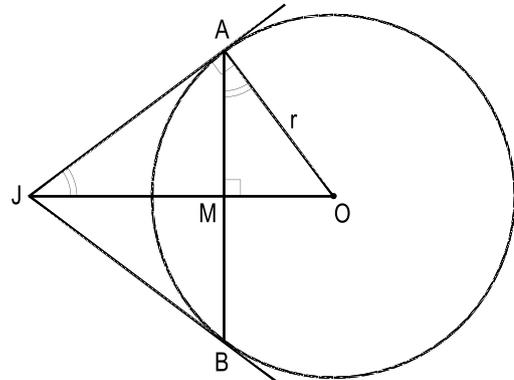


Figura 528

46. Calcular a altura do trapézio escaleno que tem bases iguais a 16 m e 3 m e lados oblíquos iguais a 12 m e 5 m.

Resolução: Consideremos o trapézio escaleno ABCD, conforme os dados, e tracemos, pelo vértice A, a paralela AJ ao lado BC, formando o triângulo ADJ, de lados todos conhecidos (Figura 529).

A altura h do trapézio é, então, a própria altura, relativa ao lado DJ desse triângulo, que se calcula (número 209) pela expressão:

$$h = \frac{2}{13} \sqrt{15 \cdot 3 \cdot 10 \cdot 2} = \frac{2}{13} \sqrt{900}$$

Simplificando: $\boxed{h = \frac{60}{13} \text{ m}}$

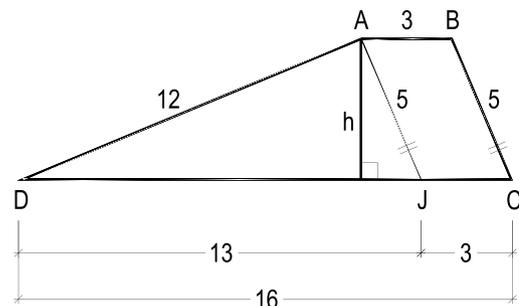


Figura 529

47. Num triângulo escaleno ABC são colocados n círculos iguais, consecutivamente tangentes exteriormente, todos apoiados na base BC, o primeiro deles tangenciando o lado AB e o último o lado AC e todos interiores ao triângulo.

Sendo a e r os valores do lado BC e do raio do círculo inscrito no triângulo, pede-se calcular o valor do raio x dos círculos iguais, em função de a , r e n .

Resolução: Consideremos o triângulo escaleno genérico ABC, seu círculo inscrito (I, r) e a sequência de n círculos apoiados na base BC, conforme o enunciado (Figura 530), todos com raio x , cujo valor se procura.

Sendo E e F os centros dos círculos extremos do conjunto apoiado no lado BC, e I o incentro de ABC, são colineares os pontos B, E e I, assim como os pontos C, F e I, por definirem duas bissetrizes internas do triângulo. Assim, os triângulos semelhantes IBC e IEF (Figura 530) permitem anotar:

$$\frac{EF}{BC} = \frac{IL}{IP}$$

$$\therefore \frac{x + 2x + 2x + \dots + 2x + x}{a} = \frac{r - x}{r}$$

$$\therefore \frac{(n - 1) 2x}{a} = \frac{r - x}{r}$$

$$\therefore r(n - 1) 2x = a(r - x)$$

$$\therefore 2r(n - 1)x + ax = ar$$

$$\therefore [2r(n - 1) + a] x = ar$$

$$\therefore \boxed{x = \frac{ar}{2r(n - 1) + a}}$$

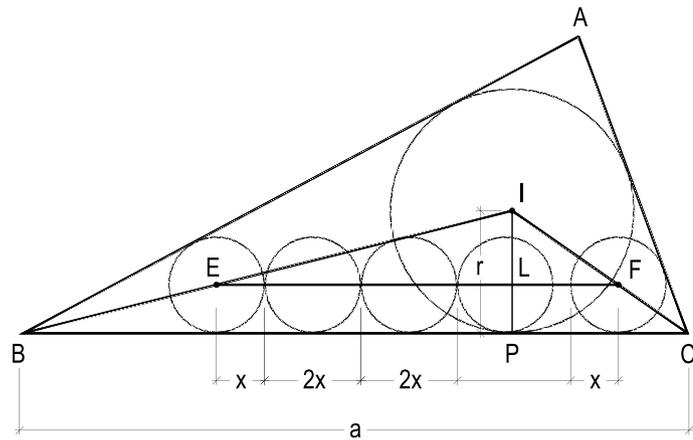


Figura 530

Esta é a expressão pedida que permite calcular o valor dos raios x dos círculos iguais, em função da base a , do raio r do círculo inscrito no triângulo e da quantidade n de círculos considerados.

Observe-se que a expressão se aplica, naturalmente, até para o caso extremo em que, se fazendo $n = 1$, o valor de x restitui o próprio valor do raio r do círculo inscrito. De fato, neste caso particular, a expressão instituída fica:

$$x = \frac{ar}{2r(n - 1) + a} = \frac{ar}{a} \quad \therefore \quad x = r$$

48. Os quatro lados do quadrilátero côncavo ABCD tangenciam um mesmo círculo (Figura 531). Prove que são iguais as diferenças entre os pares de lados opostos desse quadrilátero.

Resolução: Sendo R, S, T e U os pontos de contato do círculo considerado com os lados do quadrilátero, como pares de tangentes de um mesmo ponto a esse círculo, podemos (número 119) escrever (Figura 531):

$$AR = AU = x$$

$$BR = BS = y$$

$$CS = CT = z$$

$$DT = DU = w$$

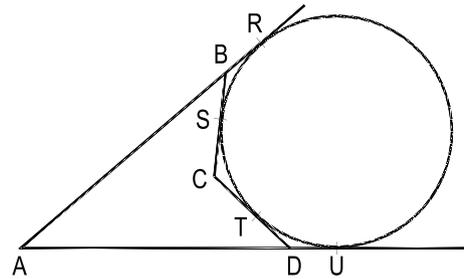


Figura 531

Assim, as diferenças $(AB - CD)$ e $(AD - BC)$ entre os pares de lados opostos são:

$$AB - CD = (AR - BR) - (CT + TD) = x - y - (z + w) = x - y - z - w \quad (1)$$

$$AD - BC = (AU - DU) - (BS + CS) = x - w - (y + z) = x - y - z - w \quad (2)$$

As relações (1) e (2) provam a propriedade em estudo.

49. Num círculo de raio 8 m, calcular a corda do arco triplo do arco, cuja corda mede 2 m.

Resolução: Sendo AB, BC e CD três cordas de comprimento 2 m, no círculo dado (Figura 532), para obter o valor da corda x do arco triplo, deve-se inicialmente calcular o valor da corda d do arco duplo e, em seguida, x, corda do arco soma dos arcos de cordas d e a, ou seja, AC e CD.

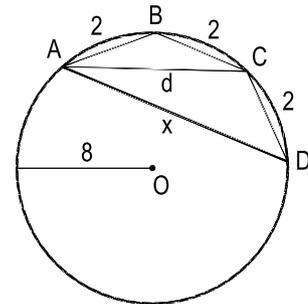


Figura 532

Assim, podemos (números 231 e 230) escrever:

$$d = \frac{a\sqrt{4R^2 - a^2}}{R} = \frac{2\sqrt{4 \cdot 64 - 4}}{8} = \frac{2\sqrt{252}}{8} = \frac{3\sqrt{7}}{2}$$

$$x = \frac{a\sqrt{4R^2 - d^2} + d\sqrt{4R^2 - a^2}}{2R} = \frac{2\sqrt{4 \cdot 64 - (9/4)7} + (3/2)\sqrt{7}\sqrt{4 \cdot 64 - 4}}{16}$$

$$\therefore x = \frac{2\sqrt{256 - 63/4} + (3/2)\sqrt{7}\sqrt{252}}{16} = \frac{(2/2)\sqrt{1024 - 63} + (3/2)\sqrt{7} \cdot 6\sqrt{7}}{16}$$

$$\therefore x = \frac{\sqrt{1024 - 63} + 3\sqrt{7} \cdot 3\sqrt{7}}{16} \quad \therefore \quad \boxed{x = \frac{\sqrt{961} + 63}{16} \text{ m}}$$

50. Calcular o lado BC de um triângulo ABC inscrito num círculo de 2 cm de raio, sabendo que os lados AB e AC medem, respectivamente, $2\sqrt{3}$ cm e 2 cm.

Resolução: Sabe-se (número 290) que as cordas AB e AC de círculo O, por suas medidas, têm de ser, respectivamente, iguais aos lados do triângulo e do hexágono regulares inscritos no círculo dado.

E mais, que, conforme suas posições relativas, AB e AC podem possibilitar dois triângulos ABC inscritos nesse círculo (Figura 533) – ABC_1 e ABC_2 . O primeiro, retângulo em A, proporciona que BC_1 seja o diâmetro do círculo, e o segundo, que C_2 forme com A e B um triângulo isósceles, parte do hexágono regular inscrito.

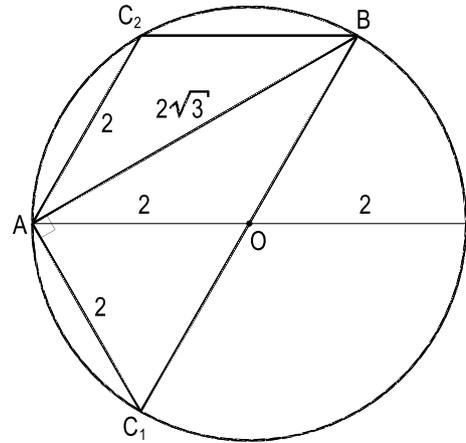


Figura 533

Assim, há duas respostas para o lado BC:

$$\boxed{BC_1 = 4 \text{ cm}} \text{ e } \boxed{BC_2 = 2 \text{ cm}}$$

51. Calcular, em função de suas bases B e b, a altura h de um trapézio isósceles que tenha as diagonais perpendiculares aos lados iguais.

Resolução: Consideremos (Figura 534) o trapézio isósceles ABCD, construído conforme os dados, e incluamos a altura $BH = h$, para análise.

O triângulo retângulo BCD permite (número 197) escrever:

$$BH^2 = DH \cdot HC$$

$$\therefore h^2 = \left(b + \frac{B-b}{2}\right) \left(\frac{B-b}{2}\right)$$

$$\therefore h^2 = \left(\frac{2b + B - b}{2}\right) \cdot \left(\frac{B - b}{2}\right)$$

$$\therefore h^2 = \left(\frac{B + b}{2}\right) \left(\frac{B - b}{2}\right)$$

$$\therefore h^2 = \frac{B^2 - b^2}{4}$$

$$\therefore h = \sqrt{\frac{B^2 - b^2}{4}} \quad \therefore \boxed{h = \frac{1}{2} \sqrt{B^2 - b^2}}$$

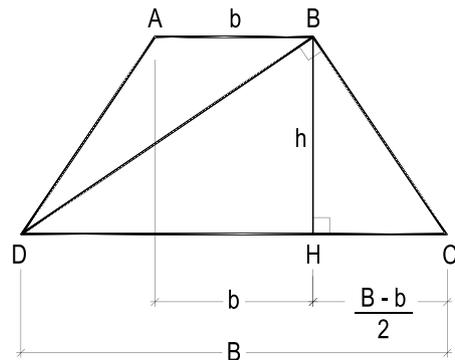


Figura 534

52. Um trapézio circunscritível a um círculo está inscrito noutra círculo de raio R e é tal que sua base maior é um diâmetro deste círculo.

Calcular, em função de R , o valor da base menor b do trapézio.

Resolução: Por ter a base maior CD coincidente com um diâmetro do círculo circunscrito, a altura h do trapézio $ABCD$ pode ser calculada pela expressão instituída no problema anterior (número 51) (Figura 534) e, por ser inscritível, tem de ser isósceles.

$$\text{Assim, } h = \frac{1}{2} \sqrt{B^2 - b^2} = \frac{1}{2} \sqrt{4R^2 - b^2} \quad \therefore \quad h^2 = \frac{1}{4} (4R^2 - b^2)$$

Pelo teorema de Pitot (número 223), vem:

$$2\ell = b + 2R \quad \therefore \quad \ell = \frac{b + 2R}{2}$$

E, no triângulo retângulo BHC (Figura 535):

$$\ell^2 = h^2 + \left(R - \frac{b}{2}\right)^2$$

$$\therefore \quad \frac{b^2 + 4R^2 + 4bR}{4} = \frac{4R^2 - b^2}{4} + R^2 + \frac{b^2}{4} - bR$$

$$\therefore \quad b^2 + 4R^2 + 4bR = 4R^2 - b^2 + 4R^2 + b^2 - 4bR$$

$$\therefore \quad b^2 + 8bR - 4R^2 = 0 \quad \therefore \quad b = \frac{-8R \pm \sqrt{64R^2 + 16R^2}}{2}$$

$$\therefore \quad b = \left(\frac{-8 \pm \sqrt{80}}{2}\right) R = \left(\frac{4\sqrt{5} - 8}{2}\right) R \quad \therefore \quad \boxed{b = 2R(\sqrt{5} - 2)}$$

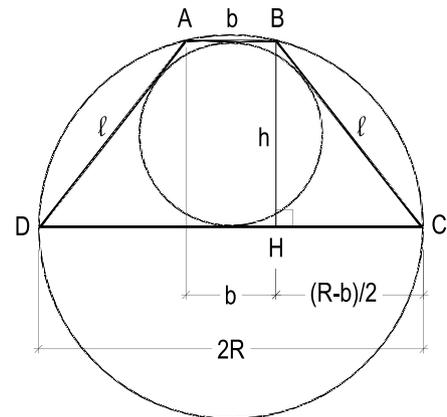


Figura 535

53. Um trapézio retângulo é tal que suas diagonais são perpendiculares entre si.

Prove que a altura é igual à média geométrica entre as bases.

Resolução: Sejam B e b as bases do trapézio retângulo $ABCD$, cujas diagonais AC e BD são perpendiculares entre si (Figura 536).

Por serem agudos com lados respectivamente perpendiculares, são iguais os ângulos α e β , o que implica na semelhança dos triângulos retângulos BAD e ADC .

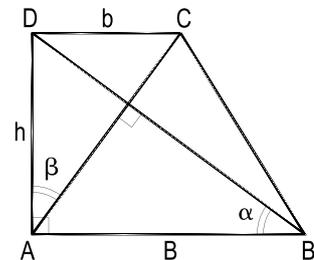


Figura 536

$$\text{Logo: } \frac{AD}{AB} = \frac{CD}{AD} \quad \therefore \quad \frac{h}{B} = \frac{b}{h} \quad \therefore \quad \boxed{h^2 = Bb}$$

54. Provar que, em qualquer trapézio, a soma dos quadrados das diagonais é igual à soma dos quadrados dos lados não paralelos mais o dobro do produto das bases (IME – 1964).

Resolução: Consideremos um trapézio qualquer ABCD, de mediana de Euler MN (Figura 537).

Pelo teorema de Euler (número 220), podemos escrever:

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2 + 4(MN)^2$$

E como $MN = \frac{AB - CD}{2}$, vem:

$$\therefore AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2 + 4 \left(\frac{AB^2 + CD^2 - 2AB \cdot CD}{4} \right)$$

$$\therefore AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2 + AB^2 + CD^2 - 2AB \cdot CD$$

$$\therefore \boxed{AC^2 + BD^2 = BC^2 + DA^2 + 2AB \cdot CD}$$

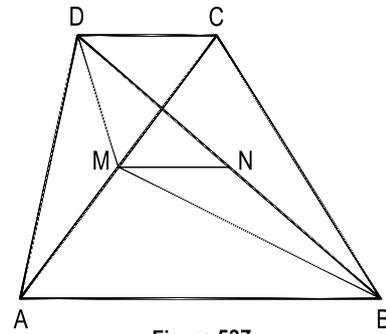


Figura 537

55. Num círculo de diâmetro AB, considere duas cordas AE e AF, respectivamente, iguais a 3 cm e 6 cm e situadas em semicírculos opostos. Sendo M e N as projeções respectivas de E e de F sobre AB, calcule AN e AB, sabendo que AM = 1 cm.

Resolução: Porque os triângulos AEB e AFB são retângulos, já que se inscrevem em semicírculos (Figura 538), temos (número 197):

$$AE^2 = AM \cdot AB \quad (1)$$

$$AF^2 = AN \cdot AB \quad (2)$$

Dividindo, membro a membro, as relações (1) e (2), vem:

$$\therefore \frac{AE^2}{AF^2} = \frac{AM}{AN}$$

$$\therefore \frac{9}{36} = \frac{1}{AN} \quad \therefore \boxed{AN = 4 \text{ cm}}$$

E, para calcular AB, retornemos à relação (2):

$$36 = 4 \cdot AB \quad \therefore \boxed{AB = 9 \text{ cm}}$$

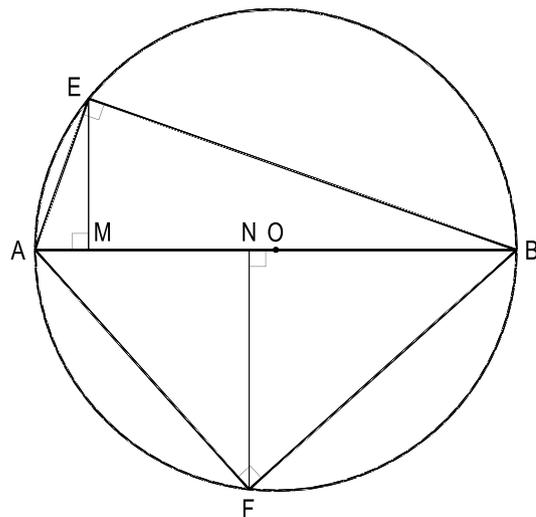


Figura 538

56. Dados três pontos colineares A, B e C, nesta ordem, considere todas as circunferências que passam por B e por C, bem como todas as tangentes a elas traçadas pelo ponto A e prove que os pontos de contato de todas essas tangentes são concíclicos.

Resolução: Consideremos os pontos A, B e C conforme o enunciado, bem como as circunferências que passam pelos pontos fixos B e C e as tangentes $AT_1, AT_2, AT_3, AT_4, \dots$ enviadas do ponto fixo A a elas, sendo $T_1, T_2, T_3, T_4, \dots$ seus pontos de contato (Figura 539).

As potências do ponto A em relação a cada um dos círculos considerados se escrevem (números 241 e 243.1):

$$(AT_1)^2 = AB \cdot AC$$

$$(AT_2)^2 = AB \cdot AC$$

$$(AT_3)^2 = AB \cdot AC$$

etc.

Por isso, são iguais todos os segmentos de tangentes entre o ponto fixo A e os diversos pontos de contato T_1, T_2, T_3, \dots , o que significa serem concíclicos todos esses pontos, como se queria demonstrar.

57. Calcule o perímetro do quadrado inscrito num semicírculo de diâmetro igual a $2\sqrt{5}$ m, sabendo que um lado do quadrado pertence ao diâmetro do semicírculo.

Resolução: Designando por a o lado do quadrado ABCD inscrito no semicírculo dado, o triângulo retângulo OBC (Figura 540) dá:

$$a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = (\sqrt{5})^2$$

$$\therefore \frac{5a^2}{4} = 5 \quad \therefore a = 2$$

Assim, o perímetro pedido será 8 m.

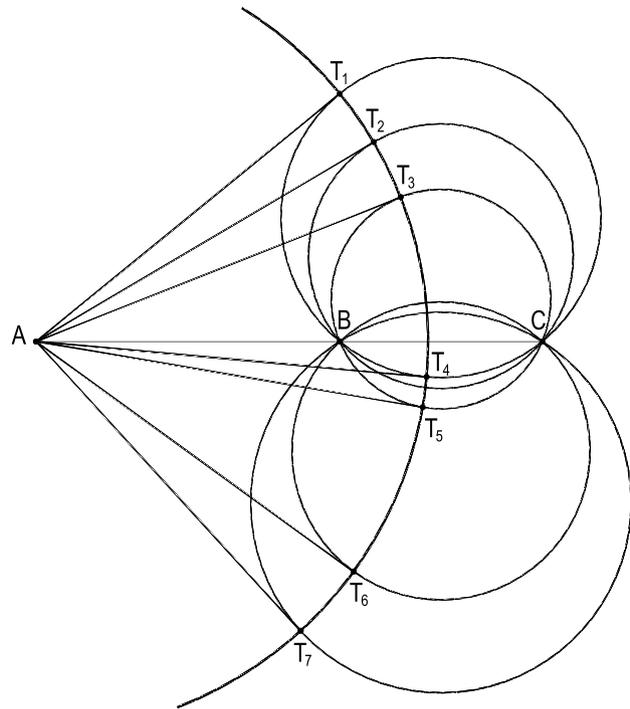


Figura 539

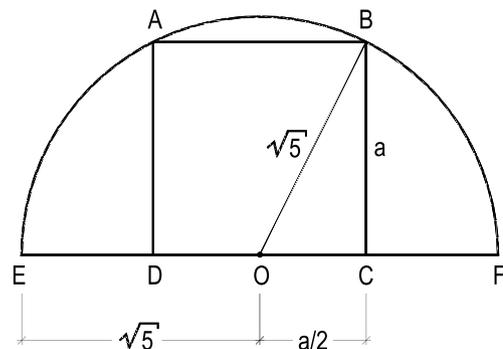


Figura 540

58. Num círculo de 2 cm de raio, considere uma corda AB igual a esse raio e duas outras EF e GH, iguais entre si, paralelas àquela AB e tais que os menores arcos que cada uma delas determine no círculo valham, cada um, uma terça parte da circunferência. Pede-se calcular as distâncias de cada uma dessas cordas iguais à corda AB, inicial.

Resolução: Seja a Figura 541, construída conforme os dados.

Por ser igual ao raio do círculo, a corda AB valerá o lado do hexágono regular inscrito nesse círculo (número 290). E as duas cordas iguais EF e GH, produzindo arcos iguais a 120° , hão de ser (número 290) lados de triângulos equiláteros inscritos nesse círculo.

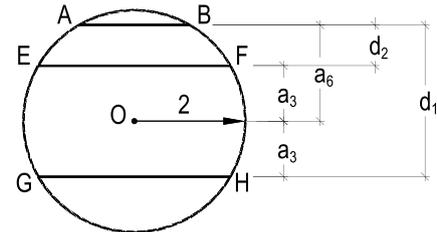


Figura 541

Assim, as distâncias do centro a cada uma dessas três cordas serão medidas pelos apótemas do triângulo e do hexágono regulares inscritos e as distâncias d_1 e d_2 pedidas serão (Figura 541) iguais à soma e à diferença entre os apótemas do triângulo e do hexágono, podendo-se, então, anotar (número 290):

$$d_1 = a_6 + a_3 = \frac{R\sqrt{3}}{2} + \frac{R}{2} = \frac{R}{2} (\sqrt{3} + 1) = \frac{2}{2} (\sqrt{3} + 1)$$

$$d_2 = a_6 - a_3 = \frac{R\sqrt{3}}{2} - \frac{R}{2} = \frac{R}{2} (\sqrt{3} - 1) = \frac{2}{2} (\sqrt{3} - 1)$$

Respostas: $(\sqrt{3} \pm 1)$ cm

59. Dados dois círculos ortogonais de raios 40 m e 30 m, calcular as distâncias dos seus centros ao eixo radical dos dois círculos.

Resolução: Por serem ortogonais os dois círculos dados, é retângulo o triângulo OPO' que um de seus pontos comuns P forma com os dois centros (número 122). E, mais ainda, porque seus catetos medem 40 e 30, esse triângulo OPO' é Pitagórico (número 200.1).

Como semelhantes a POO' , por terem ângulos agudos respectivamente iguais aos de POO' (Figura 542), também hão de ser Pitagóricos os triângulos retângulos JOP e $JO'P$, o que permite anotar:

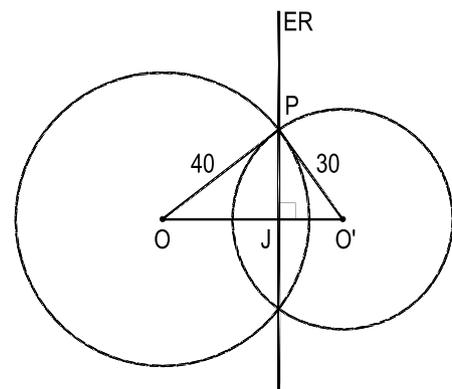


Figura 542

$$OJ = \left(\frac{4}{5}\right) \cdot 40 = 32 \text{ m e } O'J = \left(\frac{3}{5}\right) \cdot 30 = 18 \text{ m}$$

60. Dado um segmento AB, prolongue-o, além de B, de um valor BC igual ao quintuplo de AB. Trace, por A, uma reta que forme 60° com AB e que corte a perpendicular a AB, levantada por B, no ponto E. Prolongue AE, para além de E, de um segmento ED igual a AB, criando o quadrilátero convexo BCDE.

Prove que:

- BCDE é inscrito num círculo;
- tal círculo tem EC como um de seus diâmetros;
- o ângulo interno E desse quadrilátero é igual ao quintuplo de seu ângulo interno C.

Resolução: Construída a Figura 543, conforme os dados, consideremos a circunferência de diâmetro EC que, então, circunscreverá o triângulo retângulo BEC e designemos por J (não indicado na Figura 543) o ponto em que ela volta a cortar a reta AE.

Nestes termos, a potência do ponto A, em relação a essa circunferência, se escreve (números 242 e 237):

$$P_{A(O)} = AB \cdot AC = AE \cdot AJ$$

Aplicando os valores dados, vem:

$$P_{A(O)} = a \cdot 6a = 2a \cdot AJ$$

$$\therefore 6a^2 = 2a \cdot AJ \quad \therefore AJ = 3a \quad \therefore EJ = AJ - AE = 3a - 2a = a$$

Ora, se o ponto J, não marcado na Figura 543, está sobre o prolongamento do segmento AE, distando a de E, ele só pode ser o ponto D, esse sim assinalado naquela figura, o que demonstra a primeira parte do proposto, assim como a segunda, já que $J \equiv D$ pertence à circunferência considerada, a circunscrita ao quadrilátero BCDE.

Finalmente, já que os ângulos internos opostos de BCDE devem ser suplementares (número 128.5), para os ângulos \hat{E} e \hat{C} desse quadrilátero pode-se se escrever:

$$\hat{E} = 180^\circ - \hat{C}$$

E, porque C é o complemento do ângulo $A = 60^\circ$, no triângulo retângulo ADC, vem:

$$\hat{E} = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ \quad \therefore \hat{E} = 5\hat{C}$$

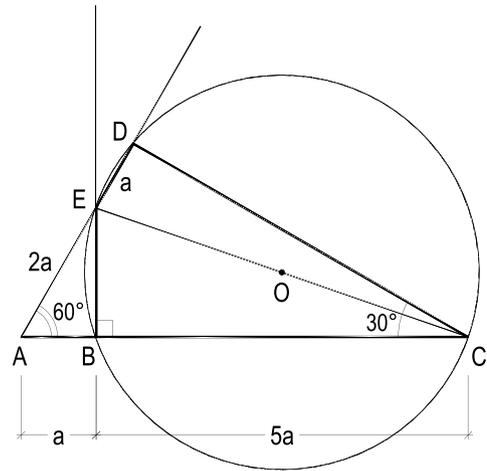


Figura 543

61. Quantos e quais são os tipos diferentes de tetracontágonos (polígonos com quarenta lados) regulares existentes?

Resolução: Dividida uma circunferência em 40 partes iguais e ligando-se homogeneamente os pontos de divisão, serão obtidos um tetracontágono regular convexo e 7 regulares estrelados, com espécies 3, 7, 9, 11, 13, 17 e 19, respectivamente, tal como analisado nos números 276, 277 e 278, já que são esses os números primos com 40 e menores que sua metade.

62. Dois círculos de raio 3 m e 1 m são tangentes exteriormente. Considere as duas tangentes comuns aos dois círculos, que não aquela perpendicular à linha dos centros dos dois círculos, e calcule o perímetro do contorno misto convexo formado por essas duas tangentes e pelos dois arcos limitados por seus pontos de contato.

Resolução: Sejam $(O,3)$ e $(O',1)$ as circunferências dadas e AB e CD as duas tangentes comuns consideradas. (Figura 544).

Observando os valores dos raios e traçando JO' paralelo a AB , nota-se que o triângulo retângulo JOO' , assim formado, tem a hipotenusa $OO' = 4$, igual ao dobro do cateto $OJ = 2$, o que implica (número 200.3) em que seu ângulo α valha 60° . E mais, que:

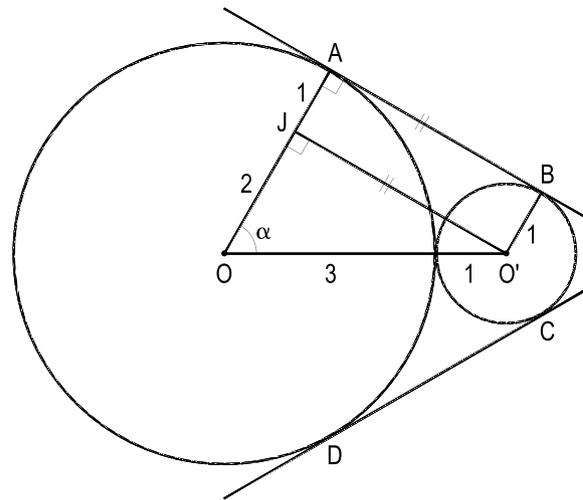


Figura 544

$$AB = CD = JO' = 2\sqrt{3}$$

E os arcos AD e BC (Figura 544), correspondendo a ângulos centrais, respectivamente iguais a 240° e 120° , então, medirão (número 300):

$$AD = \frac{2}{3} 2\pi 3 = 4\pi$$

e $BC = \frac{1}{3} 2\pi 1 = \frac{2\pi}{3}$

Assim, o perímetro $2p$ pedido será:

$$2p = 2(AB) + AD + BC = 2(2\sqrt{3}) + 4\pi + \frac{2\pi}{3}$$

$$\therefore 2p = \frac{12\sqrt{3} + 14\pi}{3} \quad \therefore \boxed{2p = \frac{2}{3} (6\sqrt{3} + 7\pi) \text{ m}}$$

63. Quantas diagonais possui o polígono de terceira espécie, cuja soma dos ângulos internos vale 14π rd?

Resolução: Sabe-se (número 265) que a soma dos ângulos internos de tal polígono há de ser:

$$S_i = (n - 2k) \pi \text{ rd} \quad \therefore \quad 14\pi = (n - 6) \pi \quad \therefore \quad n = 20$$

E (número 24) que sua quantidade D de diagonais será:

$$D = \frac{n(n - 3)}{2} = \frac{20 \cdot 17}{2} \quad \therefore \quad \boxed{D = 170}$$

64. Determinar as espécies dos polígonos P_1 , P_2 e P_3 dados na Figura 545 abaixo.

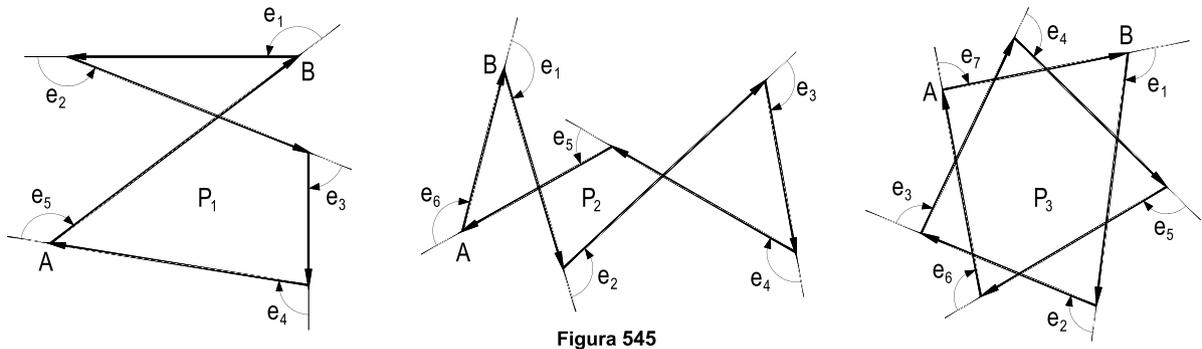


Figura 545

Resolução: Tal como detalhado no número 264, orientemos os lados de cada polígono, determinando seus ângulos externos e , com o uso de semirretas paralelas a eles e com sentidos iguais, traçadas por um ponto A_1 , A_2 ou A_3 (Figura 546), indiquemos tais ângulos externos, para contar quantas voltas k_1 , k_2 e k_3 terão sido dadas, em torno dos pontos arbitrados, para saber os valores k_1 , k_2 e k_3 que medem suas respectivas espécies (Figuras 545 e 546).

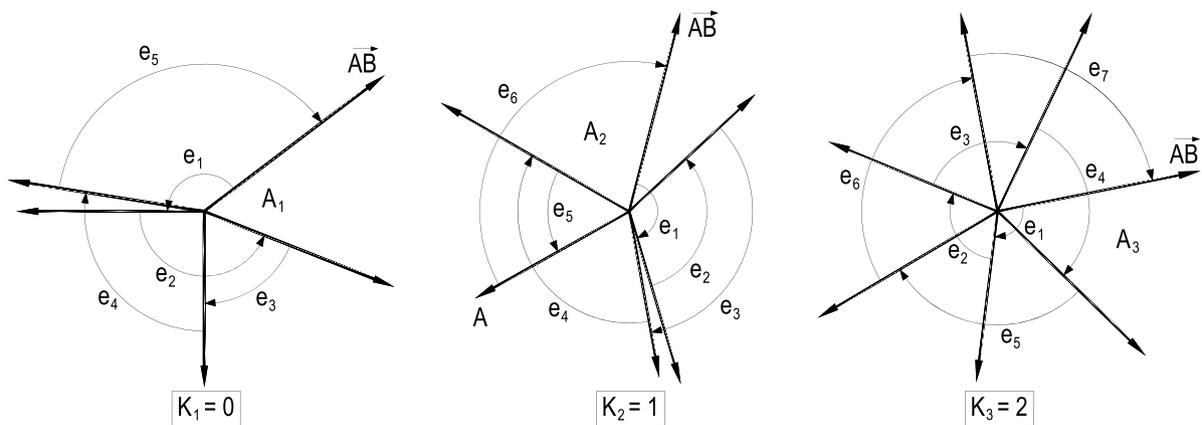


Figura 546

65. Um quadrado, um hexágono e um octógono convexos regulares têm, todos, lados iguais.

Considere os círculos a eles circunscritos e, com centros em cada vértice, construa arcos de círculo de raios iguais a esses lados, criando rosáceas de respectivamente 4, 6 e 8 pontas, como indicado nas Figuras 547, 548 e 549.

Pede-se relacionar os perímetros P_1 , P_2 e P_3 dessas três rosáceas.

Resolução: Observe-se que, na primeira rosácea (Figura 547), cada arco é igual a um quarto de circunferência de raio igual ao lado a do quadrado, visto que cada arco corresponde a um ângulo central de 90° .

Já na segunda rosácea, (Figura 548), porque cada arco corresponde a um ângulo central de 120° , seu comprimento será equivalente a uma terça parte da circunferência do raio igual ao lado a do hexágono.

Finalmente, na terceira hipótese (Figura 549), cada um dos arcos da rosácea, por ser de ângulo central igual a 135° , corresponderá à fração de $\frac{3}{8}$ da circunferência de raio igual ao lado a do octógono.

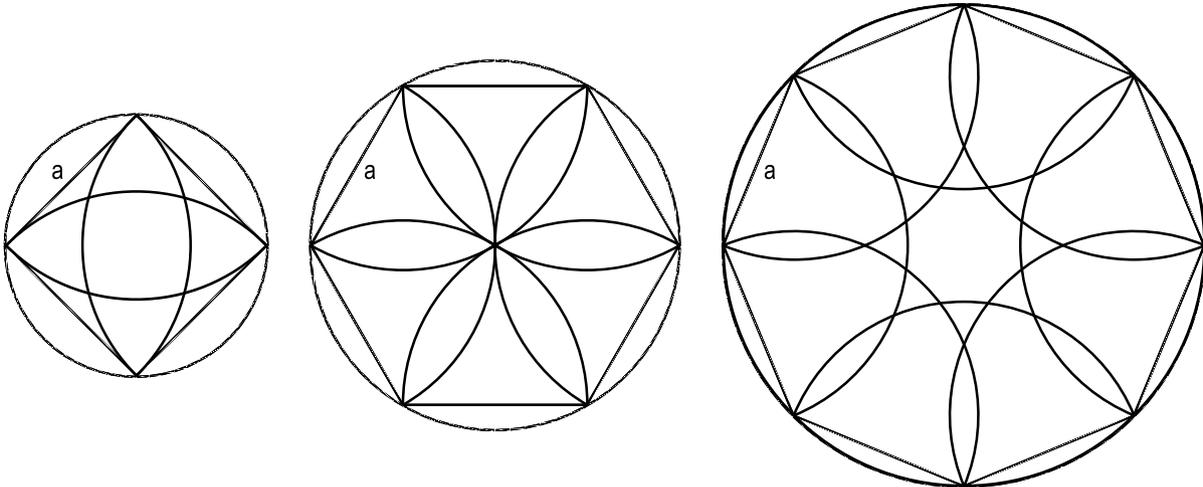


Figura 547

Figura 548

Figura 549

Assim, para os perímetros P_1 , P_2 e P_3 das rosáceas, pode-se escrever:

$$P_1 = 4 \cdot \frac{2\pi a}{4} = 2\pi a$$

$$P_2 = 6 \cdot \frac{2\pi a}{3} = 4\pi a$$

$$P_3 = 8 \cdot \frac{3}{8} \cdot 2\pi a = 6\pi a$$

Então, a relação pedida será: $\frac{P_1}{2\pi a} = \frac{P_2}{4\pi a} = \frac{P_3}{6\pi a}$ ou $\boxed{\frac{P_1}{1} = \frac{P_2}{2} = \frac{P_3}{3}}$

66. Sendo AB e CD dois diâmetros perpendiculares de um círculo de centro O, com centro no ponto M, médio do raio OA, descreve-se o arco CJ, J pertencendo ao raio OB (Figura 550).

Pede-se provar que a corda CJ do arco assim construído e o segmento JO medem, respectivamente, os lados do pentágono e do decágono convexos regulares inscritos nesse círculo.

Resolução: Consideremos a construção indicada, para o círculo (O, R) (Figura 550), e calculemos os segmentos CJ e JO, em função de R.

O triângulo retângulo COM dá:

$$CM^2 = CO^2 + OM^2 = R^2 + \left(\frac{R}{2}\right)^2 = \frac{5R^2}{4}$$

$$\therefore CM = \frac{R}{2} \sqrt{5} \quad \therefore JM = CM = \frac{R}{2} \sqrt{5}$$

E o triângulo retângulo COJ:

$$CJ^2 = CO^2 + JO^2 = CO^2 + (JM - OM)^2$$

$$CJ^2 = R^2 + \left(\frac{R\sqrt{5}}{2} - \frac{R}{2}\right)^2 = R^2 + \frac{5R^2 + R^2 - 2R^2\sqrt{5}}{4}$$

$$CJ^2 = \frac{1}{4} R^2 [(4 + 6 - 2\sqrt{5})] = \frac{R^2}{4} (10 - 2\sqrt{5}) \quad \therefore \boxed{CJ = \frac{R}{2} \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}} \quad (1)$$

E, para o cálculo do segmento JO, temos:

$$JO = JM - OM = \frac{R}{2} \sqrt{5} - \frac{R}{2} = \frac{R\sqrt{5} - R}{2} \quad \therefore \boxed{JO = \frac{R}{2} (\sqrt{5} - 1)} \quad (2)$$

As relações (1) e (2) demonstram (número 291) o proposto.

67. Dividir uma circunferência dada em 5 partes iguais e construir os pentágonos regulares, convexo e estrelado, nela inscritos.

Resolução: Trata-se, simplesmente, de construir precisamente o segmento CJ, como acima (Figura 550) indicado, aplicar seu valor como cordas consecutivas do círculo dado (Figura 551) e unir os pontos de divisão de 1 em 1 (Figura 552) ou de 2 em 2 (Figura 553).

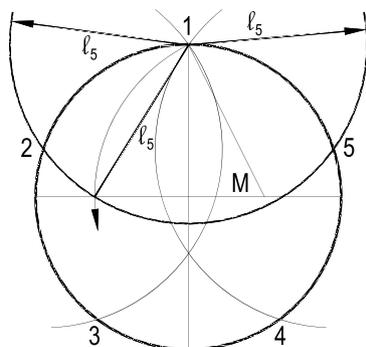


Figura 551

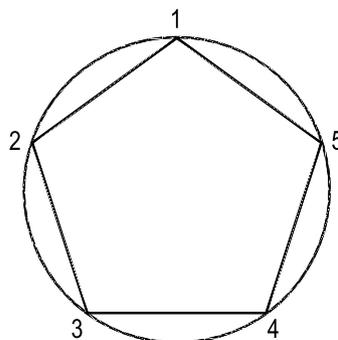


Figura 552

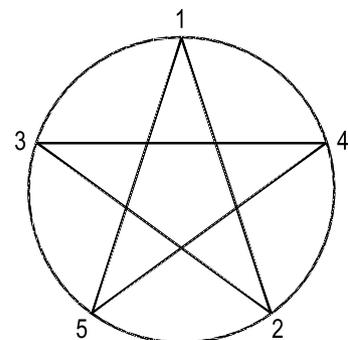


Figura 553

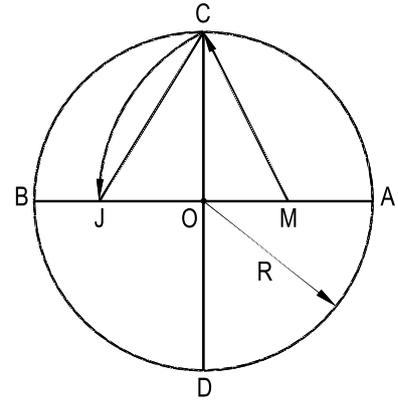


Figura 550

68. Sendo AB e CD dois diâmetros perpendiculares de um círculo de centro O, com centro no ponto M, médio do raio OA, descreve-se o arco CL, L no prolongamento do raio OA (Figura 554).

Pede-se provar que a corda CL do arco assim construído e o segmento OL medem, respectivamente, os lados do pentágono e do decágono estrelados regulares inscritos no círculo dado.

Resolução: Consideremos a construção proposta, para o círculo (O, R) (Figura 554), e calculemos os segmentos CL e OL, em função de R.

O triângulo retângulo COM dá:

$$CM^2 = CO^2 + OM^2 = R^2 + \left(\frac{R}{2}\right)^2 = \frac{5R^2}{4}$$

$$\therefore CM = \frac{R}{2} \sqrt{5} \quad \therefore ML = CM = \frac{R\sqrt{5}}{2}$$

E o triângulo retângulo COL:

$$CL^2 = CO^2 + OL^2 = CO^2 + (OM + ML)^2 = R^2 + \left(\frac{R}{2} + \frac{R\sqrt{5}}{2}\right)^2$$

$$\therefore CL^2 = R^2 + \frac{R^2 + 5R^2 + 2\sqrt{5}R^2}{4} = \frac{R^2}{4} (4 + 1 + 5 + 2\sqrt{5}) \quad \therefore \boxed{CL = \frac{R}{2} \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}} \quad (1)$$

E, para o cálculo do segmento OL, temos:

$$OL = OM + ML = \frac{R}{2} + \frac{R\sqrt{5}}{2} = \frac{R(\sqrt{5} + 1)}{2} \quad \therefore \boxed{OL = \frac{R}{2} (\sqrt{5} + 1)} \quad (2)$$

As relações (1) e (2) demonstram (número 291) o pedido.

69. Dividir uma circunferência dada em 10 partes iguais e construir os decágonos regulares, convexo e estrelado, nela inscritos.

Resolução: A divisão em 10 partes iguais se faz pela precisa construção indicada no problema de número 67 e pela aplicação do segmento JO (Figura 555), lado do decágono convexo regular, consecutivamente (Figura 556). O decágono estrelado regular é obtido pela união dos pontos de divisão de 3 em 3 (Figura 557).

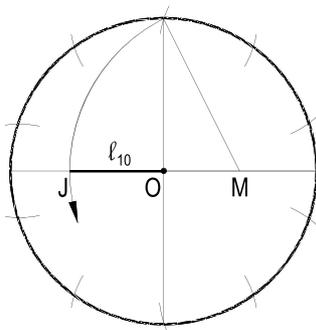


Figura 555

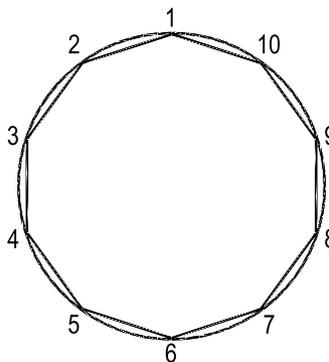


Figura 556

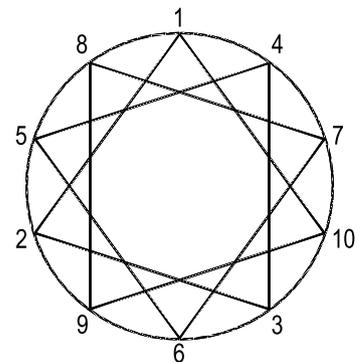


Figura 557

70. Dado um hexágono regular ABCDEF, considere sua diagonal CF e os pontos J e L, pés das perpendiculares BJ e EL a essa diagonal.

Pede-se relacionar as áreas S_1 do quadrilátero BJEL, S_2 do triângulo ABF e S_3 do triângulo CJE.

Resolução: Consideremos o hexágono regular ABCDEF, sua diagonal CF e os pontos J e L, pés das perpendiculares BJ e CL àquela diagonal (Figura 558), e designemos por a o lado do hexágono, que, sabe-se (número 290), é igual ao raio do círculo (O) a ele circunscrito.

Incluamos, na Figura 558, o diâmetro BE e observemos que, porque, no triângulo isósceles ABF, $A = 120^\circ$, temos $\beta = 30^\circ$.

E que, no triângulo retângulo BCJ, porque α vale a metade do ângulo interno do hexágono, $\alpha = 60^\circ$.

Assim, sendo a o lado do hexágono, nesse triângulo BCJ, temos (número 200.3): $CJ = a/2$, o que implica em que, sobre o diâmetro CF:

$$CJ = JO = OL = LF = a/2 \quad (1)$$

Então, todos os oito triângulos com vértices B ou E e bases respectivamente CJ, JO, OL e LF são equivalentes, suas áreas individuais valendo, por isso, um oitavo da área do retângulo BCEF.

Designando por S cada uma dessas oito áreas, vem que a área S_1 do quadrilátero BJEL, um paralelogramo, vale $4S$ e que essa área S é igual à área S_3 do triângulo CJE.

Finalmente, observando (Figura 558) a igualdade dos triângulos isósceles ABF e BOF e que a área de BOF é igual ao dobro das áreas do triângulo BOL, ou do BLF, para a área S_2 do triângulo ABF, pode-se deduzir que ela vale $2S$.

Resumindo, as três áreas em estudo são:

$$S_1 = 4S, \quad S_2 = 2S \quad \text{e} \quad S_3 = S$$

E, por isso:

$$S_1 = 2 S_2 = 4 S_3$$

Esta é a relação que se pediu instituir.

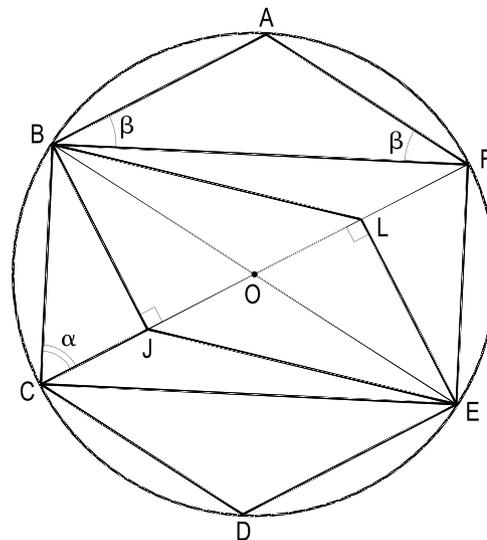


Figura 558

71. Num círculo (O), de raio 6 cm, inscreve-se um triângulo equilátero e, neste, um novo círculo (Figura 559).

Sendo C' e B' os pontos de contato dos lados AB e AC do triângulo com o círculo nele inscrito, pede-se calcular as áreas S₁, S₂ e S₃ hachuradas na figura dada.

Resolução: De início, se o raio do círculo dado (O) é igual a 6, o lado ℓ , a altura h e o raio r do círculo inscrito no triângulo equilátero ABC (Figura 559) são (números 290 e 217):

$$\ell = 6\sqrt{3}, \quad h = \frac{\ell\sqrt{3}}{2} = 9, \quad r = \frac{h}{3} = 3$$

Passemos, então, aos cálculos das áreas pedidas:

A área S₁ vale um terço da diferença entre a área do triângulo ABC e a do círculo nele inscrito. Assim:

$$S_1 = \frac{1}{3} \left[\left(\frac{\ell^2 \sqrt{3}}{4} \right) - \pi r^2 \right] = \frac{1}{3} \left(\frac{36 \cdot 3\sqrt{3}}{4} - \pi 3^2 \right) = \frac{1}{3} (27\sqrt{3} - 9\pi)$$

$$\therefore S_1 = (9\sqrt{3} - 3\pi) \quad \therefore \boxed{S_1 = 3(3\sqrt{3} - \pi) \text{ cm}^2}$$

A área S₂ se mede pela diferença entre a área do triângulo equilátero AB'C', de lado igual à metade do de ABC, e área S₁ acima calculada. Logo:

$$S_2 = \frac{(3\sqrt{3})^2 \sqrt{3}}{4} - (9\sqrt{3} - 3\pi) = \frac{27\sqrt{3}}{4} - 9\sqrt{3} + 3\pi$$

$$\therefore S_2 = \frac{(27 - 36)\sqrt{3}}{4} + 3\pi \quad \therefore \boxed{S_2 = \frac{3}{4}(4\pi - 3\sqrt{3}) \text{ cm}^2}$$

E a área S₃ vale um terço da diferença entre a área do círculo circunscrito a ABC e do próprio triângulo ABC. Como o raio do círculo circunscrito AO é igual ao dobro de OH = r (número 147), vem:

$$S_3 = \frac{1}{3} \left(\pi (2r)^2 - \frac{\ell^2 \sqrt{3}}{4} \right) = \frac{1}{3} \left(36\pi - \frac{36 \cdot 3\sqrt{3}}{4} \right)$$

$$\therefore S_3 = \frac{1}{3} \cdot (36\pi - 27\sqrt{3})$$

$$S_3 = 12\pi - 9\sqrt{3} \quad \therefore \boxed{S_3 = 3(4\pi - 3\sqrt{3}) \text{ cm}^2}$$

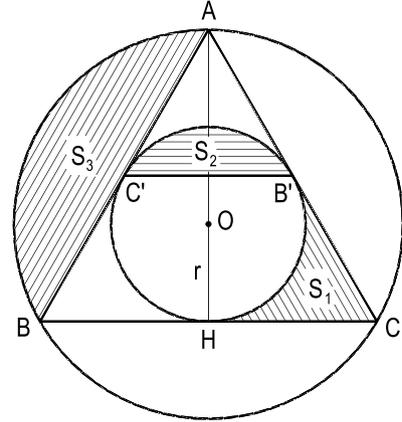


Figura 559

72. Dado um círculo de centro O , considere outro, cujo centro O' seja o ponto médio de um raio OA do primeiro e que seja tangente internamente a ele, nesse ponto A . Sendo OB um raio do primeiro perpendicular a AO e Ox uma semirreta qualquer do quadrante formado por O, A e B e sendo E e F os pontos em que Ox corta, respectivamente, as circunferências O e O' , pede-se:
- provar que os arcos AE e AF têm comprimentos iguais, qualquer que seja a posição da semirreta Ox , interior ao quadrante considerado;
 - provar que é constante a razão entre as áreas dos setores circulares OAE e $O'AF$ assim formados nos dois círculos considerados.

Resolução: Na Figura 560, construída conforme os dados, nota-se que $\beta = 2\alpha$, como ângulos central e inscrito para o mesmo arco AF do círculo menor.

Sendo r o raio deste círculo, os comprimentos dos arcos AE e AF se escrevem (número 300):

$$AE = \frac{\alpha}{360^\circ} 2\pi (2r) = \frac{\alpha}{90^\circ} \pi \quad (1)$$

$$AF = \frac{2\alpha}{360^\circ} 2\pi (r) = \frac{\alpha}{90^\circ} \pi \quad (2)$$

E, para as áreas dos setores OAE e $O'AF$:

$$S_{OAE} = \frac{\alpha}{360^\circ} \pi (2r)^2 = \frac{\alpha}{360^\circ} 4\pi r^2 \quad (3)$$

$$S_{O'AF} = \frac{2\alpha}{360^\circ} \pi r^2 = \frac{\alpha}{360^\circ} 2\pi r^2 \quad (4)$$

As relações (1) e (2) demonstram a igualdade dos comprimentos dos arcos AE e AF e as (3) e (4) a constância da razão entre as áreas dos dois setores circulares, uma sempre igual ao dobro da do outro, independentemente do valor do ângulo α que a semirreta Ox forma com OA .

73. Calcular a distância entre dois lados opostos de um hexágono regular inscrito no círculo inscrito num triângulo equilátero de 6 m de lado.

Resolução: O círculo O , inscrito no triângulo equilátero de lado ℓ , tem raio r igual a $\frac{1}{3} \cdot \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$. No caso, para $\ell = 6$, esse raio mede $\sqrt{3}$.

E a distância d entre dois lados opostos, como XR e TU (Figura 561), do hexágono regular nele inscrito, é o dobro do seu apótema.

Logo (número 290):

$$d = 2a_6 = 2 \cdot \frac{r\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} \quad \therefore \quad \boxed{d = 3 \text{ m}}$$

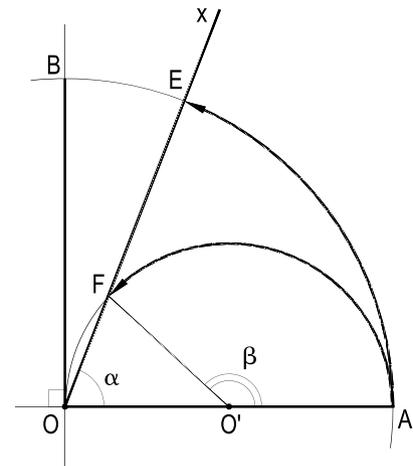


Figura 560

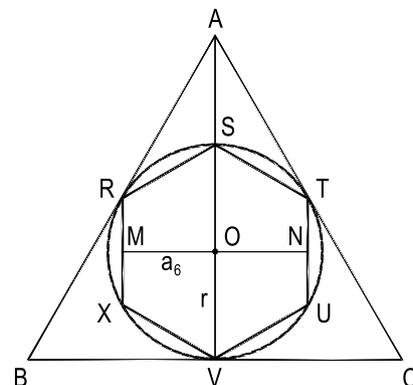


Figura 561

74. Num círculo de raio igual a $(2\sqrt{3} + 3)m$, inscrevem-se três círculos iguais, tangentes interiormente ao dado e, dois a dois, exteriormente entre si. Pede-se calcular a área S_1 da figura curvilínea interior ao triângulo formado pelos centros dos círculos iguais e exterior a esses círculos, bem como a área S_2 da porção hachurada na Figura 562.

Resolução: Como o centro O do círculo dado é o baricentro do triângulo equilátero ABC formado pelos centros dos três círculos iguais (Figura 562), temos:

$$OA' = OA + r \quad \therefore \quad 2\sqrt{3} + 3 = \frac{2r\sqrt{3}}{3} + r$$

$$\therefore \quad 2\sqrt{3} + 3 = \left(\frac{2\sqrt{3} + 3}{3}\right)r \quad \therefore \quad r = 3$$

A área S_1 pedida (Figura 562) é obtida subtraindo-se da área do triângulo equilátero ABC as dos três setores circulares iguais, todos com raio r e ângulos centrais de 60° .

$$\text{Assim, } S_1 = \frac{6^2\sqrt{3}}{4} - 3 \cdot \frac{1}{6} \pi 9 = 9\sqrt{3} - \frac{9}{2} \pi$$

$$\therefore \quad S_1 = \frac{18\sqrt{3} - 9\pi}{2} \quad \therefore \quad \boxed{S_1 = \frac{9}{2} (2\sqrt{3} - \pi) m^2}$$

Para calcular a área S_2 , deve-se tomar um terço da diferença entre a área do círculo dado e a soma das áreas dos três círculos inscritos com a área S_1 , acima estabelecida.

$$\therefore \quad S_2 = \frac{1}{3} \left(21\pi + 12\sqrt{3}\pi - 27\pi + \frac{9}{2}\pi - 9\sqrt{3} \right)$$

$$\therefore \quad S_2 = \frac{1}{3} \left[\left(12\sqrt{3} - \frac{3}{2} \right) \pi - 9\sqrt{3} \right]$$

$$\therefore \quad S_2 = \left(4\sqrt{3} - \frac{1}{2} \right) \pi - 3\sqrt{3}$$

$$\text{Assim, } \boxed{S_2 = \left[\left(\frac{8\sqrt{3} - 1}{2} \right) \pi - 3\sqrt{3} \right] m^2}$$

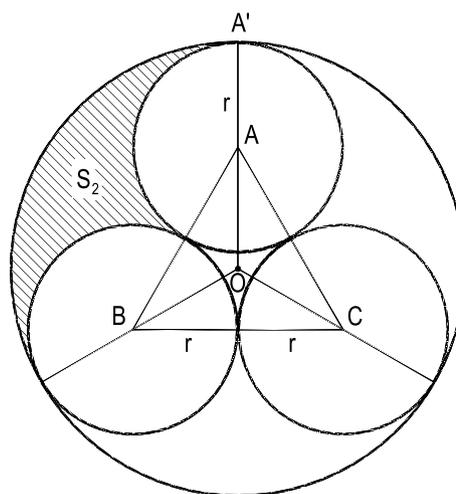


Figura 562

75. Os lados de um paralelogramo medem 10 cm e 8 cm. Sabendo que um de seus ângulos internos vale 120° , calcule a área do quadrilátero formado pelas bissetrizes de seus ângulos internos.

Resolução: Por serem suplementares quaisquer pares de ângulos internos consecutivos de ABCD, suas bissetrizes são perpendiculares, formando-se, assim (Figura 563), uma quantidade de triângulos retângulos com ângulos de 30° e 60° , o que permite anotar:

$$\text{No } \Delta \text{ BRC: } BR = 4, RC = 4\sqrt{3}$$

$$\text{No } \Delta \text{ ASB: } BS = 5, AS = 5\sqrt{3}$$

$$\text{Assim, } TS = AS - AT = AS - RC = \sqrt{3}$$

$$RS = BS - BR = 1$$

$$\text{Logo, o retângulo RSTU terá área } S = TS \cdot RS \quad \therefore \quad \boxed{S = \sqrt{3} \text{ cm}^2}$$

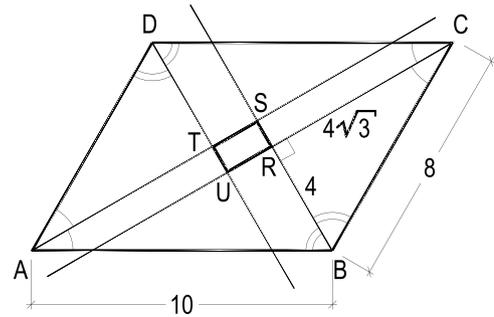


Figura 563

76. Dado um círculo de 6 m de raio, considere seis círculos iguais tangentes exteriormente, dois a dois, e tangentes internamente ao círculo dado. Calcule a área S_1 do hexágono formado pelos centros dos seis círculos iguais e a área S_2 da figura curvilínea hachurada na Figura 564.

Resolução: Sendo r o raio dos seis círculos iguais, o triângulo retângulo ATO (Figura 564), por ter um ângulo agudo de 30° , permite (número 200.3) escrever:

$$OA = 2 AT = 2r \quad \therefore \quad OA' = 3r$$

$$\text{E como } OA' = 6, \text{ vem } r = 2$$

Assim, o hexágono ABCDEF, por ter lados medindo 4, terá área S_1 , dada pela expressão (número 327):

$$S_1 = 6 \frac{(2r)^2}{4} \cdot \sqrt{3} = \frac{6 \cdot 16\sqrt{3}}{4} \quad \therefore \quad \boxed{S_1 = 24\sqrt{3} \text{ m}^2}$$

Para obter o valor da área S_2 da figura hachurada, deve-se subtrair da área do setor circular $OA'F'$, de 60° , a área do triângulo equilátero OAF e as dos dois setores circulares iguais, de 120° cada, com centros A e F . Assim, teremos:

$$S_2 = \frac{60^\circ}{360^\circ} \pi 6^2 - \frac{4^2\sqrt{3}}{4} - 2 \cdot \frac{120^\circ}{360^\circ} \pi 2^2$$

$$\therefore \quad S_2 = 6\pi - 4\sqrt{3} - \frac{8\pi}{3} \quad \therefore \quad \boxed{S_2 = \left(\frac{10\pi}{3} - 4\sqrt{3}\right) \text{ m}^2}$$

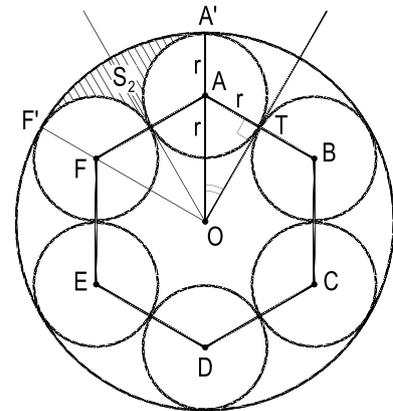


Figura 564

77. Dois círculos ortogonais são tais que a potência do centro do primeiro em relação ao segundo é o triplo da potência do centro do segundo, em relação ao primeiro círculo.

Sabendo que a distância entre os dois centros é 12 m, calcule a área da porção comum aos dois círculos.

Resolução: Sejam os círculos ortogonais (A) e (B), segundo os dados (Figura 565), isto é, tais que:

$$AT^2 = 3 BT^2 \quad \therefore \quad R^2 = 3r^2 \quad \therefore \quad R = r\sqrt{3}$$

Tal relação implica em que o triângulo retângulo ATB tenha ângulos de 30° e 60° (número 200.3), o que, para $AB = 12$, dá:

$$r = 6 \quad \text{e} \quad R = r\sqrt{3} = 6\sqrt{3} \quad \text{e} \quad TJ = R = 6\sqrt{3}$$

A área pedida será a soma das áreas de dois segmentos circulares, um no círculo (A), outro no (B). Assim (número 318), tal área S será:

$$S = \frac{60^\circ}{360^\circ} \pi R^2 - \frac{TJ \cdot AM}{2} + \frac{120^\circ}{360^\circ} \pi r^2 - \frac{TJ \cdot BM}{2}$$

$$S = \frac{\pi}{6} (6\sqrt{3})^2 + \frac{\pi}{3} 6^2 - \frac{TJ}{2} (AM + BM)$$

$$S = \frac{\pi}{6} 108 + \frac{\pi}{3} 36 - \frac{R}{2} (12) = 18\pi + 12\pi - 6\sqrt{3} \cdot 6$$

$$S = 30\pi - 36\sqrt{3} \quad \therefore \quad \boxed{S = 6(5\pi - 6\sqrt{3})\text{m}^2}$$

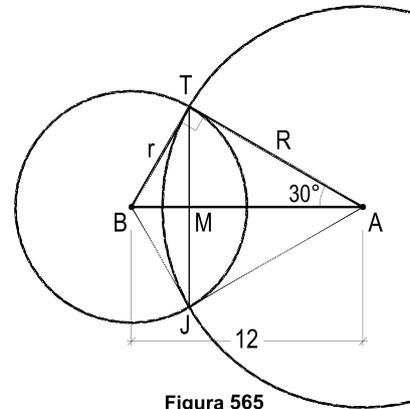


Figura 565

78. O ponto A pertence à circunferência do círculo (O, R). Calcule a área da porção do plano interior ao círculo (O, R) e exterior ao círculo (A, $R\sqrt{2}$).

Resolução: A área S procurada é a diferença entre a área do semicírculo de diâmetro BC e a do segmento circular do círculo (A, $R\sqrt{2}$), limitado por BC (Figura 566).

Assim, podemos (números 316 e 318) escrever:

$$S = \frac{\pi R^2}{2} - \left[\left(\frac{\alpha^\circ}{360^\circ} \right) \pi (R\sqrt{2})^2 - \frac{2R \cdot R}{2} \right]$$

Como a corda $AB = R\sqrt{2}$ é o lado do quadrado inscrito em (O, R), $\alpha = 90^\circ$. Então:

$$S = \frac{\pi R^2}{2} - \frac{\pi}{4} (2R^2) + R^2 = \frac{\pi R^2}{2} - \frac{\pi R^2}{2} + R^2 \quad \therefore \quad \boxed{S = R^2}$$

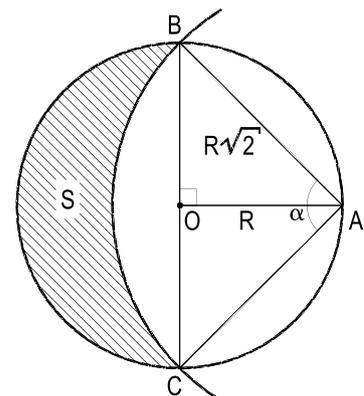


Figura 566

79. Dados os círculos concêntricos de raios r e $2r$, considere a corda AB do maior, tangente ao menor, bem como a tangente AT a este e calcule, em função de r , a área da porção hachurada da Figura 567.

Resolução: O triângulo AMO (Figura 567), tendo o cateto OM igual à metade da hipotenusa, apresenta ângulos de 30° e 60° , o que acarreta que os setores circulares OAB e OMT tenham ângulos centrais iguais a 120° .

Além disso, AB será o lado do triângulo equilátero inscrito no círculo maior, valendo, pois:

$$AB = 2r \sqrt{3}$$

A área S pedida será a soma de S_1 e S_2 (Figura 567):

$$S_1 = \frac{120^\circ}{360^\circ} \pi (2r)^2 - \frac{AB \cdot OM}{2}$$

$$S_1 = \frac{4\pi r^2}{3} - \frac{2r\sqrt{3} \cdot r}{2} = \frac{4}{3} \pi r^2 - r^2 \sqrt{3} \quad (1)$$

$$S_2 = 2 \cdot \frac{AM \cdot OM}{2} - \frac{120^\circ}{360^\circ} \pi r^2 = r^2 \sqrt{3} - \frac{\pi r^2}{3} \quad (2)$$

Assim:

$$S = S_1 + S_2 = \frac{4}{3} \pi r^2 - r^2 \sqrt{3} + r^2 \sqrt{3} - \frac{\pi r^2}{3} = \frac{3}{3} \pi r^2 \quad \therefore \boxed{S = \pi r^2}$$

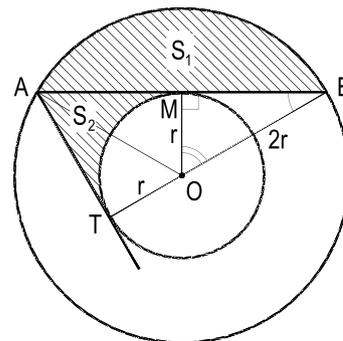


Figura 567

80. AC e BC são, respectivamente, o maior cateto e a hipotenusa do triângulo retângulo ABC . Considere o pé H da altura AH e o ponto J , simétrico de B em relação a H . Sendo CE a perpendicular à reta AJ , E pertencendo a AJ , prove que CB é bissetriz do ângulo ACE .

Resolução: Seja a Figura 568, conforme os dados.

Porque $HB = HJ$, temos $\alpha = \beta$.

Logo, como seus complementos, $\gamma = \varphi$

E, como opostos pelo vértice, $\varphi = \theta$

Assim, no triângulo retângulo CEJ

$$\lambda = 90^\circ - \theta = 90^\circ - \gamma \quad (1)$$

E, no próprio triângulo dado

$$\rho = 90^\circ - B = 90^\circ - \gamma \quad (2)$$

As relações (1) e (2) provam que CB é a bissetriz do ângulo ACE , conforme pedido demonstrar.

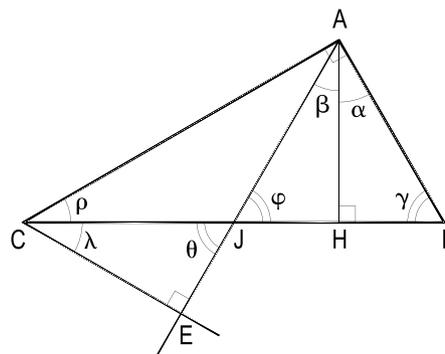


Figura 568

81. Dado um triângulo acutângulo escaleno ABC, considere os três triângulos equiláteros ABC', ACB' e BCA' construídos para o exterior do triângulo dado e prove que são iguais os segmentos AA', BB' e CC'.

Resolução: Construamos a Figura 569 conforme o proposto e observemos que os triângulos ACA' e BCB' são iguais, por terem dois lados respectivamente iguais a e b e os ângulos por estes compreendidos iguais a $60^\circ + C$ (2º caso – número 37).

Por isso, são iguais seus terceiros lados AA' e BB'.

Da mesma forma provaríamos a igualdade dos triângulos ABA' e CBC' e, então, de seus lados AA' e CC'.

E, com isso, a igualdade proposta $AA' = BB' = CC'$.

82. Num círculo (O, R), considere uma corda $AB = \frac{R}{2}$ e calcule o raio do círculo inscrito no setor circular formado por essa corda.

Resolução: Seja OAB o setor circular do círculo (O, R) dado, que corresponda a uma corda $AB = \frac{R}{2}$ (Figura 570).

Consideremos o círculo (C, r) inscrito neste setor e calculemos seu raio r.

Para tanto, observemos a semelhança dos triângulos retângulos OCT e ONB, (com o ângulo agudo O, comum), que permite anotar:

$$\frac{OC}{CT} = \frac{OB}{NB} = \frac{R}{R/4} = 4$$

$$\therefore OC = 4 CT = 4r.$$

$$\text{Assim, temos } OM = OC + CM \quad \therefore R = 4r + r \quad \therefore$$

$$\boxed{r = \frac{R}{5}}$$

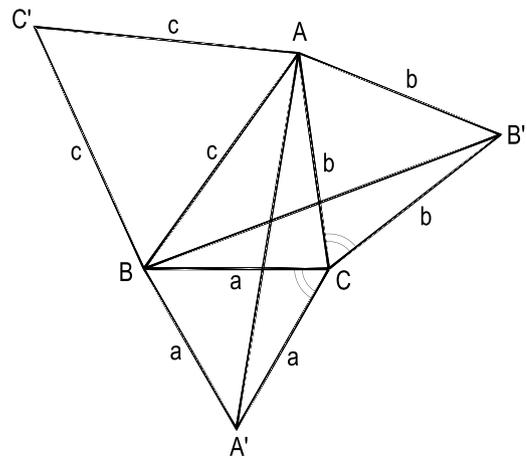


Figura 569

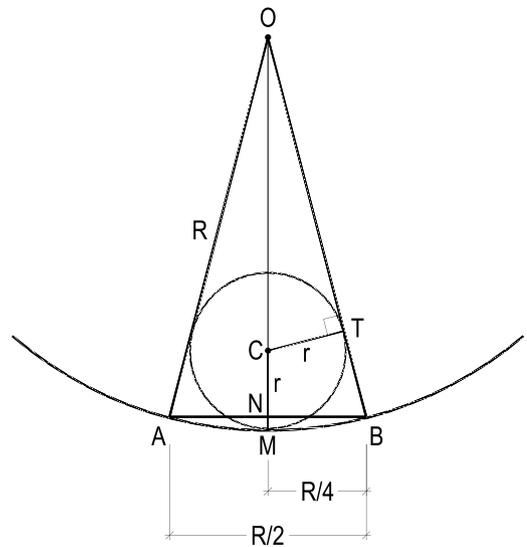


Figura 570

83. Sobre o diâmetro AB de um semicírculo, marque um ponto qualquer J e considere dois círculos tangentes interiormente ao dado, com diâmetros AJ e JB. Calcule, em função dos raios R e r destes dois círculos, o raio x de um outro círculo, tangente externamente a esses dois e internamente ao dado.

Resolução: Seja, na Figura 571, construída conforme os dados, o círculo (C_3, x) tangente, internamente, ao semicírculo O dado, e, externamente, aos de diâmetros AJ e JB.

Para o triângulo C_1, C_2 e C_3 formado pelos centros dos três círculos construídos, a ceviana C_3O vale $(R + r - x)$ e o teorema de Stewart (número 205) dá:

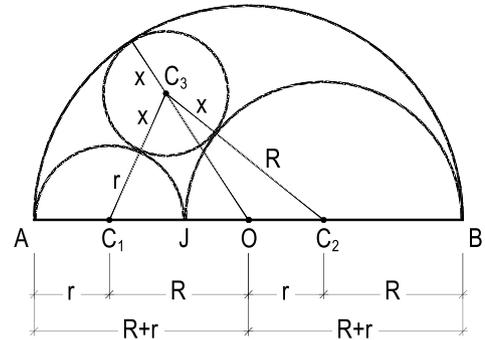


Figura 571

$$(r+x)^2 r - (R+r-x)^2 (R+r) + (R+x)^2 R = Rr(R+r)$$

$$\therefore r^3 + rx^2 + 2r^2x - (R^2 + r^2 + 2Rr + x^2 - 2Rx - 2rx)(R+r) + R^3 + Rx^2 + 2R^2x = Rr(R+r)$$

$$\therefore r^3 + rx^2 + 2r^2x - R^3 - Rr^2 - 2R^2r - Rx^2 + 2R^2x + 2Rrx - R^2r - r^3 - 2Rr^2 - rx^2 + 2Rrx + 2r^2x + R^3 + Rx^2 + 2R^2x = Rr + Rr$$

$$\therefore 4r^2x + 4R^2x + 4Rrx = 4R^2r + 4Rr^2 \quad \therefore r^2x + R^2x + Rrx = R^2r + Rr^2$$

$$\therefore (R^2 + r^2 + Rr)x = Rr(R+r) \quad \therefore \boxed{x = \frac{Rr(R+r)}{R^2 + r^2 + Rr}}$$

84. Prove que a altura de um trapézio retângulo circunscrito a um círculo é igual à média harmônica entre suas bases.

Resolução: A paralela ao lado oblíquo do trapézio forma o triângulo retângulo JKL (Figura 572) que dá:

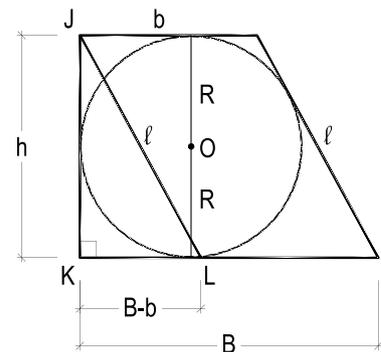


Figura 572

$$\ell^2 = h^2 + (B - b)^2 = h^2 + B^2 + b^2 - 2Bb \quad (1)$$

Mas, pelo teorema de Pitot (número 223):

$$\ell + h = B + b \quad \therefore \ell = B + b - h$$

$$\therefore \ell^2 = B^2 + b^2 + 2Bb + h^2 - 2Bh - 2bh \quad (2)$$

Reunindo (1) e (2), vem:

$$h^2 + B^2 + b^2 - 2Bb = B^2 + b^2 + 2Bb + h^2 - 2Bh - 2bh \quad \therefore 4Bb = 2bh + 2Bh$$

Dividindo os dois membros por $2Bbh$, vem:

$$\therefore \frac{2}{h} = \frac{1}{B} + \frac{1}{b}$$

Esta é a relação que prova (número 162) o proposto.

85. Na figura dada, sendo $AC = BC$ e $BD = BE$, expressar $\alpha = f(\beta)$ (IME - 1968).

Resolução: No triângulo isósceles BDE (Figura 573), temos $x = \alpha$

E, como externo nesse mesmo triângulo:

$$y = x + \alpha \quad \therefore \quad y = 2\alpha$$

Como opostos pelo vértice: $z = x$

Logo, $z = x = \alpha$

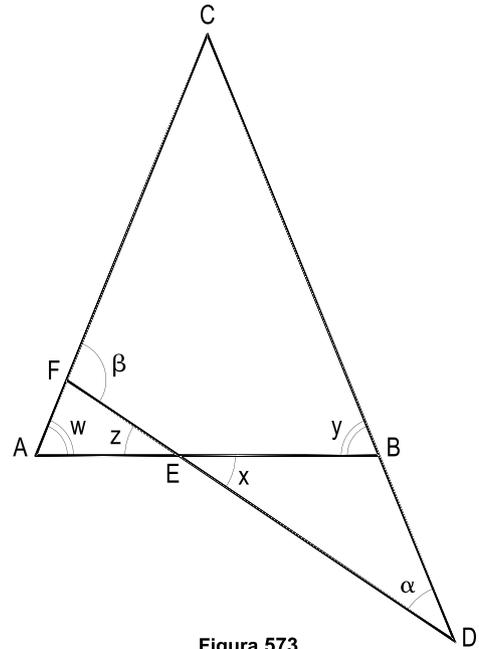
No triângulo isósceles CAB, vem:

$$w = y \quad \therefore \quad w = 2\alpha$$

E, como externo no triângulo AEF: $\beta = w + z$

$$\beta = 2\alpha + \alpha = 3\alpha$$

$$\therefore \quad \boxed{\alpha = \frac{\beta}{3}}, \text{ relação que responde o pedido.}$$



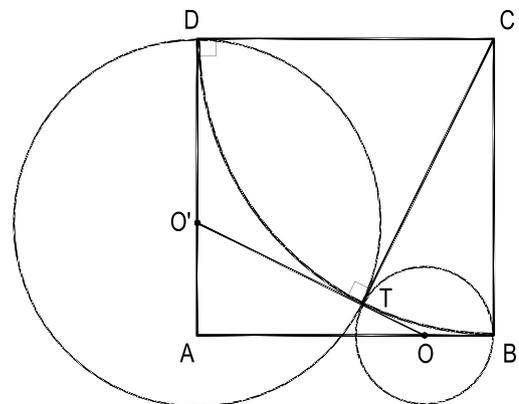
86. Dado um quadrado ABCD, considere um ponto O, móvel, sobre o segmento AB, bem como o círculo (O, OB) e o círculo (O', O'D) tangente exteriormente a este e tangente ao lado CD, no ponto D.

Determine o lugar geométrico dos pontos de contato T desses dois círculos.

Resolução: Como CD e CB são tangentes aos dois círculos considerados (Figura 574), pela própria hipótese conclui-se que C pertence ao eixo radical desses dois círculos (número 254.1), que, tendo de ser perpendicular à linha dos centros OO', há de ser a segunda tangente CT aos dois círculos.

Então, CT será igual ao lado do quadrado.

Por isso, o lugar geométrico procurado é o quadrante da circunferência de centro C e raio igual ao lado do quadrado, exceto, naturalmente, seus pontos extremos (Figura 574).



87. Dado um triângulo isósceles, cujos lados são números inteiros de metros, sabe-se que os raios dos círculos exinscritos têm produto 16 vezes o raio do círculo inscrito.

Determinar os lados do triângulo (IME - 1968).

Resolução: Designando por b , h e ℓ a base, a altura e os lados iguais do triângulo isósceles ABC, sabe-se (número 216) que o raio r do círculo nele inscrito e que os raios dos círculos exinscritos R_b e R_ℓ , respectivamente, relativos à base e a cada um dos lados iguais se escrevem:

$$r = \frac{bh}{2\ell + b}; \quad R_b = \frac{bh}{2\ell - b}; \quad R_\ell = h$$

$$E \text{ (Figura 575): } h^2 = \ell^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \frac{4\ell^2 - b^2}{4}$$

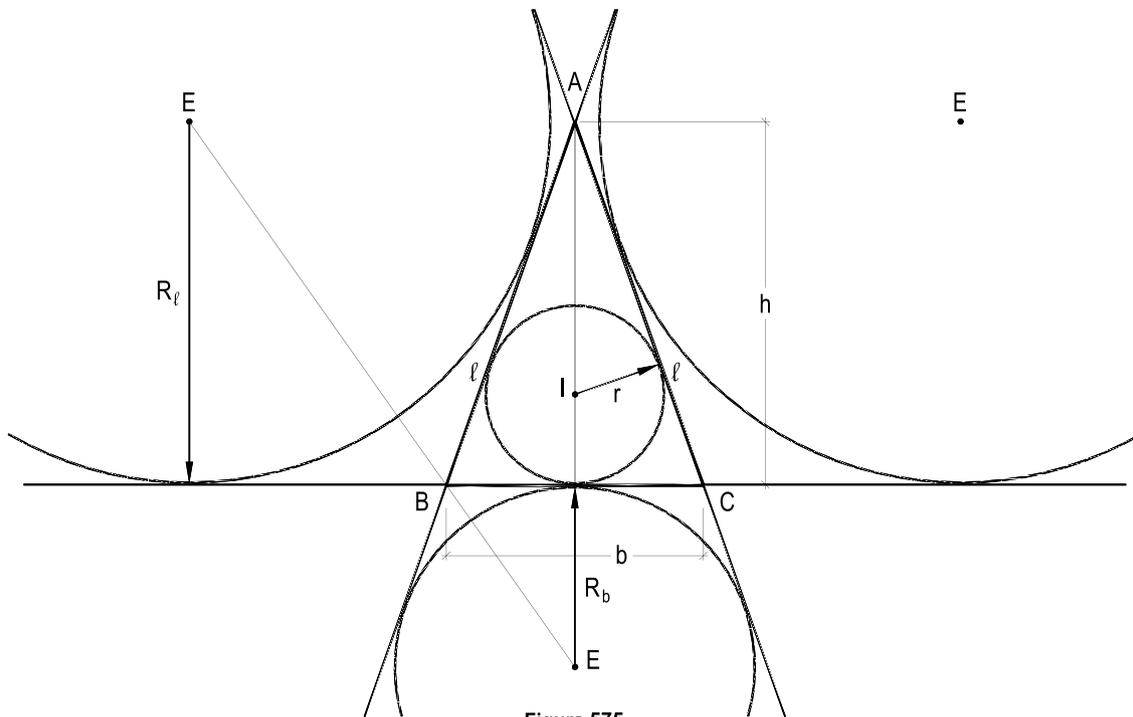


Figura 575

Assim, pelos próprios dados: $R_b \cdot R_\ell \cdot R_\ell = 16 \cdot r$

$$\therefore 16 \frac{bh}{2\ell + b} = \frac{bh}{2\ell - b} \cdot h \cdot h \quad \therefore 16bh(2\ell - b) = bh(2\ell + b) \cdot h^2 = bh(2\ell + b) \frac{4\ell^2 - b^2}{4}$$

$$\therefore 64(2\ell - b) = (2\ell + b)(4\ell^2 - b^2) = (2\ell + b)(2\ell + b)(2\ell - b)$$

$$\therefore 64 = (2\ell + b)^2 \quad \therefore 2\ell + b = 8$$

Ora, os únicos números inteiros que atendem a essa última relação são $\ell = 3$, $\ell = 3$ e $b = 2$, que, medidos em metros, solucionam o problema.

88. Sobre os lados AB e AC de um triângulo escaleno qualquer ABC, constroem-se dois paralelogramos, também quaisquer ABRS e ACXY. Prolongando-se os lados RS e XY desses paralelogramos, obtém-se, por cruzamento, um ponto J, que, ligado ao vértice A, produz a ceviana JA, cujo pé designa-se por M.

Prolongando-se a reta JAM de um segmento MN, exterior a ABC e igual a JA, obtém-se a direção e a amplitude dos segundos lados de um terceiro paralelogramo BCEF construído sobre a base BC do triângulo dado ABC, tal como indicado na Figura 576.

Pede-se provar que a área desse terceiro paralelogramo é igual à soma das áreas dos dois primeiros.

Resolução: Construída a Figura 576, conforme os dados, observemos que os triângulos SAB e JAB são equivalentes, por terem a base AB comum e alturas iguais. E suas áreas valem a metade da área do primeiro paralelogramo ABRS.

Da mesma forma, são equivalentes os triângulos YAC e JAC, com áreas iguais à metade da área do segundo paralelogramo ACXY.

E, devido à igualdade imposta aos segmentos MN e JA, os triângulos JAB e MNB, com bases iguais $JA = MN$ e alturas iguais (as do vértice B), são equivalentes, assim como também o são os triângulos JAC e MNC, por terem bases iguais ($JA = MN$) e alturas iguais (as do vértice C), o que permite, simbolicamente, escrever:

$$S_{(SAB)} = S_{(JAB)} = \frac{1}{2} S_{(ABRS)} \quad (1)$$

$$S_{(YAC)} = S_{(JAC)} = \frac{1}{2} S_{(ACXY)} \quad (2)$$

$$S_{(JAB)} = S_{(MNB)} = \frac{1}{2} S_{(BMNF)} \quad (3)$$

$$S_{(JAC)} = S_{(MNC)} = \frac{1}{2} S_{(MNEC)} \quad (4)$$

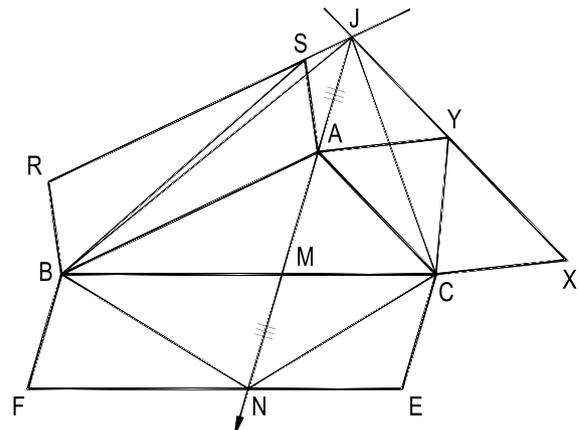


Figura 576

Comparando (1) com (3) e (2) com (4), vem:

$$\frac{1}{2} S_{(BMNF)} + \frac{1}{2} S_{(MNEC)} = \frac{1}{2} S_{(BCEF)} = \frac{1}{2} S_{(ABRS)} + \frac{1}{2} S_{(ACXY)},$$

relação que demonstra o proposto.

89. BC é a base do triângulo isósceles ABC, cujo ângulo interno A vale 18° . Sabendo que o círculo O, circunscrito ao triângulo, tem raio igual a 2 cm, pede-se calcular a área do quadrilátero côncavo ABOC.

Resolução: Sendo $\widehat{BAC} = 18^\circ$, vem $\widehat{BOC} = 36^\circ$ e, por isso, a corda BC é igual ao lado do decágono convexo regular inscrito no círculo O (Figura 577). E, naturalmente, a altura OM do triângulo BOC é igual ao apótema desse decágono.

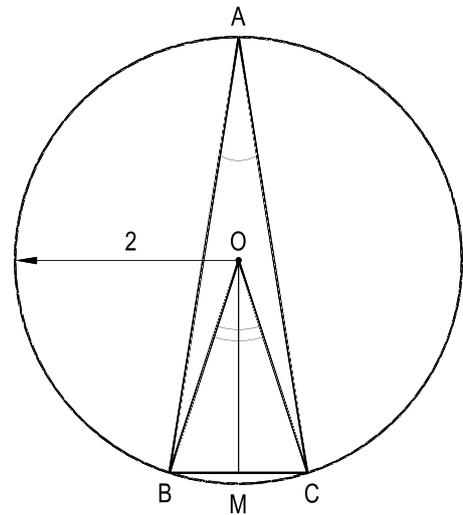


Figura 577

Assim, a área S procurada, diferença entre as áreas dos triângulos ABC e OBC, se escreve:

$$S = \frac{1}{2} BC \cdot AM - \frac{1}{2} BC \cdot OM$$

$$\therefore S = \left(\frac{BC}{2} \right) (AM - OM) = \frac{BC}{2} (2) = BC$$

E como (número 291) $BC = \frac{2}{2} (\sqrt{5} - 1)$, vem $S = (\sqrt{5} - 1) \text{cm}^2$

90. Dado um triângulo equilátero ABC, considere os segmentos iguais AA' , BB' e CC' tais que os ângulos $\widehat{BAA'}$, $\widehat{CBB'}$ e $\widehat{ACC'}$ sejam iguais, em amplitudes e sentidos, e prove que o triângulo $A'B'C'$ é também equilátero.

Resolução: Construída a Figura 578, conforme os dados, sendo O o circuncentro do triângulo ABC, observa-se a igualdade dos triângulos OAA' , OBB' e OCC' , por terem dois lados iguais ($OA = OB = OC$ e k) compreendendo ângulos iguais ($30^\circ + \alpha$). Daí a igualdade das distâncias de O aos vértices A' , B' e C' do novo triângulo, que tem de ser equilátero, devido à igualdade dos triângulos $OA'B'$, $OB'C'$ e $OC'A'$ (2º caso) (Figura 578).

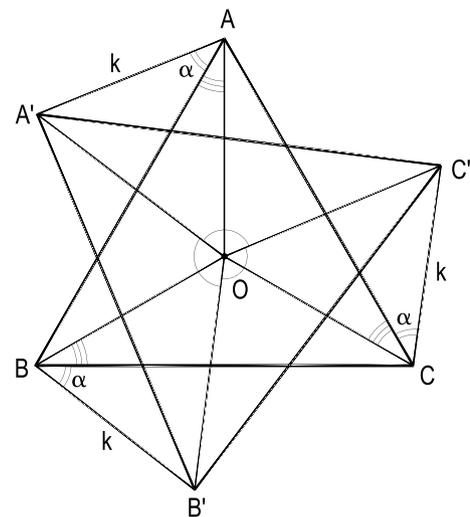


Figura 578

Assim, fica provado que $A'B'C'$ é também equilátero, conforme proposto.

91. Calcular o perímetro de um quadrado ABCD, sabendo que um ponto P, pertencente à circunferência do círculo nele inscrito, dista 2 cm e 4 cm dos dois lados do quadrado mais próximos dele.

Resolução: O triângulo retângulo POQ (Figura 579) dá:

$$R^2 = (R - 4)^2 + (R - 2)^2 = R^2 + 16 - 8R + R^2 + 4 - 4R$$

$$\therefore R^2 = 2R^2 - 12R + 20 \quad \therefore R^2 - 12R + 20 = 0$$

$$\therefore R = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 80}}{2} = \frac{12 \pm 8}{2} \quad \therefore \boxed{R = 10 \text{ cm}}$$

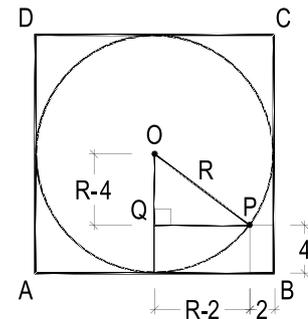


Figura 579

A segunda raiz da equação ($R = 2$) é inviável, frente aos dados, por ser menor que uma das distâncias do ponto P a um dos lados do quadrado.

92. Num círculo de $4\sqrt{2}$ m de raio, inscrevem-se dois quadrados, pela utilização dos oito pontos em que se divide sua circunferência em oito partes iguais (Figura 580).

Calcular a área do octógono convexo comum a esses dois quadrados.

Resolução: Construídos os dois quadrados, conforme os dados, observa-se, pela igualdade dos diversos triângulos como OVX, OXZ, etc. (Figura 580), que o octógono convexo RSTUVXZW formado é regular e que seu apótema OM é o próprio apótema de um dos quadrados dados, o que permite escrever (números 289 e 314), para sua área S:

$$OM = a_8 = (4\sqrt{2})(\sqrt{2}/2) = 4$$

$$\frac{l_8}{a_8} = \frac{2\sqrt{2-\sqrt{2}}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} = \frac{2\sqrt{4+2-4\sqrt{2}}}{\sqrt{4-2}}$$

$$\therefore l_8 = 8 \cdot \frac{\sqrt{6-4\sqrt{2}}}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{6\sqrt{2}-8}$$

$$\therefore S = 4l_8 \cdot a_8 = 4 \cdot 4\sqrt{6\sqrt{2}-8} \cdot 4 \quad \therefore \boxed{S = 64\sqrt{6\sqrt{2}-8} \text{ m}^2}$$

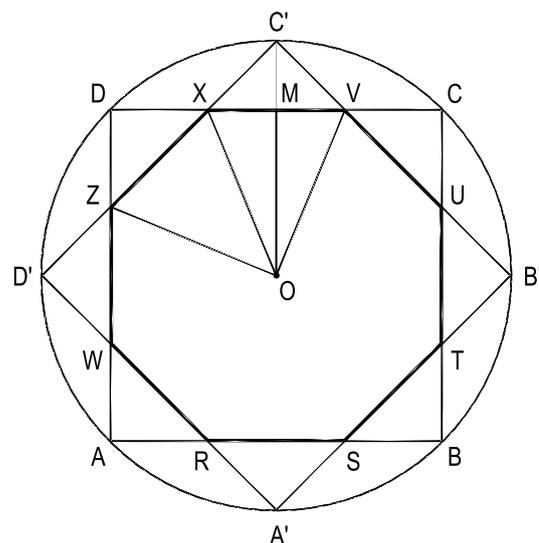


Figura 580

93. Dados quatro pontos quaisquer A, B, C e D, pede-se construir o quadrado cujos lados pertençam cada um a cada um desses pontos.

Análise: Admitamos um quadrado $XYZW$ e sobre cada um de seus lados, os pontos genéricos A, B, C e D, nessa ordem e observemos que, porque a diagonal YW é a bissetriz dos ângulos internos opostos Y e W, ela tem (número 134) que conter os pontos M e N, médios das semicircunferências de diâmetros AB e CD (Figura 581).

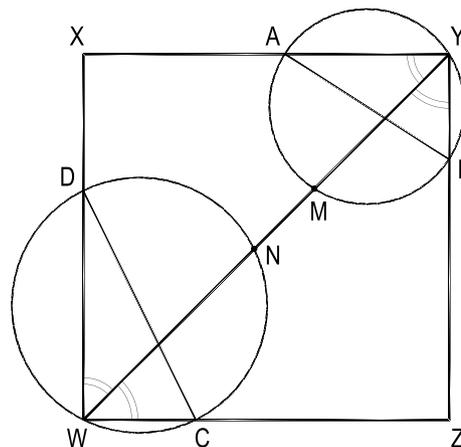


Figura 581

Resolução: Tomando-se dois pares consecutivos de pontos (A com B e C com D), são construídas as circunferências de diâmetros AB e CD e determinados, com precisão, os pontos M e N, médios das semicircunferências mais próximas. A reta MN que une esses pontos (Figura 582) é uma das diagonais do quadrado pedido e suas interseções com as circunferências traçadas oferecem os vértices Y e W do quadrado que, ligados aos quatro pontos dados, completam o quadrado.

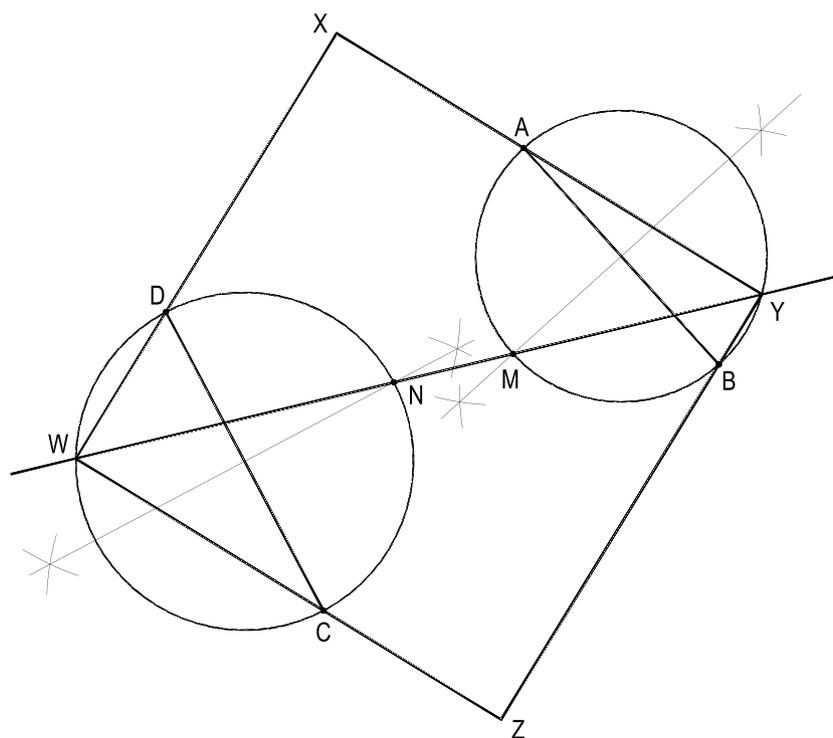


Figura 582

Naturalmente, seria equivalente trabalhar com os pares de pontos A, D e B, C, o que levaria a obter inicialmente a diagonal XZ do quadrado procurado.

94. Dadas duas circunferências concêntricas, com raios R e r ($R > r$), considere dois pontos distintos A e B da maior e admita que dois móveis pontuais deslocam-se, com velocidades iguais, de modo tal que o primeiro percorra o menor arco AB da circunferência maior até chegar à posição B e que o segundo, saindo de A , descreva a parte de seu raio, até encontrar a circunferência menor, passando, então, a percorrer o arco da circunferência menor, até encontrar o raio referente ao ponto B , concluindo seu percurso sobre a porção do raio de B que o leve até essa posição.

As Figuras 583 e 584, que ilustram o acima descrito, visualmente indicam que o percurso descrito sobre o arco AB da circunferência maior pode ser menor que o segundo, misto, $APQB$ (Figura 583), ou que pode ocorrer o contrário, fazendo o arco AB ser maior que o misto $APQB$ (Figura 584), naturalmente porque o ângulo central α varia de um caso ao outro.

Deseja-se, em função do valor do ângulo α , medido em radianos, comparar os dois percursos descritos pelos dois móveis pontuais, como acima suposto, para saber em que condições um chega a B antes do outro e em que condição especial chegam juntos a essa posição final.

Resolução: Como os dois móveis pontuais deslocam-se com velocidades iguais, a questão proposta resume-se a comparar as medidas do arco AB e da figura mista $APQB$ (Figuras 583 e 584).

Já que o ângulo central α vem medido em radianos, os comprimentos dos arcos AB e PQ são (número 301):

$$AB = \alpha R$$

$$PQ = \alpha r$$

$$\text{Assim, } APQB = \alpha r + 2(R - r)$$

$$\therefore AB - APQB = \alpha R - \alpha r - 2R + 2r$$

$$\therefore AB - APQB = (\alpha - 2)R - (\alpha - 2)r$$

$$\therefore AB - APQB = (\alpha - 2)(R - r)$$

Como $R - r$ é um valor positivo, pelos próprios dados, a diferença em estudo será positiva, nula ou negativa, conforme, respectivamente, o ângulo central α for maior, igual ou menor que 2 radianos.

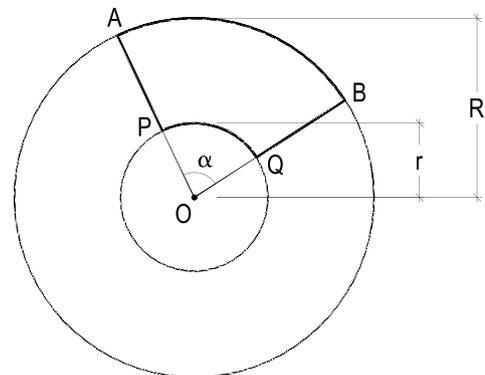


Figura 583

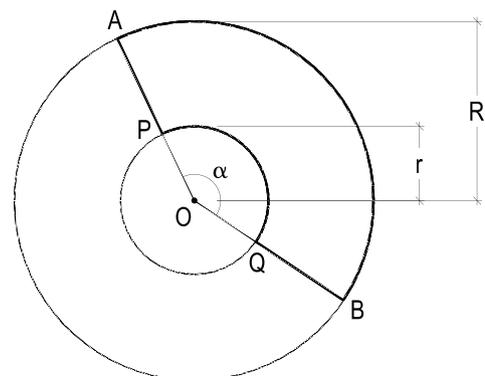


Figura 584

95. Dados os pontos colineares A, J e B, nesta ordem, considere os círculos de diâmetros AB, AJ e JB, bem como o eixo radical dos dois últimos, o qual corta a circunferência do círculo maior num ponto E.

Sendo R, S e T os pontos médios dos arcos AB, AJ e JB (Figura 585), situados num mesmo semiplano em relação à reta AB, calcule a razão entre as áreas S_1 e S_2 , respectivamente, do círculo do diâmetro JE e do triângulo RST.

Resolução: Designemos por O_1, O_2 e O_3 os centros dos círculos indicados na proposição e por a, b e c , seus raios respectivos (Figura 585), e observemos que, por serem os pontos médios das semicircunferências consideradas, os pontos R, S e A são colineares, já que tanto a reta AR quanto a AS têm de formar 45° com AB, o que também acontece com os pontos R, T e B.

Assim, SA e SJ são lados do quadrado inscrito no círculo (O_1), como o são os lados TB e TJ para o círculo (O_2), valendo, pois, respectivamente, $a\sqrt{2}$ e $b\sqrt{2}$.

No triângulo retângulo AEB (não indicado na Figura 587) podemos (número 197) escrever:

$$(2c)^2 = 2a \cdot 2b \quad \therefore \quad c^2 = ab$$

Multiplicando por π , vem:

$$S_1 = \pi c^2 = \pi ab$$

A área S_2 do triângulo retângulo RST, em estudo, é:

$$S_2 = \frac{1}{2} (a\sqrt{2} \cdot b\sqrt{2})$$

$$S_2 = \frac{2ab}{2} \quad \therefore \quad S_2 = ab$$

E, então, a relação pedida $\frac{S_1}{S_2}$ se anota:

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{\pi ab}{ab} \quad \therefore \quad \boxed{\frac{S_1}{S_2} = \pi}$$

É esta a razão pedida.

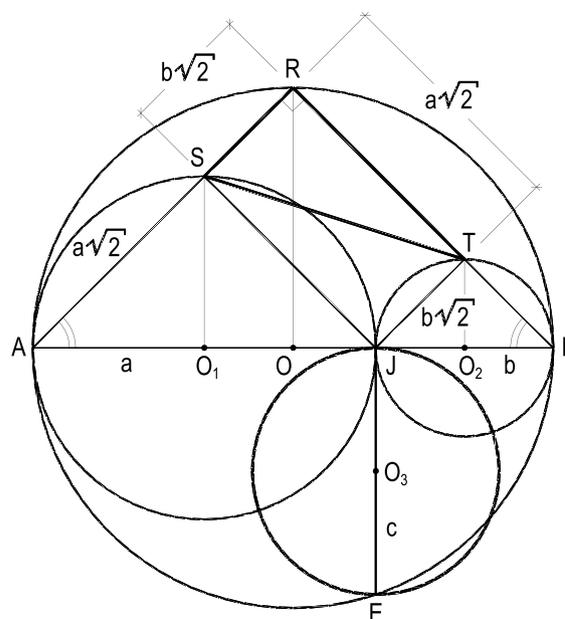


Figura 585

96. As diagonais de um pentágono convexo regular cortam-se formando outro pentágono convexo regular.

Pede-se calcular a razão entre as áreas desses dois polígonos.

Resolução: Os dois polígonos convexos regulares, por serem necessariamente semelhantes (número 184), permitem (número 330) anotar para suas áreas S e S' , em função dessa razão k de semelhança:

$$\frac{S'}{S} = k^2$$

Como k se mede pela razão entre dois segmentos homólogos dos dois polígonos, utilizemos seus apótemas (número 291):

$$\frac{S'}{S} = \left(\frac{a'}{a}\right)^2 = \left(\frac{a_5^*}{a_5}\right)^2$$

$$\frac{S'}{S} = \left[\frac{(R/4)(\sqrt{5}-1)}{(R/4)(\sqrt{5}+1)}\right]^2 = \frac{5+1-2\sqrt{5}}{5+1+2\sqrt{5}} = \frac{3-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}$$

$$\frac{S'}{S} = \frac{(3-\sqrt{5})(3-\sqrt{5})}{(3+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})} = \frac{9+5-6\sqrt{5}}{9-5} = \frac{14-6\sqrt{5}}{4} \quad \therefore \quad \boxed{\frac{S'}{S} = \frac{7-3\sqrt{5}}{2}}$$

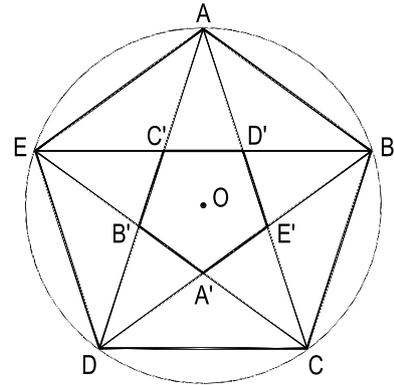


Figura 586

97. Prolonga-se os lados do triângulo escaleno ABC, de área S , obtendo-se os pontos A' , B' e C' , tais que $BC' = AB$, $CA' = BC$ e $AB' = CA$ (Figura 587). Calcule a área S' do triângulo $A'B'C'$, em função de S .

Resolução: Construída a Figura 587, conforme os dados, observa-se que, por terem bases iguais e mesmas alturas, pode-se anotar:

$$S_1 = S_2 \quad e \quad S_1 = S$$

$$S_3 = S_4 \quad e \quad S_3 = S$$

$$S_5 = S_6 \quad e \quad S_5 = S$$

A área S' se escreve:

$$S' = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5 + S_6 + S$$

$$S' = S + S + S + S + S + S + S$$

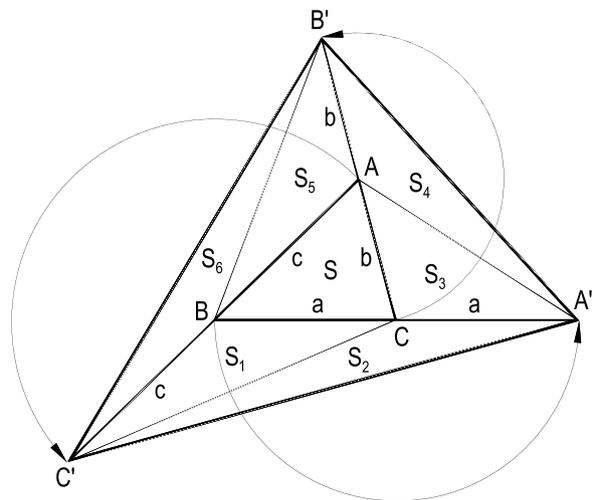


Figura 587

Assim, por simples soma, vem: $\boxed{S' = 7S}$

98. Dado um quadrado ABCD de lado a , são construídos quatro quadrantes a ele internos, com centros em cada um de seus vértices e raios iguais ao lado do quadrado, produzindo, em seus cruzamentos, os pontos R, S, T e U (Figura 588).

Pede-se calcular os perímetros P_1 , P_2 e P_3 das figuras RSTU, CST e ABR, indicadas pelos números 1, 2 e 3, respectivamente, na Figura 588, bem como a área S da figura 1.

Resolução: Seja a Figura 588, construída conforme o enunciado e observe-se, pela própria construção, que são equiláteros os triângulos ABT e ADS, destacados na Figura 589, o que implica em que o ângulo interno A do quadrado dado fique dividido em três ângulos iguais a 30° pelas retas AS e AT.

Assim, são iguais os três arcos BS, ST e TD desse quadrante (Figura 589), como, de resto, serão iguais todos os arcos que limitam as figuras em estudo.

Além disso, suas cordas são iguais aos lados dos dodecágonos convexos regulares inscritos nesses círculos e o quadrilátero RSTU formado pelos cruzamentos dos quadrantes é um quadrado, tais as simetrias construtivas.

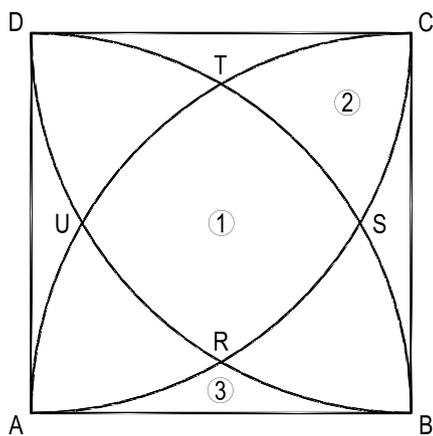


Figura 588

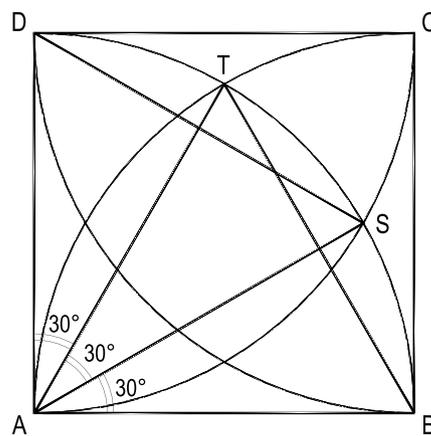


Figura 589

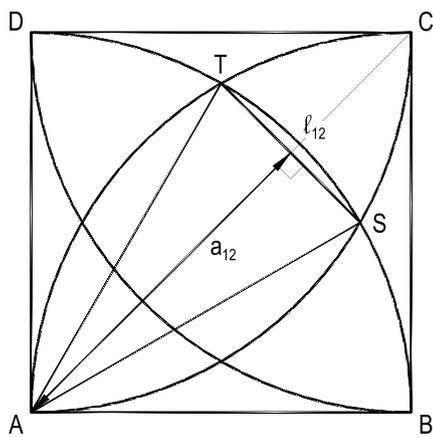


Figura 590

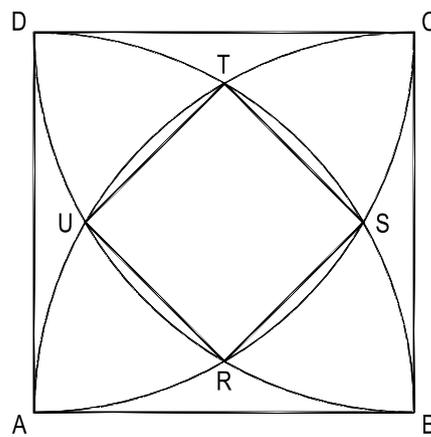


Figura 591

Assim, para os cálculos dos perímetros P_1 , P_2 e P_3 pedidos, temos:

$$P_1 = 4 \cdot \frac{30^\circ}{360^\circ} 2\pi a \quad \therefore \boxed{P_1 = \frac{2}{3}\pi a}$$

$$P_2 = 3 \cdot \frac{30^\circ}{360^\circ} 2\pi a \quad \therefore \boxed{P_2 = \frac{1}{2}\pi a}$$

$$P_3 = 2 \cdot \frac{30^\circ}{360^\circ} 2\pi a + a$$

$$\therefore P_3 = \frac{\pi a}{3} + a = \frac{\pi a}{3} + \frac{3a}{3} \quad \therefore \boxed{P_3 = \frac{(\pi + 3)}{3}a}$$

A área S pedida é a soma da área do quadrado $RSTU$, cujo lado é igual ao do dodecágono convexo angular inscrito com o quádruplo da área do segmento circular de 30° , como o ST indicado na Figura 591.

Assim, temos:

$$S = (\ell_{12})^2 + 4 \left(\frac{30^\circ}{360^\circ} \cdot \pi a^2 - \frac{\ell_{12} \cdot a_{12}}{2} \right)$$

Como (número 290), $\ell_{12} = a\sqrt{2 - \sqrt{3}}$ e $a_{12} = \frac{a}{2} \sqrt{2 + \sqrt{3}}$, temos:

$$S = (2 - \sqrt{3})a^2 + 4 \cdot \frac{\pi a^2}{12} - \frac{4}{4} (a\sqrt{2 - \sqrt{3}}) \cdot (a\sqrt{2 + \sqrt{3}})$$

$$\therefore S = (2 - \sqrt{3})a^2 + \frac{\pi a^2}{3} - (\sqrt{4 - 3})a^2$$

$$\therefore S = 2a^2 - \sqrt{3}a^2 + \frac{\pi a^2}{3} - a^2 = \left(\frac{6 - 3\sqrt{3} + \pi - 3}{3} \right) a^2$$

Simplificando,

$$\boxed{S = \left(\frac{3 - 3\sqrt{3} + \pi}{3} \right) a^2}$$

99. São dados um ângulo, de vértice J , formado por duas semirretas Jx e Jy , além de uma circunferência (O) , interior àquele ângulo.

Pede-se construir todos os hexágonos regulares $ABCDEF$, que tenham seu lado AB sobre Jx , A situado entre J e B , o vértice E sobre o lado Jy do ângulo e pelo menos um vértice pertencendo à circunferência (O) , todos os hexágonos situados no interior do ângulo dado.

Resolução: Por ter que ter três de seus vértices – A , B e E – sobre os lados do ângulo dado, a construção natural se faz pela utilização de homotetia, de centro J .

Assim, escolhido um ponto E' , qualquer de Jy , constrói-se o hexágono regular $A'B'C'D'E'F'$, que tenha seu lado $A'B'$ em Jx , A' entre J e B' , como imposto pelo enunciado. Tal construção é simples (Figura 592) pelo envio da perpendicular $E'A'$ a Jx e pelo uso dos ângulos de 30° , em relação a tal perpendicular, buscando os lados $E'F'$ e $F'A'$ desse hexágono (Figura 592).

Completado esse hexágono regular auxiliar $A'B'C'D'E'F'$, para obter as soluções pedidas, observe-se que, pelas posições relativas dos dados, o raio de homotetia referente ao vértice F' é inútil, por não atingir a circunferência (O) , o que só acontece para os raios de homotetia para os vértices C' e D' , produzindo, cada um, dois cortes em (O) , dando, assim, ao problema, as quatro soluções apresentadas na Figura 592.

Embora incapaz de cortar a circunferência (O) , o raio de homotetia do vértice F' é importante auxiliar na construção dos quatro hexágonos soluções, por conter os homotéticos do vértice F' (Figura 592).

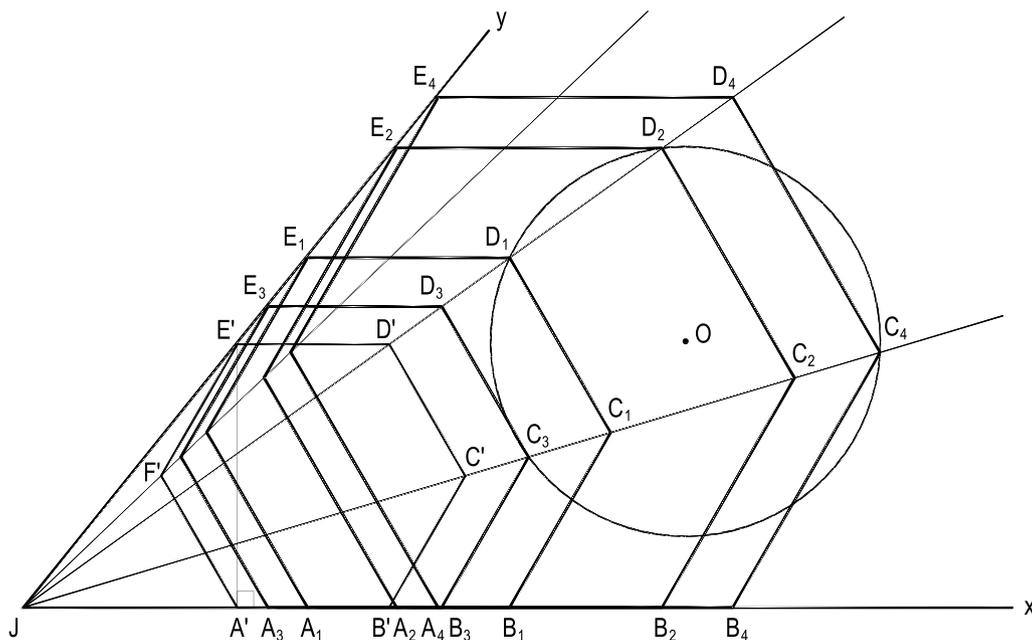


Figura 592

100. São dados dois círculos exteriores (A) e (B) e outros dois secantes (C) e (D), mas exteriores aos dois primeiros.

Pede-se construir dois círculos concêntricos que sejam um ortogonal a (A) e a (B) e o outro ortogonal a (C) e a (D).

Resolução: Considerados os quatro círculos (A) e (B) exteriores e (C) e (D) secantes entre si, mas exteriores a (A) e a (B), com raios quaisquer, sabe-se (número 254.2) que o lugar geométrico dos pontos O , que podem ser centros de círculos ortogonais a (A) e (B), é o eixo radical desses dois círculos e que o ponto O' , centro do segundo círculo procurado, tem de pertencer a uma das porções do eixo radical de (C) e (D) externas a estes dois círculos.

Assim, o ponto $O \equiv O'$, centro comum aos dois círculos procurados, há de ser o ponto de interseção dos dois eixos radicais dos pares de círculos (A) com (B) e (C) com (D). Para construí-los, basta utilizar um dos clássicos procedimentos (número 259), com o traçado de um círculo auxiliar, indicado em tracejado, na Figura 593, para o par (A) e (B) e a reta formada pelos pontos comuns a (C) e (D).

O ponto $O \equiv O'$, centro comum dos dois círculos pedidos, é a interseção desses dois eixos radicais $ER_{A,B}$ e $ER_{C,D}$ e os raios R e R' dos círculos pedidos são as tangentes OT_1 e $O'T_2$ enviadas desse ponto a um dos dois círculos que constituem cada par (Figura 593).

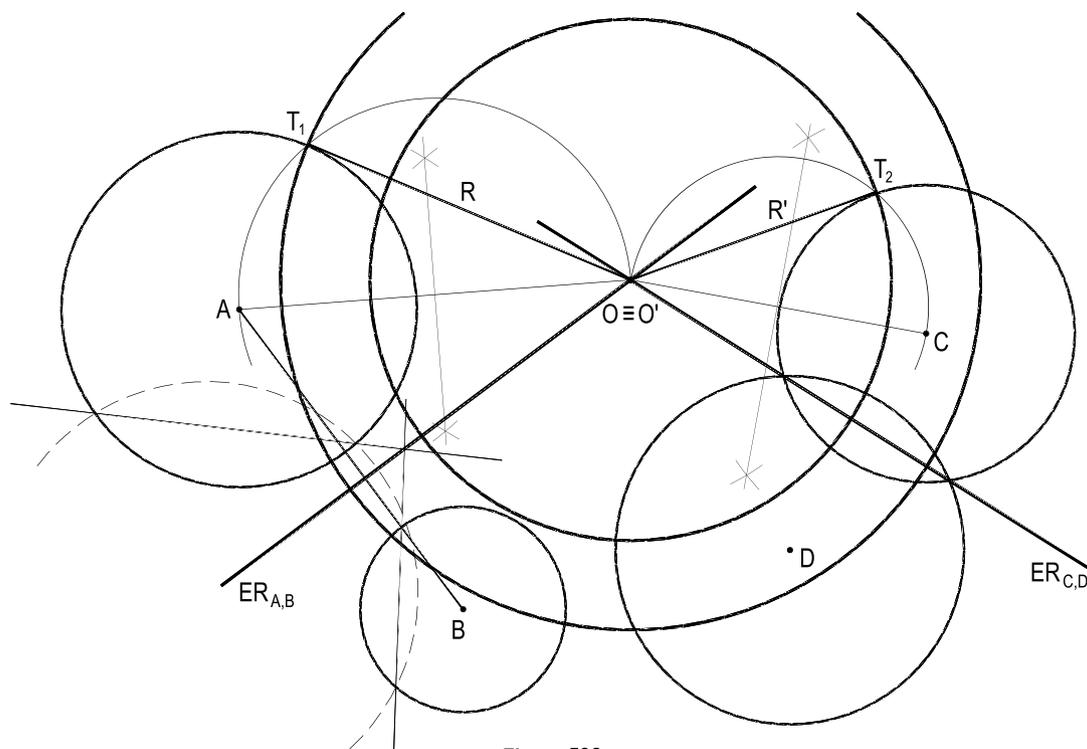


Figura 593

Para os quatro círculos dados é possível o problema, com uma única solução para o par de círculos (O, R) e (O', R') apresentados na Figura 593, o que é a situação mais comum.

Mas cabe ressaltar que, se o ponto $O \equiv O'$, fosse interior aos círculos C e D , isto é, se pertencesse à corda comum aos dois, seria impossível existir o círculo O' (número 254.2), por não ser possível traçar, dele, tangentes aos círculos (C) e (D) , permanecendo, apenas, o círculo (O, R) , ortogonal aos dois primeiros (Figura 594).

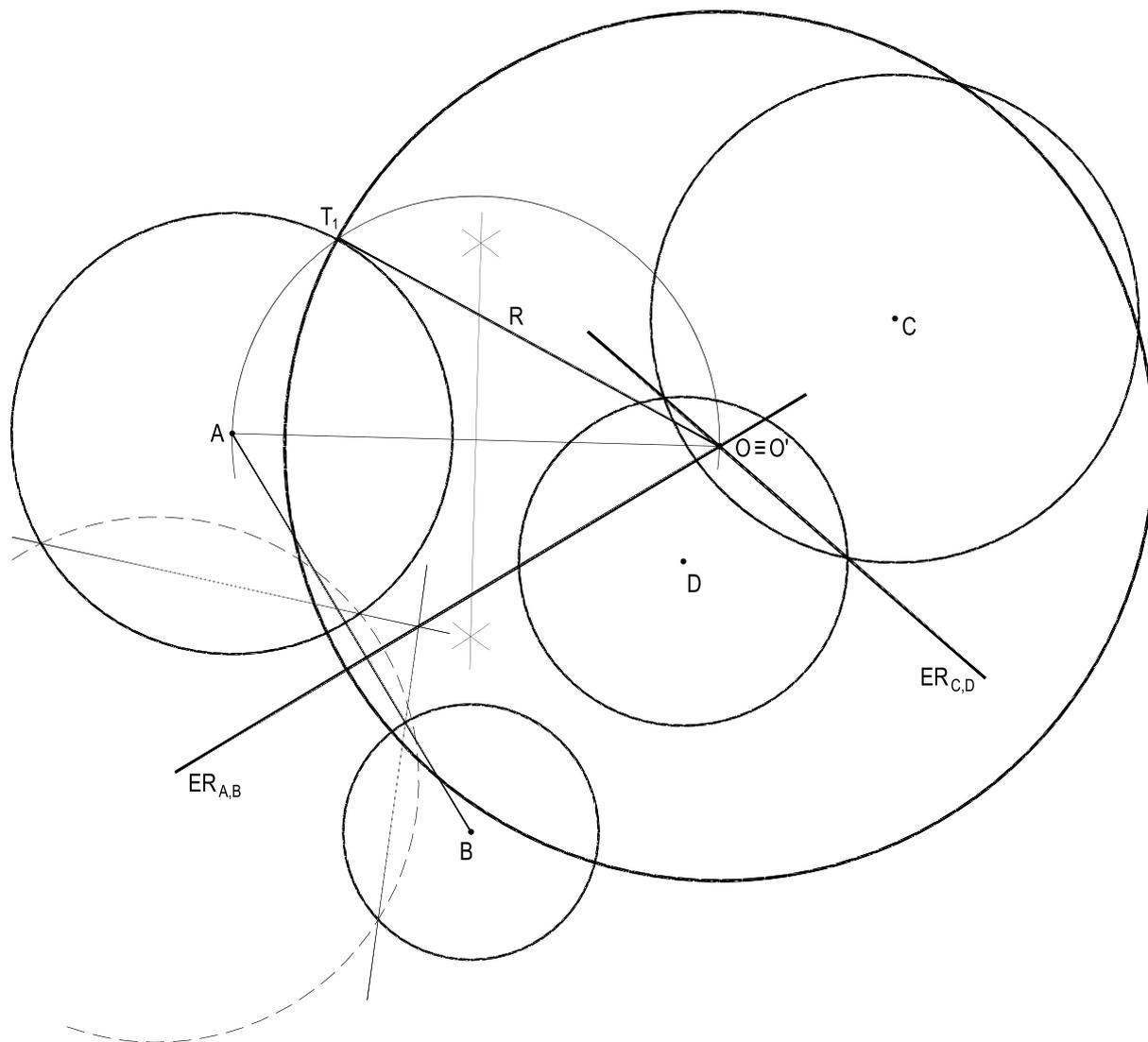


Figura 594

DADOS INTERNACIONAIS PARA CATALOGAÇÃO NA
PUBLICAÇÃO (CIP)

A447g

Almeida, Célio Pinto de, 1937-
Geometria plana / Célio Pinto de Almeida. – 2. ed. rev. e
ampl. – Rio de Janeiro :
G. Ermakoff, 2020.
320 p. : il. ; 28 cm.

.
ISBN - 978-65-87730-01-1

1. Geometria plana. I. Título.

CDD - 516.22

ROBERTA MARIA DE O. V. DA COSTA – Bibliotecária CRB7 5587

Este livro foi composto na tipografia Minion pro em
corpo 12,5/17,3, impresso em papel offset 90g/m²,
na gráfica Santa Marta – São Paulo.