

CÔNICAS

Célio Pinto de Almeida

CÔNICAS

— 2ª Edição —

G.Ermakoff CASA EDITORIAL
RIO DE JANEIRO | 2025

Cônicas

Copyright © 2025 by Célio Pinto de Almeida

Coordenação editorial:

George Ermakoff

Capa:

Miriam Lerner

Diagramação:

Marcelo Domingues

Desenhos:

Michelle Bulhões

Digitação:

Gilmar Lessa

Revisão:

Luciana Messeder e Patricia Leal

Imagem da capa:

Seções cônicas

Segunda edição

Tiragem: 1.000 exemplares – Distribuição gratuita

Este estudo dedico à minha principal fonte de estímulo e de aplicação de tempo e estudo. À Sônia.

CÔNICAS

O presente estudo é uma revisão, com ampliação de detalhes e inclusão de duas centenas de problemas propostos e resolvidos, das cônicas, curvas planas especialíssimas, muito presentes, tanto na Geometria quanto nos mais diversos aspectos da vida cotidiana, anotando suas principais propriedades e as relações métricas que lhes dizem respeito.

Como na edição inicial, é um trabalho dedutivo e seu formato didático e lógico é proposital, dentro dos puros princípios da Geometria. Seu propósito é, simplesmente, possibilitar ao leitor, mesmo que não versado em Matemática, seqüências de raciocínios simples que conduzam às conclusões das propriedades enunciadas.

De modo a facilitar as inevitáveis consultas a propriedades anteriormente enunciadas e/ou demonstradas, todas elas são numeradas sequencialmente.

O título *Cônicas*, simplificação de *Curvas Cônicas*, ou de *Seções Cônicas*, deve-se ao fato de serem essas curvas, aqui em estudo, provenientes de seções planas em cones circulares retos, como, no decorrer do estudo, se demonstrará.

Acredita-se que as cônicas tenham sido estudadas pela primeira vez pelo matemático grego Menecmo, discípulo de Eudoxo, tendo sido, a partir daí, tema de interesse de inúmeros matemáticos e geômetras da Antiguidade, e não só.

Foi Apolônio de Perga, conhecido como o Grande Geômetra, quem mais se aprofundou na matéria, creditando-se a ele os mais completos estudos escritos sobre essas curvas. Deve-se a Apolônio a descoberta de se poder conseguir, num cone de revolução de duas folhas, cada uma das três cônicas pela variação do ângulo que o plano secante considerado forme com o eixo do cone, como adiante detalharemos. Também provou que o cone não tem que ser necessariamente reto. Sua magnífica obra *As Cônicas* veio a público cerca de dois séculos antes do nascimento de Cristo.

Dentro do enorme conjunto de matemáticos que se interessaram e estudaram as cônicas, merece lugar de destaque o geômetra belga Germinal Pierre Dandelin que, com colaboração de seu colega e compatriota Adolphe Quételet, proporcionou marcante aprofundamento no tema, pela inclusão de esferas inscritas nos cones de revolução, não só para claras e simples demonstrações, como, também,

para precisar o posicionamento dos focos dessas seções planas, como apresentaremos no Capítulo XII do presente trabalho.

Dandelin recebeu especial contributo do matemático inglês Pierce Morton que, fazendo uso dos mesmos raciocínios que Dandelin havia utilizado para precisar as posições dos focos de duas seções bifocais, conseguiu, o que Dandelin não havia feito, determinar a posição do foco da parábola seção num cone de revolução por um plano paralelo a uma de suas geratrizes (número 203).

LISTAGEM DE ASSUNTOS

A listagem abaixo apresenta, em cada capítulo, os principais assuntos, definições e teoremas, ao invés do habitual sumário de títulos, tais as quantidades de conceituações e demonstrações.

| | | |
|---|---|----|
| Introdução | Curvas planas | 15 |
| | Tangentes e normais | 16 |
| | Ângulo de duas curvas | 16 |
| | Curvas ortogonais | 16 |
| | Curvas tangentes | 16 |
| | Convexidade | 17 |
| | Cordas e diâmetros de uma curva | 17 |
| | Eixos e vértices de uma curva | 17 |
| | Centro de uma curva | 18 |
| | Diâmetros conjugados | 18 |
| | Cordas suplementares | 18 |
| | | |
| Capítulo I – Elipse | Condição de existência | 19 |
| | Natureza | 19 |
| | Eixos e centro de simetria | 20 |
| | Relações métricas | 21 |
| | Corda focal e parâmetro | 22 |
| | Excentricidade | 22 |
| | A elipse referida a seus eixos | 23 |
| | Circunferências diretoras, principal e auxiliar | 25 |
| | Determinação do ponto de contato | 27 |
| | Construção das tangentes | 28 |
| | Teorema da La Hire | 29 |
| | Teoremas de Poncelet | 32 |
| | Circunferência de Monge | 35 |
| | Pontos de corte de uma secante | 36 |
| | | |
| Capítulo II – Elipse como projeção ortogonal da circunferência | Área da elipse | 55 |
| | Construção da elipse a partir dos eixos | 58 |
| | Sistemas rígidos | 63 |
| | | |
| Capítulo III – Elipse como afim ortogonal da circunferência | Afinidade espacial | 69 |
| | Afinidade plana | 70 |
| | Construção da elipse a partir dos eixos | 74 |
| | Tangentes paralelas a uma reta dada | 75 |
| | Tangentes por um ponto exterior | 75 |
| | Pontos de interseção de uma secante | 76 |

| | | |
|--|---|-----|
| Capítulo IV – Diâmetros conjugados da elipse | Diâmetros da elipse | 81 |
| | Diâmetros conjugados da elipse | 82 |
| | Determinação dos eixos | 83 |
| | Processo de d’Ocagne | 84 |
| | Processo de Mannheim | 84 |
| | Teoremas de Apollonius | 85 |
| | | |
| Capítulo V – Elipse como afim oblíqua da circunferência | Afinidade oblíqua entre elipse e circunferência | 93 |
| | Sistema de afinidade oblíqua | 93 |
| | Construção da elipse | 94 |
| | Construção da tangente num ponto corrente | 95 |
| | Construção das tangentes paralelas a uma reta | 95 |
| | Construção das tangentes por um ponto exterior | 95 |
| | Pontos de interseção de uma secante | 96 |
| | | |
| Capítulo VI – Hipérbole | Condição de existência | 103 |
| | Natureza | 103 |
| | Eixos e centro de simetria | 104 |
| | Relações métricas | 105 |
| | Corda focal e parâmetro | 105 |
| | Excentricidade | 106 |
| | A hipérbole referida a seus eixos | 107 |
| | Hipérbole equilátera | 108 |
| | Circunferências diretoras | 110 |
| | Circunferência principal | 110 |
| | Determinação do ponto de contato | 113 |
| | Construção das tangentes | 114 |
| | Teorema de La Hire | 116 |
| | Teoremas de Poncelet | 120 |
| | Circunferência de Monge | 123 |
| | Pontos de corte de uma secante | 125 |
| | | |
| Capítulo VII – Assíntotas da hipérbole | A hipérbole possui duas assíntotas | 133 |
| | Assíntotas da hipérbole equilátera | 135 |
| | Hipérboles conjugadas | 135 |
| | Secantes à curva e às assíntotas | 140 |
| | | |
| Capítulo VIII – Diâmetros conjugados da hipérbole | Diâmetros da hipérbole | 147 |
| | Diâmetros conjugados da hipérbole | 148 |
| | Construção direta da hipérbole | 150 |
| | | |
| Capítulo IX – Parábola | Condição de existência | 153 |
| | Natureza | 153 |
| | Eixo e vértice | 154 |
| | Corda focal e parâmetro | 155 |
| | Equação da parábola | 158 |

| | | |
|--|---|-----|
| | Determinação do ponto de contato | 159 |
| | Construção das tangentes | 160 |
| | Teorema de La Hire | 163 |
| | Teoremas de Poncelet | 165 |
| | Reta de Simson | 169 |
| Capítulo X – Parábola como limite de uma cônica bifocal | Parábola como limite da elipse | 175 |
| | Parábola como limite da hipérbole | 178 |
| Capítulo XI – Diâmetros da parábola | Diâmetros da parábola | 181 |
| | Construção direta da parábola | 185 |
| Capítulo XII – Seções cônicas | Superfícies tangentes | 193 |
| | Inscrição de uma esfera num cone de revolução | 194 |
| | O estudo das seções cônicas | 195 |
| | Esféras de Dandelin | 197 |
| | Teorema de Dandelin | 197 |
| | Seção elítica | 197 |
| | Seção hiperbólica | 200 |
| | Seção parabólica | 202 |
| | A parábola como posição limite da elipse | 205 |
| | A parábola como posição limite da hipérbole | 207 |
| Capítulo XIII – Excentricidades e diretrizes | Excentricidades das cônicas bifocais | 209 |
| | Variação da excentricidade da elipse | 209 |
| | Variação da excentricidade da hipérbole | 210 |
| | Cálculo dos raios vetores para a elipse | 211 |
| | Cálculo dos raios vetores para a hipérbole | 213 |
| | Diretrizes da elipse | 219 |
| | Diretrizes da hipérbole | 220 |
| | Diretriz da parábola | 221 |
| Capítulo XIV – Problemas gerais | Problemas resolvidos | 229 |

ITENS DESTACADOS

A seguir, por ordem alfabética, vão listados os itens habitualmente mais procurados.

| | |
|---|-----|
| Afinidade espacial | 69 |
| Afinidade plana | 70 |
| Área da elipse | 55 |
| Assíntotas da hipérbole | 133 |
| Circunferência de Monge da elipse | 35 |
| Circunferência de Monge da hipérbole | 123 |
| Circunferências diretoras, principal e auxiliar da elipse | 25 |
| Circunferências diretoras da hipérbole | 110 |
| Circunferência principal da hipérbole | 110 |
| Corda focal da elipse | 22 |
| Corda focal da hipérbole | 105 |
| Cordas suplementares | 18 |
| Corda focal da parábola | 155 |
| Curvas ortogonais | 16 |
| Diâmetros conjugados | 18 |
| Diâmetros conjugados da elipse | 82 |
| Diâmetros conjugados da hipérbole | 148 |
| Diâmetros da elipse | 81 |
| Diâmetros da hipérbole | 147 |
| Cordas e diâmetros de uma curva | 17 |
| Diâmetros da parábola | 181 |
| Diretrizes da elipse | 219 |
| Diretrizes da hipérbole | 220 |
| Eixos de uma curva | 17 |
| Esféras de Dandelin | 197 |
| Excentricidade da elipse | 22 |
| Excentricidade da hipérbole | 106 |
| Hipérbole equilátera | 108 |
| Hipérboles conjugadas | 135 |
| Parâmetro da elipse | 22 |
| Parâmetro da hipérbole | 105 |
| Parâmetro da parábola | 155 |
| Processo de Mannheim | 84 |
| Processo de d'Ocagne | 84 |

| | |
|--|-----|
| Reta de Simson | 169 |
| Teorema de La Hire – elipse | 29 |
| Teorema de La Hire – hipérbole | 116 |
| Teorema de La Hire – parábola | 163 |
| Teorema de Dandelin | 197 |
| Teoremas de Apollonius | 85 |
| Teoremas de Poncelet – elipse | 32 |
| Teoremas de Poncelet – hipérbole | 120 |
| Teoremas de Poncelet – parábola | 165 |
| Vértices de uma curva | 17 |

INTRODUÇÃO

1 – Curvas planas

São denominadas planas as curvas que cabem inteiramente num único plano, ou seja, quando têm todos os seus pontos pertencentes a um único plano (Figura 1). Em caso contrário, são ditas não planas ou espaciais (Figuras 2 e 3).

Observe-se que, como exemplificado na Figura 2, uma curva não plana pode ser formada por dois trechos planos. E até por mais que dois.

A Figura 3 corresponde a uma hélice cilíndrica, curva espacial.

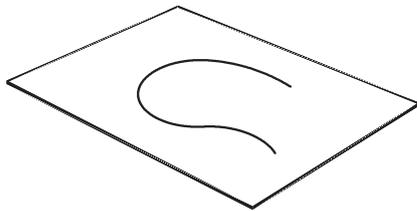


Figura 1

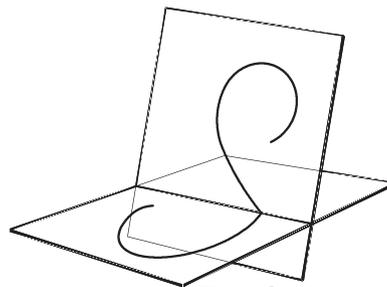


Figura 2

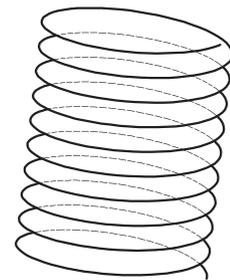


Figura 3

2 – Naturezas

As curvas podem ser abertas, como a espiral 1234... da Figura 4, ou fechadas, como a oval $T_1T_2T_3T_4$, da Figura 5, ambas planas, nesses exemplos.

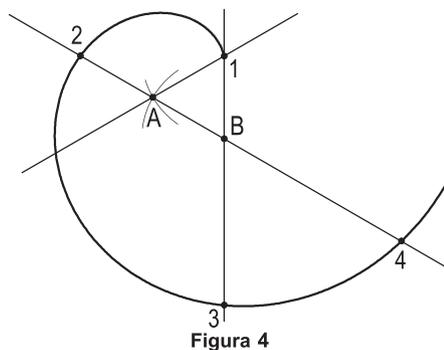


Figura 4

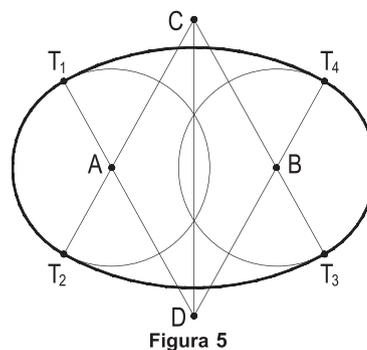


Figura 5

3 – Tangentes e normais a uma curva plana

Tangente t a uma curva plana, num ponto A da curva, é a posição limite ocupada por uma secante AB quando, mantido fixo o ponto A , B descreve o arco BA até vir a coincidir com A (Figura 6).

Assim, t , posição limite daquela secante AB , tem apenas o ponto A em comum com a curva.

A é dito, então, ponto de contato de t com a curva.

Normal n a uma curva plana c , num ponto A da curva, é a perpendicular à tangente t , nesse ponto (Figura 6).

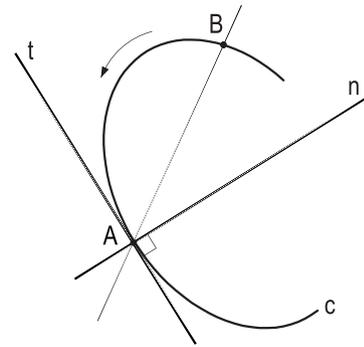


Figura 6

4 – Ângulo de duas curvas secantes

Por definição, ângulo α de duas curvas c e c' , secantes num ponto A , é o menor ângulo formado pelas tangentes t e t' a elas nesse ponto (Figura 7).

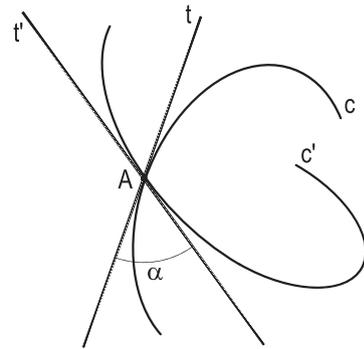


Figura 7

Naturalmente, o valor de α pode mudar conforme a posição desse ponto A .

5 – Curvas ortogonais

Duas curvas planas secantes são ditas ortogonais num ponto A , quando, sendo A um ponto de corte, as tangentes às curvas nesse ponto são perpendiculares entre si (Figura 8).

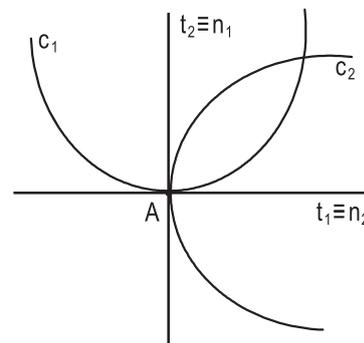


Figura 8

Da própria definição, conclui-se que duas curvas são ortogonais num ponto A , quando, nesse ponto, a tangente a uma é normal à outra e vice-versa (Figura 8).

6 – Curvas tangentes

Duas curvas planas c e c' são tangentes num ponto comum T quando há uma única tangente t às duas curvas nesse ponto (Figura 9).

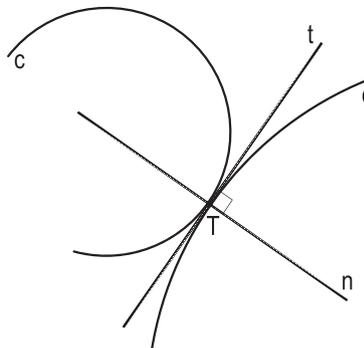


Figura 9

Ou seja, quando, nesse ponto, é nulo o ângulo entre elas.

7 – Convexidade

Uma curva plana é convexa quando todas as tangentes a ela deixam-na inteiramente situada num dos dois semiplanos definidos por essas tangentes (Figura 10). As curvas que não atendem a essa limitação são ditas côncavas ou não convexas (Figura 11).

Toda reta secante a uma curva convexa possui no máximo dois pontos em comum com a curva (Figura 10); uma reta pode cortar uma curva côncava em mais de dois pontos (Figura 11).

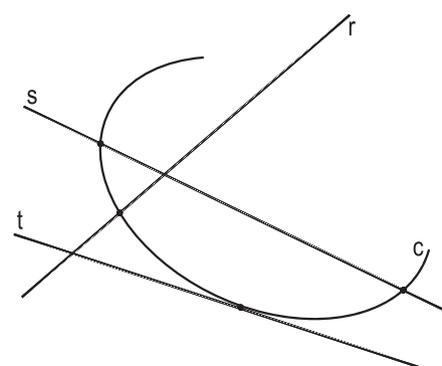


Figura 10

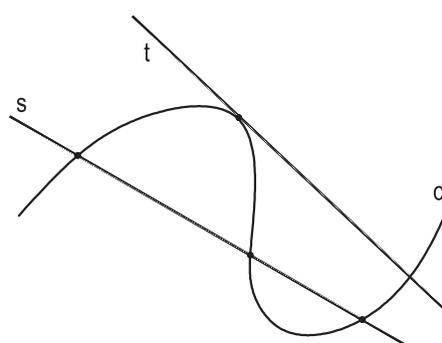


Figura 11

8 – Cordas e diâmetros de uma curva

Corda de uma curva é qualquer segmento de reta formado por dois pontos da curva.

Por definição, diâmetro de uma curva, relativo a uma certa direção, é o lugar geométrico dos pontos médios das cordas da curva que possuem aquela direção (Figura 12).

É evidente que toda curva plana possui uma infinidade de diâmetros, em correspondência com a infinidade de direções que se pode arbitrar para suas cordas e que, se existe tangente t no extremo A de um diâmetro d de uma curva, ela é paralela às cordas que determinam esse diâmetro, pois essa tangente é a posição limite ocupada pelas secantes suportes das cordas consideradas, quando os pontos de corte com a curva tendem um ao outro, mantidas suas direções (Figura 12).

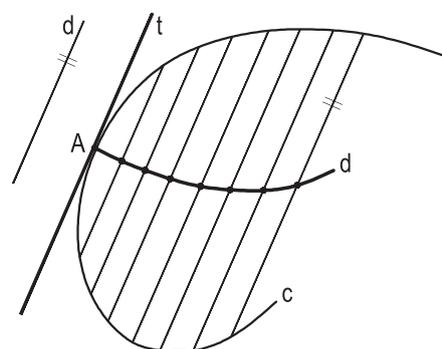


Figura 12

9 – Eixos e vértices de uma curva

No caso particular em que, para uma certa direção d , o diâmetro de uma curva é retilíneo e perpendicular àquela direção, diz-se que esse diâmetro é um eixo da curva (Figura 13). E porque todo eixo de uma curva é a mediatriz comum das cordas que o definem, ele funciona para a curva como um eixo de simetria. Todo ponto comum a um eixo e à curva é denominado vértice da curva, como A nessa figura.

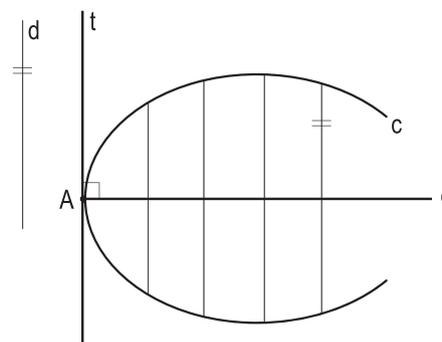


Figura 13

10 – Centro de uma curva

Quando a curva plana é tal que admite dois eixos de simetria, o ponto a eles comum é designado centro da curva, como o ponto O , na Figura 14, comum aos eixos perpendiculares AB e CD da curva c .

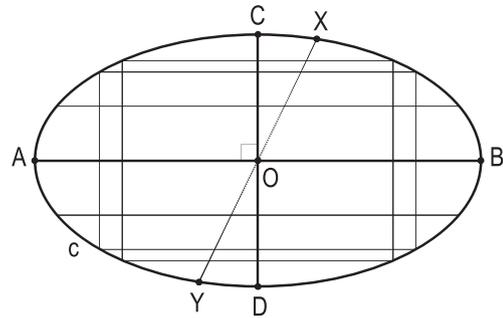


Figura 14

E, portanto, o centro de uma figura plana funciona como centro de simetria para pares de pontos da curva, como X e Y nessa figura.

11 – Diâmetros conjugados e cordas suplementares

Por definição, dois diâmetros retílineos d e d' , relativos a duas direções Δ e Δ' (Figura 15), são ditos conjugados, quando são, respectivamente, paralelos, inversamente, a Δ' e a Δ .

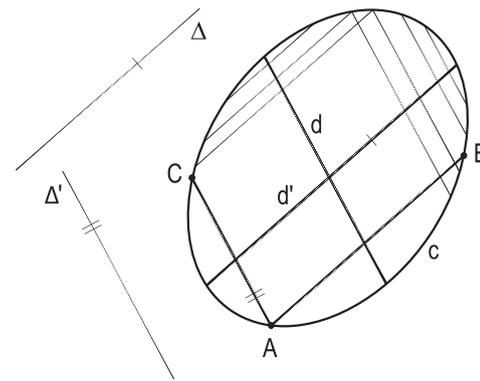


Figura 15

Ainda por definição, duas cordas AB e AC que possuem um extremo comum A são ditas suplementares (Figura 15), quando são respectivamente paralelas a dois diâmetros conjugados da curva.

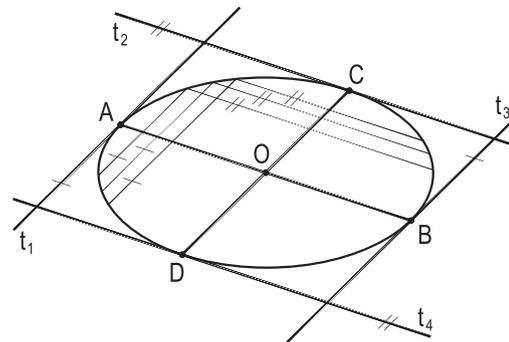


Figura 16

Tal como visto anteriormente (número 8), as tangentes à curva que admite um par de diâmetros conjugados, em suas extremidades, devem ser paralelas cada qual à direção de seu conjugado (Figura 16), tal como são as tangentes t_1 , t_2 , t_3 e t_4 nos extremos A , B , C e D dos diâmetros conjugados AB e CD da curva exemplificada nessa figura, t_1 e t_3 com a direção CD e t_2 e t_4 com a direção AB .

E, é claro que, nessas condições, o ponto O , comum a esse par de diâmetros (quer sejam, ou não, conjugados), é o centro da curva, como na Figura 17.

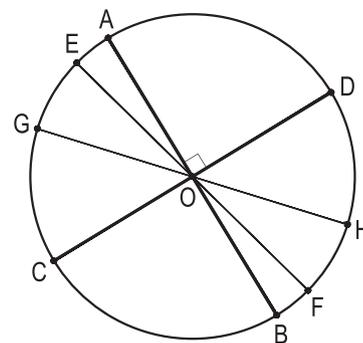


Figura 17

CAPÍTULO I

ELIPSE – DEFINIÇÕES E ELEMENTOS

12 – Definições

Elipse é a curva plana cujos pontos possuem a mesma soma de distâncias a dois pontos fixos de seu plano. Os pontos fixos são denominados focos da elipse e a distância entre eles distância focal. Os segmentos MF e MF' formados por um ponto M corrente da elipse e por cada um dos focos F e F' são denominados raios vetores do ponto M (Figura 18).

13 – Condição de existência

Designemos por $2c$ a distância focal e por $2a$ a soma constante dos raios vetores de cada ponto da elipse. Para que exista a curva, ou, o que é o mesmo, para que existam triângulos como MFF' (Figura 18), é necessário e suficiente que:

$$FF' < MF + MF' \quad \text{ou} \quad \boxed{2c < 2a}$$

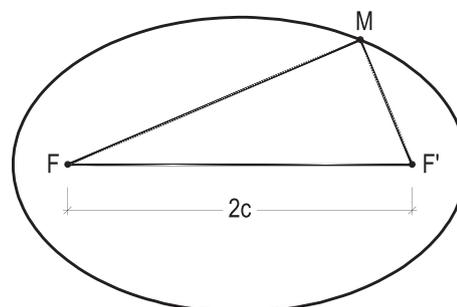


Figura 18

Assim, para que exista uma elipse, é necessário e suficiente que sua distância focal seja menor que a soma constante das distâncias de cada um de seus pontos aos focos.

Tal obrigação implica em que os focos da elipse sejam sempre interiores à curva.

Observe-se que mesmo para os pontos da curva pertencentes à reta FF' , que não formam triângulos como MFF' , assegura-se que os focos fiquem no interior da curva.

14 – Natureza

A elipse é uma curva contínua e fechada.

Porque cada acréscimo infinitésimo atribuído a um raio vetor corresponde à obtenção de um novo ponto da curva, infinitesimalmente distante do primeiro, sem que exista, então, qualquer solução de continuidade.

15 – Processo espontâneo para a construção da elipse, dada por seus focos e pelo valor da soma constante das distâncias de seus pontos aos focos

Da própria definição da curva decorre o seguinte processo:

Sejam F e F' os focos dados e $2a$ a soma constante dos raios vetores dos pontos da elipse. Arbitremos, sobre um segmento de reta $PQ = 2a$, um ponto J qualquer (Figura 19), encontrando-se dois valores m e n , tais que $m + n = 2a$ e, com centros nos focos e raios iguais a esses valores, descrevamos arcos de circunferência, obtendo, por interseção, os pontos M_1, M_2, M_3 e M_4 da curva.

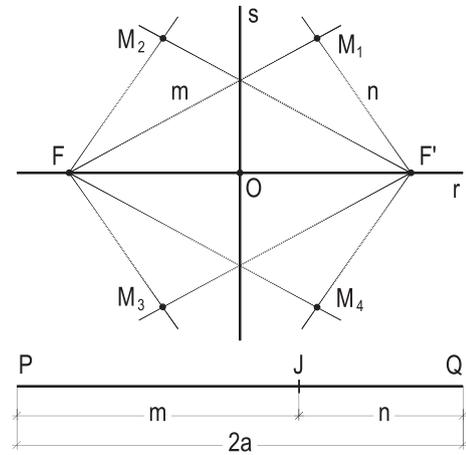


Figura 19

A mudança da posição do ponto J sobre o segmento $PQ = 2a$ e as consequentes variações dos valores de m e de n fornecem, por construção reiterada, novos pontos M da elipse (Figura 20).

16 – Eixos e centro de simetria

Examinando o processo espontâneo acima, conclui-se (Figura 19) a igualdade dos triângulos M_1FF' , M_2FF' , M_3FF' e M_4FF' (3º caso) e, consequentemente, as simetrias dos pontos M_1, M_2, M_3 e M_4 , tomados convenientemente aos pares, em relação à reta r que contém os focos, em relação à mediatriz s do segmento FF' e, então, em relação ao ponto O , comum a essas retas (Figura 20). Assim:

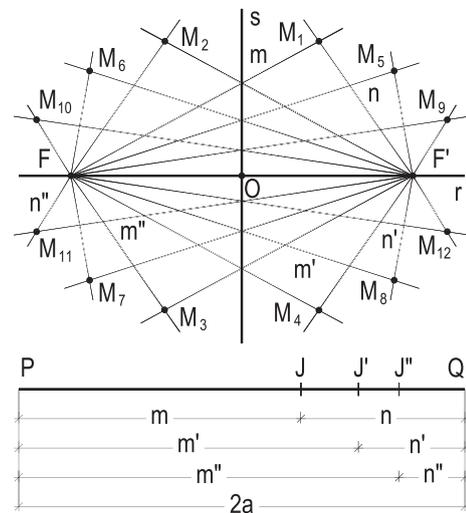


Figura 20

1 – A elipse possui dois eixos.

O eixo AA' (Figura 21), que contém os focos, é denominado transverso, real ou focal; o eixo BB' pertencente à mediatriz do segmento FF' é denominado não transverso, imaginário ou não focal.

2 – A elipse possui quatro vértices, A, A', B e B' , na Figura 21.

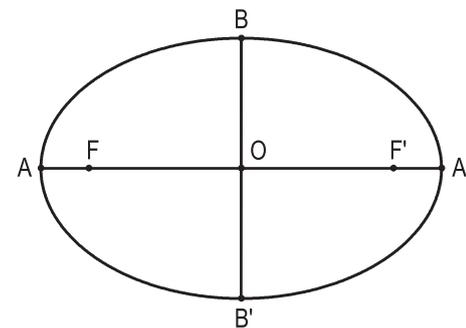


Figura 21

3 – A elipse possui um centro (O, na mesma figura).

Habitualmente são utilizados os indicadores 2a, 2b e 2c para as medidas dos eixos transverso e não transverso e para a distância focal.

17 – Relações métricas

1 – O eixo transverso tem comprimento igual à soma dos raios vetores de cada ponto da elipse.

Sejam AA' o eixo transverso e 2a a soma, constante, dos raios vetores dos pontos de uma elipse de focos F e F' (Figura 22).

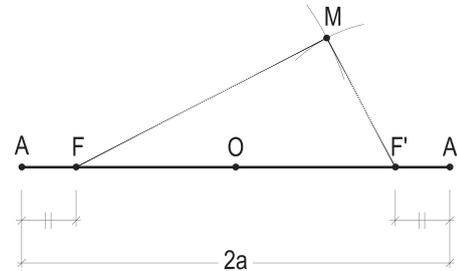


Figura 22

Porque A pertence à curva, vem:

$$AF' + AF = 2a$$

Mas como $AF = F'A'$, por serem simétricos em relação ao centro O da elipse,

$$AF' + F'A' = 2a$$

$$\therefore \boxed{AA' = 2a}$$

2 – Relação entre os eixos e a distância focal.

Sejam 2a, 2b e 2c, os valores dos dois eixos e a distância focal, respectivamente.

Como $AA' = 2a$ e porque B pertence à curva e à mediatriz de FF', temos (Figura 23):

$$BF = BF' = a$$

Assim, o triângulo retângulo BOF fornece:

$$\therefore \boxed{a^2 = b^2 + c^2}$$

A relação acima também se escreve:

$$4a^2 = 4b^2 + 4c^2 \quad \therefore \quad (2a)^2 = (2b)^2 + (2c)^2$$

$$\therefore \boxed{AA'^2 = BB'^2 + FF'^2}$$

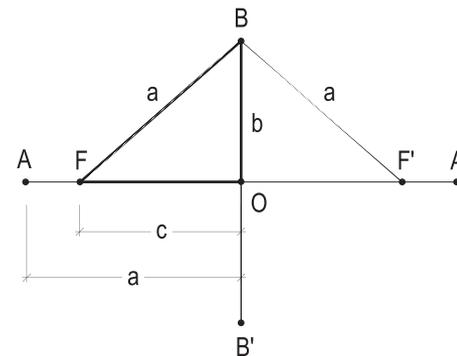


Figura 23

3 – Porque $BF > BO$, como hipotenusa e cateto, respectivamente, do triângulo BOF (Figura 23), temos: $a > b$

$$\therefore \boxed{2a > 2b}$$

Isto é, o eixo transverso AA' é necessariamente o maior dos dois. Por isso que habitualmente designaremos os eixos AA' e BB' (Figura 23) por eixo maior e menor, respectivamente.

4 – Corda focal e parâmetro.

Corda focal de uma elipse é aquela que, passando por um dos focos, é perpendicular ao eixo transverso.

Parâmetro de uma elipse é a ordenada, em relação ao eixo transverso, do ponto da curva cuja projeção ortogonal sobre esse eixo coincide com um dos focos.

Assim, o parâmetro p vale a metade da corda focal c_f .

Para o cálculo da corda focal e do parâmetro, consideremos o triângulo retângulo RFF' (Figura 24), que dá:

$$RF'^2 = RF^2 + FF'^2 \quad (1)$$

Como R é ponto da curva, fazendo $RF = p$, vem: $RF + RF' = 2a \quad \therefore \quad RF' = 2a - p$

Assim, a relação (1) se escreve:

$$(2a - p)^2 = p^2 + (2c)^2 \quad \therefore \quad 4a^2 + p^2 - 4ap = p^2 + 4c^2$$

$$\therefore \quad 4a^2 - 4ap = 4c^2 \quad \therefore \quad a^2 - ap = c^2$$

$$\therefore \quad ap = a^2 - c^2 = b^2 \quad \therefore \quad p = \frac{b^2}{a}$$

E como $c_f = 2p$,

$$c_f = \frac{2b^2}{a}$$

$$\therefore \quad c_f = \frac{4b^2}{2a} \quad \therefore \quad c_f = \frac{(2b)^2}{2a}$$

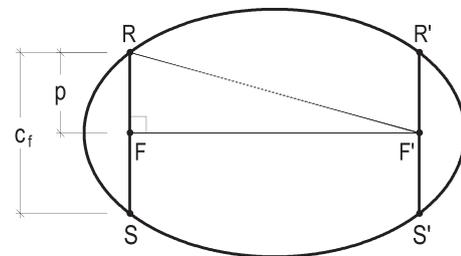


Figura 24

5 – Excentricidade.

Excentricidade e de uma elipse é a razão entre a semidistância focal c e o semieixo transverso a .

$$e = \frac{c}{a}$$

E, em função dos eixos da elipse:

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}} = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2}$$

Assim, a excentricidade e será calculada por uma das seguintes expressões:

$$e = \frac{c}{a}$$

$$e = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2}$$

18 – Observações

1 – Porque o valor c é positivo e menor que a , conclui-se que $0 < e < 1$, isto é, que a excentricidade de uma elipse está necessariamente compreendida entre zero e um.

2 – Quando, mantido fixo o eixo maior de uma elipse, faz-se tender a zero o valor da excentricidade, c tende a zero, os focos aproximam-se, tendendo simultaneamente ao centro da curva. Nestas condições o eixo menor tende a igualar o maior e a elipse tende a degenerar numa circunferência de diâmetro igual ao eixo maior.

3 – Quando, mantido fixo o eixo maior de uma elipse, faz-se tender a um o valor da excentricidade, c tende a igualar o semieixo maior, os focos afastam-se, tendendo cada um a cada extremo do eixo real. Nestas condições, o eixo menor tende a se anular e a elipse tende a degenerar num segmento de reta – seu eixo maior.

4 – Do que foi acima detalhado conclui-se que a excentricidade de uma elipse é um parâmetro adimensional, mediante o qual se pode interpretar quanto a elipse em estudo se aproxima, ou se afasta, da forma circular. A excentricidade traduz, pois, quanto mais, ou menos, “alongada” é a elipse.

5 – A excentricidade de uma elipse pode ser expressa em função de seu eixo transverso e de seu parâmetro (ou de sua corda focal). De fato (números 17.4 e 17.5):

$$e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a} \cdot \frac{1}{a}} \quad \therefore \quad e = \sqrt{1 - \frac{p}{a}}$$

$$e = \sqrt{1 - \frac{p}{a}} = \sqrt{1 - \frac{2p}{2a}} \quad \therefore \quad e = \sqrt{1 - \frac{c_f}{2a}}$$

19 – A elipse referida a seus eixos

Consideremos uma elipse referida a um sistema cartesiano e tal que seus eixos coincidam com os coordenados, os focos F e F' estando sobre o eixo das abscissas. Fazendo $AA' = 2a$, $BB' = 2b$, $FF' = 2c$ e sendo $M(x, y)$ um ponto genérico da elipse (Figura 25), podemos escrever:

$$MF + MF' = 2a \quad \therefore \quad MF' = 2a - MF$$

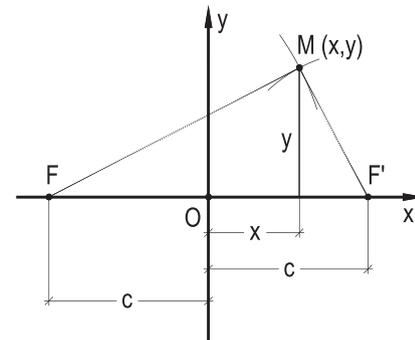


Figura 25

Elevando ao quadrado:

$$MF'^2 = 4a^2 + MF^2 - 4a(MF)$$

E como $F(-c, 0)$ e $F'(c, 0)$, vem:

$$(c-x)^2 + y^2 = 4a^2 + (c+x)^2 + y^2 - 4a\sqrt{(c+x)^2 + y^2}$$

$$\therefore c^2 + x^2 - 2cx + y^2 = 4a^2 + c^2 + x^2 - 2cx + y^2 - 4a\sqrt{(c+x)^2 + y^2}$$

Simplificando:

$$a^2 + cx = a\sqrt{(c+x)^2 + y^2}$$

Elevando ao quadrado, resulta:

$$a^4 + c^2x^2 + 2a^2cx = a^2c^2 + a^2x^2 + 2a^2cx + a^2y^2$$

Simplificando e agrupando:

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

E como $a^2 - c^2 = b^2$ (número 17.2), vem:

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

Esta é a equação da elipse considerada, referida a seus eixos.

Dividindo os dois membros por $(a^2 b^2)$, obtém-se outra forma:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

20 – Teorema

O lugar geométrico dos pontos cujas somas de distâncias a dois pontos fixos é constante é a elipse de eixo maior igual àquela constante, tendo por focos os dois pontos fixos.

Demonstração: Sejam F e F' os pontos fixos e $2a$, maior que FF' , a soma constante.

Consideremos a elipse de eixo maior igual a $2a$, com focos F e F' (Figura 26).

Já foi visto que, para todos os pontos M da curva:

$$MF + MF' = 2a \quad (1)$$

Sendo J e L pontos respectivamente exterior e interior à elipse (Figura 26), por envolventes e envolvidas, vem:

$$JF + JF' > MF + MF' \quad \therefore \quad JF + JF' > 2a \quad (2)$$

$$LF + LF' < MF + MF' \quad \therefore \quad LF + LF' < 2a \quad (3)$$

As relações (1), (2) e (3) demonstram o teorema.

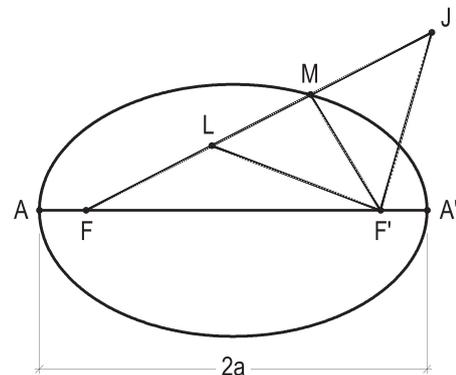


Figura 26

21 – Escólio

A elipse divide seu plano em duas regiões: a externa, à qual pertencem os pontos cujas somas de distâncias aos focos são maiores que o eixo transverso, e a interna, à qual pertencem os pontos cujas somas de distâncias aos focos são menores que o eixo transverso da curva.

22 – Circunferências diretoras, principal e auxiliar

Circunferências diretoras de uma elipse são as duas circunferências que têm por centros cada um dos focos e raios iguais ao eixo transverso $2a$ da elipse (Figura 27).

Circunferência principal de uma elipse é a que tem por diâmetro o eixo maior AA' da elipse; circunferência auxiliar é a que tem por diâmetro o eixo menor BB' (Figura 27).

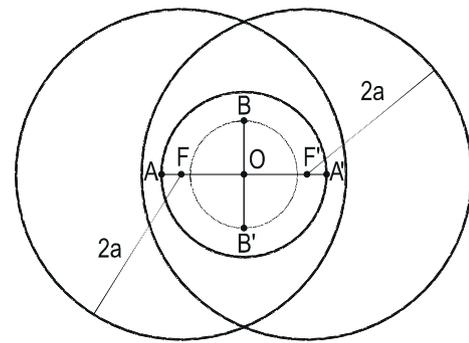


Figura 27

23 – Teorema

A bissetriz do ângulo externo formado pelos raios vetores relativos a um ponto qualquer da elipse é tangente à curva nesse ponto.

Demonstração: Sejam F e F' os focos e M um ponto corrente de uma elipse de eixo transverso $2a$ e r a bissetriz do ângulo externo formado pelos raios vetores MF e MF' .

Tracemos por F' a perpendicular a r , obtendo S no prolongamento do raio vetor MF . Porque o triângulo MSF' é isósceles, já que coincidem bissetriz e altura relativas a M , S é o simétrico de F' , em relação à reta r . Assim, para todo ponto J de r , (Figura 28), vale escrever:

$$JS = JF' \quad \text{e} \quad MS = MF'$$

E, por axioma:

$$JF + JS > FS \quad \therefore \quad JF + JS > FM + MS$$

ou $JF + JF' > MF + MF' \quad \therefore \quad JF + JF' > 2a$

E, se todos os pontos J de r – exceto M – possuem somas de distâncias aos focos maiores que $2a$, pode-se concluir que todos esses pontos J são exteriores à elipse (número 21). Ora, isto é o mesmo que dizer que existe apenas um ponto – M – comum à reta r e à elipse.

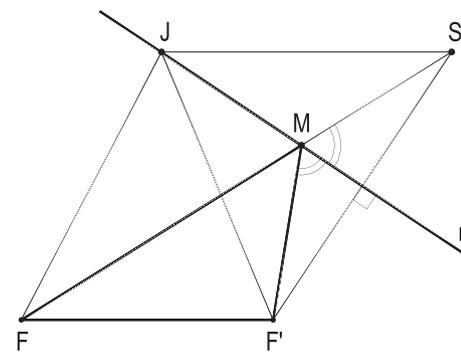


Figura 28

E, como a elipse é uma curva fechada, fica provado que a reta r é a tangente, em M , à elipse.

24 – Corolários

1 – A bissetriz do ângulo interno formado pelos raios vetores relativos a um ponto corrente da elipse é normal à curva nesse ponto (Figura 29). Porque essa bissetriz é perpendicular à externa.

2 – Os pontos de interseção da tangente e da normal, relativas a um ponto corrente, com a reta que contém os focos formam, com os focos, uma divisão harmônica.

De fato, os pés R e R' da normal e da tangente, relativas a um ponto M corrente, são (Figura 29) os próprios pés das bissetrizes relativas ao vértice M no triângulo FMF' (*Geometria Plana*, número 166).

3 – As tangentes, nos vértices, são paralelas aos eixos (Figura 30).

4 – Um dos focos, o ponto de contato de uma tangente qualquer e o simétrico do outro foco em relação a essa tangente são, sempre, colineares (ver Figura 28).

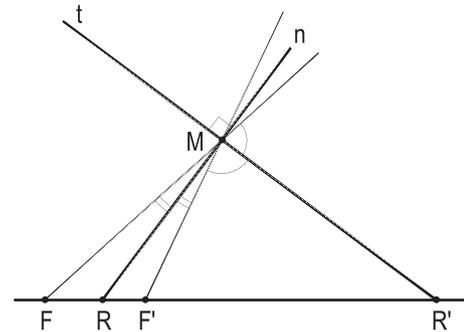


Figura 29

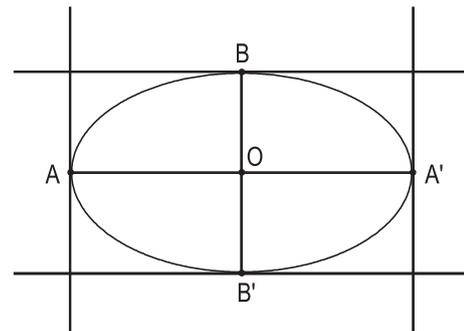


Figura 30

25 – Teorema

O lugar geométrico dos simétricos de um foco de uma elipse em relação às tangentes é a circunferência diretora relativa ao outro foco.

Demonstração: Sendo r a tangente num ponto genérico M da elipse de focos F e F' e eixo maior 2a e S o simétrico de F' em relação a r, o triângulo isósceles MSF' (Figura 31) dá:

$$MF' = MS.$$

E, como $MF + MF' = 2a$, vem:

$$MF + MS = 2a \quad \therefore \quad FS = 2a$$

Assim, o lugar dos simétricos S do foco F' em relação às tangentes, é a circunferência (F, 2a) diretora relativa ao foco F.

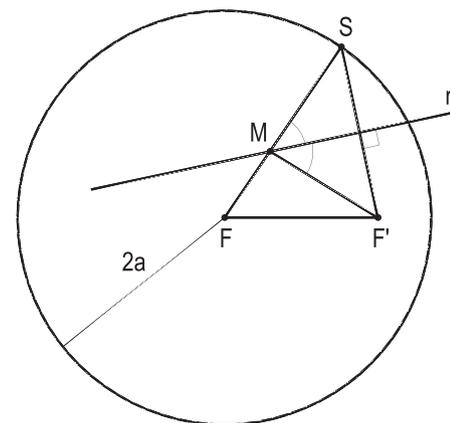


Figura 31

26 – Corolários

1 – O lugar geométrico dos pontos equidistantes de uma circunferência e de um ponto fixo interior é a elipse, para a qual o ponto fixo é um dos focos e a circunferência é a diretora relativa ao outro foco.

De fato, sendo $(F, 2a)$ a circunferência, F' o ponto fixo interior e M um ponto equidistante dos dois (Figura 32), como a distância de M à circunferência se mede pela união de M ao centro dessa circunferência (*Geometria Plana*, número 97), pode-se escrever:

$$MS = MF'$$

Mas, $FM + MS = FS = 2a$

Ou, $MF + MF' = 2a$

Assim, M descreve a elipse de focos F e F' e eixo maior $2a$, para a qual a circunferência considerada é uma das diretoras.

2 – O lugar geométrico dos centros das circunferências pertencentes a um ponto fixo, interior a uma circunferência dada, e tangentes a ela é a elipse, para a qual o ponto fixo é um dos focos e a circunferência dada é a diretora relativa ao outro foco.

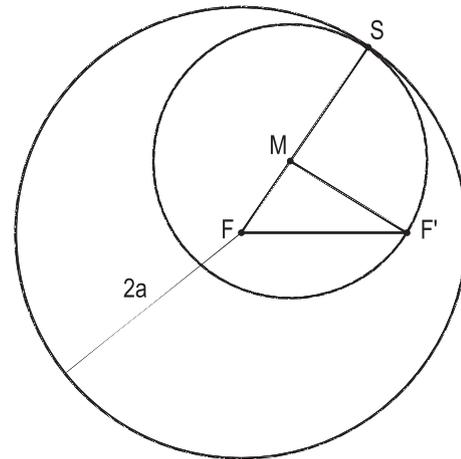


Figura 32

Porque sendo $(F, 2a)$ e F' a circunferência e o ponto fixos dados e M o centro de uma circunferência pertencente a F' e tangente em S à dada (Figura 32), já que os centros M e F das duas circunferências e seu ponto de contato S devem ser colineares (*Geometria Plana*, número 116), podemos escrever: $MS = MF'$.

Assim, o ponto M , em estudo, será equidistante da circunferência e do ponto fixo dados.

Teremos, pois, retornado à propriedade anterior.

27 – Determinação do ponto de contato de uma tangente dada

Quando são conhecidos os dois focos e uma tangente genérica t a uma elipse, para determinar rigorosamente o ponto de contato M da tangente com a curva, basta construir o simétrico S de um de seus focos em relação à tangente (Figura 33) e unir S ao outro foco (número 24.4).

O ponto de contato M será o de interseção de FS com t .

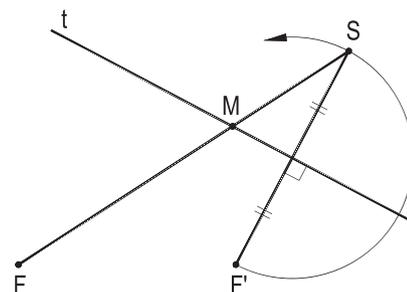


Figura 33

28 – Construção das tangentes à elipse

1 – Tangente num ponto M da curva (dados os dois focos e o ponto M).

Para obter a tangente t , em M , basta prolongar um dos raios vetores – FM – e girar o outro – MF' – até tomar a posição MS , no prolongamento do primeiro (Figura 34).

A tangente será a perpendicular, por M , à reta $F'S$.

De fato, assim fazendo, t será a bissetriz do ângulo externo formado pelos raios vetores do ponto M (número 23).

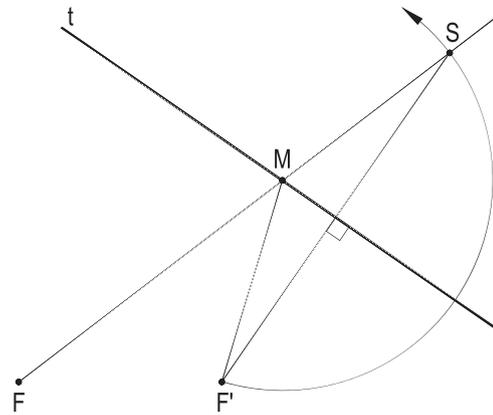


Figura 34

2 – Tangentes paralelas a uma reta dada r (dados os focos, o valor $2a$ do eixo real e a reta r).

Análise: Sendo t_1 e t_2 as tangentes paralelas à reta dada r e $(F, 2a)$ uma das circunferências diretoras, porque os simétricos S_1 e S_2 de F' em relação às tangentes pertencem a $(F, 2a)$, t_1 e t_2 serão as mediatrizes dos segmentos $F'S_1$ e $F'S_2$ (Figura 35). E porque as tangentes devem ser paralelas a r , os simétricos pertencerão à perpendicular traçada por F' à reta r .

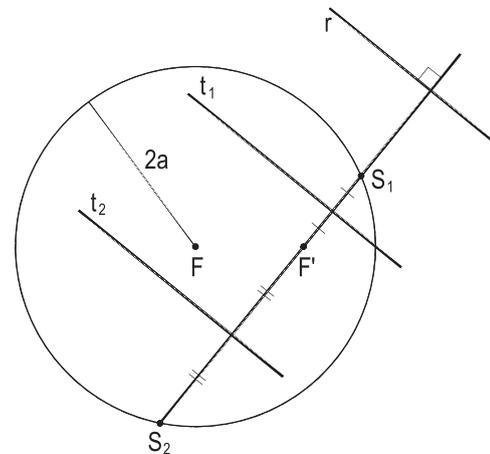


Figura 35

Construção: Sendo dados a direção r das tangentes, os dois focos e o valor $2a$ do eixo real, constrói-se inicialmente uma das circunferências diretoras $(F, 2a)$, na Figura 36, e, pelo segundo foco F' , a perpendicular a r que corta aquela circunferência nos pontos S_1 e S_2 .

Determina-se, então, as mediatrizes t_1 e t_2 dos segmentos $F'S_1$ e $F'S_2$, respectivamente, as quais são as tangentes procuradas. Para obter os pontos de contato M_1 e M_2 dessas tangentes, basta ligar os simétricos S_1 e S_2 ao foco F (número 27).

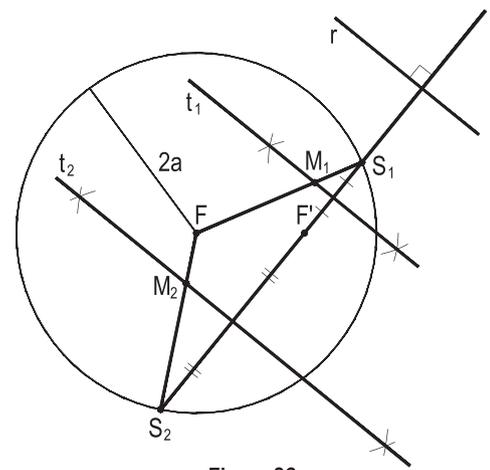


Figura 36

3 – Tangentes por um ponto J exterior (dados os dois focos, o valor $2a$ do eixo maior e o ponto J).

Análise: Sejam t_1 e t_2 as tangentes procuradas e (F, $2a$) uma das circunferências diretoras (Figura 37).

Porque os simétricos S_1 e S_2 do foco F' , em relação às tangentes, pertencem àquela circunferência (número 25), conclui-se que: $JS_1 = JF' = JS_2$.

Então, esses simétricos S_1 e S_2 devem também pertencer a uma circunferência de centro J e raio JF' (Figura 37).

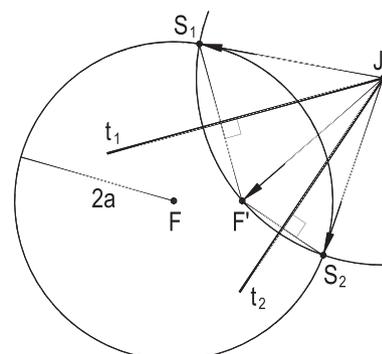


Figura 37

Construção: Dados o ponto J, os dois focos e o valor do eixo maior $2a$, constrói-se uma das circunferências diretoras (F, $2a$) e a circunferência que tem centro em J e que passa pelo segundo foco F' (Figura 38). As duas circunferências cortam-se segundo os pontos S_1 e S_2 , simétricos de F' em relação às tangentes procuradas.

Assim, as perpendiculares traçadas por J aos segmentos $F'S_1$ e $F'S_2$ são as tangentes t_1 e t_2 pedidas, mediatrizes que são dos segmentos $F'S_1$ e $F'S_2$, respectivamente.

Para determinar os pontos de contato M_1 e M_2 dessas tangentes, basta unir os simétricos S_1 e S_2 ao foco F (número 27).

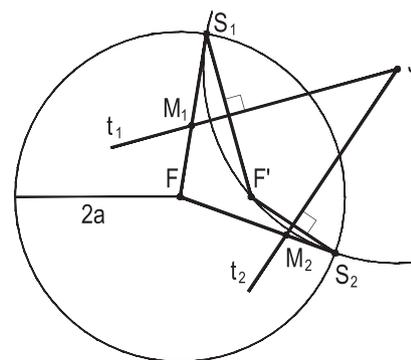


Figura 38

29 – Teorema de La Hire

O lugar geométrico das projeções ortogonais dos focos de uma elipse sobre as tangentes a ela é a sua circunferência principal.

Demonstração: Seja t uma tangente qualquer à elipse de focos F e F' e de eixo maior $AA' = 2a$. Como o simétrico S de F' em relação àquela tangente pertence à circunferência diretora (F, $2a$) relativa ao outro foco (número 25), vem $FS = 2a$.

O ponto P , médio de $F'S$, é a projeção ortogonal de F' sobre t , em estudo. E porque o ponto O , médio de FF' , é o próprio centro da elipse (Figura 39), o triângulo $FF'S$ dá:

$$OP = \frac{1}{2} \cdot FS \quad \therefore \quad OP = \frac{1}{2} \cdot 2a = a$$

Assim, porque a projeção P de um dos focos sobre uma tangente genérica dista a do centro O da elipse, conclui-se que o lugar geométrico dos pontos P é a circunferência (O, a) , a principal da elipse, como se queria demonstrar.

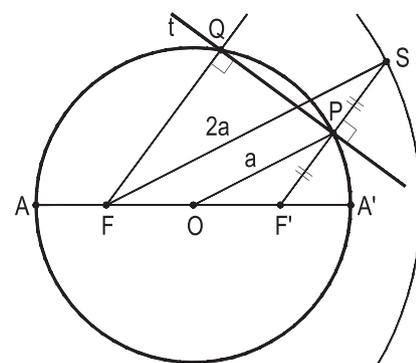


Figura 39

30 – Teorema

O produto das distâncias de um dos focos de uma elipse a duas tangentes paralelas é constante e igual ao quadrado do semieixo menor.

Demonstração: Sejam t e t' duas tangentes paralelas a uma elipse e P e P' as projeções ortogonais do foco F sobre elas (Figura 40).

Do teorema de La Hire, sabe-se que P e P' pertencem à circunferência (O, a) principal da elipse.

Sendo d e d' as distâncias de F àquelas tangentes, a potência $P(O)$ de F em relação à circunferência (O, a) fornece (*Geometria Plana*, números 234 e 242):

$$P(O) = FP \cdot FP' = FA \cdot FA' \quad \therefore \quad d \cdot d' = (a - c)(a + c) = a^2 - c^2$$

$$\text{Como } a^2 - c^2 = b^2, \text{ vem: } \quad \therefore \quad \boxed{d \cdot d' = b^2}$$

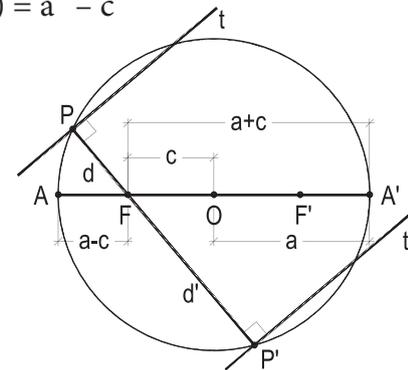


Figura 40

31 – Corolário

O produto das distâncias dos dois focos de uma elipse a uma tangente qualquer é constante e igual ao quadrado do semieixo menor.

De fato, porque duas tangentes paralelas t e t' são simétricas em relação ao centro O da elipse, os triângulos iguais FOP' e $F'OP''$ (Figura 41) dão: $d' = d''$

$$\text{Logo, } d \cdot d' = d \cdot d'' \quad \therefore \quad \boxed{d \cdot d'' = b^2}$$

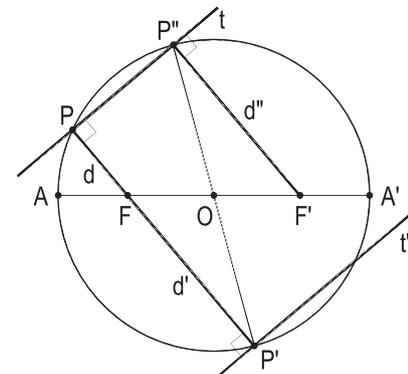


Figura 41

32 – Construções

Do teorema de La Hire (número 29) resultam as seguintes construções elementares:

1 – Determinação dos focos a partir do eixo maior AA' e de uma tangente t .

Para obter os focos, conhecendo uma tangente genérica t e o eixo maior AA' , basta construir a circunferência principal e determinar os pontos P e P' em que ela corta aquela tangente (Figura 42).

Porque P e P' são as projeções respectivas dos focos sobre a tangente t (número 29), as perpendiculares a t , traçadas por P e por P' , cortam o eixo AA' segundo os focos F e F' procurados.

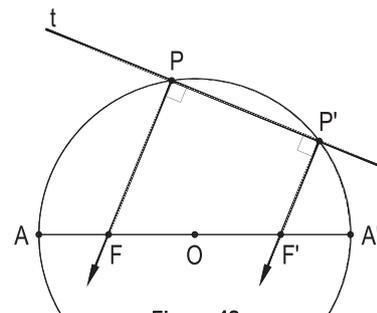


Figura 42

2 – Determinação dos eixos de uma elipse a partir de seus focos F e F' e de uma tangente t .

Dados os dois focos F e F' e uma tangente genérica t , para determinar o eixo maior, basta projetar ortogonalmente um dos focos sobre a tangente, obtendo um ponto P da circunferência principal (número 29). E, como o centro dessa circunferência é o ponto O , médio de FF' – o próprio centro da elipse – descreve-se a circunferência (O, OP) que corta a reta FF' (Figura 43) segundo os vértices A e A' do eixo maior.

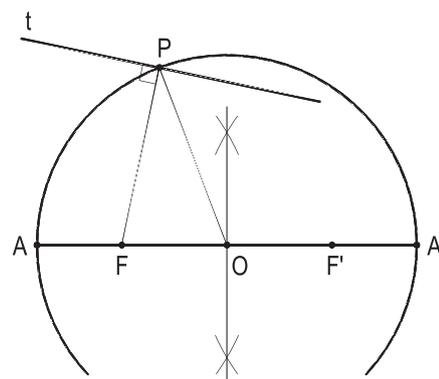


Figura 43

Para obter o eixo menor BB' , já sendo conhecido o valor $2a$ do maior, basta construir os triângulos retângulos FOB e FOB' (Figura 44), com hipotenusas iguais ao semieixo maior a , o que se consegue descrevendo a circunferência de centro F e raio a , até que ele corte a mediatriz s do segmento FF' .

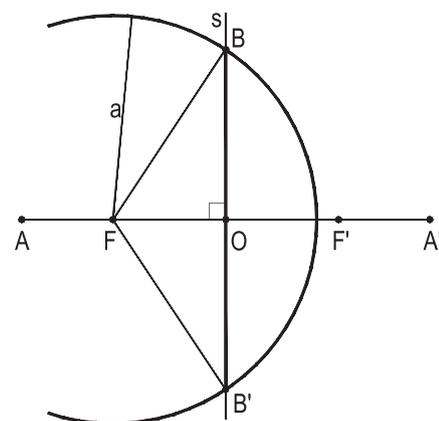


Figura 44

3 – Construção das tangentes a uma elipse paralelas a uma reta r , dados o eixo maior AA' , um dos focos F' e a reta r .

Com AA' por diâmetro, constrói-se (Figura 45) a circunferência principal, à qual pertencerão as projeções P_1 e P_2 dos focos sobre as tangentes procuradas (número 29).

E, como elas devem ter a direção da reta r , as projetantes $F'P_1$ e $F'P_2$ serão perpendiculares à reta r dada.

Assim, traçando, pelo foco dado F' , a perpendicular a r , obtém-se, por interseção com a circunferência principal, os pontos P_1 e P_2 , por onde passam as tangentes t_1 e t_2 pedidas (Figura 45).

Para obter os pontos de contato dessas tangentes, não incluídos na Figura 45, basta determinar o segundo foco da elipse, por simetria de F' em relação ao ponto O , médio de AA' , e operar como o disposto no item 27.

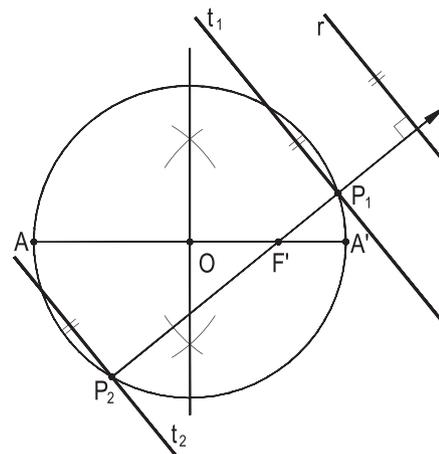


Figura 45

4 – Construção das tangentes a uma elipse por um ponto J exterior, dados seu eixo maior AA', um dos focos F' e o ponto exterior J.

Análise: Sejam t_1 e t_2 as tangentes procuradas e (O, a) a circunferência principal, à qual pertencerão as projeções ortogonais P_1 e P_2 do foco F' sobre elas. Porque os triângulos $JF'P_1$ e $JF'P_2$ têm, então, que ser retângulos, os pontos P_1 e P_2 pertencerão à circunferência de diâmetro JF' (Figura 46).

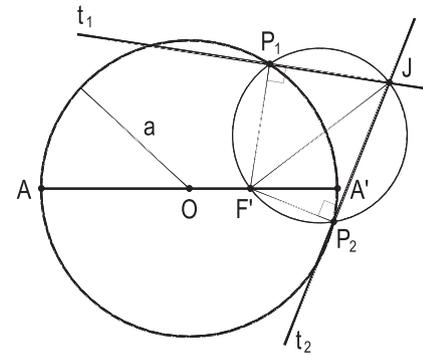


Figura 46

Construção: Constrói-se a circunferência principal e a circunferência que tem por diâmetro o segmento JF' , formado pelo foco dado F' e pelo ponto dado J , os quais se cortam segundo os pontos P_1 e P_2 , por onde passam as tangentes procuradas (Figura 47).

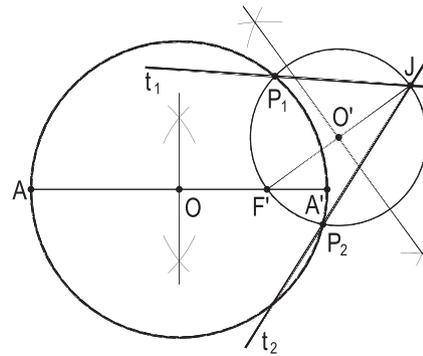


Figura 47

33 – Teoremas de Poncelet

1. As tangentes traçadas por um ponto exterior a uma elipse são duas cevianas isogonais do triângulo formado por esse ponto e pelos dois focos da elipse.

2. A reta que une um foco de uma elipse a um ponto exterior é a bissetriz do ângulo formado pelas retas que unem aquele foco aos pontos de contato das duas tangentes traçadas pelo ponto exterior.

Demonstrações:

1. Sejam t e t' as tangentes de um ponto J exterior a uma elipse de focos F e F' e de eixo maior $2a$.

Sendo S e S' os simétricos de F e de F' , respectivamente em relação a t e a t' (Figura 48), podemos escrever:

$$JS = JF \quad (1) \quad \text{e} \quad JF' = JS' \quad (2)$$

E, como FS' e $F'S$ são raios das duas circunferências diretoras da elipse (número 25), temos:

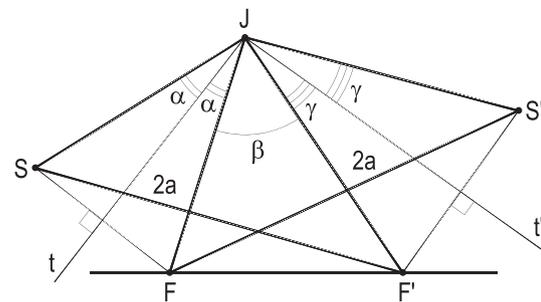
$$F'S = FS' \quad (3)$$


Figura 48

As relações (1), (2) e (3) asseguram a igualdade dos triângulos JSF' e $JS'F$ (3º caso). Daí decorre a igualdade dos ângulos $(2\alpha + \beta)$ e $(\beta + 2\gamma)$, opostos aos lados iguais $F'S$ e FS' .

$$\text{Então: } 2\alpha + \beta = \beta + 2\gamma \quad \therefore \quad 2\alpha = 2\gamma \quad \therefore \quad \alpha = \gamma$$

Assim, para o triângulo JFF' , t e t' são duas cevianas isogonais, como se queria provar.

2. Além do que já foi considerado, incluíamos os pontos de contato M e M' das tangentes t e t' (Figura 49), pelas uniões de cada foco ao simétrico do outro, em relação a cada uma das duas tangentes.

Os triângulos JSF' e $JS'F$ são iguais por terem seus lados respectivamente iguais (3º caso), o que proporciona:

$$\theta = \varphi \quad (1)$$

E a simetria dos pontos S e S' , e conseqüentemente dos triângulos JSM e JSM' , em relação à tangente t , permite escrever:

$$\theta = \rho \quad (2)$$

De (1) e (2), vem: $\varphi = \rho$

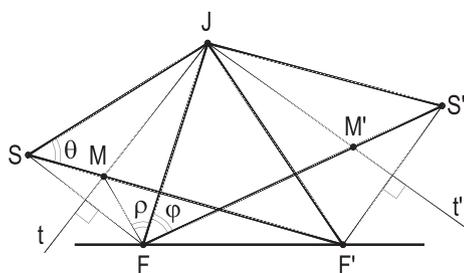


Figura 49

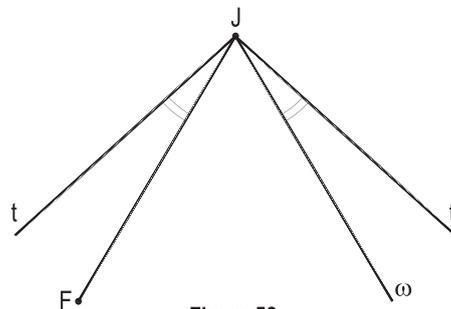


Figura 50

Isto é, a reta FJ , que une um foco F da elipse a um ponto exterior J , é a bissetriz do ângulo formado pelas retas FM e FM' , que unem aquele foco aos pontos de contato das duas tangentes traçadas daquele ponto J , exterior, tal como se queria demonstrar.

34 – Corolário do primeiro teorema de Poncelet

Dados um ângulo $t \hat{J} t'$ e um ponto F interior a ele, o lugar geométrico dos segundos focos F' das elipses que têm um foco fixo F e que são tangentes às retas t e t' é a semirreta $J\omega$ isogonal de JF em relação aos lados do ângulo dado (Figura 50), exceto, naturalmente, o ponto J .

35 – Observação

Esse corolário, do primeiro teorema de Poncelet, pode ser instituído diretamente.

De fato, se considerarmos os simétricos S e S' do foco F em relação às tangentes t e t' à elipse (Figura 51), porque S e S' pertencerão à circunferência diretora relativa ao foco móvel F' , seu centro F' deverá pertencer à mediatriz do segmento SS' .

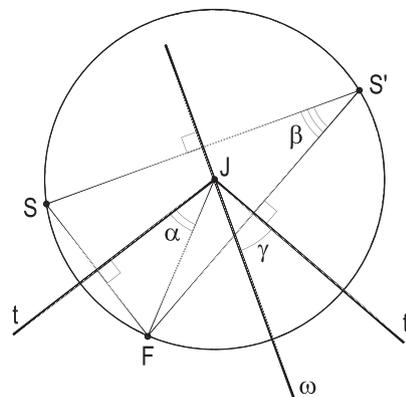


Figura 51

Mas, porque t e t' são as mediatrizes dos lados FS e FS' do triângulo FSS' (Figura 51), J é o circuncentro desse triângulo.

Assim, a mediatriz ω de SS' , em estudo, passará necessariamente por J .

E se, finalmente, considerarmos o círculo circunscrito ao triângulo FSS' , comparando o ângulo central α e o ângulo inscrito β (Figura 51), teremos:

$$\alpha = \beta = \frac{FS}{2} \quad (1)$$

$$\text{Por terem lados perpendiculares: } \gamma = \beta \quad (2)$$

Das relações (1) e (2), vem: $\alpha = \gamma$

A mediatriz de SS' servirá, pois, de suporte à semirreta w , isogonal de JF em relação aos lados do ângulo $t \hat{J} t'$. E, naturalmente, só funciona como lugar para o foco móvel F' a porção da mediatriz situada no interior do ângulo, uma vez que J é necessariamente exterior às elipses consideradas.

36 – Teorema

O lugar geométrico dos pontos dos quais se pode traçar tangentes perpendiculares a uma elipse é a circunferência concêntrica a ela, tendo raio igual à hipotenusa de um triângulo retângulo cujos catetos são iguais aos semieixos da elipse.

Demonstração: Seja J um ponto qualquer do lugar, isto é, tal que as tangentes t e t' de J à elipse de focos F e F' sejam perpendiculares entre si.

Consideremos o simétrico S de F em relação à tangente t , que nos dá (Figura 52):

$$\alpha = \varphi \quad (1)$$

$$\text{e } JS = JF \quad (2)$$

Do primeiro teorema de Poncelet, temos:

$$\alpha = \gamma \quad (3)$$

$$(1) \text{ e } (3) \text{ dão: } \varphi = \gamma \quad (4)$$

A hipótese e a relação (4) permitem escrever:

$$\gamma + \alpha + \beta = 90^\circ \quad \therefore \quad \varphi + \alpha + \beta = 90^\circ$$

Assim, o triângulo JSF' é retângulo em J .

$$\text{Logo: } JS^2 + JF'^2 = F'S^2$$

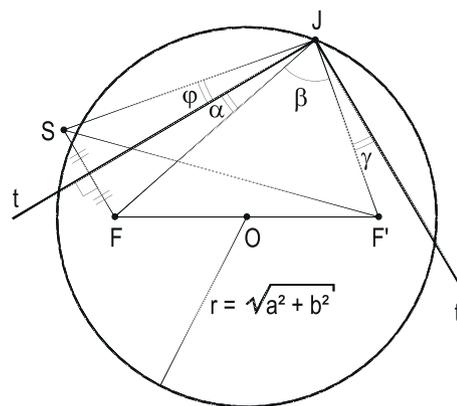


Figura 52

Como $F'S = 2a$ (número 25) e $JS = JF$ (relação 2), vem: $JF^2 + JF'^2 = (2a)^2$.

E, porque, então, a soma dos quadrados das distâncias de J aos pontos fixos F e F' é constante, o lugar desses pontos J é uma circunferência (*Geometria Plana*, número 204.1) que tem por centro o ponto O, médio de FF' (Figura 52), e raio OJ, calculável pela expressão:

$$OJ = \frac{1}{2} \sqrt{2(JF^2 + JF'^2) - FF'^2}$$

$$OJ^2 = \frac{1}{4} [2(2a^2) - (2c)^2] = \frac{1}{4} (8a^2 - 4c^2)$$

$$OJ^2 = \frac{4}{4} (2a^2 - c^2) = a^2 + (a^2 - c^2)$$

E como (número 17.2), $a^2 - c^2 = b^2$, vem: $OJ^2 = a^2 + b^2 \quad \therefore \quad \boxed{OJ = \sqrt{a^2 + b^2}}$

Assim, o lugar geométrico dos pontos dos quais se pode traçar tangentes perpendiculares a uma elipse é a circunferência com ela concêntrica, com raio igual à hipotenusa de um triângulo retângulo, de catetos respectivamente iguais aos semieixos da elipse.

37 – Circunferência de Monge

Para toda elipse, a circunferência, como acima instituído, de cujos pontos se pode traçar tangentes perpendiculares a ela é denominada circunferência ortótica da elipse (Figura 53) ou, como homenagem ao geômetra francês Gaspard Monge, seu criador, circunferência de Monge da elipse.

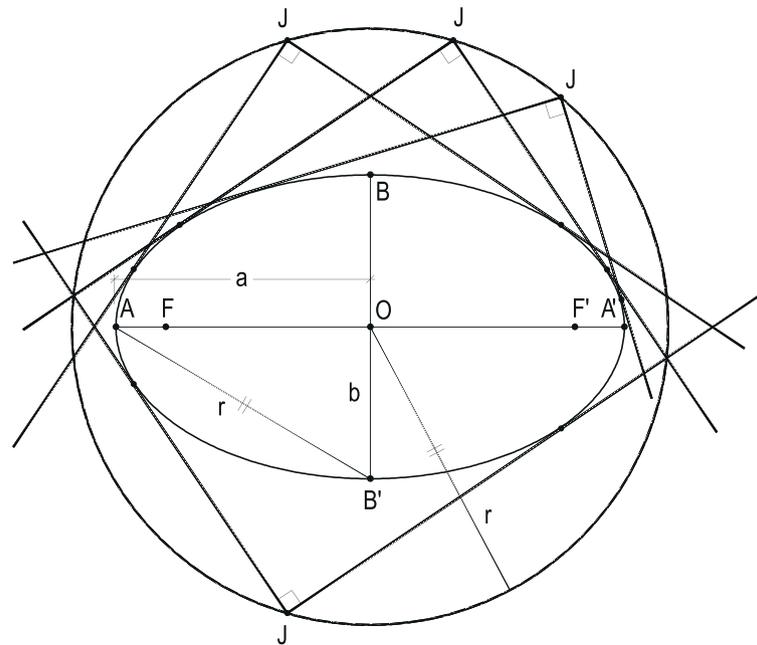


Figura 53

38 – Teorema

Os suportes dos quatro raios vetores de dois pontos genéricos de uma elipse são tangentes a uma mesma circunferência.

Demonstração: Consideremos dois pontos quaisquer M e N de uma elipse de focos F e F', assim como as duas tangentes JM e JN à curva, naqueles dois pontos, bem como seus raios vetores FM, FN, F'M e F'N (Figura 54).

Unamos os focos ao ponto J, de encontro das duas tangentes, e anotemos que (número 23):

$$\alpha = \beta \quad (1)$$

Pelo segundo teorema de Poncelet (número 33.2),

$$\gamma = \varphi \quad (2) \quad \text{e}$$

$$\theta = \rho \quad (3)$$

As relações (1), (2) e (3) implicam em que o ponto J pertença às bissetrizes dos ângulos $X\hat{N}E$, $X\hat{F}'M$ e $M\hat{F}N$ e, por isso, que o ponto J equidiste das retas F'N, F'M, FM e FN, sendo, então, centro de uma circunferência tangente a essas quatro retas, ou seja, aos suportes dos quatro raios vetores dos pontos correntes genéricos M e N considerados, o que prova o teorema.

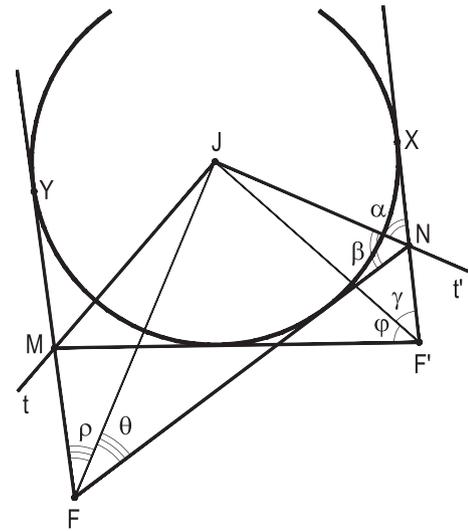


Figura 54

39 – Determinação rigorosa dos pontos de corte de uma reta dada com uma elipse dada por seus focos F e F' e pelo valor 2a de seu eixo maior

Análise: Consideremos, além da reta dada r e dos focos F e F', a circunferência diretora (F, 2a) da elipse. Os pontos M e N, comuns à reta e à curva, são (número 26.2) centros de duas circunferências que, passando por F', tangenciam internamente a circunferência diretora considerada (Figura 55).

Assim, o problema proposto reside em determinar, sobre a reta r, os centros M e N das circunferências tangentes à circunferência (F, 2a) e pertencentes ao ponto F'.

Porque r servirá de suporte a um diâmetro da circunferência (M), uma das procuradas, esta circunferência passará também pelo ponto J, simétrico de F' em relação a r (Figura 55).

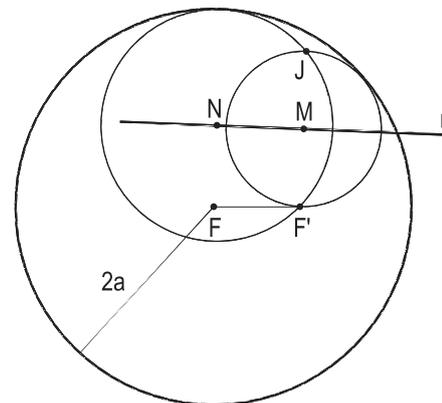


Figura 55

E, se considerarmos uma terceira circunferência (X), também pertencente aos pontos F' e J e secante à diretora, poderemos obter o centro radical CR das três circunferências e, em seguida, o eixo radical CRT entre a diretora e (X), o qual tem de ser a tangente comum às duas, logo tangente à diretora (Figura 56).

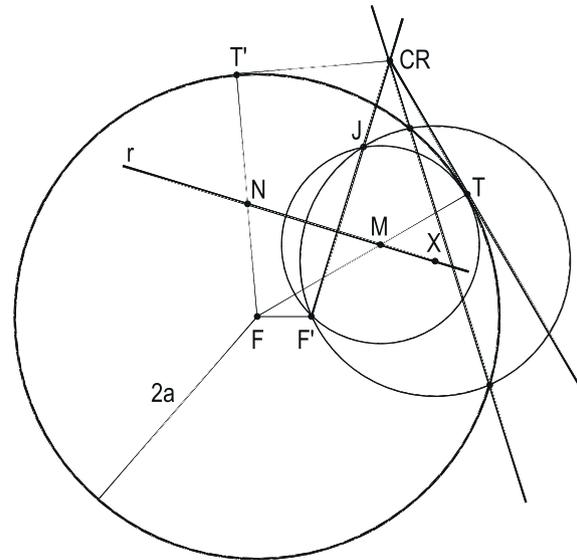


Figura 56

E, obtido o ponto T de contato desse eixo radical com a diretora, porque T é o próprio ponto de contato desta circunferência com a procurada, a reta FT corta r segundo o ponto M pedido (Figura 56).

O segundo ponto N provirá, da mesma forma, da união de F ao ponto de contato T' da segunda tangente traçada do centro radical CR à circunferência diretora ($F, 2a$) (Figura 56).

Resolução: De posse do valor $2a$ do eixo maior, constrói-se uma das circunferências diretoras ($F, 2a$) da elipse.

Determina-se, então, o simétrico J de F' em relação a r e, arbitrando um ponto X sobre r , traça-se uma circunferência auxiliar (X), pertencente aos pontos F' e J e secante à diretora nos pontos 1 e 2 (Figura 57).

O eixo radical entre a circunferência auxiliar (X) e a procurada é a própria reta $F'J$ e o eixo radical entre a circunferência diretora e a auxiliar (X) passa pelos dois pontos 1 e 2 de corte dessas circunferências. E, por interseção desses dois eixos, obtém-se o centro radical CR das três circunferências em jogo (Figura 57).

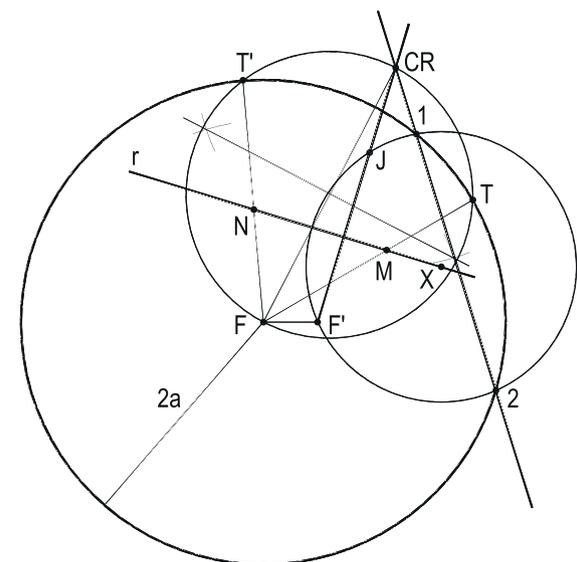


Figura 57

Determina-se, a seguir, com rigor, os pontos de contato T e T' das tangentes do centro radical CR à circunferência diretora e, unindo-os a F , obtém-se, sem construir a elipse, os pontos M e N em que ela é cortada pela reta r (Figura 57).

40 – Problemas resolvidos

Ao final de cada capítulo serão listados problemas referentes à teoria antes apresentada, todos resolvidos e sequencialmente numerados.

Iniciando aqui seguem algo mais que quatro dezenas deles.

1 – Os segmentos paralelos SS' , TT' e UU' , dados, são cordas de uma curva c . Sabendo que o diâmetro d relativo a essas cordas é um arco de circunferência, pede-se construir o trecho desse diâmetro limitado entre SS' e UU' .

Resolução: Marcados os pontos médios M , N e Q das três cordas dadas, o circuncentro O do triângulo MNQ é o centro do diâmetro pedido, possibilitando, então, construir o arco MQ , que resolve a questão (Figura 58).

2 – Dadas duas cordas paralelas SS' e TT' de uma curva c , de diâmetros retilíneos, pede-se, sem determinar a curva, construir a corda $S'S''$, suplementar de SS' , sabendo que o triângulo $SS'S''$ é isósceles, com base SS' .

Resolução: Os pontos M e N , médios de SS' e de TT' , definem a direção da corda suplementar $S'S''$, então de imediata obtenção, com duas soluções (Figura 59).

3 – Dado o triângulo ABC , considere uma curva c que pertença a seus vértices e, sabendo que ela tem diâmetros retilíneos e que a corda BC é paralela ao diâmetro conjugado de AA' , pede-se determinar o ponto A' , equidistante dos pontos dados J e K .

Resolução: O diâmetro AA' , conjugado da direção de BC , tem que conter o ponto M , médio de BC , e A' há de pertencer à mediatriz m do segmento JK (Figura 60).

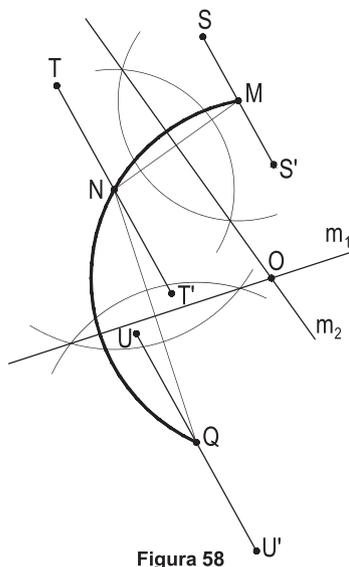


Figura 58

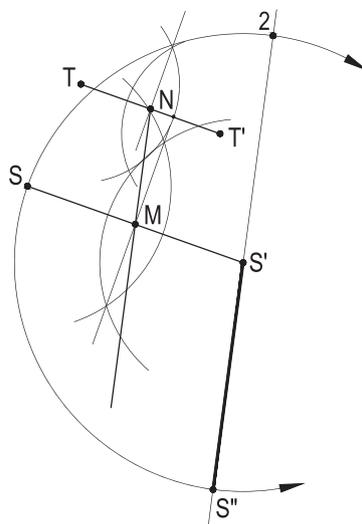


Figura 59

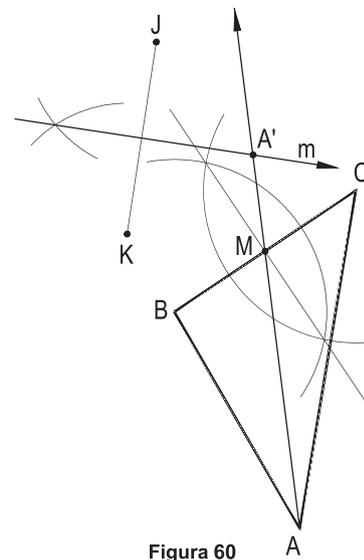


Figura 60

4 – Dadas a circunferência principal (O, a) de uma elipse e uma tangente t à elipse, além da medida b de seu semieixo não transverso, pede-se determinar as posições dos focos e do eixo real da curva.

Resolução: Traçadas as perpendiculares a t , por seus traços J e K com a circunferência principal, e construído o triângulo retângulo auxiliar $\overline{OB\bar{F}}$ com um cateto igual a b e a hipotenusa igual a a , obtém-se a medida $c = O\bar{F}$ da semidistância focal, com a qual são marcados os focos F e F' e, na reta FF', o eixo real AA' (Duas soluções).

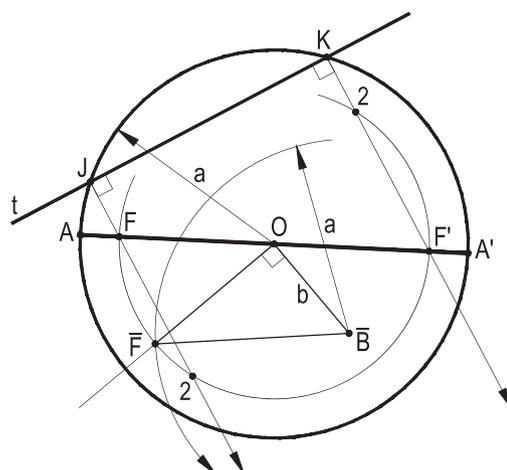


Figura 61

5 – Dadas a reta w , a circunferência principal de diâmetro AA' e uma tangente t a uma elipse, pede-se construir as tangentes à curva perpendiculares a w .

Resolução: As perpendiculares a t por seus traços J e K com a principal dão os focos F e F' e a paralela, por F' a w , dá os pontos S_1 e S_2 (Figura 62). As mediatrizes m_1 e m_2 de $F'S_1$ e de $F'S_2$ são as tangentes pedidas.

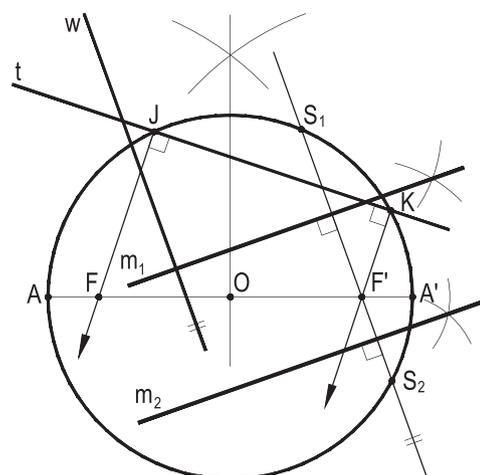


Figura 62

6 – Dadas duas tangentes t_1 e t_2 a uma elipse, que tem um foco F dado e o segundo equidistante dos pontos dados L e K, pede-se construir os eixos da curva.

Resolução: Sabe-se (segundo teorema de Poncelet) que o segundo foco F' da elipse deve pertencer à semirreta Jw, isogonal de JF para o ângulo $t_1 \hat{J} t_2$, de pronta construção, além, é claro, de ter que estar sobre a mediatriz m do segmento LK.

Obtido F', o simétrico S de F, em relação a t_1 , traz a medida $F'S = 2a$ do eixo maior e o triângulo retângulo F'OB (Figura 63) completa a resolução.

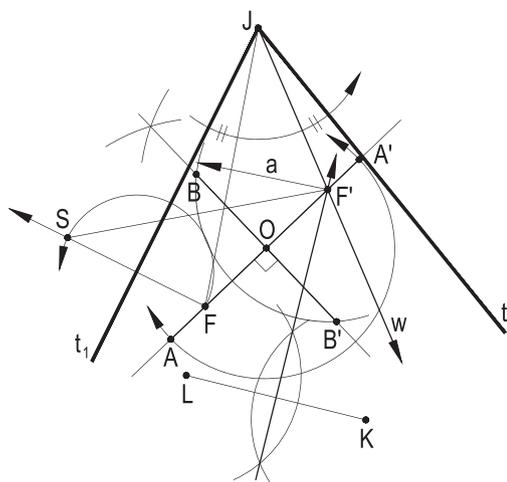


Figura 63

7 – Determinar a posição do centro O de uma elipse, sabendo que ele equidista das paralelas dadas r e s , conhecendo um vértice A do eixo transverso e outro, B , do não transverso.

Resolução: O ponto O há de ser o de interseção da reta e , equidistante de r e de s com a circunferência de diâmetro AB .

Duas soluções, O_1 e O_2 (Figura 64).

8 – Determinar o centro O da elipse que tem um vértice B de seu eixo menor e um foco F dados, sabendo ser mínima a distância de O à reta dada r .

Resolução: O é a interseção da circunferência de diâmetro BF com a perpendicular por seu centro M à reta r , mais próximo dela (Figura 65).

9 – Determinar os vértices B e B' do eixo menor da elipse de parâmetro pedido p , conhecendo seu eixo maior AA' e seu foco F .

Resolução: Marcados o centro O e o parâmetro FJ da curva, a aplicação da medida do semieixo maior AO , a partir de F , proporciona o triângulo retângulo FOB e o simétrico B' de B em relação a O (Figura 66).

10 – Determinar os focos da elipse de eixo menor BB' dado, conhecendo a medida a de seu semieixo maior.

Resolução: Imediata, pela construção do triângulo retângulo BOF (Figura 67).

11 – Determinar os focos da elipse de eixo maior dado AA' , sabendo que seu vértice B pertence à reta dada r .

Resolução: B é o corte da mediatriz m de AA' com r (Figura 68).

12 – Mesmo problema, B equidistante das retas dadas r e s .

Resolução: Agora B é o corte da mediatriz m de AA' com uma das bissetrizes dos ângulos formados por r e s , com apenas uma solução, para que B seja vértice do eixo menor (Figura 69).

13 – Mesmo problema, B equidistante dos pontos dados J e K .

Resolução: B há de pertencer à mediatriz de JK (Figura 70).

14 – Mesmo problema, conhecendo a excentricidade $e = 1/2$ da elipse.

Resolução: Os focos serão os pontos médios de OA e de OA' (Figura 71).

15 – Mesmo problema, para excentricidade medindo um valor dado m/n .

Resolução: A construção do triângulo retângulo auxiliar JOK , a marcação de $JL = AA'/2$ sobre JK e uma translação resolvem o problema (Figura 72).

7

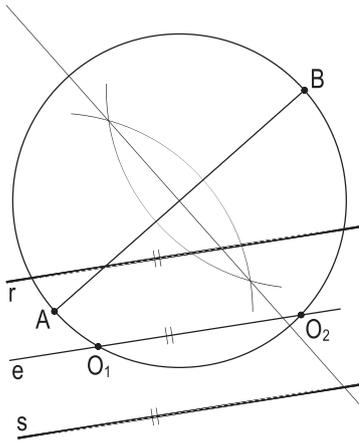


Figura 64

8

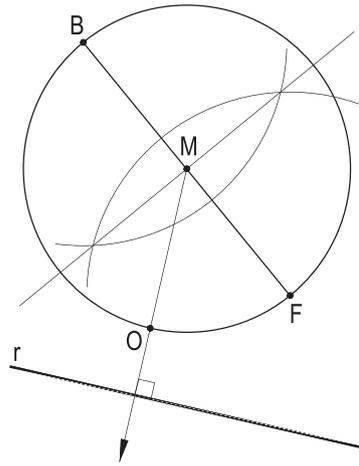


Figura 65

9

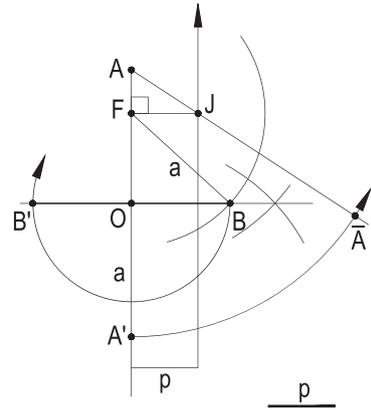


Figura 66

10

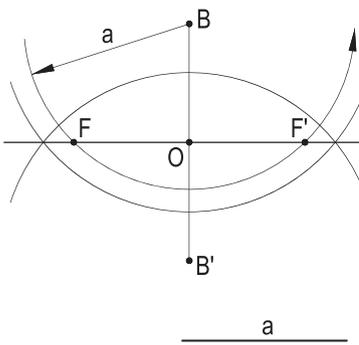


Figura 67

11

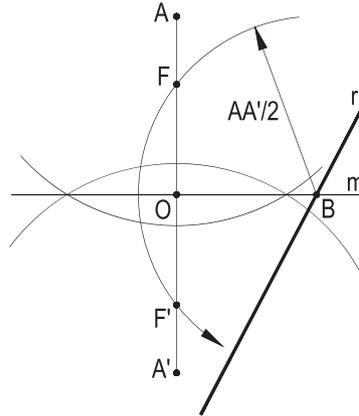


Figura 68

12

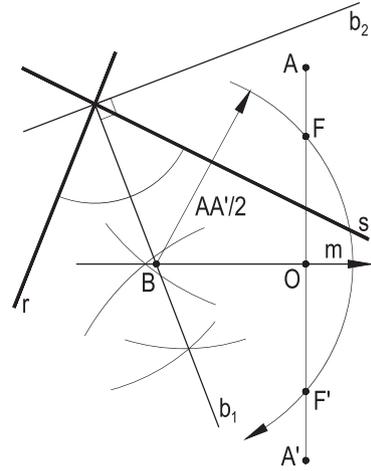


Figura 69

13

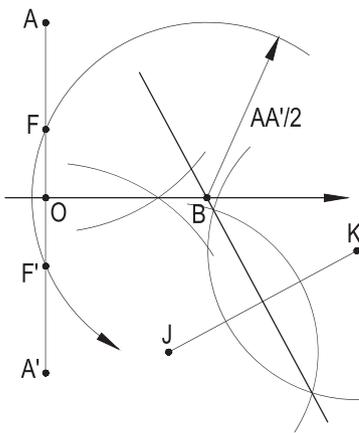


Figura 70

14

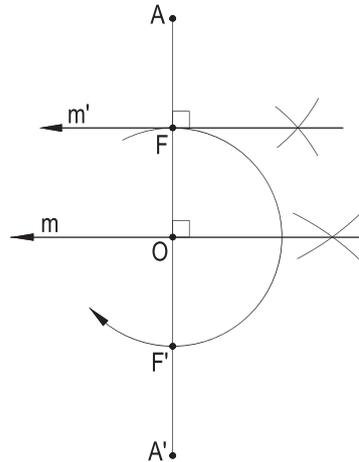


Figura 71

15

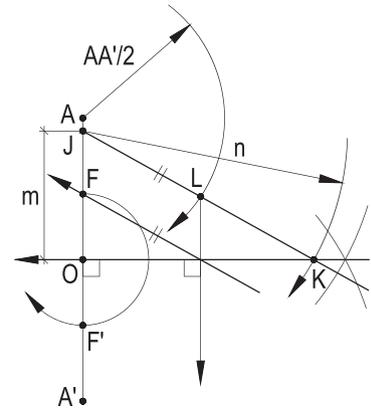


Figura 72

16 – A e B são dois vértices consecutivos de uma elipse. \bar{B} e \bar{F} são um vértice do eixo menor e um foco de uma segunda elipse, concêntrica com a primeira. Dados A, B, \bar{B} e \bar{F} , pede-se determinar o centro O comum às duas curvas.

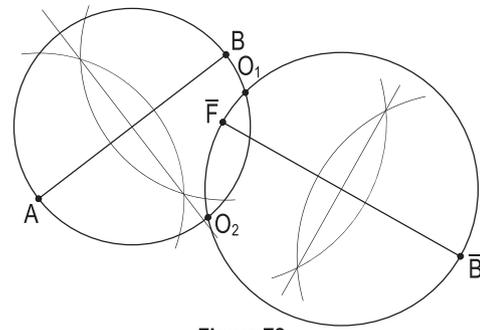


Figura 73

Resolução: O centro O há de ser um dos pontos de corte das circunferências de diâmetros AB e $\bar{B}\bar{B}$, para assegurar os ângulos retos, entre os pares de eixos, com duas soluções, para os dados (Figura 73).

17 – Construir as retas r e r' suportes das cordas focais da elipse dada por seus dois eixos AA' e BB'.

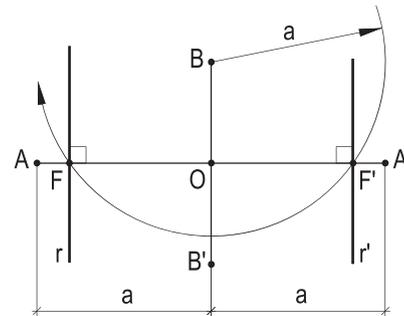


Figura 74

Resolução: Imediata, pela obtenção dos focos F e F' da curva (Figura 74).

18 – Dadas uma elipse, por seu eixo transverso AA' e seu foco F, bem como a reta r, que passa por F, pede-se determinar sua interseção P coma curva, escolhendo P acima de AA'.

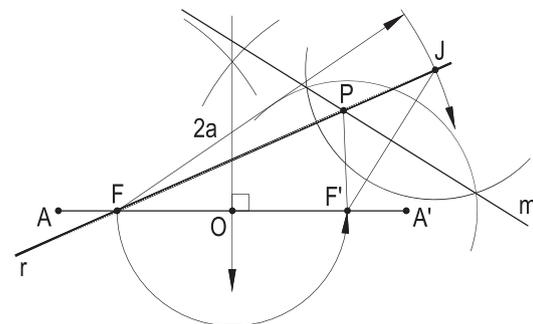


Figura 75

Resolução: Aplicada a medida $FJ = AA'$ sobre r, a mediatriz m de JF' , F' sendo o segundo foco, corta r no ponto P procurado, pois $PF' = PJ$, logo $PF + PF' = 2a$ (Figura 75).

19 – Determinar a medida p do parâmetro da elipse dada por seu eixo maior AA' e por seu foco F.

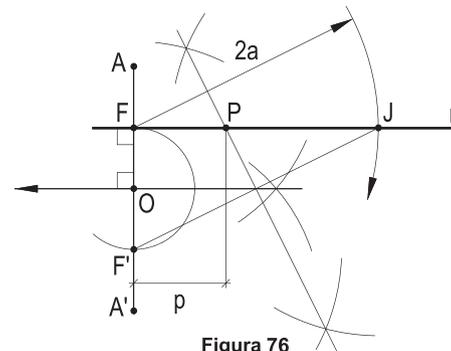


Figura 76

Resolução: Variante do problema anterior, fazendo a reta r, pertencente ao foco F, dado, ser perpendicular ao eixo AA'.

Obtido o traço P de r com a curva (Figura 76), FP mede o parâmetro pedido p.

20 – Dados os pontos colineares F , F' e N , sendo N o pé de uma tangente a uma elipse de focos F e F' num ponto corrente P , pede-se determinar a posição do pé M da normal à curva nesse ponto P .

Resolução: M há de ser o conjugado harmônico de N para FF' (Figura 77).

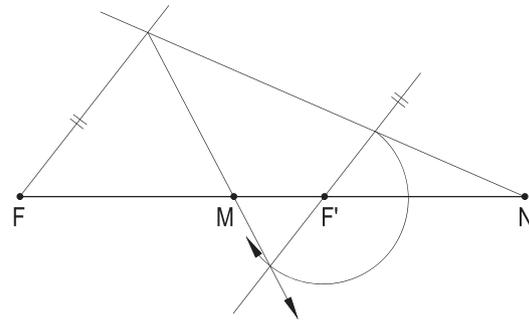


Figura 77

21 – Determinar o ponto de contato T da tangente dada t a uma elipse, dada pelo suporte r de seu eixo maior, por seu valor $2a$ e por um foco F .

Resolução: Obtido o simétrico S de F em relação a t , a circunferência $(S, 2a)$ traz, em r , o segundo foco F' que, unido a S , proporciona o ponto de contato procurado T (Figura 78). Duas soluções.

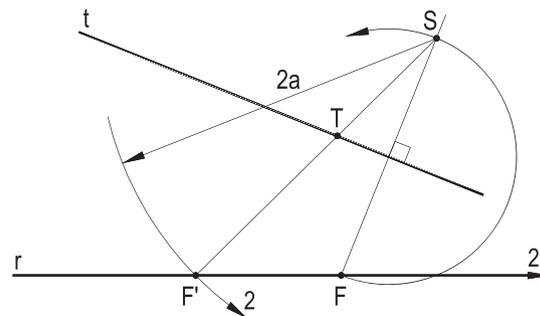


Figura 78

22 – A reta dada t tangencia uma elipse, da qual se conhece o vértice B de seu eixo menor e um foco F . Pede-se determinar seu ponto de contato T .

Resolução: BF mede o valor a do semi-eixo maior. Obtido o simétrico S de F em relação a t , o segundo foco F' será o corte de $(S, 2a)$ com (B, a) , e sua união a S dá o ponto T (Figura 79).

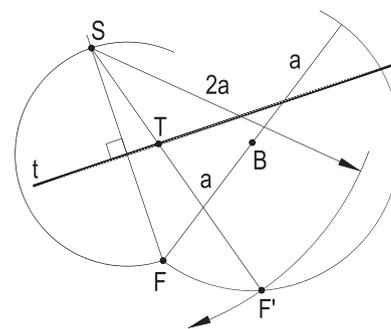


Figura 79

23 – Determinar o segundo foco F' da elipse tangente às retas dadas t e t' , conhecendo seu primeiro foco F e a medida $2a$ de seu eixo transversal.

Resolução: Obtidos os simétricos S e S' de F em relação a t e a t' , o segundo foco F' será o ponto de corte das circunferências $(S, 2a)$ e $(S', 2a)$ (Figura 80).

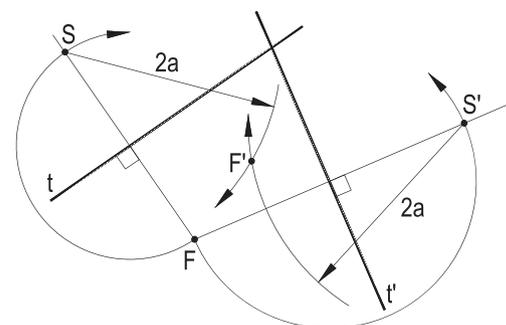


Figura 80

Em todos os seis problemas seguintes, uma elipse é dada por seus focos F e F' e por um ponto corrente P .

Em todos eles pede-se construir uma tangente t à elipse, que atenda às imposições anotadas caso a caso.

24 – t contém P .

Resolução: t é a bissetriz do ângulo externo FPF' (número 23) (Figura 81).

25 – t é paralela à reta dada r .

Resolução: Girando o foco F' em torno de P até que venha ocupar a posição \bar{F}' , no prolongamento de FP , obtém-se a medida $F\bar{F}' = 2a$ do eixo maior (número 25).

Com isso, pode-se traçar a circunferência diretora ($F, 2a$) e a perpendicular p , por F' , a r , que corta essa circunferência no ponto S , que há de ser (número 25) o simétrico de F' em relação à tangente t procurada, a qual, por isso, tem que ser a mediatriz do segmento $F'S$ (Figura 82).

Há, naturalmente, uma segunda solução, simétrica da construída em relação ao centro da elipse (número 28.2), não incluída nessa figura.

26 – t contém o ponto dado J , exterior à elipse.

Resolução: Como no caso anterior, obtido \bar{F}' no prolongamento de FP , com $P\bar{F}' = PF'$, constrói-se a circunferência diretora ($F, 2a$), para operar como detalhado no número 28.3, apresentada, na Figura 83, uma solução t , a segunda apenas indicada pelo número 2.

27 – t é a tangente num vértice do eixo transverso.

28 – t é a tangente num vértice do eixo não transverso.

Resolução: Em ambos os casos t é perpendicular a um dos eixos (Figuras 84 e 85). (Duas soluções em cada caso).

29 – t se inclina de 60° com o eixo real.

Resolução: Construído o triângulo equilátero $FF'J$, obtém-se as direções JF e JF' das retas inclinadas de 60° em relação a eixo real AA' .

Trata-se, então, de construir as tangentes t paralelas a uma dessas duas direções, retornando-se, pois, ao problema 25, acima.

Na Figura 86 foi apresentada uma das quatro soluções, duas para cada direção.

24

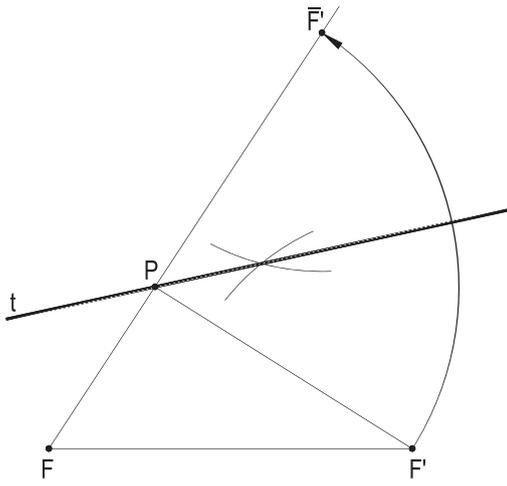


Figura 81

25

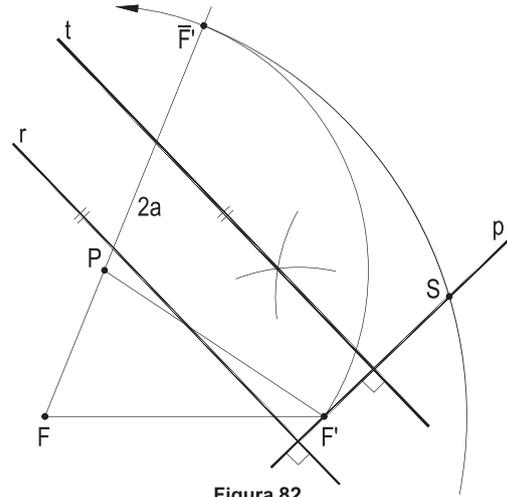


Figura 82

26

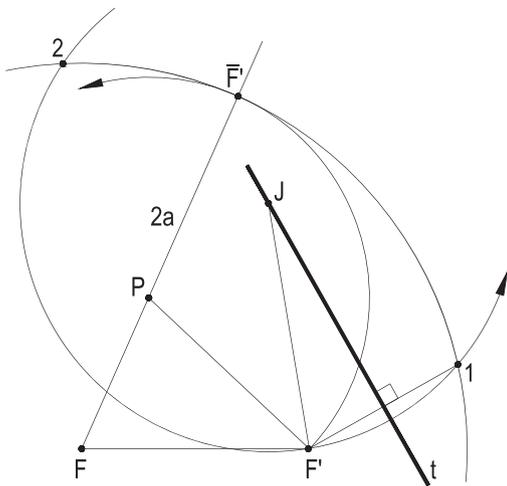


Figura 83

27

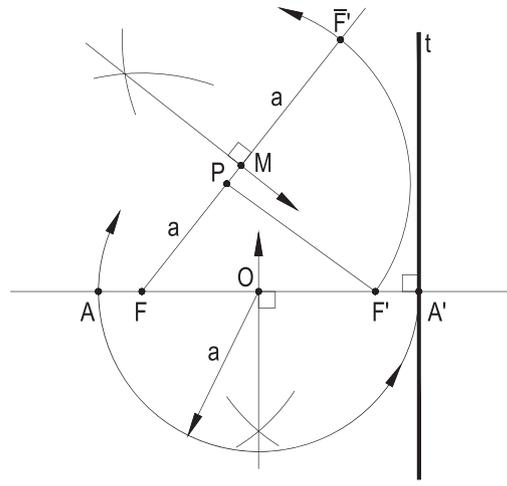


Figura 84

28

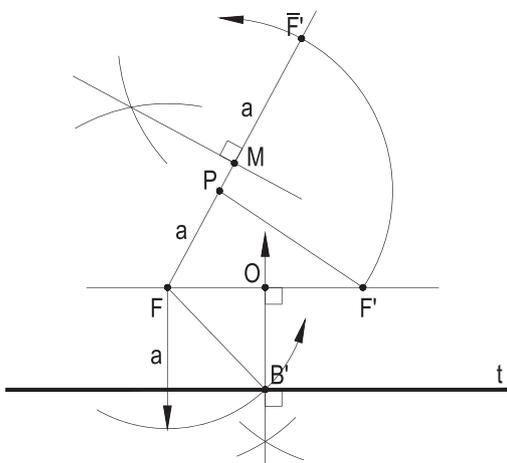


Figura 85

29

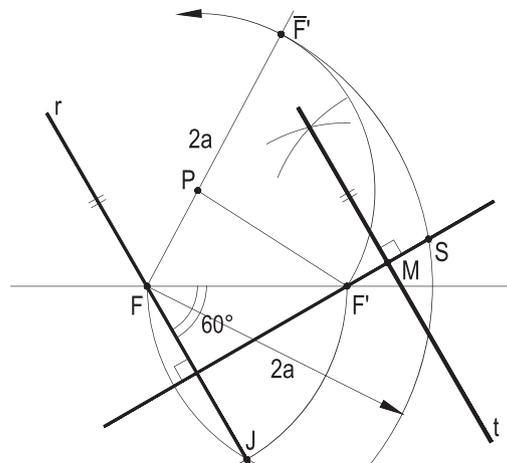


Figura 86

Em todos os seis problemas seguintes pede-se construir uma tangente t a uma elipse, dada, caso a caso, pelas condições detalhadas.

30 – As quatro posições de t formam um retângulo circunscrito à elipse, com lados paralelos aos eixos. Dados o eixo maior AA' e um foco F .

Resolução: As tangentes devem passar por cada um dos quatro vértices da curva (Figura 87).

31 – Agora devem formar um losango com um vértice dado J pertencente ao suporte do eixo real dado. Dado também o foco F .

Resolução: A circunferência diretora relativa ao foco F corta a circunferência de centro J e raio JF' , F' sendo o segundo foco da elipse, proporcionando os simétricos S e S' de F' em relação a duas das tangentes pedidas t_1 e t_2 , que são, então, traçadas por J , perpendicularmente às cordas $F'S$ e $F'S'$ (Figura 88). As outras duas, t_3 e t_4 , paralelas às primeiras, passam pelo ponto J' , simétrico de J em relação ao centro O da elipse.

32 – Mesmo problema, agora para uma posição genérica de J . Mesmos dados.

Resolução: Idêntica à do problema anterior (Figura 89).

33 – Agora formam em paralelogramo com lados paralelos às retas dadas r e s . Dado o eixo real AA' a um foco F .

Resolução: Mais uma vez, utilizada a circunferência diretora relativa ao foco F e as perpendiculares a r e a s pelo segundo foco F' (Figura 90).

34 – Agora formam um paralelogramo com lados paralelos aos do losango $BFB'F'$ formado pelos focos e pelos vértices do eixo menor, dados o eixo maior e o foco F .

Resolução: Idêntica à do problema anterior (Figura 91), as quatro tangentes formando um losango.

35 – A tangente pedida t deve passar pelo vértice J do triângulo equilátero AJA' , dados o eixo maior AA' e um foco F .

Resolução: Variante do problema 32, anterior (Figura 92).

Apenas a tangente t foi construída, as outras três são a simétrica de t em relação à mediatriz de AA' e as duas últimas simétricas das primeiras em relação ao eixo AA' .

30

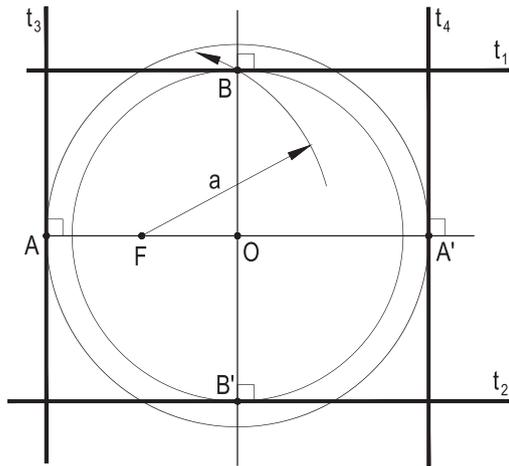


Figura 87

31

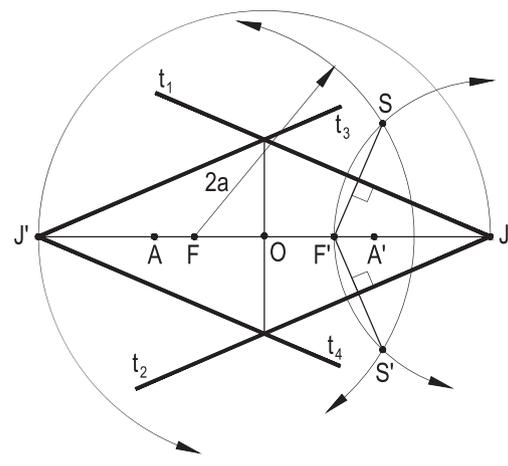


Figura 88

32

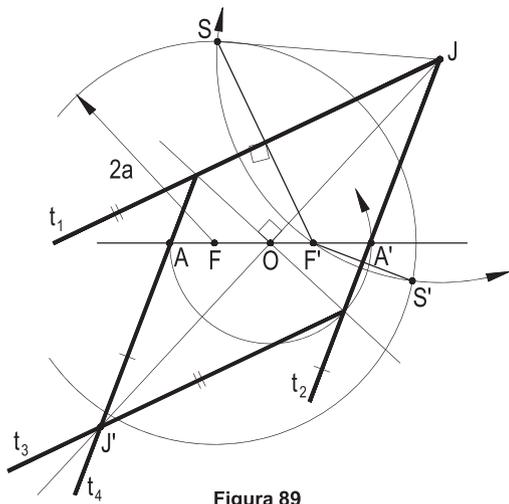


Figura 89

33

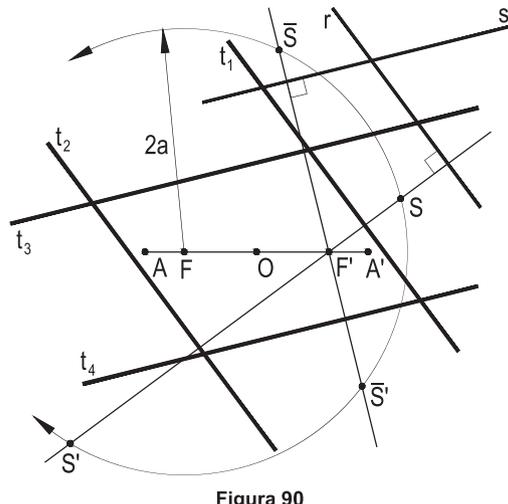


Figura 90

34

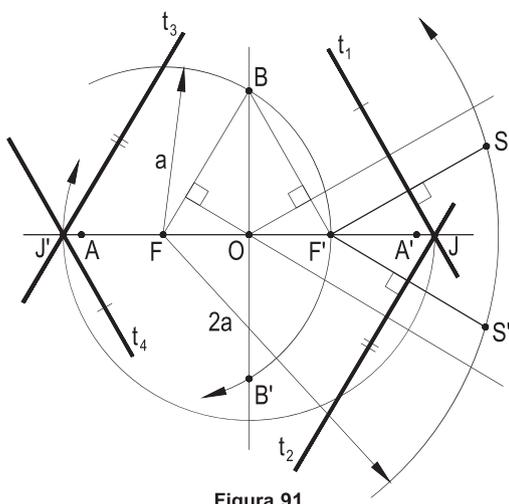


Figura 91

35

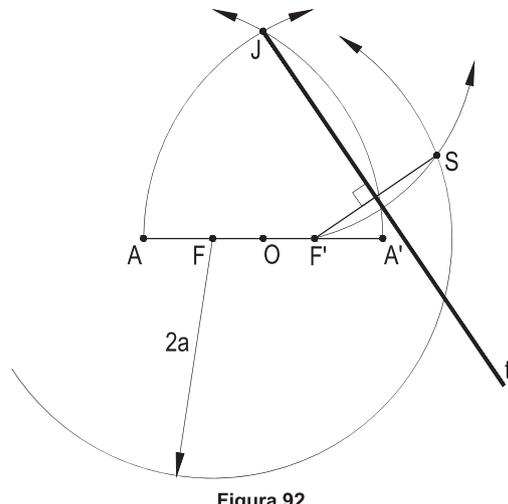


Figura 92

36 – Do ponto dado J pode-se enviar duas tangentes sendo r , dada, e t , pedida, a uma elipse de eixo maior AA' dado.

Resolução: Construída a circunferência principal, de diâmetro AA' , seus cortes L e K com r são contra projetados sobre AA' , proporcionando os dois focos F e F' da elipse (ver número 32.1). A circunferência (M) de diâmetro JF' define o ponto de contato T da segunda tangente (número 32.4), e então, a reta t pedida (Figura 93).

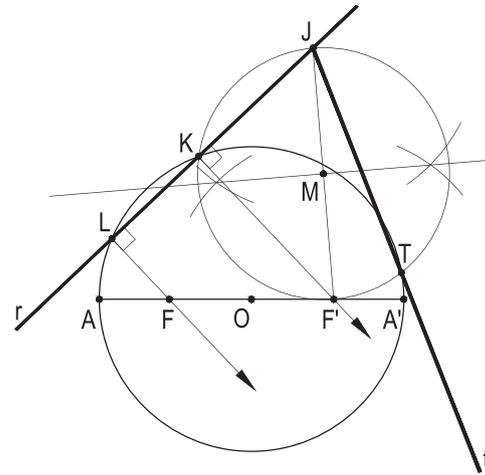


Figura 93

37 – Dada uma elipse por seu eixo real AA' e por uma tangente r , construir outra tangente t à curva, que se incline de 60° com a dada.

Resolução: Traçada a circunferência principal (O, OA) , as contra projeções de seus cortes L e K com r proporcionam os focos F e F' e a construção do triângulo equilátero JKL traz as duas direções d e d' inclinadas de 60° com r , tornando imediato obter as tangentes t pedidas (número 32.3), das quais apenas uma foi concluída na Figura 94, com seu ponto de contato T .

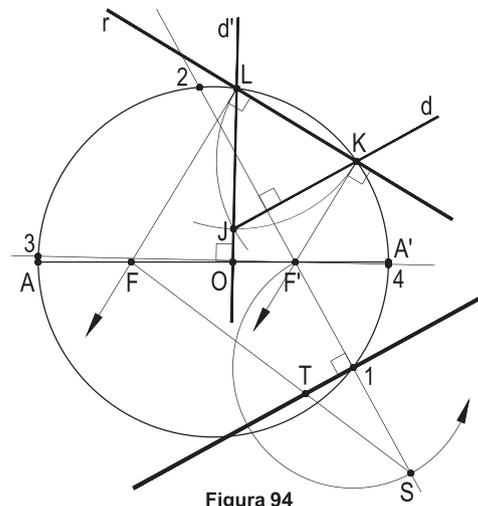


Figura 94

38 – De uma elipse são dadas a circunferência principal (O) , uma tangente t e a medida $2c$ de sua distância focal. Pede-se determinar, em posição, o eixo transverso AA' da curva.

Resolução: As perpendiculares a t , pelos traços K e L da circunferência principal com t , são os lugares geométricos dos focos da curva. Assim, a circunferência de centro O e raio c , igual à semidistância focal, corta essas projetantes trazendo os pontos 1, 2, 3, 4 (Figura 95) que, adequadamente ligados, entregam as duas soluções AA' e $\overline{AA'}$ do problema.

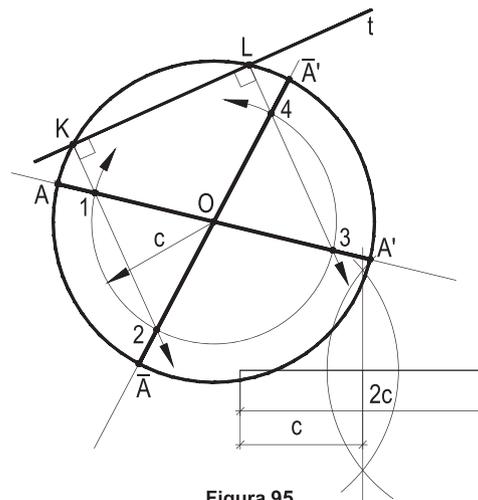


Figura 95

39 – Dadas duas tangentes t_1 e t_2 a uma elipse de focos F e F' e a reta r , suporte do eixo real, além do foco F , pede-se completar a circunscrição a essa elipse com uma tangente paralela a seu eixo real.

Resolução: Traçada a semirreta Jw , isogonal de JF para o ângulo formado por t_1 e t_2 , obtém-se o segundo foco F' (número 34). O simétrico S de F em relação a t_1 dá a medida $F'S = 2a$ do eixo real da curva e a construção do triângulo retângulo $OF'B$, com hipotenusa igual a a , entrega o vértice B' por onde tem que passar a terceira tangente t_3 (Figura 96), dispensado o vértice B , cuja tangente implicaria em que a elipse fosse exinscrita ao triângulo formado.

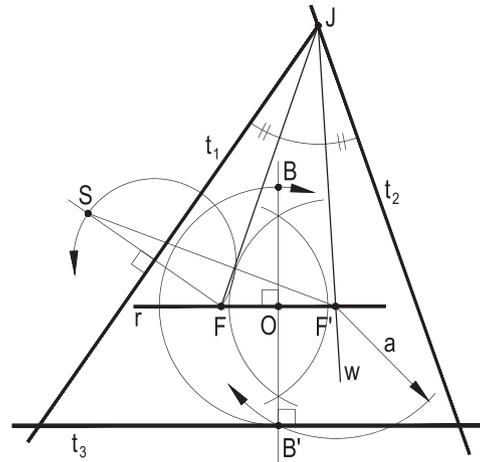


Figura 96

40 – Determinar as posições dos pontos J que, equidistando das retas dadas m e n , são capazes de ver a elipse dada por seus eixos AA' e BB' sob ângulos retos.

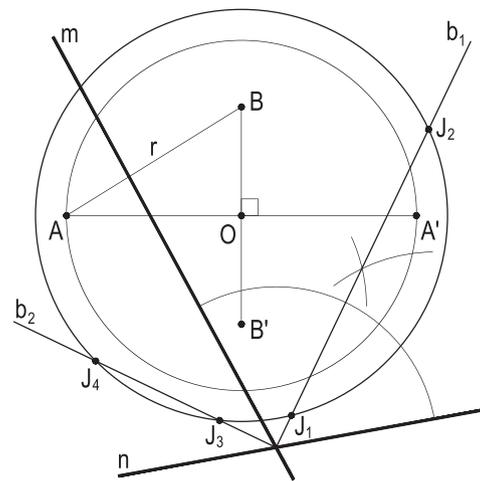


Figura 97

Resolução: Os pontos J_1, J_2, J_3 e J_4 pedidos hão de ser as interseções de cada uma das bissetrizes b_1 e b_2 dos ângulos formados por m e n com a circunferência (O, r) , de Monge, da elipse dada (ver número 37) (Figura 97).

41 – Dadas duas retas paralelas m e n , tangentes a uma elipse, da qual se conhece um foco F e o valor $2a$ de seu eixo real, pede-se determinar o segundo foco F' e os pontos de contato das tangentes dadas.

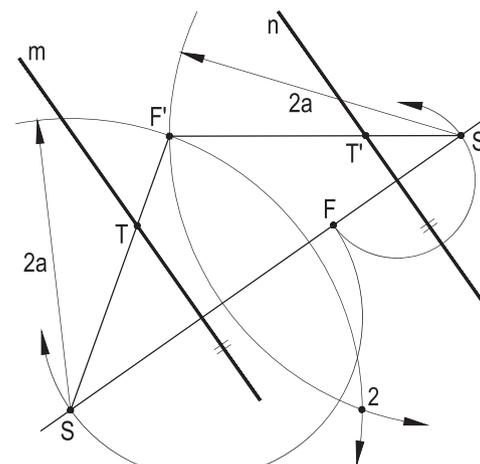


Figura 98

Resolução: Obtidos os simétricos S e S' de F em relação a cada reta dada, o ponto de corte F' das circunferências $(S, 2a)$ e $(S', 2a)$ (duas soluções) é o segundo foco e suas uniões a S e a S' dão os pontos de contato T e T' pedidos (Figura 98).

42 – Dadas uma elipse por seus dois focos F e F' e pelo valor $2a$ de seu eixo real, além dos pontos exteriores G e H , pede-se construir o triângulo isósceles MGH , de base GH , sabendo que M pertence àquela elipse.

Resolução: O terceiro vértice M do triângulo pedido tem que pertencer à mediatriz m de GH e será, então, sua interseção com a elipse dada, obtida com a marcação do centro radical CR (Figura 99) e com as determinações dos pontos de contato T e T' de suas tangentes à circunferência principal da elipse.

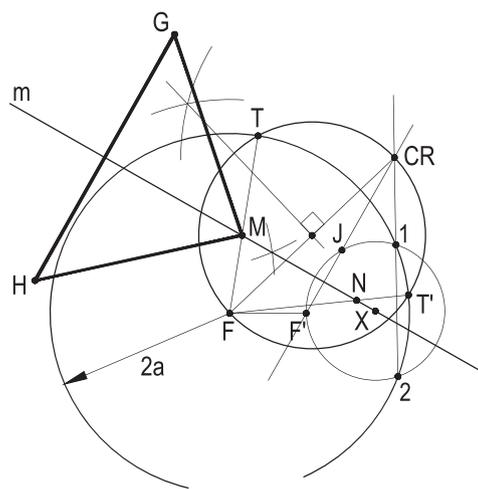


Figura 99

A segunda solução, correspondente ao ponto de contato T' não foi completada na Figura 99.

43 – Construir um quadrado interior à elipse dada por seus eixos AA' e BB' , sabendo que um de seus lados é uma corda focal da elipse.

Resolução: Marcados os focos F e F' , com a circunferência (B, a) , as perpendiculares p e p' , por eles ao eixo transversal, hão de ser suportes para lados dos quadrados. Assim, marcado, em p , $FS = 2a$, a mediatriz m do segmento $F'S$ traz um vértice X do primeiro quadrado solução $XYZW$ de simples construção. A segunda, incompleta, para o lado $X'Y'$ (Figura 100), fica à esquerda de $X'Y'$.

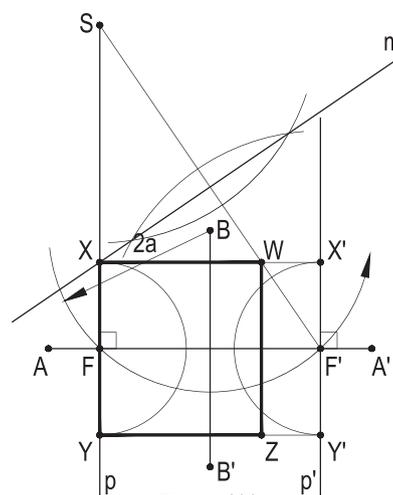


Figura 100

44 – Inscrever na elipse de focos F e F' , dados, e eixo maior de medida $2a$ conhecida, um trapézio, cujas bases pertençam às retas paralelas dadas x e y .

Resolução: Os vértices M e N hão de ser as interseções da reta x com a elipse, assim como \bar{M} e \bar{N} os traços de y com a curva, obtidos tal como detalhado no item 39 (Figura 101).

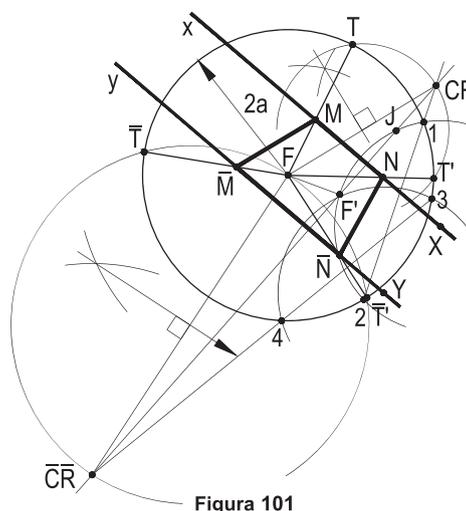


Figura 101

45 – Construir o eixo transverso AA' da elipse de foco dado F , tangente às retas dadas r e s , sabendo que ele é paralelo à reta w , também dada, e determinar os pontos de contato das tangentes dadas.

Resolução: Traçada a reta \bar{s} , isogonal de \bar{r} , pertencente a F , no ângulo formado por r e s , sua interseção com a paralela w' a w , conduzida por F , dá o segundo foco F' da elipse, bem como o suporte FF' de seu eixo real. Em seguida, o centro O da elipse, para, com o simétrico S' de F em relação a r , vir a medida $SF' = 2a$ do eixo transverso AA' procurado (Figura 102), que é, então, aplicado, com $OA = OA' = a$.

As uniões dos simétricos S e S' de F , em relação às tangentes dadas ao segundo foco F' , trazem os pontos de contato T e T' pedidos.

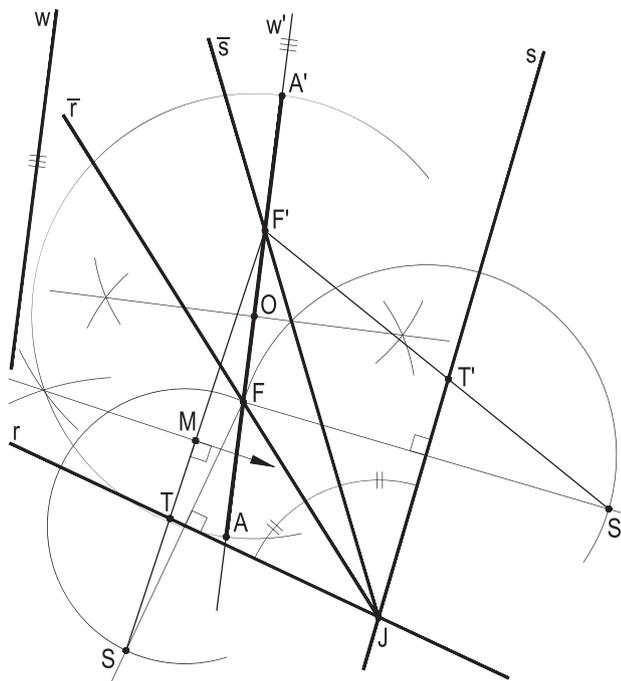


Figura 102

46 – As retas t_1 e t_2 , t'_1 e t'_2 , dadas, são quatro tangentes a uma elipse de focos F e F' . Determinar F' , conhecendo a posição de F .

Resolução: Pelo primeiro teorema de Poncelet, basta traçar as retas w e w' , respectivamente, isogonais de JF e de LF , sendo J o ponto comum às retas t_1 e t_2 e L o ponto comum às tangentes t'_1 e t'_2 , respectivamente, no ângulo que t_1 forma com t_2 e no ângulo que t'_1 forma com t'_2 .

A interseção de w e w' será o segundo foco F' procurado (Figura 103).

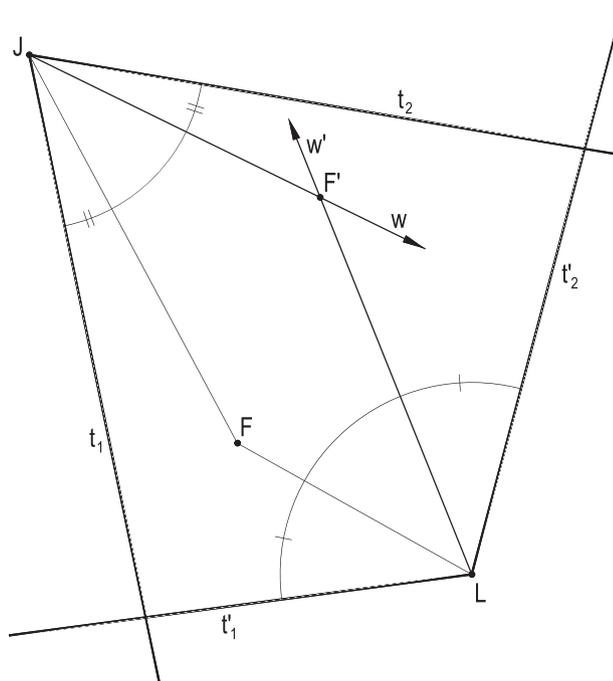


Figura 103

47 – Duas elipses de eixos AA' e BB' , a primeira, e $\bar{A}\bar{A}'$ e $\bar{B}\bar{B}'$, a segunda, são homotéticas na razão $2 : 1$ e tangentes exteriormente no ponto $B \equiv \bar{B}'$, vértices comuns aos eixos não transversos das duas curvas, que pertence à reta dada w , conhecido o eixo AA' .

Dado AA' , pede-se determinar os eixos da elipse menor, os focos das duas curvas e construir as tangentes comuns a elas.

Resolução: Por serem homotéticas e tangentes exteriormente num vértice comum a seus eixos não transversos, os eixos reais das duas elipses têm que ser paralelos.

Assim, marcado $B \equiv \bar{B}'$, traço da reta dada w com a mediatriz m de AA' e, com a metade do segmento OB , obter o centro \bar{O} da elipse homotética da primeira (Figura 104), e \bar{A} na interseção da mediatriz \bar{m} de AO com a mediatriz do segmento $\bar{B}\bar{B}'$, igual a OB , para atender à razão da homotetia imposta, ficam determinados todos os eixos.

Marcados, então, os focos F, F' da primeira e \bar{F}, \bar{F}' da segunda e determinado o polo P da homotetia, as três tangentes comuns às duas curvas são t_1 , paralela a AA' , conduzida pelo ponto $B \equiv \bar{B}'$, além das tangentes t_2 e t_3 , traçadas à elipse maior pelo polo P da homotetia, construídas conforme detalhado no item 32.4 (Figura 104).

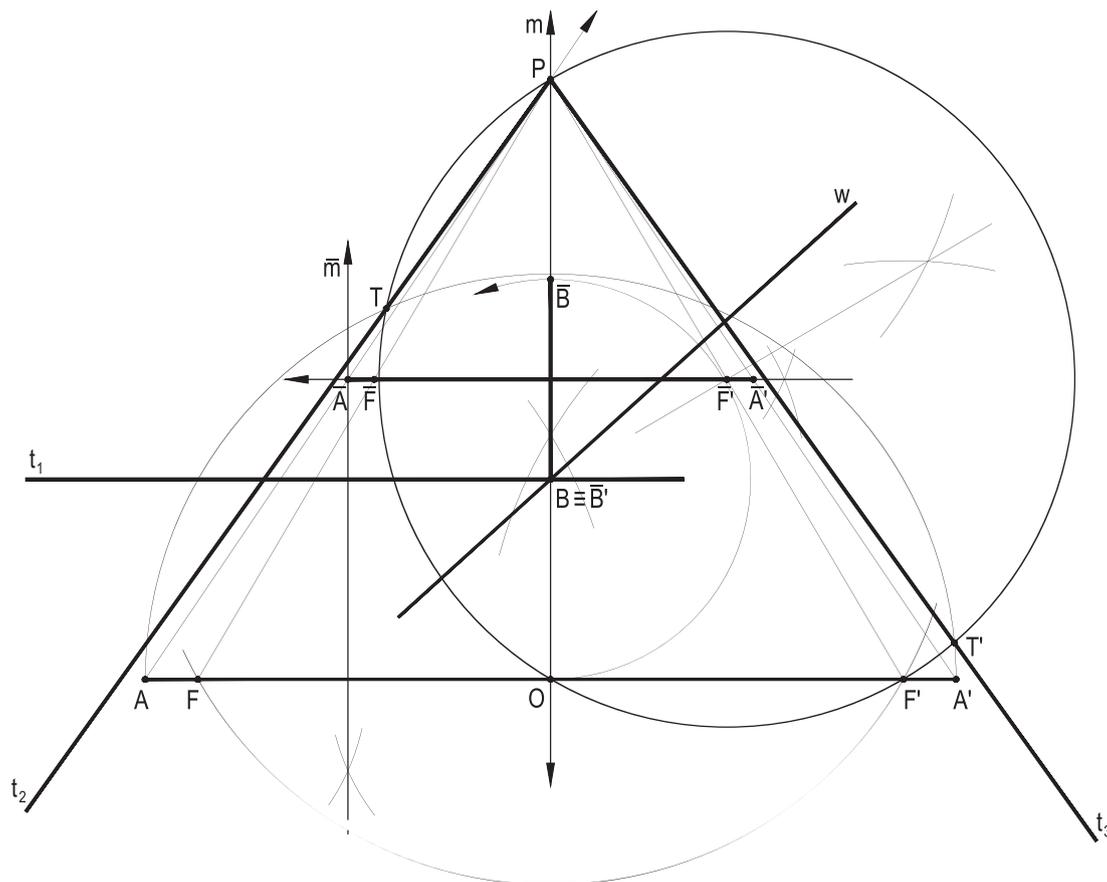


Figura 104

CAPÍTULO II

ELIPSE COMO PROJEÇÃO ORTOGONAL DA CIRCUNFERÊNCIA

41 – Teorema

A projeção ortogonal de uma circunferência sobre um plano oblíquo ao seu é uma elipse.

Demonstração: Consideremos a circunferência (c) pertencente ao plano (γ) e estudemos sua projeção ortogonal sobre um plano (π), oblíquo a (γ), que, por comodidade, admitimos passar pelo centro O da circunferência.

Designemos por a o raio da circunferência e por b o segmento OB, projeção sobre (π) do raio O(B) perpendicular ao diâmetro AA' situado sobre a interseção $\gamma\pi$ dos dois planos (Figura 105).

Além disso, consideremos um ponto (M) qualquer da circunferência e sua projeção M sobre (π) e efetuemos a rotação de (γ), em torno de $\gamma\pi$, até que este plano venha a coincidir com (π) (Figura 105). (M) proporciona \bar{M} após tal rotação.

Para o sistema cartesiano pertencente a (π), em que os eixos das abscissas e das ordenadas são, respectivamente, as retas AA' e BB' (Figura 106), os pontos M e \bar{M} têm, respectivamente, coordenadas (x, y) e (x, \bar{y}).

E (Figura 105) o triângulo OJM dá:

$$x^2 + \bar{y}^2 = a^2 \quad (1)$$

Mas os triângulos semelhantes (B)BO e (M)MJ (Figura 105) fornecem:

$$\frac{\bar{y}}{y} = \frac{a}{b} \quad \therefore \quad \bar{y} = \frac{ay}{b} \quad (2)$$

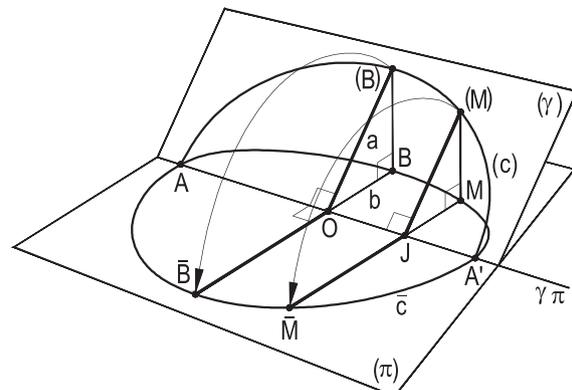


Figura 105

Substituindo (2) em (1), vem:

$$x^2 + \left(\frac{ay}{b}\right)^2 = a^2$$

$$\therefore \boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

ou
$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

Assim, (número 19), a projeção ortogonal da circunferência (c) sobre (π) é uma elipse de eixos 2a e 2b.

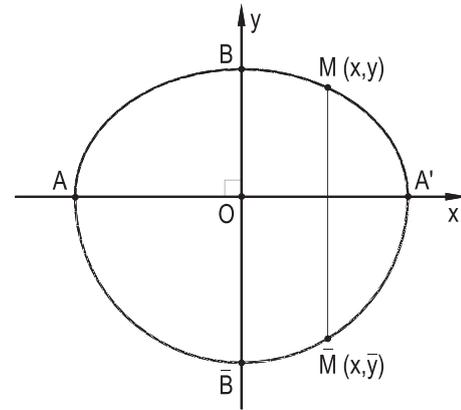


Figura 106

42 – Observações

1 – O eixo maior 2a da elipse é a projeção do diâmetro da circunferência paralelo ao plano de projeção (Figura 107).

2 – O eixo menor 2b da elipse é a projeção do diâmetro da circunferência de maior declive de (γ) em relação a (π) (Figura 107).

3 – A distância focal 2c da elipse é igual à diferença entre as distâncias (B)B e (B')B' dos extremos do diâmetro (B)(B') de maior declive da circunferência ao plano de projeção (Figura 107).

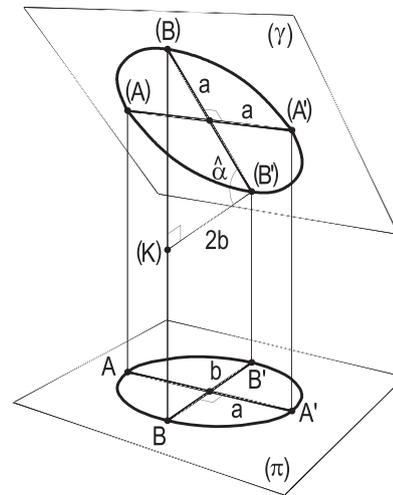


Figura 107

De fato, se considerarmos, por (B'), a paralela (B')(K) ao eixo menor BB' da elipse e se a limitarmos entre as projetantes de (B) e de (B'), o triângulo (B)(B')(K) (Figuras 107 e 108) fornece:

$$\overline{(B)(K)}^2 = \overline{(B)(B')}^2 - \overline{(B')(K)}^2 \quad \therefore \quad \overline{(B)(K)}^2 = (2a)^2 - (2b)^2$$

Mas como (número 17.2), $(2a)^2 - (2b)^2 = (2c)^2$, chegamos a: $\overline{(B)(K)} = 2c$

4 – O cosseno do ângulo formado entre os planos da circunferência e da elipse mede a razão entre os eixos, menor e maior, da elipse (Figuras 107 e 108).

$$\cos \alpha = \frac{\overline{(B')(K)}}{\overline{(B)(B')}} = \frac{2b}{2a}$$

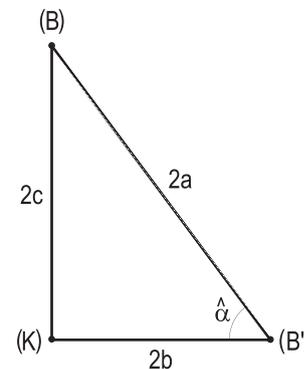


Figura 108

5 – O seno do ângulo formado entre os planos da circunferência e da elipse mede a excentricidade da elipse.

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{(B')(K)}{(B)(B')} = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a} \quad (\text{Figuras 107 e 108}) \quad \therefore \operatorname{sen} \alpha = e$$

6 – Quando o plano (γ) é paralelo a (π), a projeção da circunferência faz-se em verdadeira grandeza, ou seja, é outra circunferência, igual àquela.

7 – Quando o plano (γ) é perpendicular a (π), a projeção da circunferência é um segmento de reta igual ao seu diâmetro.

8 – A circunferência principal da elipse é igual à circunferência que deu, por projeção, aquela elipse.

43 – Área da elipse

Sabe-se calcular a área da projeção ortogonal de uma figura conhecida, a partir de sua área e do ângulo que seu plano forma com o de projeção.

Considerando a elipse de eixos $2a$ e $2b$ como projeção ortogonal de uma circunferência, sabe-se que o diâmetro da circunferência é igual ao eixo maior da elipse (número 42.1) e que o cosseno do ângulo α formado entre os planos das duas figuras é igual à razão $2b/2a$ entre os eixos da elipse (número 42.4).

A área S da elipse projeção é calculável (*Geometria Espacial*, número 53) em função da área (S) do círculo e daquele ângulo α pela expressão:

$$S = (S) \cos \alpha \quad \therefore \quad S = \pi a^2 \frac{2b}{2a}$$

Simplificando, $S = \pi ab$

44 – Observações

1 – A área da elipse é igual à média geométrica entre as áreas de seus círculos principal e auxiliar. De fato (Figura 109), para a área S da elipse, vale escrever:

$$S^2 = (\pi ab)^2 \quad \therefore \quad \boxed{S^2 = (\pi a^2) \cdot (\pi b^2)}$$

2 – A área do retângulo circunscrito a uma elipse, com lados paralelos a seus eixos, é igual à média geométrica entre as áreas dos quadrados circunscritos a suas circunferências principal e auxiliar, pela mesma razão.

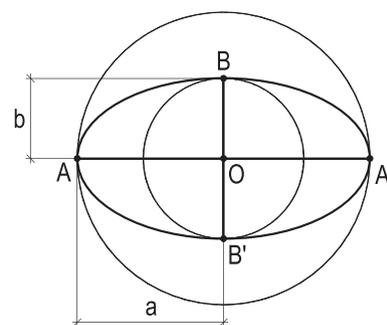


Figura 109

45 – Teorema

Existe uma razão constante entre as ordenadas, em relação ao eixo maior, dos pontos de uma elipse e de seus correspondentes na circunferência principal. Entenda-se por correspondentes dois pontos de abscissas iguais, um na elipse, outro na sua circunferência principal.

Demonstração: Consideremos uma circunferência (c) pertencente a um plano (γ) e a elipse, projeção de (c) sobre um plano (π) oblíquo a (γ), que contém o centro (O) daquela circunferência, bem como um ponto (M), genérico de (c), e sua projeção M sobre (π) (Figura 110).

Rebatendo-se (γ) sobre (π), obtém-se a circunferência c principal da elipse (número 42.1).

E, porque o triângulo (M) J M , de rebatimento do ponto (M), pertence a um plano perpendicular aos planos (γ) e (π) e, portanto, perpendicular à charneira $\gamma\pi$, M e \bar{M} têm que pertencer a uma reta JM perpendicular ao eixo maior da elipse (Figuras 110 e 111).

De fato, tal reta JM nada mais é que a interseção, com (π), do plano desse triângulo de rebatimento.

Como os triângulos de rebatimento relativos a todos os pontos (M) da circunferência são semelhantes ao triângulo (B) O B (Figura 110), para todo par de pontos correspondentes M e \bar{M} da elipse e de sua circunferência principal, respectivamente, vale escrever:

$$\frac{JM}{J(M)} = \frac{OB}{O(B)} = \frac{b}{a}$$

E como $J(M) = J\bar{M}$:

$$\boxed{\frac{J\bar{M}}{JM} = \frac{b}{a}}$$

Então, existe uma razão constante entre as ordenadas, em relação ao eixo maior, dos pontos de uma elipse e de seus correspondentes na circunferência principal.

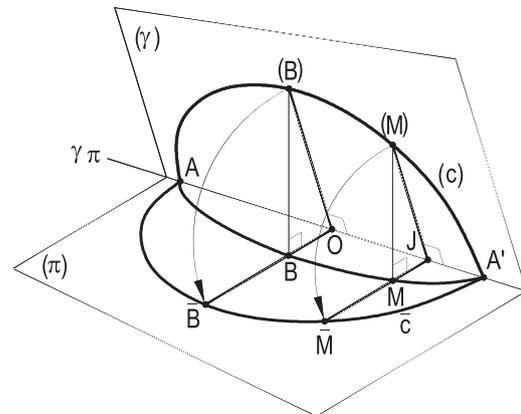


Figura 110

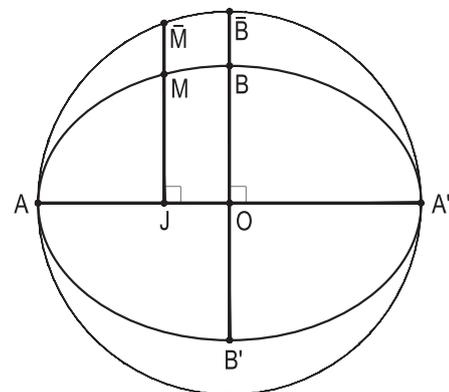


Figura 111

46 – Teorema

Existe uma razão constante entre as abscissas, em relação ao eixo menor, dos pontos de uma elipse e de seus correspondentes na circunferência auxiliar. Entenda-se por correspondentes dois pontos de ordenadas iguais, um na elipse, outro na sua circunferência auxiliar.

Demonstração: Consideremos as circunferências principal e auxiliar de uma elipse e tracemos, por um ponto M qualquer da elipse, a perpendicular $\overline{MM'}$ ao eixo maior, bem como o raio \overline{OM} da circunferência principal, o qual corta a circunferência auxiliar segundo o ponto M' (Figura 112).

Pelo teorema anterior (número 45), podemos (Figura 112) escrever:

$$\frac{\overline{JM}}{\overline{JM'}} = \frac{b}{a} \quad (1)$$

Mas, naturalmente,

$$\frac{\overline{OM'}}{\overline{OM}} = \frac{b}{a} \quad (2)$$

(1) e (2) fornecem, então, $\frac{\overline{JM}}{\overline{JM'}} = \frac{\overline{OM'}}{\overline{OM}}$

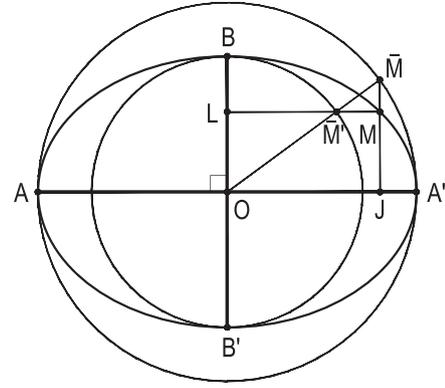


Figura 112

Daí se conclui que a reta $\overline{MM'}$, por dividir proporcionalmente os lados \overline{MO} e \overline{MJ} do triângulo \overline{MOJ} , é paralela ao eixo maior, ou seja, perpendicular ao eixo menor.

Assim, os triângulos $\overline{LOM'}$ e \overline{JOM} são semelhantes, fornecendo:

$$\frac{\overline{LM}}{\overline{OJ}} = \frac{\overline{OM'}}{\overline{LM}} = \frac{b}{a} \quad \text{E já que } \overline{OJ} = \overline{LM}, \text{ temos: } \boxed{\frac{\overline{LM'}}{\overline{LM}} = \frac{b}{a}}$$

Como o ponto M considerado foi um ponto qualquer da elipse, a propriedade é válida para todos os seus pontos.

Então, existe uma razão constante, em relação ao eixo menor, dos pontos de uma elipse e de seus correspondentes na circunferência auxiliar.

47 – Corolário

Toda elipse pode ser considerada como transformada de uma circunferência, quando se conserva fixo um dos diâmetros da circunferência e se multiplica as distâncias de todos os seus pontos ao diâmetro fixo por uma constante.

Se essa constante for menor que um, a circunferência dada será a principal da elipse obtida e o diâmetro mantido fixo será seu eixo maior (Figura 113).

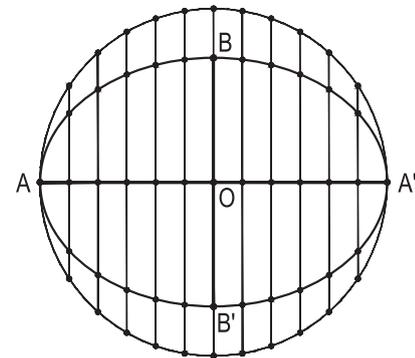


Figura 113

Se a constante for maior que um, a circunferência dada funcionará como auxiliar da elipse obtida e o diâmetro mantido fixo como seu eixo menor (Figura 114).

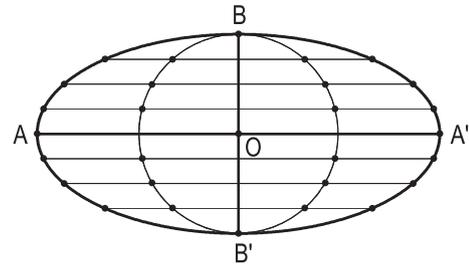


Figura 114

Assim, toda elipse pode ser considerada como transformada tanto de sua circunferência principal (Figura 113) quanto de sua circunferência auxiliar (Figura 114).

48 – Construção da elipse a partir dos eixos

Para obter um ponto M corrente de uma elipse, a partir de seus dois eixos, basta considerar as circunferências principal e auxiliar, uma reta qualquer r que passe pelo seu centro comum e traçar pelos pontos \bar{M} e \bar{M}' (Figura 115), segundo os quais ela corta aquelas duas circunferências, as paralelas aos eixos por \bar{M} e \bar{M}' .

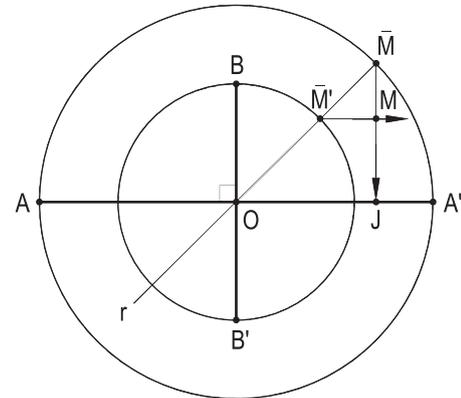


Figura 115

O ponto M comum a estas duas retas pertencerá à elipse, uma vez que a paralela $\bar{M}'M$ ao lado OJ do triângulo OJM-bar (Figura 115) permite escrever:

$$\frac{JM}{JM} = \frac{OM\text{-bar}}{OM} = \frac{b}{a}$$

E, assim (número 46), M pertence à elipse procurada.

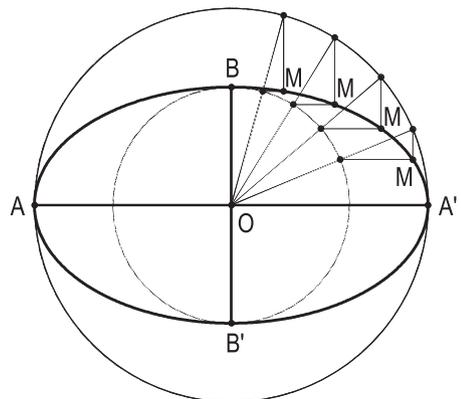


Figura 116

Para a construção da elipse bastará, então, repetir o processo citado, utilizando diferentes retas, todas pertencentes ao centro da elipse (Figura 116).

49 – Determinação do eixo menor a partir do eixo maior e de um ponto corrente

Sendo dados o eixo maior AA' e um ponto corrente M de uma elipse, para obter seu eixo menor BB', basta construir a circunferência principal e restituir o triângulo M $\bar{M}\bar{M}'$ (Figura 117), mediante o que é possível construir a circunferência (O, OM') auxiliar da elipse, determinando, como consequência, seu eixo menor BB'.

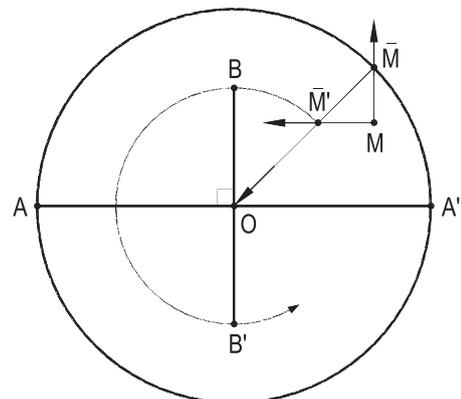


Figura 117

50 – Determinação do eixo maior a partir do eixo menor e de um ponto corrente

Sendo dados o eixo menor BB' e um ponto corrente M de uma elipse, para determinar o eixo maior AA' , basta construir a circunferência auxiliar e restituir o triângulo $M\bar{M}'\bar{M}$ (Figura 118), pois, obtido o ponto \bar{M} , é imediato determinar, com o auxílio da circunferência (O, \bar{OM}) principal, o eixo maior da elipse.

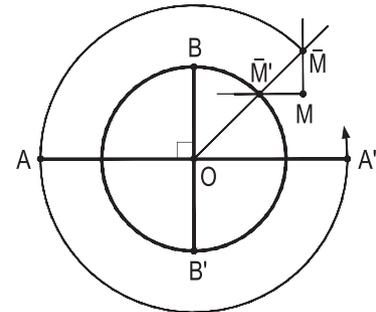


Figura 118

51 – Teorema

Quando um segmento de comprimento constante se desloca apoiado pelos extremos em duas retas perpendiculares fixas, os pontos da reta que serve de suporte ao segmento descrevem elipses cujos eixos pertencem às retas fixas.

Demonstração: Sejam r e s as retas perpendiculares fixas, XY o segmento móvel – mas de comprimento constante – e M um ponto arbitrariamente escolhido sobre o segmento (Figura 119) ou sobre um dos prolongamentos do segmento XY (Figura 120).

Designemos, nas duas hipóteses consideradas, por a e b as distâncias, constantes, de M aos pontos Y e X , respectivamente. Tracemos a perpendicular MJ à reta r , bem como a paralela JL a XY (Figuras 119 e 120) e completemos o retângulo $JOL\bar{M}$. O paralelogramo $JMYL$, em ambas as hipóteses consideradas, fornece $JL = MY$. O retângulo $JOL\bar{M}$ dá $O\bar{M} = JL = a$.

E, porque $O\bar{M}$ tem valor constante, igual à porção a , distância constante de M ao extremo Y , enquanto o ponto M se desloca, \bar{M} descreve a circunferência (O, a) .

Os triângulos semelhantes JMX e OJL (Figuras 119 e 120) permitem escrever:

$$\frac{JM}{OL} = \frac{MX}{JL} \quad \text{ou} \quad \frac{JM}{JM} = \frac{MX}{MY} = \frac{b}{a}$$

Como a razão $\frac{b}{a}$ é constante, os pontos M podem ser considerados como transformados dos pontos \bar{M} da circunferência (O, a) obtidos pela multiplicação das ordenadas JM (em relação ao diâmetro r da circunferência) pela constante $\frac{b}{a}$.

Assim, o lugar geométrico dos pontos M , em estudo, é uma elipse (número 47) cujos eixos pertencem às retas fixas r e s .

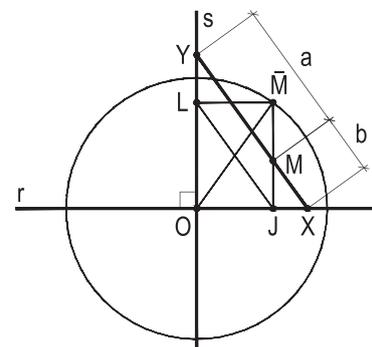


Figura 119

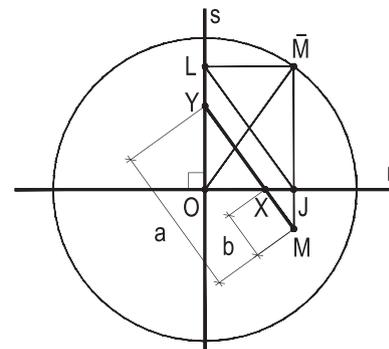


Figura 120

52 – Escólios

1 – As distâncias constantes a e b do ponto M considerado aos extremos do segmento XY são respectivamente iguais aos semieixos da elipse obtida.

De fato (Figura 121), quando o segmento XY coincide com r , $MY = OA' = a$ e quando ele coincide com s , $MX = OB = b$.

2 – Quando o ponto M considerado está mais próximo de X que de Y (Figuras 121 e 122), a elipse por ele descrita tem seu eixo maior sobre a reta r , seja M interior ao segmento XY (Figura 121), seja exterior (Figura 122).

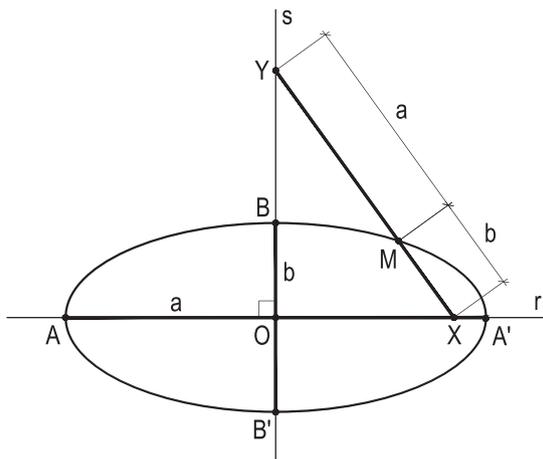


Figura 121

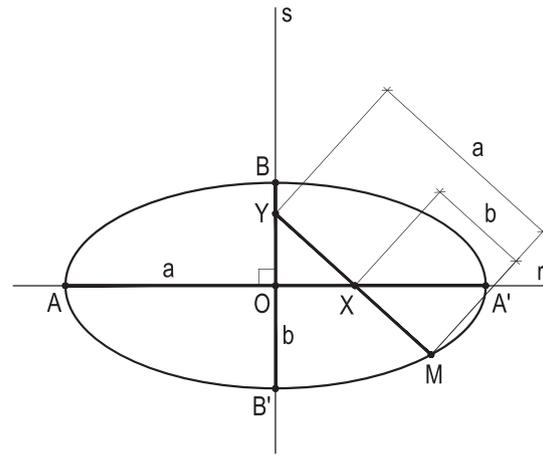


Figura 122

3 – Quando o ponto M considerado está mais próximo de Y que de X (Figuras 123 e 124), a elipse por ele descrita tem seu eixo maior sobre a reta s , mais uma vez, seja M interior (Figura 123), ou exterior a XY (Figura 124).

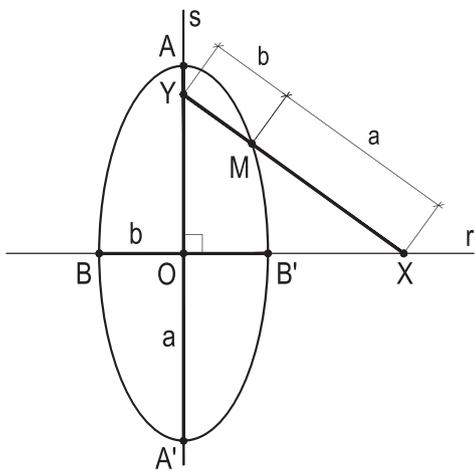


Figura 123

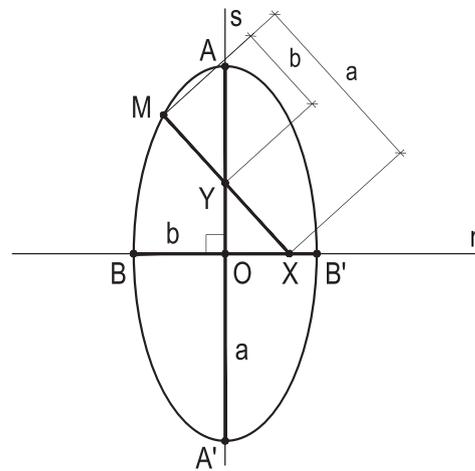


Figura 124

53 – Determinação de um ponto corrente

Dados os dois eixos ($2a$ e $2b$) de uma elipse, para obter um ponto M genérico da curva, basta arbitrar um ponto X sobre a reta suporte do eixo real AA' e construir um segmento XY (Y sobre o suporte do eixo imaginário BB') igual à soma $a + b$ (Figura 125) dos semieixos e localizar, sobre o segmento XY , o ponto M , tal que $MX = b$.

Da mesma forma, escolhido um ponto X qualquer do eixo real AA' , poderíamos trabalhar com a diferença $a - b$ entre os dois semieixos e, com centro em X e raio $(a - b)$, marcar o ponto Y sobre o eixo menor para, enfim, sobre a reta YX , aplicar o valor b do semieixo menor, obtendo M (Figura 126).

54 – Construção da elipse dada por seus eixos

O processo, decorrência natural do demonstrado, consiste em construir uma tira de papel (ou de outro material rígido disponível) com comprimento $a + b$, onde as parcelas são as medidas dos semieixos dados, marcando, com exatidão, sobre ela, o ponto de separação dessas duas parcelas.

O que se faz, então, é aplicar, em diversas posições, a tira assim construída, fazendo suas extremidades pertencerem às retas r e s (Figura 127), suportes dos eixos dados, assinalando, para cada posição da tira, o ponto M , de separação das parcelas a e b , que, então, há de pertencer à elipse procurada. A repetição, tanto quanto se queira, desse processo, fornecerá a quantidade necessária de pontos correntes M da elipse, podendo-se, é claro, para cada um dos quatro quadrantes da curva, repetir a construção ou operar com simetrias dos pontos M já determinados, em relação a cada um dos eixos da elipse.

O procedimento acima pode, é claro, ser efetuado, também, pela construção de uma tira menor, de comprimento igual ao semieixo maior a da elipse, com a aplicação nele de um segmento de medida b , igual ao semieixo menor da curva.

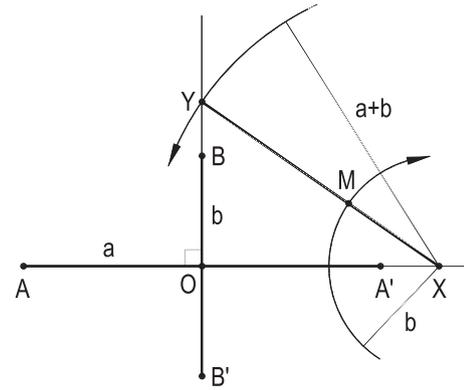


Figura 125

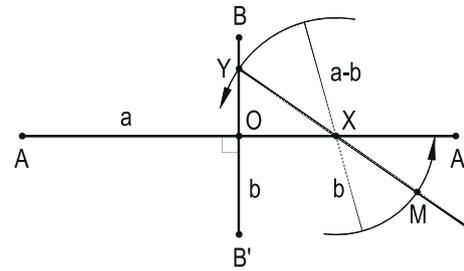


Figura 126

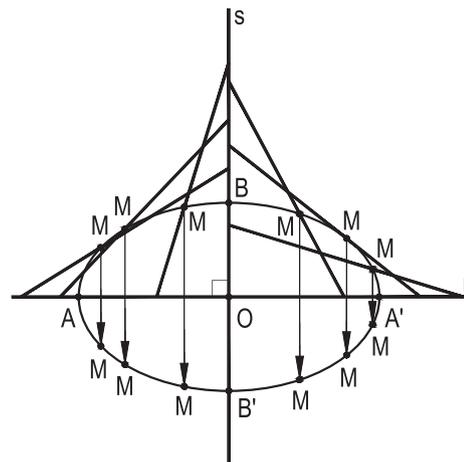


Figura 127

55 – Observações

1 – No caso particular em que o ponto M é o médio do segmento XY (Figura 128), porque $OM = \frac{1}{2} XY$ (*Geometria Plana*, número 76), M descreve a circunferência de centro O e diâmetro igual ao segmento XY .

Ainda assim, pode ser aceito como válido o teorema de número 51, desde que se entenda essa circunferência como uma elipse degenerada de excentricidade nula. (Ver o comentado no número 18.2).

2 – Nos casos particulares em que o ponto M coincide com um dos extremos do segmento XY , M descreve um segmento X_1X_2 pertencente à reta r , ou um segmento Y_1Y_2 pertencente à reta s , respectivamente (Figura 129).

Pode-se ainda, então, para ambas as hipóteses, aceitar como válido o mesmo teorema, desde que se entenda cada um desses segmentos como uma elipse degenerada de excentricidade unitária. (Ver o detalhado no número 18.3).

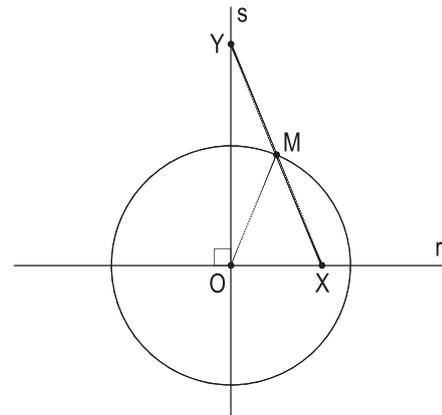


Figura 128

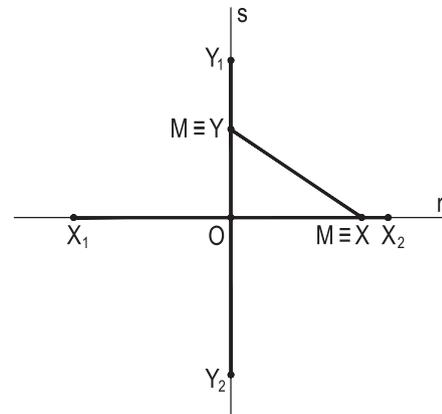


Figura 129

56 – Determinação do eixo menor a partir do eixo maior e de um ponto corrente M

Sendo dados o eixo maior AA' e um ponto M de uma elipse, para determinar o eixo menor BB' , deve-se, após, construir a mediatriz s de AA' , seu suporte, e utilizando a metade a do valor $2a$ do eixo dado AA' , com centro em M , descrever um arco da circunferência de raio a que corta s num ponto Y .

Unindo Y a M , encontra-se, sobre a reta suporte do eixo maior (Figura 130), o ponto X .

O segmento $MX = b$, assim formado, mede, então, o semieixo menor b , com o que torna-se imediato construir BB' . Os vértices B e B' completam a resolução.

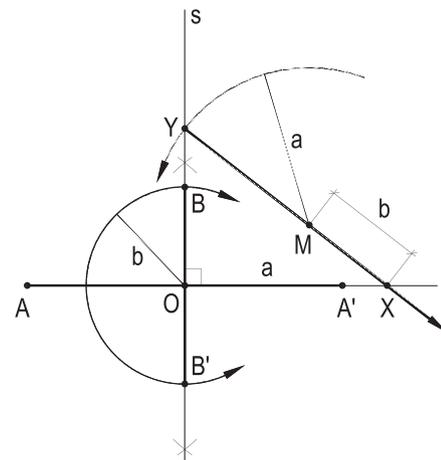


Figura 130

57 – Determinação do eixo maior a partir do eixo menor e de um ponto corrente M

Dados o eixo menor BB' e um ponto M de uma elipse, para determinar seu eixo maior AA' , constrói-se, inicialmente, a mediatriz r de BB' e, com centro em M , descreve-se um arco de circunferência de raio b , metade de BB' , que corta r num ponto X (Figura 131).

A união de X a M fornece, sobre o suporte do eixo dado, o ponto Y . O segmento $MY = a$ mede, então, o semieixo maior, tornando-se, assim, imediato determinar os vértices A e A' do eixo pedido.

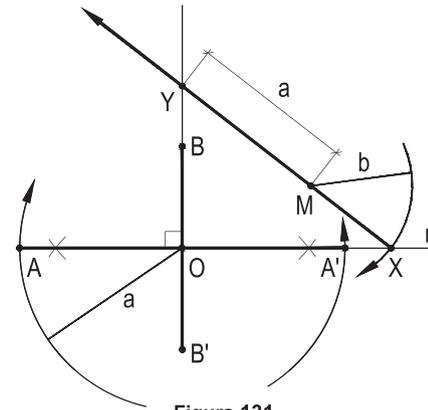


Figura 131

58 – Sistemas rígidos

Diz-se que um ponto está rigidamente ligado a um segmento móvel, mas de comprimento constante, quando, ao longo de todo o seu movimento, o ponto permanece a distâncias constantes dos extremos do segmento, ou seja, quando o triângulo que tal ponto forma com os extremos do segmento permanece rígido, inalterado em forma, acompanhando o movimento do segmento.

Assim são os pontos M das Figuras 132 e 133, rigidamente ligados aos segmentos PQ , de comprimento constante, ao longo dos seus movimentos, segundo determinadas leis de translação e rotação estabelecidas. Observe-se que, ao longo de todo o movimento, por estarem rigidamente ligados ao segmento invariável PQ , os ângulos do triângulo MQP permanecem constantes. Além disso, é importante ressaltar que todos os elementos relacionados ao triângulo MQP permanecem também inalterados em suas grandezas, embora possam variar suas posições ao longo do movimento. Assim são, por exemplo, todas as suas cevianas, seus círculos circunscrito, inscrito e exinscritos, etc.

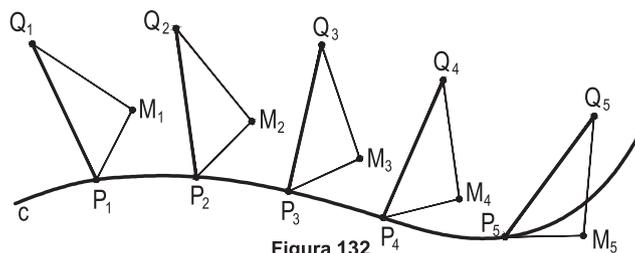


Figura 132

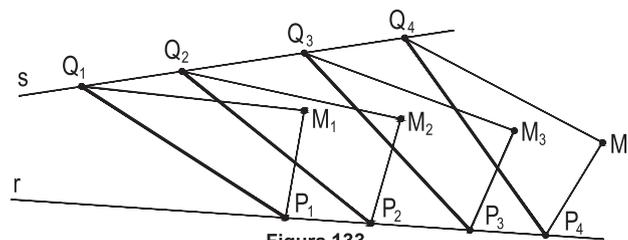


Figura 133

Naturalmente, até por ser um caso particular, o sistema rígido que um ponto M forma com um segmento PQ móvel, mas de comprimento constante, permanece invariável, em grandeza, quando os extremos P e Q do segmento descrevem duas retas perpendiculares r e s (Figura 134). E, por ser um sistema rígido, todos os elementos, pontos, retas, ângulos e demais outras quaisquer figuras que rigidamente se associem ao triângulo MPQ manterão, ao longo do movimento estabelecido, suas respectivas grandezas.

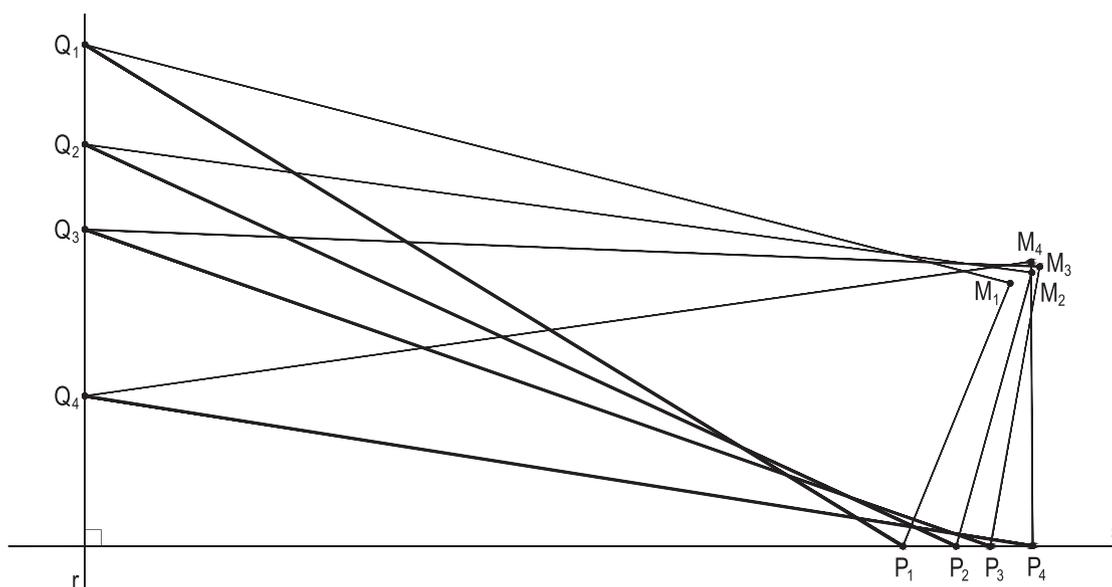


Figura 134

59 – Teorema

Quando um segmento de comprimento constante se desloca apoiado pelos extremos em duas retas fixas genéricas, um ponto qualquer rigidamente ligado ao segmento móvel descreve uma elipse.

Demonstração: Sejam z e w duas retas quaisquer, fixas, PQ um segmento móvel, mas de comprimento constante, que se desloca apoiado por seus extremos P e Q , respectivamente, em z e w , e M um ponto rigidamente ligado ao segmento PQ .

Consideremos o ponto O , comum às retas z e w , e o círculo circunscrito ao triângulo OPQ . Designemos por C o centro desse círculo e unamo-lo ao ponto M , criando a reta $MXCY$ (Figura 135).

Porque o sistema formado pelo ponto M e pelo segmento PQ é, por hipótese, rígido, os valores do segmento PQ e do ângulo $\widehat{PÔQ}$ são constantes.

O valor do raio do círculo circunscrito ao triângulo OPQ será também constante e igual ao raio do arco capaz do ângulo $\widehat{PÔQ}$, em relação ao segmento PQ (Figura 135).

Assim, esse círculo pode também ser considerado como estando rigidamente ligado ao segmento PQ e, portanto, ao ponto M (Figura 135), sofrendo, então, os mesmos deslocamentos que os pontos P, Q e M.

Como estes pontos e o círculo considerado formam um sistema indeformável, o diâmetro XY, cujo suporte passa por M, dá formação aos segmentos MX e MY, aos arcos PX e QY e aos ângulos α e β , todos constantes, portanto.

Mas, se α e β não variam com o deslocamento de PQ, as retas r e s, suportes dos segmentos OX e OY (Figura 135), são fixas. E são perpendiculares, já que o triângulo XOY se inscreve numa semicircunferência (*Geometria Plana*, número 128.2).

Mas, se α e β não variam com o deslocamento de PQ, as retas r e s (Figura 135) são fixas, porque o ponto O, comum às duas, permanece, sempre, fixo. E são perpendiculares, como visto acima.

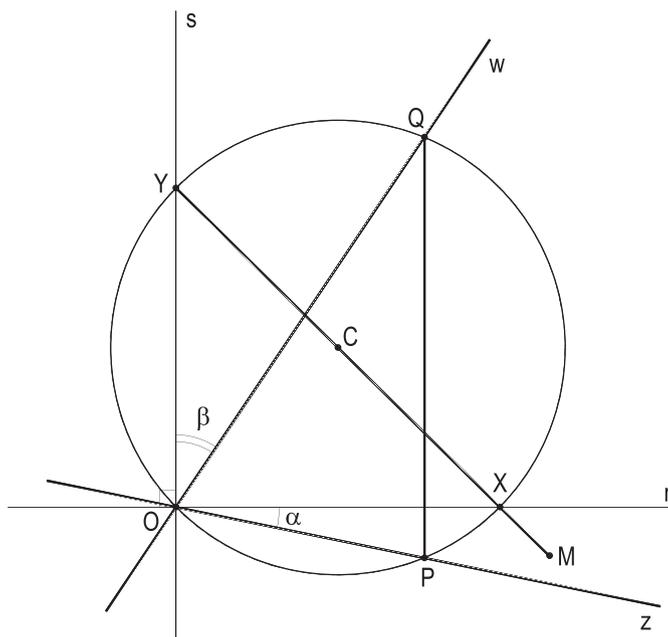


Figura 135

Assim, o movimento imposto aos pontos P, Q e M implicará no deslocamento do segmento constante XY, apoiado por seus extremos nas retas fixas r e s.

E, porque estas duas retas são perpendiculares, o ponto M, de XY, descreverá (número 51) uma elipse, cujos eixos pertencerão às retas r e s.

Então, quando um segmento de comprimento constante se desloca apoiado pelos extremos em duas retas fixas genéricas, um ponto qualquer rigidamente ligado ao segmento móvel descreve uma elipse, como se queria demonstrar.

60 – Problemas resolvidos

48 – Construir a curva transformada do quadrante de circunferência OAB dado, pela redução das ordenadas de seus pontos, em relação a OA pela metade.

Resolução: Os pontos M, médios dos segmentos \overline{JJ} proporcionam o quarto de elipse de semieixos OA e OB' (número 47) (Figura 136).

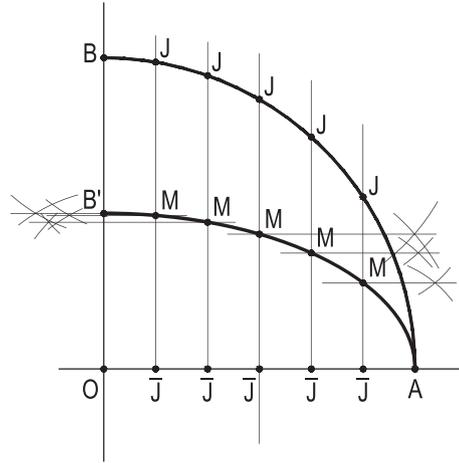


Figura 136

49 – Construir a curva transformada de uma semicircunferência dada (O), de diâmetro AB, pela duplicação das distâncias de seus pontos J a esse diâmetro.

Resolução: A transformada há de ser (número 47) a semi-elipse de eixo maior \overline{OP} , dobro do raio de (O) (Figura 137).

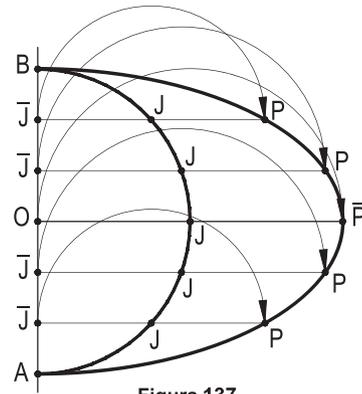


Figura 137

50 – Construir a figura transformada do hexágono regular ABCDEF dado, pela redução das distâncias de seus vértices em relação à diagonal AD, na razão 3/5.

Resolução: Com $\overline{FJ} = (3/5) FJ$ pode-se, com paralelas, completar o hexágono $\overline{A\overline{B}\overline{C}\overline{D}\overline{E}\overline{F}}$ procurado (Figura 138).

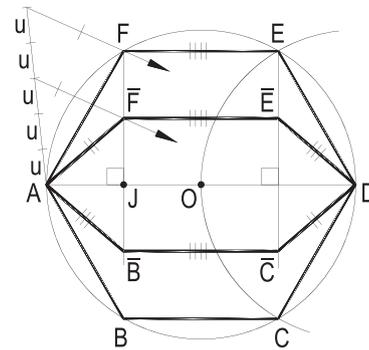


Figura 138

51 – Construir a figura transformada do triângulo equilátero ABC, dado por seu lado BC pelas duplicações e pelas reduções às metades das ordenadas de seus pontos em relação ao lado BC.

Resolução: O quadrilátero côncavo $\overline{A\overline{B}\overline{C}\overline{A}'}$ (Figura 139), de simples construção, é o transformado pedido.

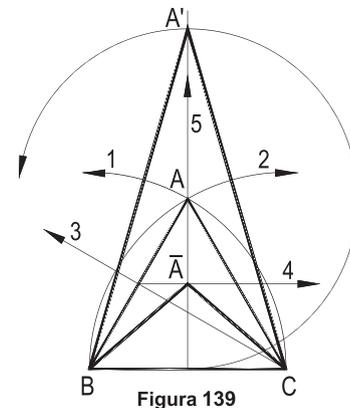


Figura 139

52 – De uma elipse são dadas uma tangente t , a circunferência principal (O) e a medida $2c$ de sua distância focal. Pede-se determinar seus focos e seu eixo real AA' .

Resolução: As perpendiculares, pelos traços J e K de t com (O), e a construção do triângulo JKL , com $JL = 2c$ (Figura 140), entregam a direção JL do eixo real, então, de pronta obtenção. Duas soluções.

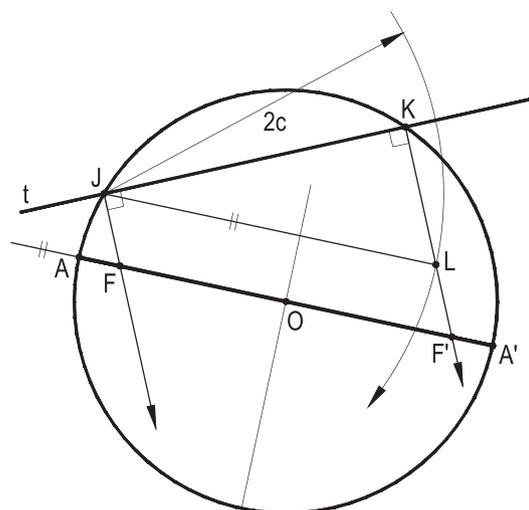


Figura 140

53 – A reta dada t tangencia uma elipse de eixo maior AA' dado. Determinar a medida p do parâmetro da curva.

Resolução: A perpendicular pelo traço L de t com a circunferência principal a essa própria reta t entrega o foco F e, por simetria, em relação ao centro O da elipse, o segundo foco F' (Figura 141). Marcado $FJ = AA'$ sobre o suporte da corda focal de F , a mediatriz m de $F'J$ proporciona o ponto corrente M , extremo dessa corda focal e, então, a medida pedida p .

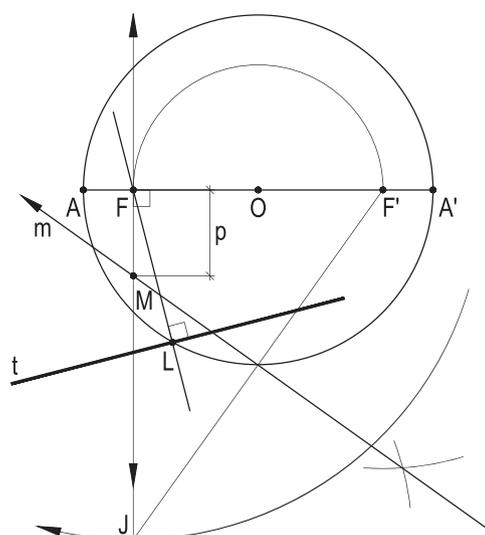


Figura 141

54 – Dada uma elipse por seus dois eixos AA' e BB' , pede-se inscrever nela um trapézio que tenha suas bases nas retas dadas r e s , ambas paralelas ao eixo real.

Resolução: Busca-se determinar as interseções das retas r e s com a elipse e, já que elas são paralelas ao eixo maior AA' , pode-se proceder como detalhado no item 48, aproveitando os raios $O\bar{X}$ e $O\bar{Y}$ da circunferência principal para determinar os vértices X e Y do trapézio $XY'YX'$, que, enfim, é completado por simetrias em relação à reta BB' (Figura 142).

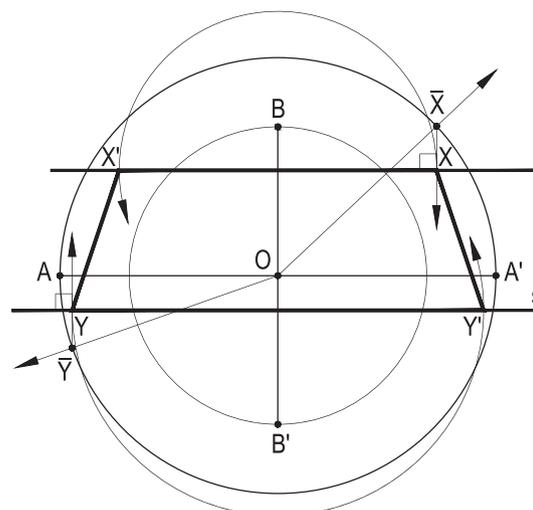


Figura 142

55 – Dada uma elipse por seus eixos AA' e BB' , pede-se construir a curva dela transformada pela multiplicação das distâncias de seus pontos ao eixo AA' por uma constante genérica k , dada, identificando a natureza dessa transformada.

Resolução: Como a elipse dada resulta da transformação de sua circunferência principal pela multiplicação das ordenadas de seus pontos em relação ao eixo AA' pela razão constante b/a , entre seus semieixos (número 47), a transformada pedida há de ser outra elipse, entendida como transformada dessa circunferência principal pela multiplicação de suas ordenadas em relação a AA' pela constante $\frac{a}{b} \cdot k$, podendo resultar, conforme o valor de k numa outra elipse ainda com eixo maior AA' (Figura 143), ou noutra elipse, tendo, agora AA' como eixo menor (Figura 144), e, é claro, fosse $k = \frac{b}{a}$, em caso muito particular, na própria circunferência principal.

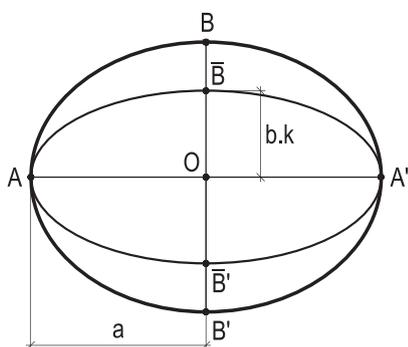


Figura 143

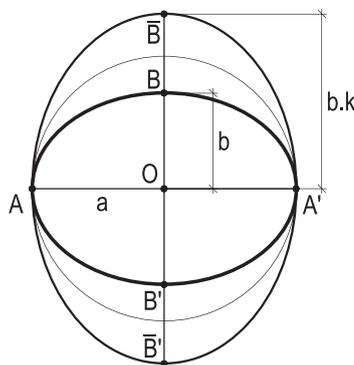


Figura 144

56 – Determinar os focos de uma elipse, conhecendo um de seus eixos e um ponto corrente P .

Resolução: Basta construir sua circunferência principal, se o eixo dado for o maior (Figura 145), ou a auxiliar, se for o menor (Figura 146), para, com a construção detalhada no número 48, obter a medida do segundo eixo e , então, os focos F e F' .

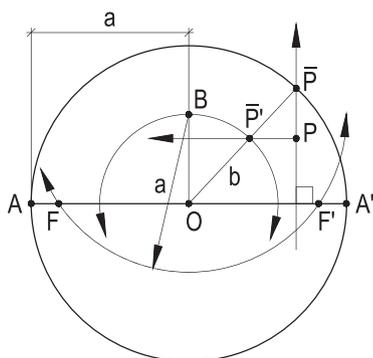


Figura 145

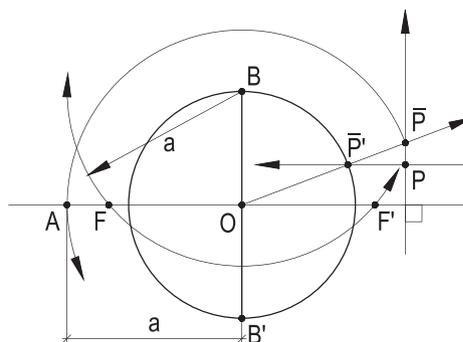


Figura 146

CAPÍTULO III

ELIPSE COMO AFIM ORTOGONAL DA CIRCUNFERÊNCIA

61 – Afinidade espacial

Dados dois planos quaisquer, afinidade espacial é a transformação de pontos de um deles para o outro através de retas paralelas entre si, mas não paralelas a quaisquer dos dois planos.

Assim, considerando dois planos (α) e (β) secantes e uma reta (d) não paralela a nenhum deles, observa-se que toda reta paralela a (d) faz associar dois pontos, como (A) e (\bar{A}) , ou (B) e (\bar{B}) , na Figura 147, traços dessas paralelas com esses dois planos.

Essa transformação dos pontos de (α) em pontos de (β) , ou reciprocamente, de modo tal que pares de pontos correspondentes (um em cada plano) pertençam sempre a retas paralelas a (d) denomina-se afinidade espacial.

Observemos ainda que a transformada de uma reta genérica (r) de (α) é outra reta (\bar{r}) , de (β) , e que essas duas retas concorrem, necessariamente, sobre a interseção (e) dos planos (α) e (β) (Figura 147).

De fato, (\bar{r}) é a interseção de (β) com o plano (γ) pertencente a (r) e paralelo a (d) . Assim, (r) e (\bar{r}) , sendo coplanares e não paralelas, possuem um ponto comum. E esse ponto $(J) \equiv (\bar{J})$, por pertencer a (α) e a (β) , deve estar situado sobre a reta (e) , interseção de (α) e (β) .

A afinidade espacial é, pois, a transformação pontual que a cada ponto de (α) faz corresponder um ponto de (β) , de modo tal que pares de pontos correspondentes pertençam a retas paralelas e que pares de retas correspondentes concorram sobre a interseção dos planos (α) e (β) ou sejam paralelas entre si.

Os elementos correspondentes, como os pontos (A) e (\bar{A}) e as retas (r) e (\bar{r}) , são denominados afins, a reta (e) , interseção de (α) e (β) , e a direção (d) , fixa, escolhida, são respectivamente designadas eixo e direção de afinidade.

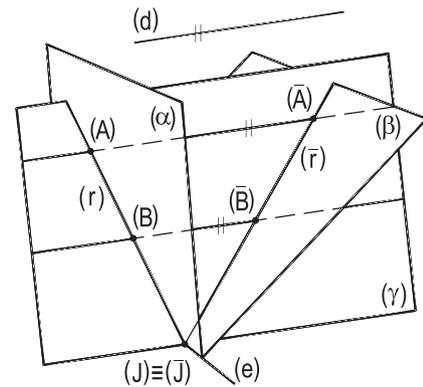


Figura 147

62 – Observações

1 – As pertinências dos pontos, as concorrências e os paralelismos das retas se conservam nas afinidades, assim como as divisões proporcionais, tudo assegurado pelo paralelismo das retas que associam pares de pontos afins.

2 – No caso particular em que os dois planos considerados (α) e (β) são paralelos, a afinidade converte-se em translação, segundo a direção (d) fixada (Figura 148).

E, naturalmente, esta transformação proporcionaliza uma figura (\bar{F}) igual à original (F) (Figura 148). Entende-se, neste caso, que o eixo de afinidade foi rejeitado ao infinito.

3 – Quando a direção (d) da afinidade é perpendicular a um dos planos, (β) na Figura 149, a afinidade resulta numa projeção ortogonal sobre este plano.

A figura (\bar{A})(\bar{B})(\bar{C}), transformada de outra (A)(B)(C), do plano (α), tem, então, perímetro e área menores que as daquela.

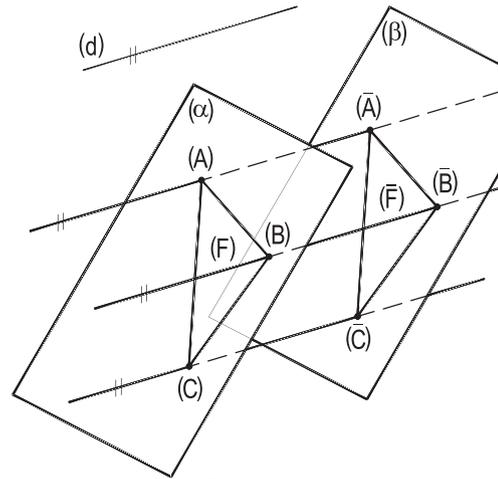


Figura 148

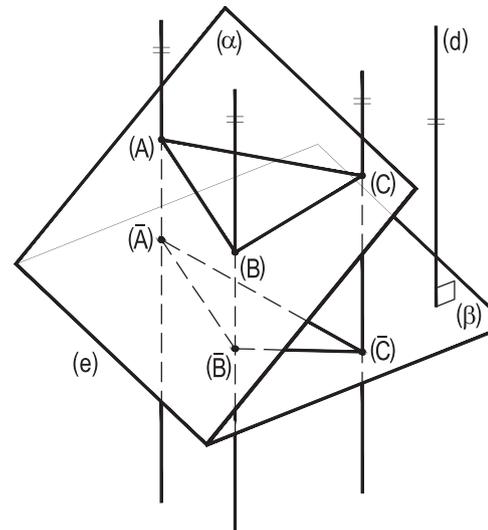


Figura 149

63 – Afinidade plana

Consideremos um sistema de afinidade espacial e efetuemos sua projeção cilíndrica sobre um plano (π) genérico (Figura 150).

Tal projeção pode ser ortogonal ou oblíqua, indiferentemente.

Porque o paralelismo dos raios da afinidade espacial e a concorrência das retas afins sobre o eixo se conservam na projeção, obtém-se uma transformação pontual plana com as mesmas características da afinidade espacial. Essa transformação é denominada afinidade plana ou, simplesmente, afinidade.

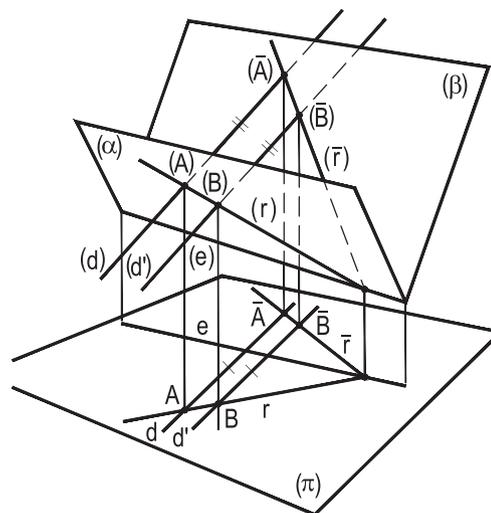


Figura 150

64 – Afinidades ortogonal e oblíqua

Diz-se, assim, que duas figuras pertencentes a um plano são afins quando se correspondem ponto a ponto e reta a reta de modo tal que pares de pontos correspondentes pertençam a retas paralelas e pares de retas correspondentes concorram sobre uma reta fixa ou sejam paralelas.

Conforme a direção d e o eixo e de afinidade sejam perpendiculares (Figura 151) ou oblíquos (Figura 152), a afinidade diz-se, respectivamente, ortogonal ou oblíqua.

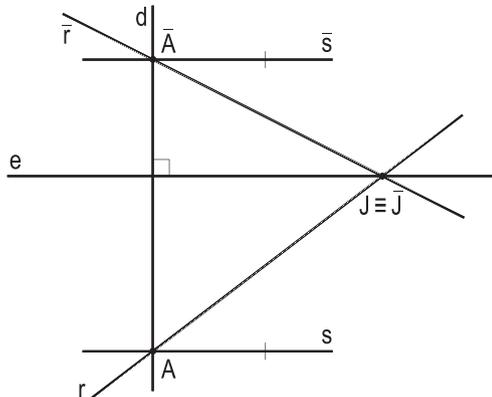


Figura 151

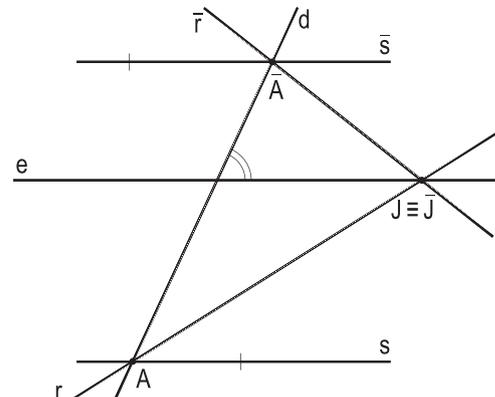


Figura 152

65 – Observações

1 – Um sistema de afinidade fica precisamente determinado pelo conhecimento do eixo (e) e de um par de pontos afins (A e \bar{A}).

De fato, a partir desses dados, para obter o afim de um ponto qualquer B , basta traçar a reta BA e construir sua afim (que passará por \bar{A} e pelo ponto $J \equiv \bar{J}$ em que BA encontra o eixo). O ponto procurado pertencerá à reta $J\bar{A}$ e à paralela a $A\bar{A}$ (direção de afinidade) traçada por B (Figura 153).

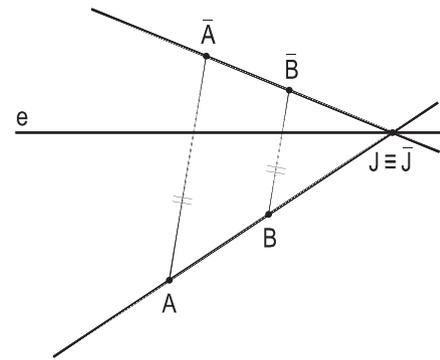


Figura 153

E, com construção igual, é possível levar qualquer figura de um sistema ao outro.

2 – Dadas duas curvas afins, a reta afim de uma tangente a uma delas é tangente à outra e os pontos de contato são afins (Figura 154).

De fato, essas duas tangentes são as posições limites ocupadas por duas secantes afins às duas curvas, como, na Figura 154, as secantes afins AB e $\bar{A}\bar{B}$.

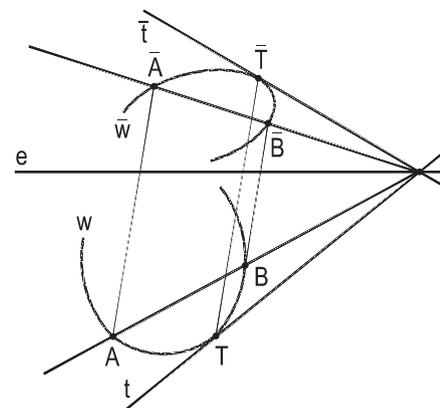


Figura 154

3 – De um modo mais geral, dadas duas curvas tangentes a e b (Figura 155), suas transformadas \bar{a} e \bar{b} , mediante uma afinidade qualquer, são outras duas curvas tangentes. E os pontos T e \bar{T} de contato são afins.

Assim, as tangentes comuns t e \bar{t} (Figura 155), a cada par de curvas afins tangentes, são afins, cortando-se, então, num ponto $J \equiv \bar{J}$ do eixo e .

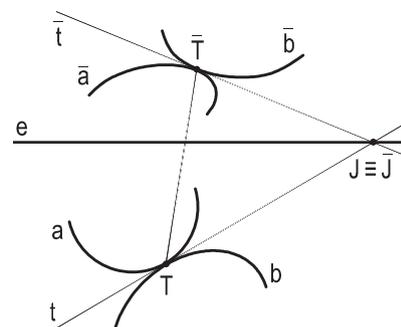


Figura 155

66 – Teorema

Em toda afinidade ortogonal plana, a razão entre as distâncias de pares de pontos afins ao eixo é constante.

Demonstração: Consideremos uma transformação por afinidade ortogonal entre dois sistemas de pontos A, B, C, D, \dots e $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \bar{D}, \dots$ (Figura 156). Os triângulos semelhantes $J\bar{A}\bar{A}$ e $J\bar{B}\bar{B}$, $I\bar{B}\bar{B}$ e $I\bar{C}\bar{C}$, $L\bar{C}\bar{C}$ e $L\bar{D}\bar{D}$, etc. permitem escrever:

$$\frac{1\bar{A}}{1A} = \frac{2\bar{B}}{2B}, \frac{2\bar{B}}{2B} = \frac{3\bar{C}}{3C}, \frac{3\bar{C}}{3C} = \frac{4\bar{D}}{4D}, \text{ etc.}$$

Ou seja:

$$\frac{1\bar{A}}{1A} = \frac{2\bar{B}}{2B} = \frac{3\bar{C}}{3C} = \frac{4\bar{D}}{4D} \dots = k, \text{ razão constante,}$$

o que prova o teorema.

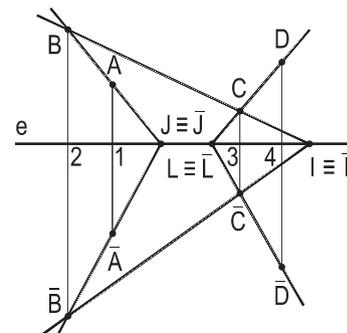


Figura 156

67 – Observações

1 – Essa razão constante k (número 66) é denominada razão da afinidade considerada.

2 – A transformada por afinidade ortogonal de uma circunferência, sendo o eixo da afinidade a reta suporte de um dos diâmetros da circunferência, é uma elipse.

Porque a transformação implica em multiplicar as ordenadas dos pontos da circunferência por uma constante. E, nessas condições, a figura transformada da circunferência é uma elipse (número 47).

Conforme a transformação faça diminuir ou aumentar as distâncias dos pontos ao eixo, o eixo da afinidade servirá de suporte, respectivamente, ao eixo maior (Figura 157) ou ao menor (Figura 158) da elipse obtida.

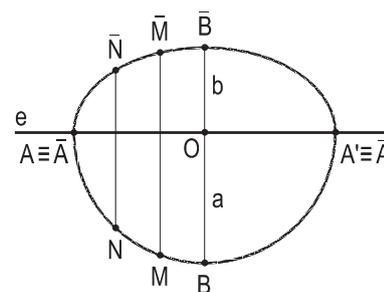


Figura 157

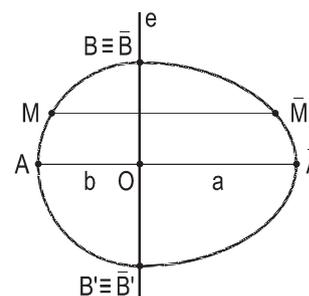


Figura 158

3 – Então, toda elipse pode ser considerada como transformada por afinidade ortogonal de sua circunferência principal (Figura 157) ou de sua circunferência auxiliar (Figura 158), funcionando como eixos, nessas afinidades, respectivamente, o eixo maior AA' ou o menor BB' da elipse. E, naturalmente, as razões dessas afinidades são iguais às existentes entre os eixos da elipse.

4 – Assim, desde que se possua dados bastantes para aplicá-la, a transformação por afinidade ortogonal de uma elipse numa circunferência permite, de um modo geral, resolver um grande número de problemas da elipse.

5 – O método geral que se emprega, para resolver problemas com elipses, consiste em transformar todos os dados, mediante a afinidade escolhida, e resolver, no sistema da circunferência, problema correspondente ao proposto, retornando ao sistema da elipse, apenas a solução.

68 – Determinação do segundo eixo de uma elipse dada por um eixo e por um ponto corrente M

Sendo dados o eixo maior AA' e um ponto corrente M , constrói-se a circunferência principal, afim ortogonal da elipse dada, em relação ao eixo AA' e determina-se o ponto \bar{M} , afim de M , naturalmente pertencente àquela circunferência (Figura 159).

De posse de um par de pontos afins M e \bar{M} é possível construir um par de retas afins r e \bar{r} e, então, retornar ao sistema da elipse o ponto \bar{B} , obtendo B , um dos vértices do eixo menor pedido (Figura 159).

Se, ao contrário, é dado o eixo menor, BB' , além de um ponto corrente M , utilizando o mesmo processo, estabelece-se a afinidade ortogonal entre a elipse e sua circunferência auxiliar (Figura 160) e, pela transformação do ponto \bar{A} dessa circunferência, determina-se A , um dos vértices do eixo maior procurado.

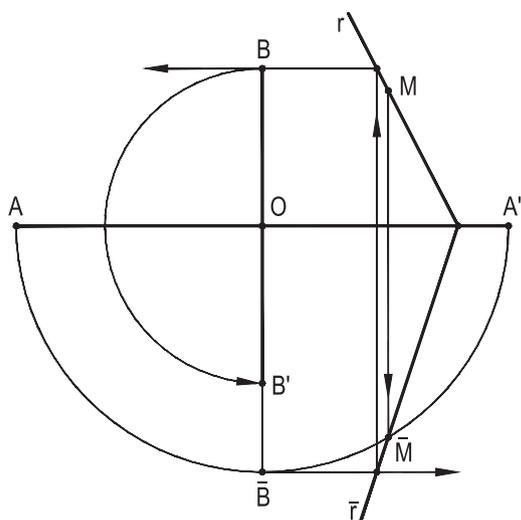


Figura 159

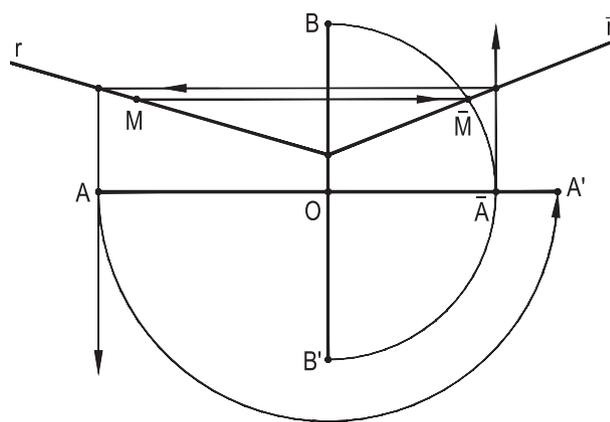


Figura 160

69 – Construção da elipse a partir dos eixos

Dados os dois eixos, para construir, por pontos, a elipse, basta traçar sua circunferência principal e estabelecer o sistema de afinidade ortogonal existente entre ela e a elipse, mediante o par de pontos afins B e \bar{B} , este na interseção do suporte do eixo menor com a circunferência principal e o par de retas afins r e \bar{r} e arbitrar um número qualquer de pontos \bar{M} da circunferência (Figura 161), os quais, transformados por aquela afinidade, fornecem pontos M da elipse.

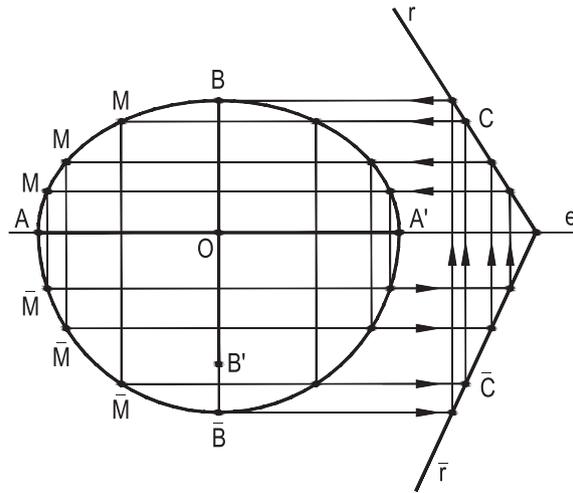


Figura 161

Naturalmente, seria equivalente operar com a circunferência auxiliar da elipse.

70 – Construção da tangente num ponto corrente M , dados o ponto M e um dos eixos da elipse

Sendo dados o eixo maior AA' e um ponto M da elipse, para a construção da tangente, em M , basta construir a circunferência principal, obter o ponto \bar{M} (sobre essa circunferência), afim de M , e traçar a tangente \bar{t} (Figura 162) à circunferência, em \bar{M} .

A reta t , afim de \bar{t} , é a tangente pedida.

Naturalmente se o eixo dado é o menor BB' (Figura 163), com o mesmo processo, mas utilizando-se a circunferência auxiliar, determina-se a tangente t à elipse, no ponto M .

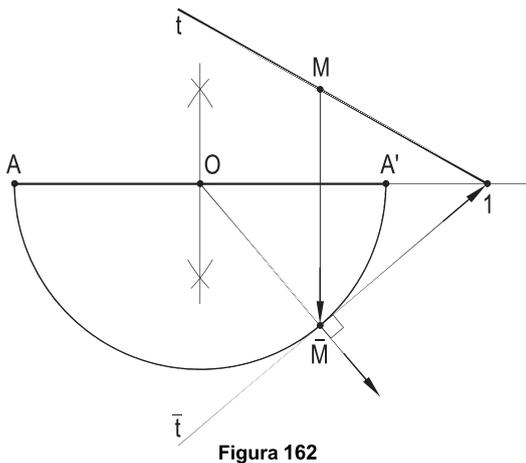


Figura 162

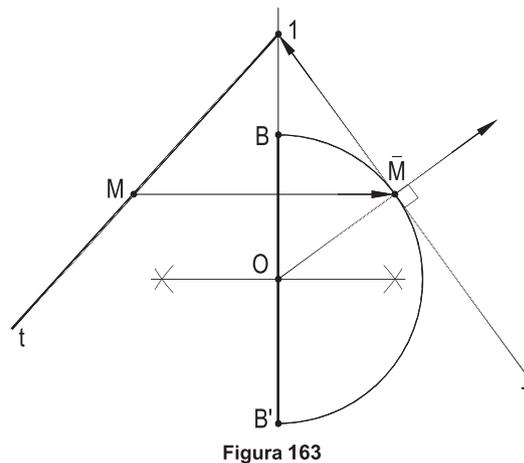


Figura 163

71 – Construção das tangentes paralelas a uma reta r , dados os dois eixos e a reta r

De posse dos dois eixos, é imediato estabelecer o sistema de afinidade ortogonal entre a elipse e sua circunferência principal. E, utilizando as paralelas (afins) ao eixo, traçadas pelos pontos afins B e \bar{B} (Figura 164), determina-se \bar{r} , afim de r .

Constrói-se, então, uma das tangentes à circunferência, com a direção de \bar{r} . E para retornar essa tangente \bar{t} ao sistema da elipse, basta traçar, pelo ponto em que ela encontra o eixo, a paralela t à reta r dada (Figura 164).

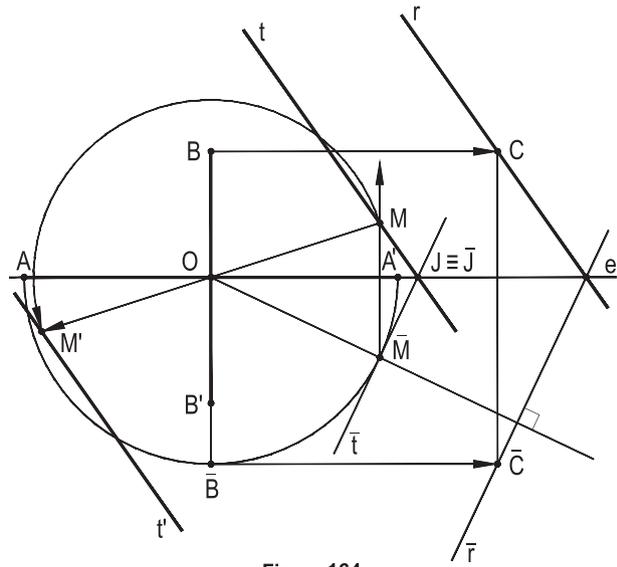


Figura 164

O ponto de contato M da tangente obtida com a elipse será, é claro, o afim de \bar{M} , contando com a circunferência afim.

A segunda tangente t' , paralela a r , pode ser obtida pelo mesmo processo ou, mais simplesmente, por simetria da tangente t em relação ao centro O da elipse (Figura 164).

72 – Construção das tangentes por um ponto J exterior, dados os dois eixos e o ponto J

Sendo dados os dois eixos, é imediato estabelecer o sistema de afinidade ortogonal entre a elipse e sua circunferência principal, bem como determinar \bar{J} , afim do ponto dado J (Figura 165).

Constrói-se, então, rigorosamente, as tangentes \bar{t} e \bar{t}' de \bar{J} à circunferência afim da elipse.

As retas t e t' , no sistema da elipse, afins de \bar{t} e de \bar{t}' (Figura 165), são as tangentes pedidas.

Os pontos de contato M e M' são obtidos diretamente a partir dos pontos \bar{M} e \bar{M}' de contato das tangentes \bar{t} e \bar{t}' com a circunferência afim da elipse.

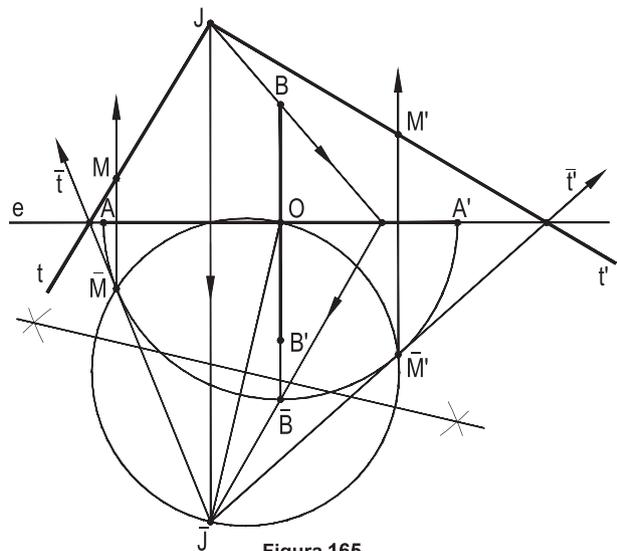


Figura 165

74 – Problemas resolvidos

57 – A reta dada t tangencia uma elipse de eixo maior dado AA' . Pede-se construir o paralelogramo $ATA'Q$, em que T seja o ponto de contato de t com a elipse.

Resolução: Com a circunferência principal, de diâmetro AA' , fica simples obter o ponto de contato \bar{T} da afim de \bar{t} , que, de t , que retornado ao ambiente da elipse, resolve o problema (Figura 167), com paralelas, que trazem Q , completando o paralelogramo $ATA'Q$ pedido.

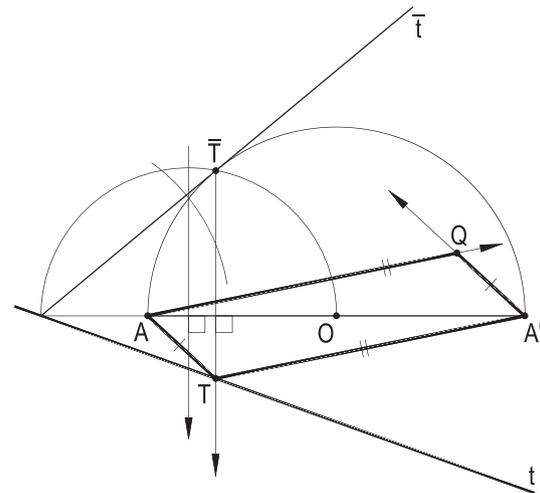


Figura 167

58 – A reta dada r corta a elipse de eixo menor dado BB' no ponto P , também dado. Pede-se completar o quadrilátero $PBB'Q$, sendo Q o segundo ponto de corte de r com a elipse.

Resolução: A afinidade entre a curva e sua circunferência auxiliar, de diâmetro BB' (Figura 168), traz o quarto vértice Q , retorno de \bar{Q} , interseção de \bar{r} , afim de r , com essa circunferência ao ambiente da elipse.

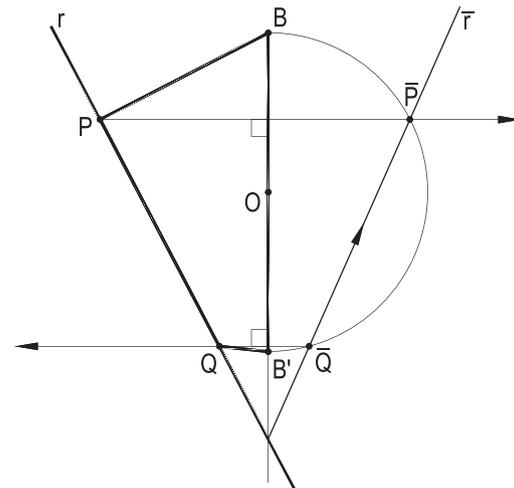


Figura 168

59 – Determinar o diâmetro da elipse dada por seus eixos AA' e BB' , que pertence à reta dada r , que passa, naturalmente, pelo centro O da curva.

Resolução: Estabelecida a afinidade da elipse com sua circunferência principal e obtida a reta \bar{r} afim de r , vem seu corte \bar{M} e, no retorno ao ambiente da elipse, seu afim M (Figura 169), proporcionando, por simetria de M em relação ao centro O , definir o diâmetro MN pedido.

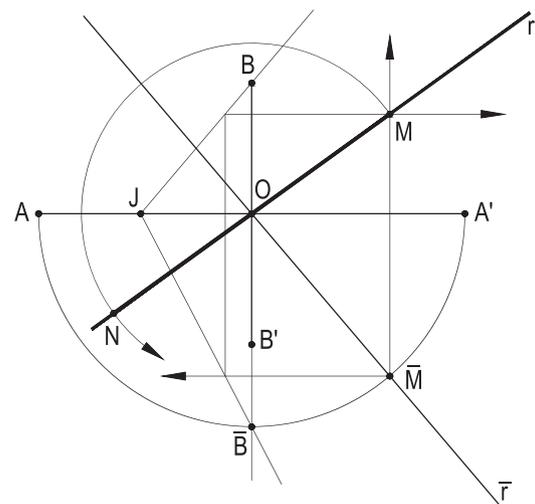


Figura 169

60 – Construir o paralelogramo circunscrito a uma elipse de eixo maior AA' dado, conhecendo a reta t , suporte de um de seus lados, sabendo que outros dois são tangentes à curva em A e em A' e determinar o eixo menor BB' .

Resolução: Com a circunferência principal, afim da elipse, e com a tangente \bar{t} a ela, afim de t , obtém-se o ponto de contato T de t , com a elipse e , por simetria em relação ao centro O , o suporte do lado oposto ZW (Figura 170), completado o paralelogramo pedido $XYZW$ com as perpendiculares por A e por A' ao eixo AA' .

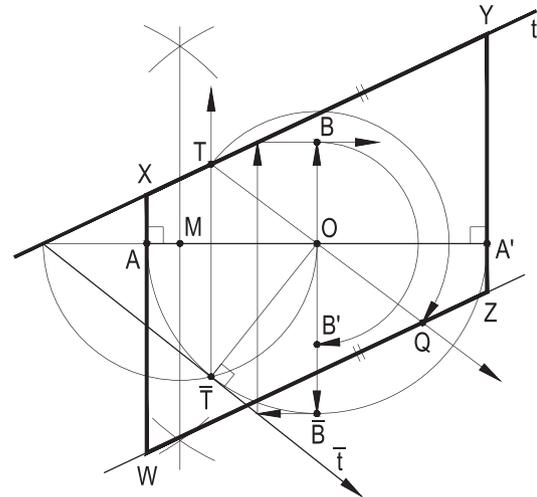


Figura 170

61 – A reta r , perpendicular à reta BB' dada, corta a elipse de eixo menor BB' num ponto T . Pede-se determiná-lo, bem como a tangente t à curva, nele, sabendo que o eixo maior mede o dobro do menor.

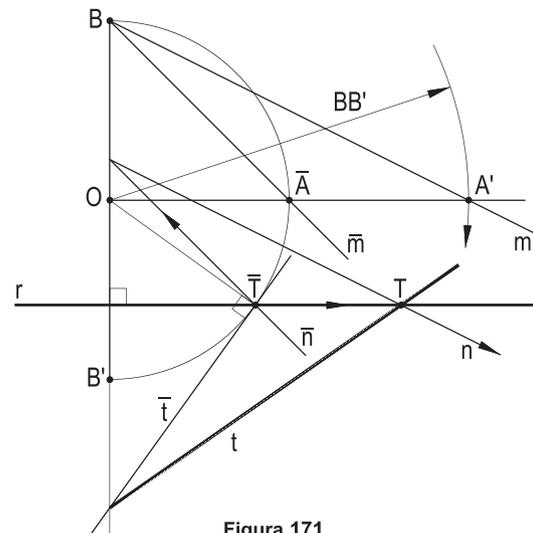


Figura 171

Resolução: O par de retas afins m e \bar{m} e suas paralelas n e \bar{n} , na afinidade com a circunferência auxiliar da elipse, solucio- nam a questão (Figura 171).

62 – Determinar o vértice S do triân- gulo equilátero SPQ , sabendo que P e Q são os traços da reta dada r com a elipse de eixos AA' e BB' dados, S situado abaixo de PQ .

Resolução: Estabelecida a afinidade da elipse com sua circunferência principal, a afim \bar{r} da reta dada r a corta nos pontos \bar{P} e \bar{Q} que, retornados ao ambiente da elipse, trazem o vértice pedido S (Figura 172).

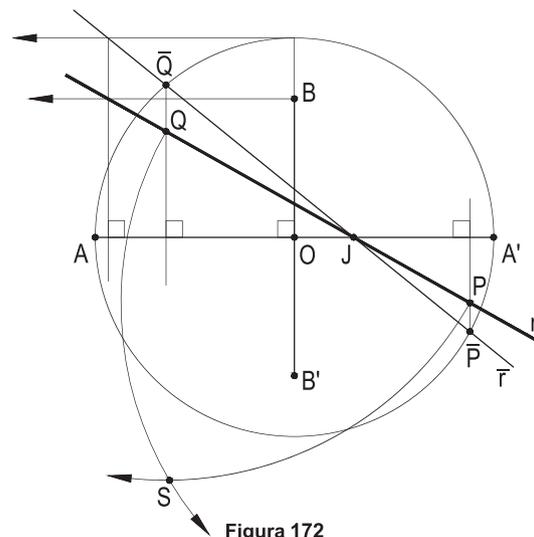


Figura 172

63 – Inscrever na elipse dada por seu eixo real AA' e por um ponto corrente P , também dado, o triângulo PQS , sabendo que todos os pontos do lado QS equidistam dos pontos dados K e L .

Resolução: O lado procurado QS há de pertencer à mediatriz m do segmento KL e a afinidade da curva com sua circunferência principal proporciona os afins \bar{m} , \bar{Q} e \bar{S} , que, retornados ao ambiente da elipse, resolvem o problema (Figura 173).

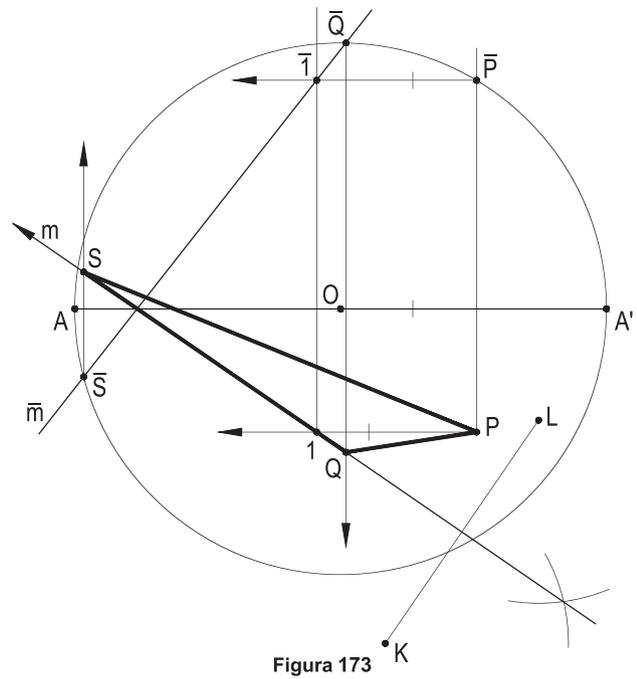


Figura 173

64 – De uma elipse são dados o eixo maior AA' e a medida b de seu semieixo menor. Dada também a reta r secante à curva, pede-se determinar os pontos de corte P e Q de r com a elipse e uma tangente t a ela, paralela a r .

Resolução: Com a aplicação, sobre a mediatriz, do eixo AA' da medida b , vem o vértice B' da elipse, com o qual se estabelece a afinidade ortogonal da elipse com sua circunferência principal, B' sendo o afim de B , e, com o auxílio do par de retas afins $B'1$ e $\bar{B}'\bar{1}$, vem \bar{r} , afim de r .

Determina-se, então, as interseções \bar{P} e \bar{Q} de \bar{r} com a circunferência principal, retornando, naturalmente sobre a reta r , os pontos pedidos P e Q .

A tangente \bar{t} , conseguida com o raio $O\bar{T}$, e seu ponto de contato \bar{T} (Figura 174), retornados ao ambiente da elipse, resolvem o problema.

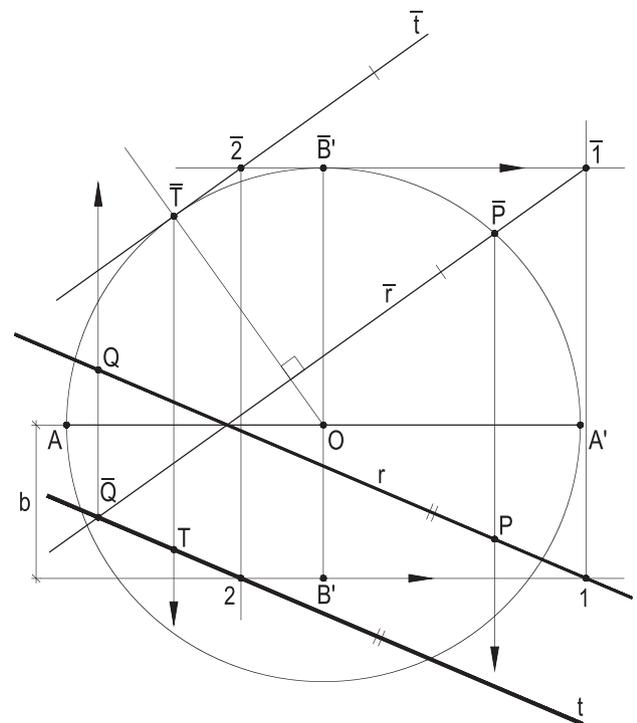


Figura 174

65 – Duas elipses homotéticas e_1 e e_2 são dadas, a primeira por seu eixo transverso $A_1A'_1$ e pela informação da pertinência de seu vértice B' à reta dada w e a segunda por seu eixo transverso $A_2A'_2$, colinear em $A_1A'_1$.

Pede-se determinar a posição do polo P dessa homotetia e construir as tangentes comuns às duas elipses.

Resolução: A interseção da mediatriz m_1 de $A_1A'_1$ com w é o vértice B' e, nessa própria mediatriz, temos o ponto \bar{B}_1 , afim de B' , para a afinidade ortogonal então estabelecida entre a primeira elipse e sua circunferência principal, que serve também à segunda elipse, por ser ela homotética da primeira, proporcionando, na mediatriz m_2 de $A_2A'_2$, o afim \bar{B}_2 de um vértice do eixo menor da segunda.

Com isso, a reta $\bar{B}_1\bar{B}_2$ (Figura 175) corta o suporte dos eixos transversos no ponto P , polo pedido da homotetia.

Sendo secantes as elipses, elas admitem apenas duas tangentes comuns, e que são construídas conforme detalhado no livro (*Construções Geométricas*, número 21), pelo traçado das tangentes do ponto O_2 , centro da segunda elipse à circunferência de centro O_1 , da primeira elipse, e raio igual à diferença $a_1 - a_2$ entre seus semieixos e , com a direção d de uma delas à tangente \bar{t}_1 , comum às duas circunferências principais, bastando, então, retorná-la ao ambiente das elipses para a tangente t comum às elipses e, por simetria em relação a $A_1A'_1$, a segunda tangente comum t' (Figura 175).

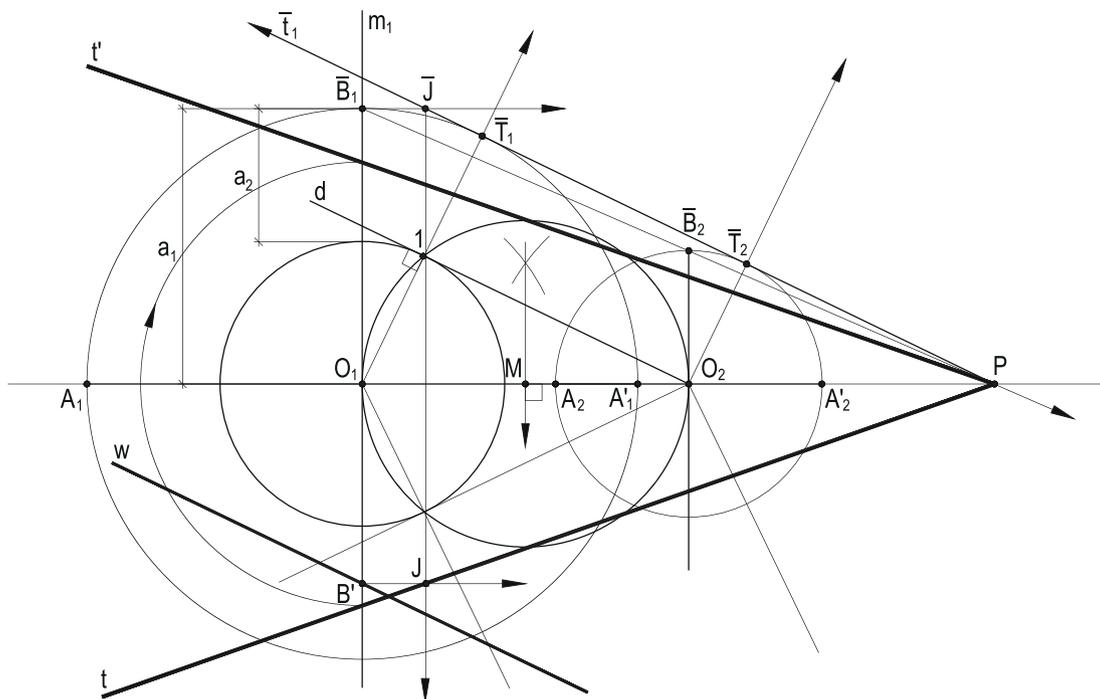


Figura 175

CAPÍTULO IV

DIÂMETROS CONJUGADOS DA ELIPSE

75 – Diâmetros da elipse

Todos os diâmetros da elipse são retilíneos.

De fato, consideremos uma das circunferências afins da elipse e o diâmetro \bar{d} , da circunferência, relativo a uma direção genérica $\bar{\Delta}$, que é uma reta: a mediatriz comum a todas as cordas com tal direção. Porque a transformação por afinidade conserva o paralelismo e a divisão proporcional e porque a figura afim de uma reta é outra reta, conclui-se que às cordas da circunferência paralelas a $\bar{\Delta}$ corresponderão cordas paralelas da elipse e, ao diâmetro \bar{d} da circunferência, um diâmetro d da elipse, necessariamente, retilíneo (Figura 176).

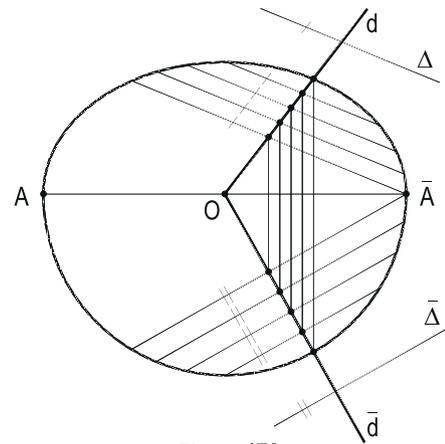


Figura 176

Vale observar que:

1 – Os diâmetros da elipse são segmentos de reta que têm por ponto médio comum o centro da curva.

2 – Os eixos real e imaginário da elipse são, respectivamente, o maior e o menor diâmetros da curva.

3 – Dois diâmetros simétricos em relação a um dos eixos da elipse são iguais. E reciprocamente.

4 – As tangentes a uma elipse, nos extremos de um diâmetro, são paralelas às cordas que definem o diâmetro (número 3).

5 – Reciprocamente, os pontos de contato de duas tangentes paralelas são os extremos do diâmetro relativo à direção das tangentes (Figura 177).

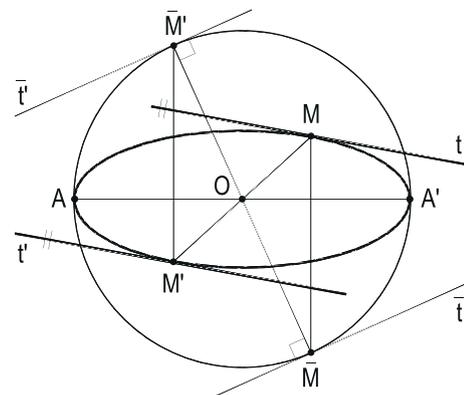


Figura 177

76 – Diâmetros conjugados da elipse

Para que dois diâmetros de uma circunferência sejam conjugados é necessário e suficiente que sejam perpendiculares entre si, pois que, só assim, cada um deles pode conter os pontos médios das cordas paralelas ao outro (número 7).

Como o paralelismo se conserva na transformação por afinidade ortogonal, conclui-se que dois diâmetros conjugados de uma elipse são afins de dois diâmetros perpendiculares da circunferência principal (Figura 178) ou da circunferência auxiliar (Figura 179) da elipse.

Assim, a todo diâmetro de uma elipse corresponde um conjugado. Toda elipse possui, então, uma infinidade de pares de diâmetros conjugados.

Os próprios eixos são, naturalmente em posição especial, dois diâmetros conjugados da elipse.

77 – Observações

1 – Sendo dados os dois eixos de uma elipse e a reta r , suporte de um diâmetro, para limitá-lo e construir seu conjugado, basta considerar a afinidade ortogonal existente entre a elipse e sua circunferência principal, obter a reta \bar{r} , afim de r , bem como o diâmetro \bar{s} , da circunferência, perpendicular a \bar{r} (Figura 180).

Retornando ao sistema da elipse os extremos daqueles dois diâmetros da circunferência, obtém-se o diâmetro MM' , da elipse, pertencente à reta dada r e seu conjugado NN' (Figura 180).

2 – Todos os paralelogramos circunscritos a uma elipse, tendo lados paralelos a dois diâmetros conjugados, ou seja, tendo por pontos de contato de seus lados com a elipse os extremos de dois diâmetros conjugados da elipse, são transformados, por afinidade ortogonal, dos quadrados circunscritos à circunferência principal afim da elipse (Figura 181).

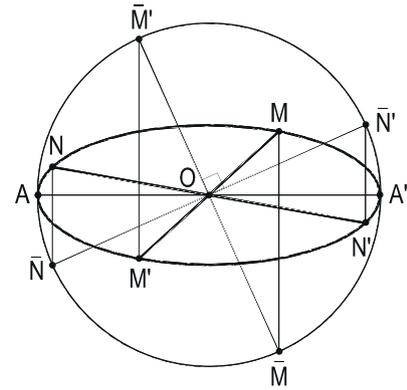


Figura 178

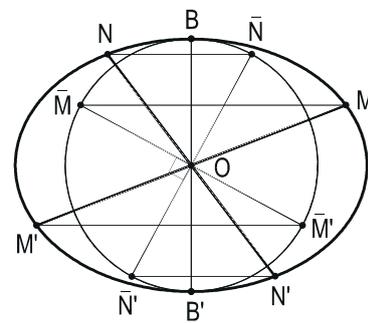


Figura 179

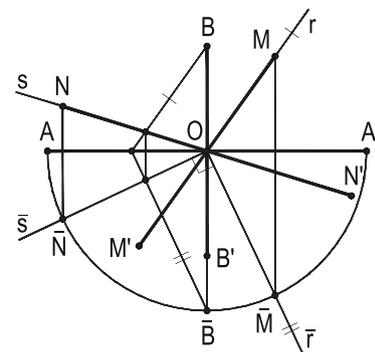


Figura 180

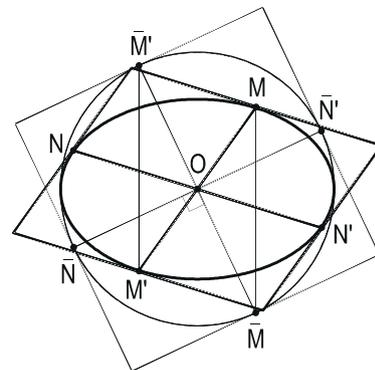


Figura 181

3 – Cabe observar, no entanto, que apenas aqueles paralelogramos são afins de quadrados. Ou seja, que um paralelogramo genérico circunscrito a uma elipse (com lados paralelos a dois diâmetros não conjugados) é afim de um losango circunscrito a uma das duas circunferências afins ortogonais da elipse.

De fato, sendo quaisquer as direções dos lados do paralelogramo circunscrito à elipse, na transformação por afinidade ortogonal, o paralelogramo circunscrito à circunferência afim da elipse terá lados oblíquos. Isto é, será um losango (Figura 182).

A afinidade entre o paralelogramo RSTU circunscrito à elipse da Figura 182 e o losango circunscrito à sua circunferência principal foi realizada com o auxílio do par de retas afins r e \bar{r} .

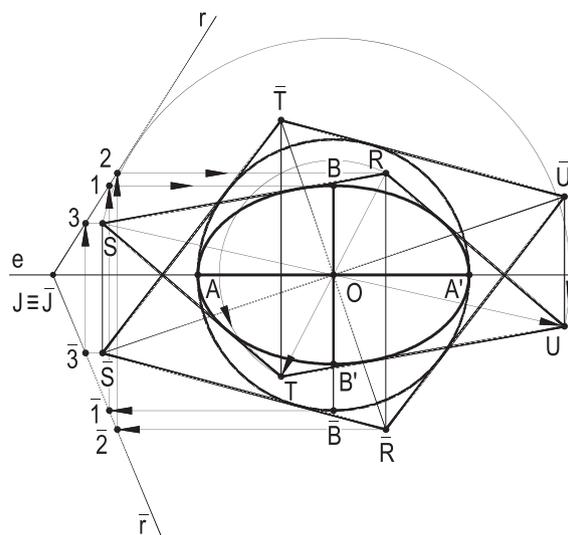


Figura 182

78 – Determinação dos eixos a partir de dois diâmetros conjugados

Análise: Consideremos, de uma elipse de eixos AA' e BB' , as circunferências principal e auxiliar, bem como dois semidiâmetros conjugados OM e ON (Figura 183), aos quais correspondem, por afinidade ortogonal, na circunferência principal, os raios perpendiculares \overline{OM} e \overline{ON} (número 76).

Completemos o retângulo $LN\overline{N}M_1$ e prolonguemos sua diagonal NM_1 , obtendo os pontos X e Y sobre os suportes dos eixos da elipse. Os triângulos $J\overline{M}\overline{M}$, $LN\overline{N}$ e $LM_1\overline{N}$ são iguais. Os dois primeiros por terem lados respectivamente perpendiculares e hipotenusas iguais; os dois últimos por terem os catetos respectivamente paralelos e a hipotenusa comum.

Assim, porque são iguais os triângulos $J\overline{M}\overline{M}$ e $LM_1\overline{N}$ e porque a hipotenusa $L\overline{N}$ pode ser obtida por uma rotação de 90° de \overline{JM} , em torno de O (Figura 183), M_1 pode também ser considerado como proveniente de uma rotação de 90° de M , em torno do centro O da elipse.

Enfim, os trapézios isósceles $OLNX$ e OLM_1Y formados (Figura 183) fornecem:

$$XN = OL = YM_1 \quad \therefore \quad XN = YM_1 = b$$

$$XM_1 = \overline{ON} = YN \quad \therefore \quad XM_1 = YN = a$$

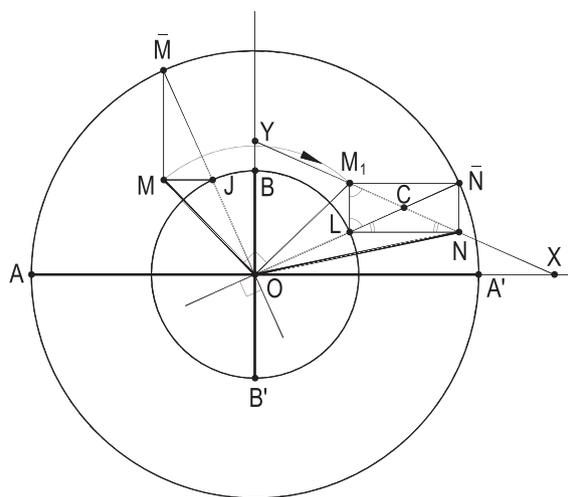


Figura 183

Do que foi visto é possível extrair dois processos clássicos para a determinação gráfica dos eixos de uma elipse, dada por dois diâmetros conjugados MM' e NN' conhecidos em grandeza e posição, como passamos a descrever:

1 – Processo de d'Ocagne

Dados os diâmetros conjugados MM' e NN' , efetua-se a rotação de um dos semidiâmetros OM de 90° em torno do centro O da elipse, até a posição OM_1 (Figura 184) e traça-se a reta NM_1 .

Com centro em C , médio do segmento M_1N , e raio CO , descreve-se uma circunferência, que corta a reta NM_1 nos pontos X e Y (Figura 184).

As retas OX e OY são os suportes dos eixos da elipse.

E como $YM_1 = b$ e $XM_1 = a$, o transporte desses valores sobre aquelas retas fornece os vértices A, A', B e B' da elipse (Figura 184).

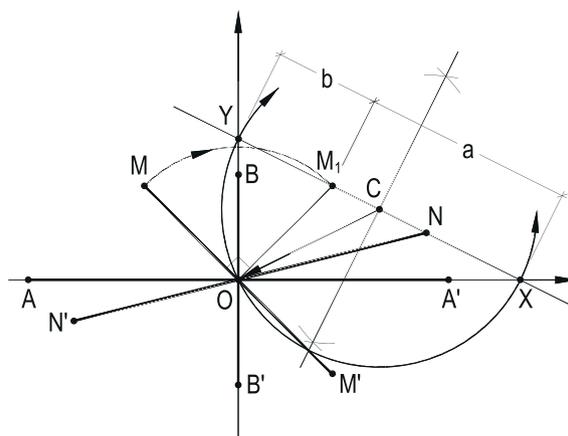


Figura 184

2 – Processo de Mannheim

Como no processo anterior, efetua-se, inicialmente, a rotação de 90° de OM em torno de O , até a posição OM_1 , une-se M_1 a N e determina-se o ponto C , médio de M_1N (Figura 185).

Traça-se, então, a circunferência de diâmetro M_1N , e, unindo seu centro C ao da elipse, constrói-se o retângulo $LN\bar{N}M_1$ (Figura 185).

Os lados desse retângulo fornecem as direções dos eixos da elipse e as distâncias dos pontos L e \bar{N} ao centro O da elipse dão os valores dos semieixos da curva.

Assim, para obter, em posição e grandeza, os eixos AA' e BB' , basta traçar, por O , as paralelas aos lados do retângulo $LN\bar{N}M_1$ e construir, com raios $O\bar{N} = a$ e $OL = b$, as circunferências principal e auxiliar da elipse (Figura 185).

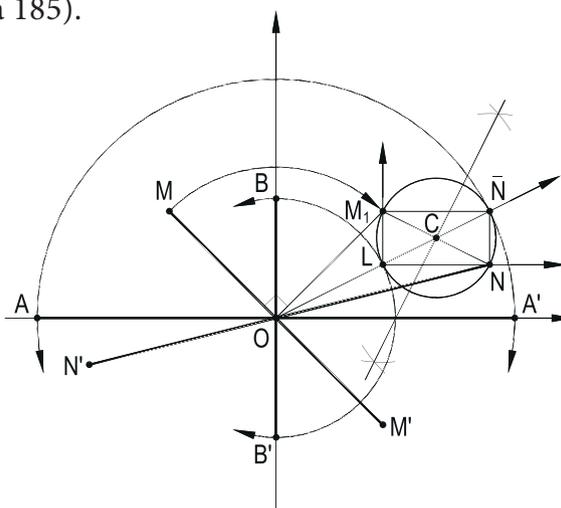


Figura 185

79 – Teoremas de Apollonius

1 – A soma dos quadrados de dois diâmetros conjugados de uma elipse é constante.

2 – Todos os paralelogramos circunscritos a uma elipse e construídos sobre dois diâmetros conjugados, isto é, tendo lados paralelos a dois diâmetros conjugados, são equivalentes.

Demonstrações:

1 – Consideremos dois semidiâmetros conjugados $OM = m$ e $ON = n$ de uma elipse e seus transformados $O\bar{M}$ e $O\bar{N}$ pela afinidade ortogonal existente entre a elipse e sua circunferência principal (Figura 186).

Porque a razão da afinidade entre essa elipse e a circunferência é $\frac{b}{a}$ (número 47), temos:

$$\frac{JM}{JM} = \frac{LN}{LN} = \frac{b}{a} \quad (1)$$

Os raios $O\bar{M}$ e $O\bar{N}$, perpendiculares (número 76), da circunferência principal acarretam a igualdade dos triângulos $OJ\bar{M}$ e $O\bar{N}L$, que permite anotar:

$$J\bar{M} = OL = r \quad \text{e} \quad OJ = L\bar{N} = s$$

A relação (1) dá, então:

$$JM = \frac{b}{a} \cdot J\bar{M} = \frac{b}{a} r \quad (2) \quad \text{e} \quad L\bar{N} = \frac{b}{a} \cdot LN = \frac{b}{a} s \quad (3)$$

Os triângulos retângulos OJM e ONL (Figura 186) fornecem:

$$m^2 = s^2 + JM^2 \quad \text{e} \quad n^2 = r^2 + LN^2 \quad \therefore \quad m^2 + n^2 = r^2 + s^2 + JM^2 + LN^2 \quad (4)$$

$$m^2 + n^2 = r^2 + s^2 + \left(\frac{b}{a}\right)^2 r^2 + \left(\frac{b}{a}\right)^2 s^2 = r^2 + s^2 + \left(\frac{b}{a}\right)^2 (r^2 + s^2) \quad (5)$$

Mas como $r^2 + s^2 = a^2$, a relação (5) se escreve:

$$m^2 + n^2 = a^2 + \left(\frac{b}{a}\right)^2 a^2 \quad \therefore \quad \boxed{m^2 + n^2 = a^2 + b^2}$$

Ou ainda:

$$4m^2 + 4n^2 = 4a^2 + 4b^2 \quad \therefore \quad \boxed{(2m)^2 + (2n)^2 = (2a)^2 + (2b)^2}$$

Assim, a soma dos quadrados de dois diâmetros conjugados quaisquer de uma elipse é constante e igual à soma dos quadrados dos seus eixos, como se queria provar.

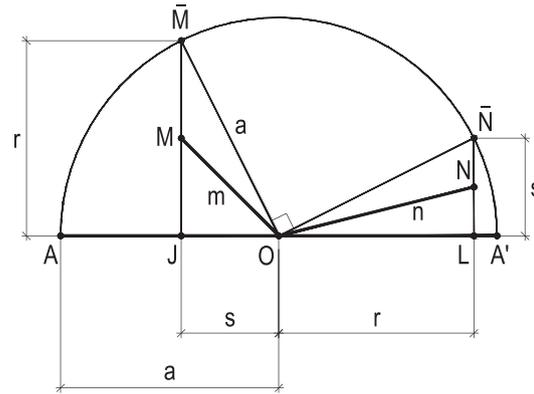


Figura 186

2 – Consideremos, agora, um paralelogramo qualquer circunscrito a uma elipse, e construído sobre dois diâmetros conjugados, bem como uma circunferência que tenha por projeção ortogonal sobre o plano do paralelogramo aquela elipse (Figura 187).

Sabe-se que, nestes termos, o paralelogramo considerado é a projeção ortogonal de um quadrado circunscrito à circunferência, sobre o plano da elipse (número 77.2).

Assim, designando por S a área do paralelogramo, por (S) a área do quadrado, por $2a$ e $2b$ os eixos da elipse e por α o ângulo formado pelos dois planos considerados, vale (*Geometria Espacial*, número 53) escrever:

$$S = (S) \cos \alpha = (2a)^2 \cos \alpha$$

$$\text{E como (número 42.4) } \cos \alpha = \frac{2b}{2a} :$$

$$S = (2a)^2 \frac{2b}{2a} \quad \therefore \quad \boxed{S = (2a) (2b)}$$

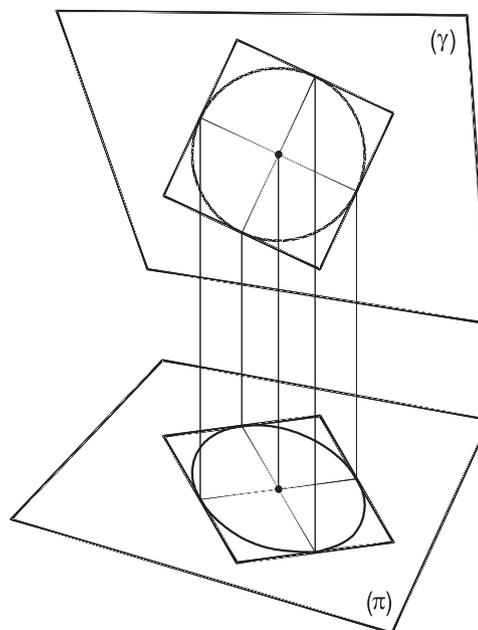


Figura 187

Assim, todos os paralelogramos circunscritos a uma elipse e construídos sobre dois diâmetros conjugados, isto é, com lados paralelos a dois diâmetros conjugados, são equivalentes entre si e equivalentes ao retângulo construído sobre seus eixos, o que demonstra a segunda parte do teorema em estudo.

80 – Corolário

Designando por $2m$ e $2n$ os comprimentos de dois diâmetros conjugados, e por $2a$ e $2b$ os eixos da elipse (Figura 188), para o cálculo dos valores das medidas desses diâmetros, assumindo-se conhecer a razão k entre eles, pode-se anotar (primeiro teorema de Apollonius):

$$\boxed{a^2 + b^2 = m^2 + n^2} \quad (1)$$

$$\text{E, por hipótese: } \boxed{m = k \cdot n} \quad (2)$$

Com isso é possível calcular os eixos $2a$ e $2b$, a partir dos valores de dois diâmetros conjugados $2m$ e $2n$ e de demais informações, caso a caso.

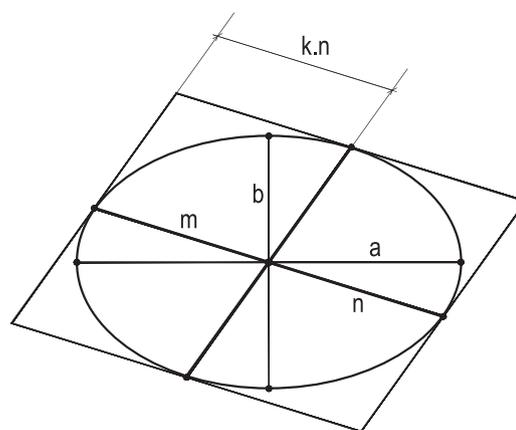


Figura 188

81 – Problemas resolvidos

66 – Dada uma elipse por seus eixos AA' e BB' e a direção w de seu diâmetro MM' , pede-se determinar esse diâmetro e seu conjugado NN' .

Resolução: Estabelecida a afinidade ortogonal entre a elipse e sua circunferência principal, a reta r , paralela a w , pelo centro O da elipse e sua afim \bar{r} entregam \bar{M} e M e, por simetria em relação a O , M' , além de seu conjugado NN' (Figura 189).

67 – Dada uma elipse por seus eixos AA' e BB' , construa seu diâmetro MM' , cujo suporte passe pelo ponto dado J .

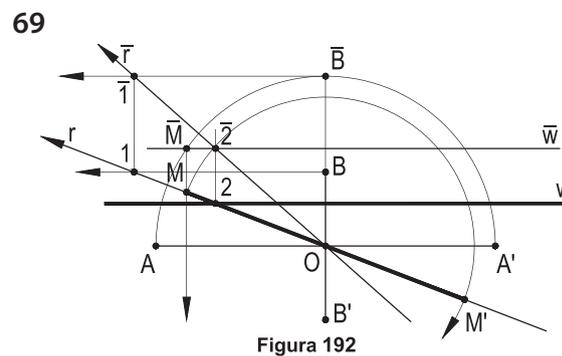
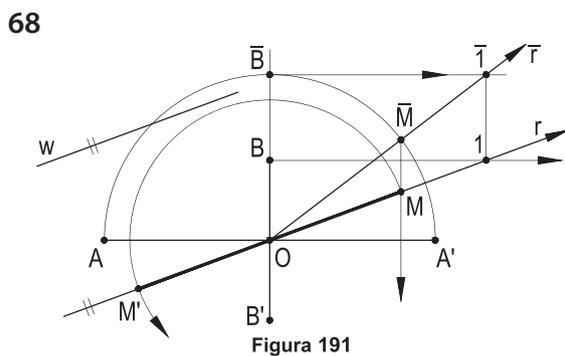
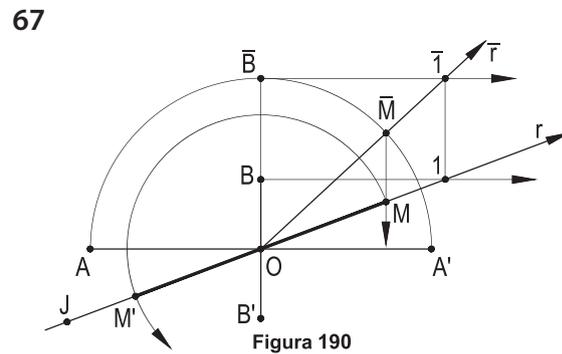
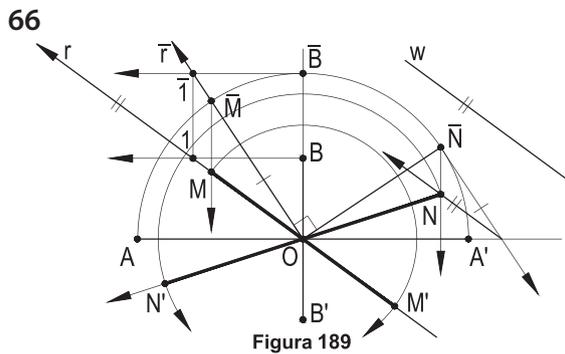
Resolução: Tal como no caso anterior a mesma afinidade resolve a questão com o raio $O\bar{M}$ afim da paralela reta r , por J , e pelo centro da curva (Figura 190).

68 – Dadas uma elipse por seus eixos AA' e BB' e a direção w de uma família de cordas da curva, pede-se construir o diâmetro MM' da elipse, conjugado ao diâmetro daquela família.

Resolução: Afinal w é a própria direção de MM' (número 77), recaindo-se no problema 66 anterior (Figura 191).

69 – Dadas uma elipse por seus eixos AA' e BB' e a secante w , paralela a AA' , pede-se determinar um diâmetro MM' que tenha um extremo M sobre w .

Resolução: A mesma afinidade anteriormente utilizada resolve o problema (Figura 192).



70 – Dada uma elipse por seus eixos AA' e BB' , pede-se determinar seu diâmetro MM' , sendo M um extremo de uma de suas cordas focais.

Resolução: Marcado o foco F , com $BF = a$, M é o traço com a curva da perpendicular a AA' por F , obtido com a afinidade da elipse com sua circunferência principal (Figura 193).

71 – Dada uma elipse por seus eixos AA' e BB' , pede-se construir seu diâmetro MM' , sabendo que seu extremo M equidista do vértice A e do centro O da curva.

Resolução: M tem que pertencer à mediatriz de AO , retornando-se assim às condições do problema anterior (Figura 194).

Nos quatro problemas seguintes, pede-se determinar os eixos de uma elipse a partir de dados referentes a dois diâmetros conjugados seus $MM' = 2m$ e $NN' = 2n$, que se cortam no centro O da curva, formando entre si um ângulo α , dados diversos desses elementos, caso a caso, pedindo-se apenas uma solução.

Resolução: Em todos os casos, determinada a posição do centro O da elipse, foi utilizado o Processo de d'Ocagne (número 78.1), ou de Mannheim (número 78.2), como segue.

72 – Dados os pontos M e N e as medidas m e n .

Resolução: Construindo o triângulo MON (Figura 195), fica imediato utilizar o Processo de d'Ocagne, obtendo-se os pontos X e Y , de passagem, respectivamente, do eixo transversal AA' e do não transversal BB' (Figura 195).

73 – Dados os pontos M e N , o valor do ângulo α formado pelos diâmetros conjugados MM' e NN' , e a reta w que passa pelo centro da curva.

Resolução: O arco capaz de α para o segmento MN , com centro no ponto obtido J , leva o problema ao anterior (Figura 196).

74 – Dados os pontos M e N e o centro O da elipse.

Resolução: Completados, por duplicação, os diâmetros MM' e NN' , basta utilizar o Processo de Mannheim (Figura 197), para obter as direções LN e LM_1 dos dois eixos e suas medidas $O\bar{N}$ e OL (Figura 197).

75 – Dados os suportes w_1 e w_2 e as medidas $2m$ e $2n$ dos diâmetros MM' e NN' .

Resolução: Basta aplicar m e n , a partir do ponto O comum a w_1 e a w_2 , para retornar às condições do problema anterior (Figura 198).

70

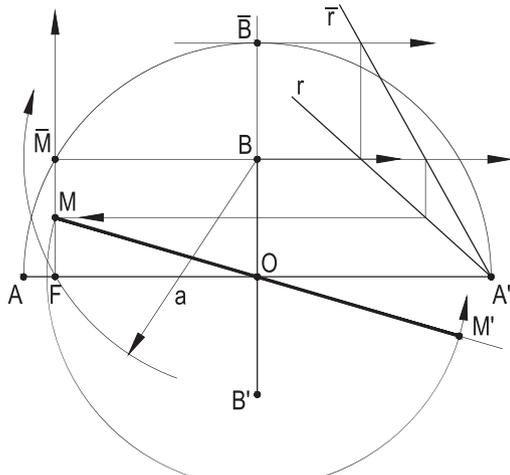


Figura 193

71

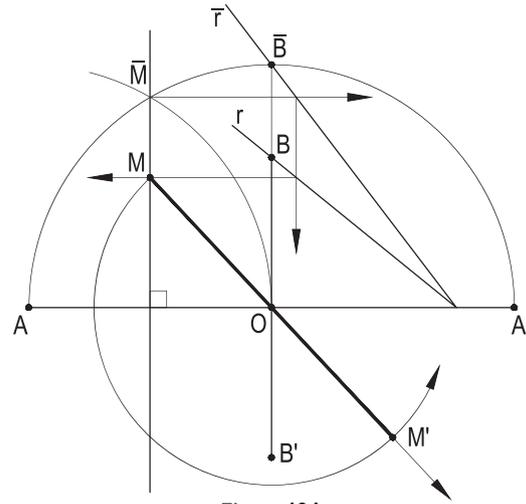


Figura 194

72

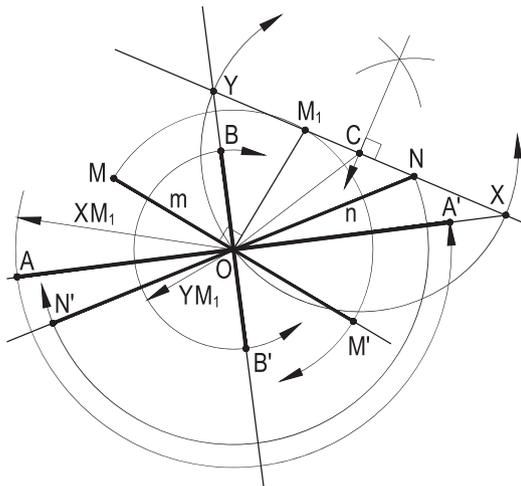


Figura 195

73

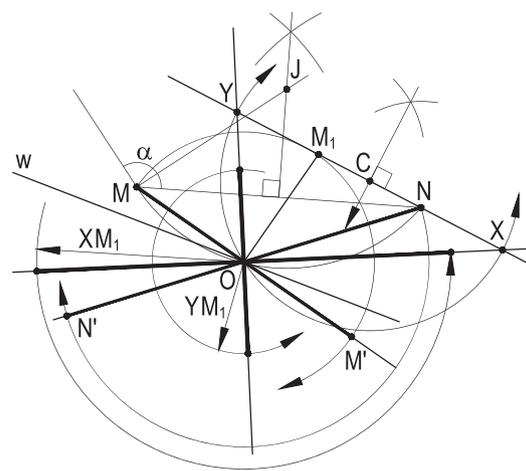


Figura 196

74

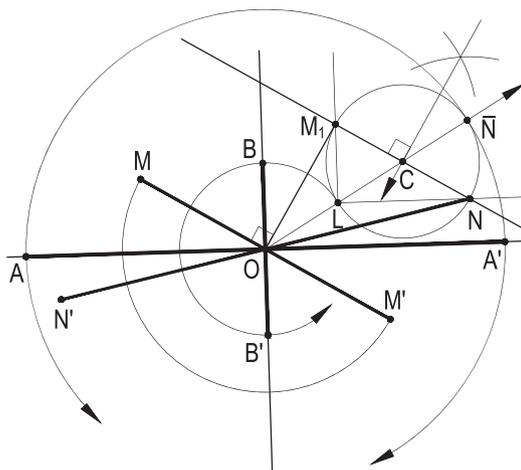


Figura 197

75

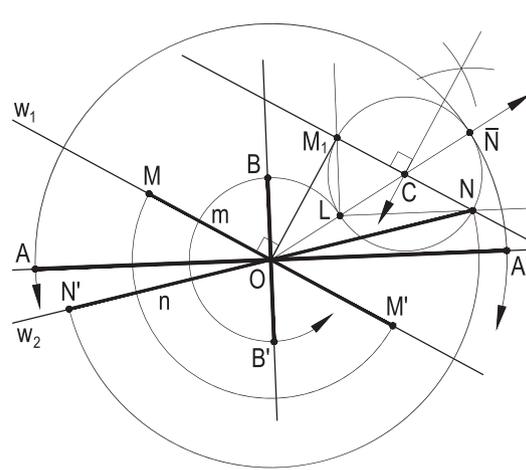


Figura 198

76 – Calcular os eixos de uma elipse, dadas as medidas $2m$ e $2n$ de dois de seus diâmetros conjugados, sabendo que o eixo maior mede o dobro do menor.

Resolução: Pelo primeiro teorema de Apollonius (número 79.1), temos:

$$a^2 + b^2 = m^2 + n^2 \quad \therefore \quad (2b)^2 + b^2 = m^2 + n^2 \quad \therefore \quad 5b^2 = m^2 + n^2$$

$$\therefore \quad b = \sqrt{\frac{m^2 + n^2}{5}} \quad \text{e} \quad a = 2b = 2 \cdot \sqrt{\frac{m^2 + n^2}{5}}$$

77 – Calcular a medida do eixo maior de uma elipse, conhecendo os valores 16 cm e 12 cm de dois de seus diâmetros conjugados e 10 cm de seu eixo menor.

$$\text{Resolução: } a^2 + b^2 = m^2 + n^2 \quad a^2 + 25 = 64 + 36 = 100$$

$$\therefore \quad a^2 = 75 \quad \therefore \quad a = 5\sqrt{3} \quad \therefore \quad 2a = 10\sqrt{3} \text{ cm}$$

78 – Dois diâmetros conjugados de uma elipse são iguais, medindo um valor $2m$. Peça-se determinar a razão k entre as medidas de seus eixos, a partir dos valores m e $2b$, de seu eixo menor.

$$\text{Resolução: } a^2 + b^2 = m^2 + n^2 \quad \therefore \quad (kb)^2 + b^2 = 2m^2$$

$$\therefore \quad k^2 b^2 + b^2 = 2m^2 \quad \therefore \quad (k+1)b^2 = 2m^2 \quad \therefore \quad k = \frac{2m^2}{b^2} - 1$$

79 – Calcular a excentricidade de uma elipse de eixo maior igual a $18m$, sabendo que dois de seus diâmetros conjugados medem $16m$ e $12m$.

$$\text{Resolução: } 9^2 + b^2 = 8^2 + 6^2 \quad \therefore \quad b^2 = 100 - 81 \quad \therefore \quad b = \sqrt{19}$$

$$\text{Como } a^2 = b^2 + c^2, \text{ vem} \quad 81 = 19 + c^2 \quad \therefore \quad c^2 = 62$$

$$\text{Logo } e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{62}}{8}$$

80 – Calcular a área de uma elipse de eixo menor igual a 16 cm, conhecendo as medidas 28 cm e 20 cm de dois de seus diâmetros conjugados.

$$\text{Resolução: } a^2 + 8^2 = 14^2 + 10^2 \quad \therefore \quad a^2 = 232 \quad \therefore \quad a = 2\sqrt{58} \text{ cm}$$

Assim, sua área S será (número 43)

$$S = \pi ab = 16\pi\sqrt{58} \text{ cm}^2$$

CAPÍTULO V

ELIPSE COMO AFIM OBLÍQUA DA CIRCUNFERÊNCIA

82 – Teorema

Em toda afinidade oblíqua, a razão entre os segmentos formados por dois pontos afins quaisquer e o traço com o eixo de afinidade do raio de afinidade que os contenham é constante.

Demonstração:

Consideremos uma afinidade oblíqua qualquer, de eixo e e direção d , bem como diversos pares de pontos afins, como A e \bar{A} , B e \bar{B} , C e \bar{C} , D e \bar{D} , etc. (Figura 199).

Os triângulos semelhantes $JA\bar{A}$ e $JB\bar{B}$, $IB\bar{B}$ e $IC\bar{C}$, LCC e LDD , etc. permitem escrever:

$$\frac{1A}{1\bar{A}} = \frac{2B}{2\bar{B}}, \frac{2B}{2\bar{B}} = \frac{3C}{3\bar{C}}, \frac{3C}{3\bar{C}} = \frac{4D}{4\bar{D}}, \text{ etc.,}$$

que, reunidos, fornecem:

$$\frac{1A}{1\bar{A}} = \frac{2B}{2\bar{B}} = \frac{3C}{3\bar{C}} = \frac{4D}{4\bar{D}} = \dots = k, \text{ uma constante, por atender a todos os pares de}$$

pontos afins do sistema.

Assim, em toda afinidade oblíqua, a razão entre os segmentos formados por dois pontos afins quaisquer e o traço com o eixo de afinidade do raio de afinidade que os contenham é constante. E reciprocamente, para assegurar as semelhanças em estudo.

83 – Observação

Essa razão constante k é denominada razão da afinidade oblíqua considerada.

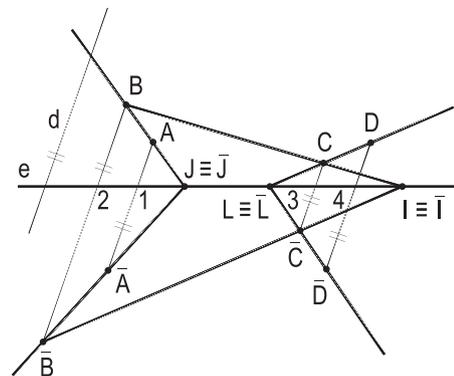


Figura 199

84 – Teorema

Todo plano secante a uma superfície cilíndrica de revolução e oblíquo às geratrizes corta a superfície segundo uma elipse.

Demonstração:

Estudemos uma superfície cilíndrica de revolução e um plano (π) , oblíquo às suas geratrizes, que a secciona segundo uma curva fechada (Figura 200), que provaremos ser uma elipse.

Para tanto, consideremos as duas superfícies esféricas, iguais, inscritas na superfície cilíndrica e tangentes ao plano (π) nos pontos (F) e (F') e tomemos um ponto genérico (M) da seção plana em estudo, bem como a geratriz $(1)(2)$, pertencente a (M) e limitada entre as duas circunferências (c) e (c') de contato da superfície cilíndrica com cada uma das duas esféricas (Figura 200).

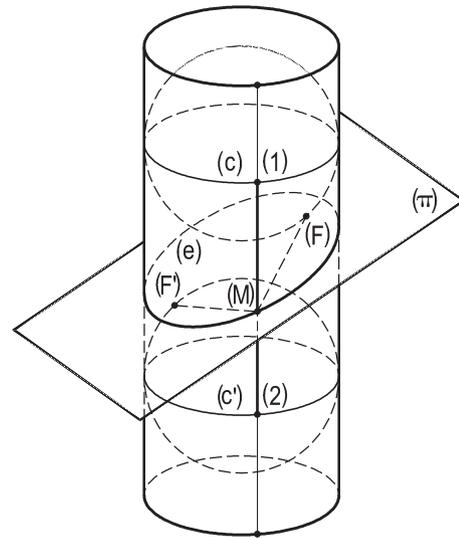


Figura 200

Porque (π) é tangente às duas superfícies esféricas consideradas e porque $(1)(2)$ é também tangente a elas, podemos (*Geometria Espacial*, número 213) anotar:

$$(M)(F) = (M)(1)$$

$$(M)(F') = (M)(2)$$

$$\text{E, por soma, } (M)(F) + (M)(F') = (M)(1) + (M)(2) = (1)(2)$$

Como o valor de $(1)(2)$ é o mesmo para todos os pontos (M) da seção, como geratrizes do cilindro limitado por (c) e por (c') , fica provado que a seção que (π) provoca na superfície cilíndrica de revolução é uma elipse de focos (F) e (F') e eixo maior igual ao segmento $(1)(2)$.

85 – Corolário

A projeção cilíndrico-oblíqua de uma circunferência sobre um plano genérico oblíquo ao seu é uma elipse.

De fato, tal o paralelismo de todas as geratrizes da superfície cilíndrica de revolução (Figura 200), a elipse (e) pode ser considerada como a projeção cilíndrico-oblíqua da circunferência (c) sobre um plano (π) oblíquo ao seu.

E, por ser qualquer a inclinação do plano (π) em relação às geratrizes da superfície cilíndrica e, portanto, genérica sua inclinação em relação ao plano da circunferência (c) , é válido o corolário.

86 – Afinidade oblíqua entre elipse e circunferência

Consideremos dois planos oblíquos (γ) e (π) , uma circunferência (c) pertencente a (γ) , com centro sobre a interseção $\gamma\pi$ dos dois planos e a elipse, projeção cilíndrico-oblíqua daquela circunferência sobre (π) , segundo uma direção genérica (d) (Figura 201). Naturalmente, se associarmos a cada ponto (P) da circunferência uma reta (PJ) de maior declive de (γ) em relação a (π) , bem como a projeção cilíndrico-oblíqua PJ desta reta sobre (π) , segundo a direção (d) , por terem lados respectivamente paralelos, serão semelhantes todos os triângulos como $J(P)P$ limitados por duas daquelas retas e a projetante correspondente (Figura 201).

Ainda mais, se efetuarmos o rebatimento de (γ) sobre (π) , em torno de $\gamma\pi$, todos os triângulos como $J\bar{P}P$, $L\bar{Q}Q$, etc., por terem lados respectivamente paralelos, serão semelhantes (Figura 202), o que acarretará uma divisão constante dos segmentos paralelos $P\bar{P}$, $Q\bar{Q}$, etc. pelos seus traços 1, 2, etc., na reta $\gamma\pi$. Por isso mesmo (número 82), conclui-se que existe afinidade oblíqua entre a elipse considerada e a circunferência que tem por diâmetro um diâmetro MM' da elipse (Figura 202).

Então, toda elipse pode ser considerada como transformada, por afinidade oblíqua, de uma circunferência que tem por diâmetro um dos diâmetros da elipse.

E mais, sendo MM' o diâmetro da elipse, escolhido como eixo da afinidade, o diâmetro NN' , da elipse, afim do diâmetro da circunferência perpendicular ao eixo é o conjugado de MM' (Figura 203). De fato, sabe-se que dois diâmetros conjugados de uma circunferência são necessariamente perpendiculares e que a conjugação dos diâmetros se conserva na transformação por afinidade.

87 – Sistema de afinidade oblíqua entre elipse e circunferência

Assim, desde que se possua dois diâmetros conjugados de uma elipse ou condições bastantes para determiná-los, em posição e grandeza, será possível estabelecer um sistema de afinidade oblíqua entre ela e a circunferência que tenha por diâmetro um dos dois diâmetros conjugados da elipse, uma vez que ao segundo diâmetro da elipse corresponderá, na circunferência, o perpendicular ao eixo da afinidade (Figura 203).

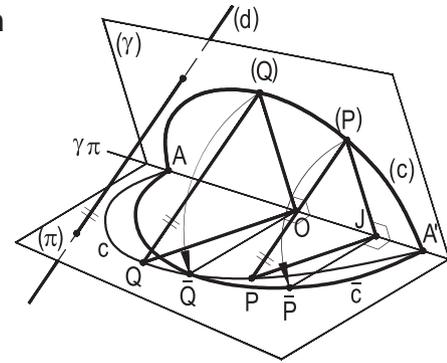


Figura 201

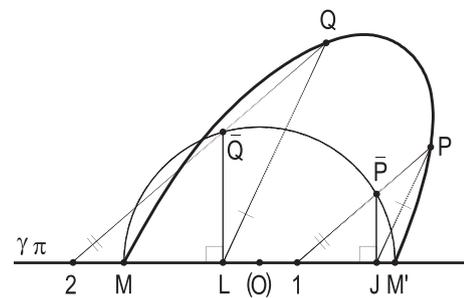


Figura 202

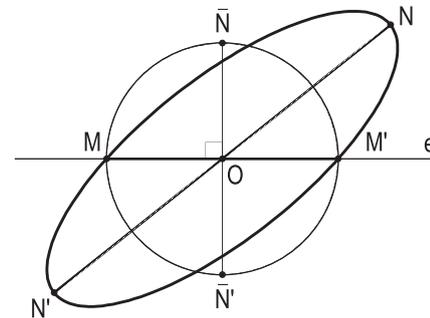


Figura 203

Conhecidos dois diâmetros conjugados MM' e NN' de uma elipse, constrói-se a circunferência de diâmetro MM' , que será afim oblíqua da elipse dada, bem como seu diâmetro $\bar{N}\bar{N}'$, perpendicular a MM' , escolhido como eixo de tal afinidade.

Completando-se o triângulo $O\bar{N}N$, encontra-se a direção d dessa afinidade. É a direção da reta $N\bar{N}$ (Figura 204).

Assim, para obter novos pontos J da elipse, basta tomar pontos \bar{J} da circunferência afim e construir triângulos $\bar{J}I J$ (Figura 204) com lados paralelos aos de $\bar{N}ON$.

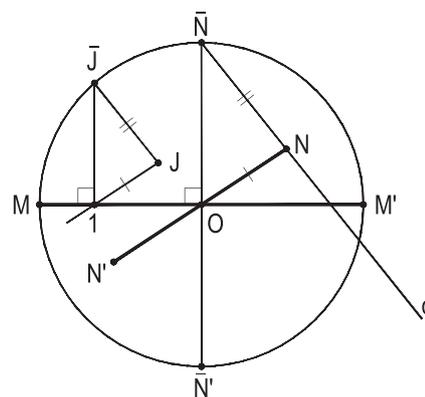


Figura 204

88 – Construção direta da elipse a partir de dois diâmetros conjugados

Dados dois diâmetros conjugados MM' e NN' de uma elipse, para construí-la diretamente, isto é, sem determinar seus eixos ou seus focos, escolhe-se um dos diâmetros (MM' , na Figura 205) para eixo da afinidade oblíqua entre ela e a circunferência de diâmetro MM' e, pela construção do raio $O\bar{N}$ perpendicular ao eixo, determina-se a direção $N\bar{N}$ da afinidade.

Basta, então, arbitrar pontos \bar{P} , \bar{Q} , etc. sobre a circunferência e retorná-los ao sistema da elipse, obtendo-se pontos correntes P , Q , etc. da cônica (Figura 205).

É evidente, ainda, que é indiferente operar com elipse e circunferência afins num mesmo semiplano, em relação ao eixo da afinidade (Figura 205), ou em semiplanos opostos (Figura 206).

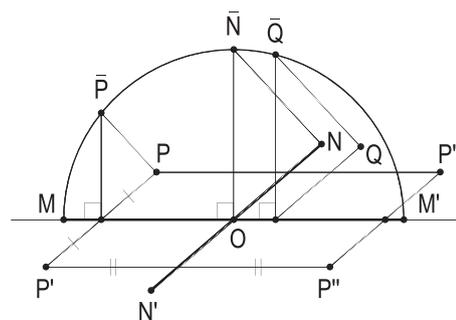


Figura 205

E que cada ponto P , corrente da elipse, proporciona outros três pontos P' , P'' e P''' (Figuras 205 e 206) da curva, pela simples construção de cordas suplementares PP' , $P'P''$, $P''P'''$ (número 5) relativas aos dois diâmetros dados.

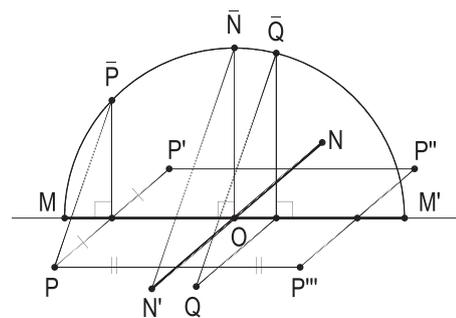


Figura 206

Quanto maior o número de pontos obtidos, maior será, naturalmente, a precisão na construção da elipse.

Da mesma forma, poderia ter sido escolhido para eixo da afinidade o outro diâmetro NN' conjugado dado.

89 – Construção da tangente num ponto corrente P, dados um diâmetro MM', o ponto P e a direção Δ do diâmetro conjugado de MM'

Traça-se a circunferência de diâmetro MM' e, com o auxílio da direção Δ de seu conjugado, constrói-se o triângulo PJP (Figura 207), o qual determina precisamente a afinidade oblíqua entre elipse e circunferência.

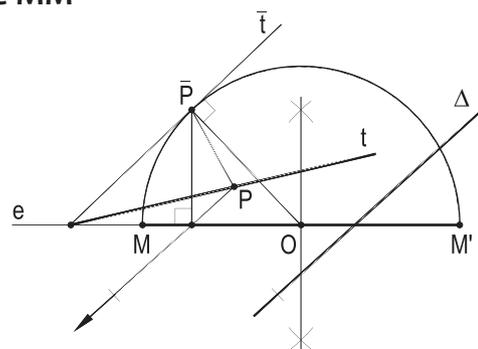


Figura 207

Assim, a tangente \bar{t} à circunferência afim da elipse, no ponto \bar{P} , retornada ao sistema da elipse, fornecerá a tangente t pedida (Figura 207).

90 – Construção das tangentes paralelas a uma reta r, dados dois diâmetros conjugados MM' e NN' e a reta r

De posse de dois diâmetros conjugados MM' e NN' é imediato estabelecer o sistema de afinidade oblíqua entre a elipse dada e a circunferência que tem por diâmetro um dos diâmetros dados, como MM', na Figura 208.

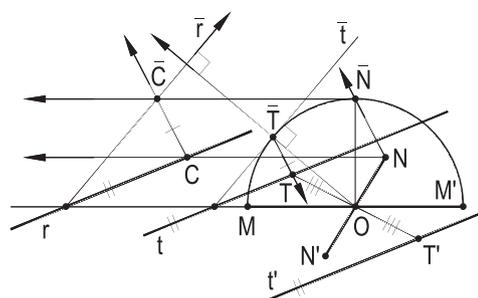


Figura 208

E, com o auxílio das retas afins paralelas ao eixo, traçadas pelos pontos N e \bar{N} , determina-se a reta \bar{r} , afim de r.

Constrói-se, então, uma das tangentes \bar{t} à circunferência, com a direção \bar{r} (Figura 208).

Retornando-se essa tangente \bar{t} ao sistema da elipse, obtém-se t , uma das tangentes pedidas à elipse. A segunda, t' , é construída por simetria de t em relação ao centro O (Figura 208).

91 – Construção das tangentes por um ponto J exterior, dados dois diâmetros conjugados MM' e NN' e o ponto J

Estabelece-se, inicialmente, o sistema de afinidade oblíqua entre a elipse e a circunferência que tem por diâmetro um dos conjugados dados, como MM', na Figura 209.

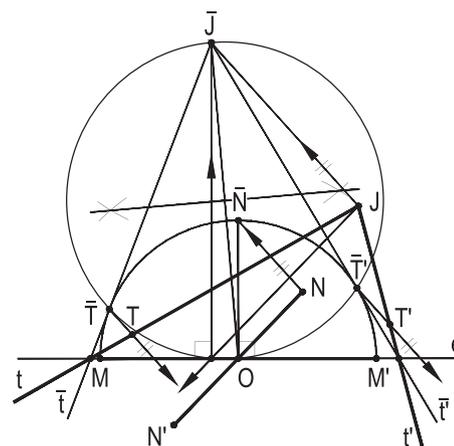


Figura 209

Determina-se, a seguir, o ponto \bar{J} , afim de J, bem como as tangentes \bar{t} e \bar{t}' de \bar{J} à circunferência afim da elipse (Figura 209).

Basta, então, retornar \bar{t} e \bar{t}' ao sistema da elipse, para obter as tangentes t e t' , pedidas, bem como seus respectivos pontos de contato T e T' com a elipse.

92 – Determinação rigorosa dos pontos de interseção de uma reta r com uma elipse, dados dois diâmetros conjugados MM' e NN' da elipse e a reta r

Estabelece-se, inicialmente, o sistema de afinidade oblíqua entre a elipse e a circunferência que tem por diâmetro um dos dois conjugados dados, como MM' , na Figura 210.

Determina-se, então, a reta \bar{r} , afim de r , bem como os pontos \bar{P} e \bar{Q} , segundo os quais \bar{r} corta a circunferência afim da elipse.

Pelo retorno de \bar{P} e \bar{Q} ao sistema da elipse são obtidos os pontos P e Q , comuns à reta e à elipse dadas (Figura 210).

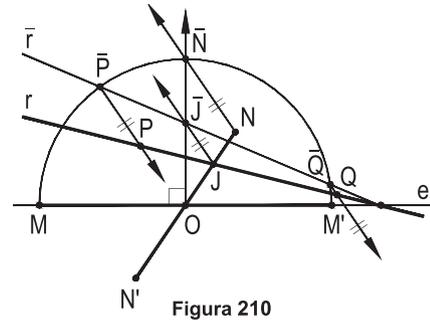


Figura 210

93 – Construção da circunferência por pontos

Análise: Consideremos uma circunferência e um quadrado a ela circunscrito e apliquemos, sobre o lado QR e sobre o raio que lhe é perpendicular, dois segmentos QJ e OL iguais (Figura 211).

O ponto P , comum às retas AL e BJ , pertence à circunferência considerada.

De fato, os triângulos retângulos AOL e BQJ , iguais, tendo catetos respectivamente perpendiculares, têm, também, hipotenusas perpendiculares (Figura 211).

E, sendo reto o ângulo \widehat{APB} , seu vértice P é necessariamente pertencente à circunferência de diâmetro AB .

Construção: Resulta, imediatamente, dessa propriedade, um processo, cujo interesse é estritamente teórico, para a construção, por pontos, de uma circunferência de diâmetro AB :

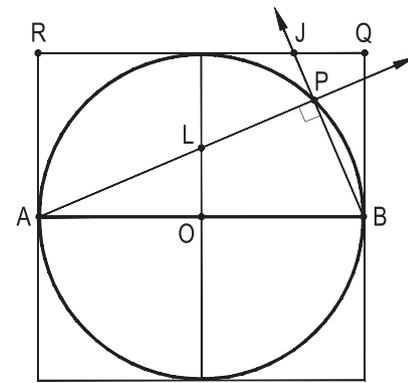


Figura 211

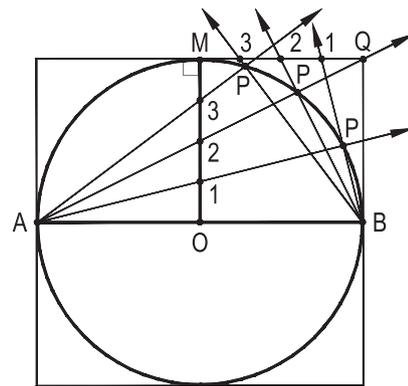


Figura 212

Constrói-se o quadrado que tem por pontos médios de dois lados opostos aqueles pontos A e B e divide-se o raio OM , perpendicular a AB , e o segmento QM (Figura 212) em um mesmo número de partes iguais.

As retas que unem A e B aos pontos de divisão correspondentes cortam-se, produzindo pontos P da circunferência (Figura 212).

94 - Aplicações à elipse

Mediante uma afinidade, ortogonal ou oblíqua, que tenha por eixo o diâmetro da circunferência considerada, transforma-se a circunferência em elipse e o quadrado em retângulo ou paralelogramo, respectivamente.

E, porque a divisão de um segmento em partes iguais se conserva em qualquer afinidade, o processo apresentado para a construção da circunferência considerada é exatamente o mesmo a ser empregado para a construção da elipse da qual são dados os dois eixos AA' e BB' (Figura 213), ou dois diâmetros conjugados MM' e NN' (Figura 214).

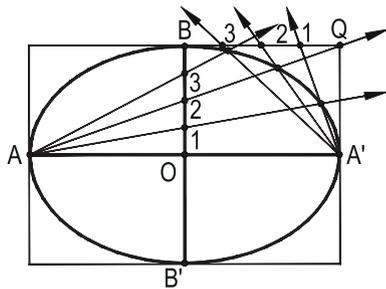


Figura 213

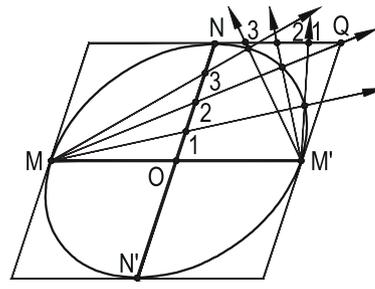


Figura 214

95 – Construção, por pontos, de uma circunferência a partir de um diâmetro e de um ponto corrente – aplicações à elipse

Análise: Consideremos um ponto M, genérico, de uma circunferência de diâmetro AB, bem como o retângulo ABQR, cujo lado QR pertença àquele ponto M, e dividamos em um mesmo número n de partes iguais os segmentos JM, QM e RM (Figura 215). As retas que unem os pontos A e B aos pontos de divisão de mesma ordem dos segmentos RM e JM (ou JM e QM), respectivamente, cortam-se, produzindo pontos P da circunferência (Figura 215).

De fato, para o triângulo retângulo AMB (Figura 215), temos:

$$JM^2 = AJ \cdot JB \quad \therefore (nz)^2 = nx \cdot ny$$

$$\therefore n^2 z^2 = n^2 xy \quad \therefore \frac{x}{z} = \frac{nz}{ny} \quad \therefore \frac{RI}{J1} = \frac{AR}{BJ}$$

relação que implica na semelhança dos triângulos retângulos ARI e BJ1.

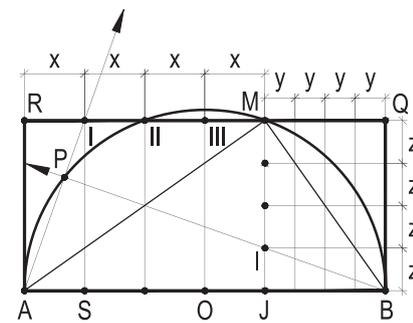


Figura 215

E, como os catetos desses triângulos retângulos semelhantes são respectivamente perpendiculares (Figura 215), suas hipotenusas AI e B1 são também perpendiculares, o que obriga a pertinência do ponto P, comum a essas retas, à circunferência considerada.

Assim, embora com interesse apenas teórico, e para embasar as construções seguintes, para traçar, por pontos, uma circunferência da qual se conheça um diâmetro AB e um ponto corrente M , basta traçar, por M , a paralela a AB , formando o retângulo $ABQR$, dividir em um mesmo número de partes iguais os segmentos MJ , MR e MQ , para, com ordenadas uniões, obter pontos P da circunferência (Figura 216).

Mediante uma afinidade, ortogonal ou oblíqua, que tenha por eixo aquele diâmetro considerado, transforma-se a circunferência em elipse e o retângulo estudado em outro retângulo ou num paralelogramo, respectivamente (Figuras 217 e 218).

E, porque a divisão de um segmento em partes iguais é propriedade afim (ortogonal ou oblíqua), para construir diretamente uma elipse, dada por um de seus eixos (o maior, AA' , na Figura 217) e por um ponto corrente M , basta completar o retângulo $AA'QR$, o lado QR pertencendo ao ponto M , dividir em um mesmo número de partes iguais os segmentos JM , QM e RM e, unindo os vértices A e A' aos pontos de divisão de mesma ordem daqueles segmentos (Figura 217), obter, por interseção dos pares de retas correspondentes, pontos da elipse.

Para construir diretamente uma elipse, da qual são dados um diâmetro NN' , um ponto corrente M e a direção d do diâmetro conjugado de NN' , basta completar o paralelogramo $NN'QR$, com lados $N'Q$ e RN paralelos àquela reta d e o lado QR pertencente ao ponto M (Figura 218) e, a partir daí, aplicar o mesmo processo acima descrito.

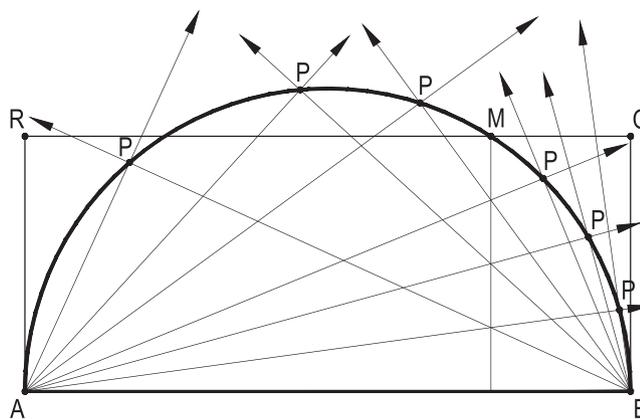


Figura 216

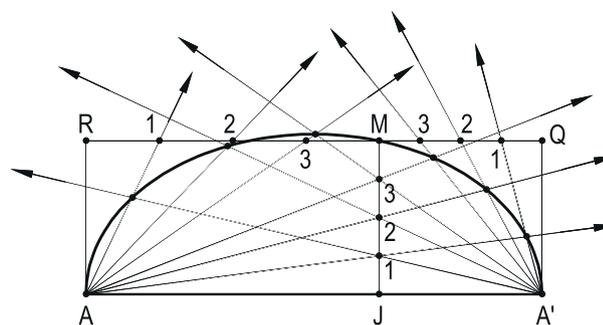


Figura 217

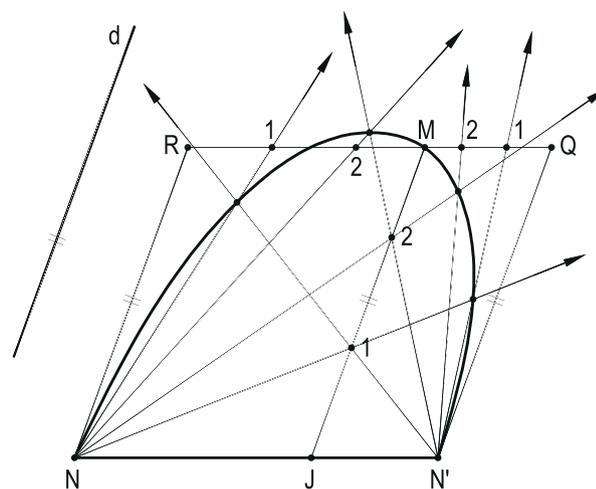


Figura 218

96 – Problemas Resolvidos

81 – Construir, por pontos, a elipse de diâmetros conjugados MM' e NN' dados.

Resolução: Usar pontos \bar{P} da circunferência de diâmetro MM' (Figura 219).

82 – Construir o triângulo JMM' inscrito na elipse de diâmetros conjugados MM' e NN' dados, sabendo que J pertence à reta dada w , paralela a NN' .

Resolução: Simples, por ser w paralela a NN' (duas soluções) (Figura 220).

83 – Dada uma elipse por dois diâmetros conjugados MM' e NN' , pede-se determinar as cordas da curva paralelas a NN' e pertencentes, cada uma, a cada ponto médio dos semi-eixos OM e OM' .

Resolução: Os triângulos $C\bar{C}X$ e $D\bar{D}Y$ resolvem a questão (Figura 221).

84 – Construir o quadrilátero convexo $MM'NX$, X pertencente à reta dada r , paralela a um, MM' , de dois diâmetros conjugados MM' e NN' , dados, de uma elipse e à curva.

Resolução: X é o traço da reta r com a elipse (Figura 222).

81

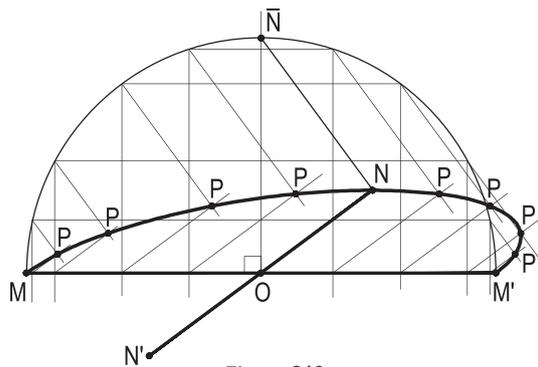


Figura 219

82

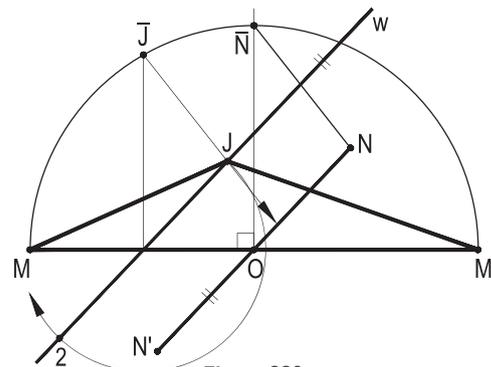


Figura 220

83

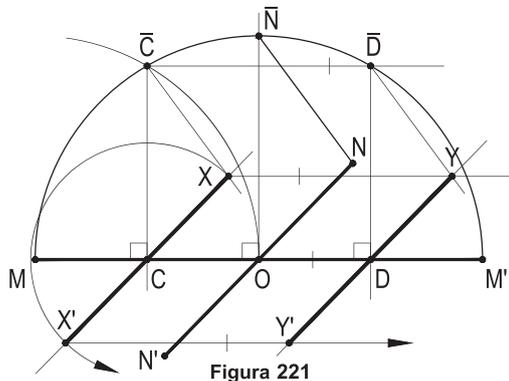


Figura 221

84

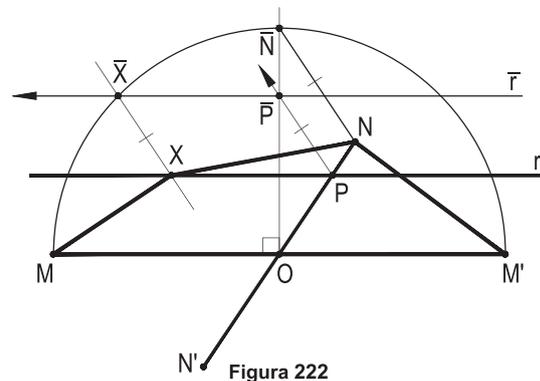


Figura 222

85 – De uma elipse de diâmetros conjugados MM' e NN' , são dados MM' e uma corda XX' a ele paralela. Pede-se determinar o ponto N .

Resolução: Com os pontos O e C , médios de MM' e XX' , a paralela, por N' , a $\bar{J}X'$ dá N (Figura 223).

86 – Dados uma reta w e o paralelogramo $PQRS$ circunscrito a uma elipse, com lados paralelos a dois diâmetros conjugados, determinar os cortes J e K de w com seus eixos.

Resolução: O processo de d'Ocagne traz os pontos X e Y , que, ligados ao centro O , proporcionam os suportes OX e OY dos eixos e , então, os pontos J e K (Figura 224).

87 – Dada uma elipse por seus eixos AA' e BB' , determine seus dois diâmetros conjugados MM' e NN' que sejam iguais entre si.

Resolução: Esses dois diâmetros devem ter por afins as diagonais do quadrado $\bar{M}'\bar{N}\bar{M}\bar{N}'$ inscrito na circunferência principal da elipse (Figura 225).

88 – Dada uma elipse por um par de diâmetros conjugados MM' e NN' , pede-se determinar os pontos J e K da curva que equidistem dos pontos dados R e S .

Resolução: Trata-se de determinar as interseções J e K da mediatriz m do segmento RS com a elipse, o que se consegue com a afim \bar{m} de m (Figura 226).

85

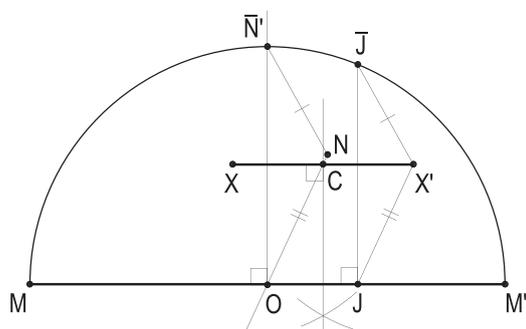


Figura 223

86

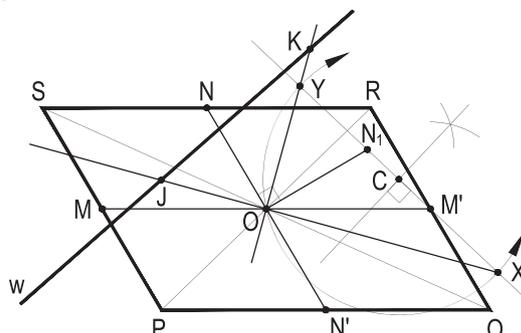


Figura 224

87

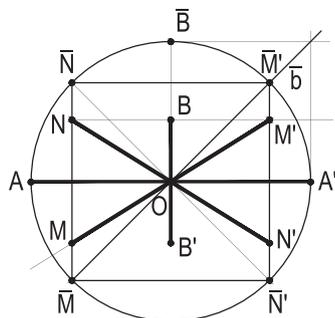


Figura 225

88

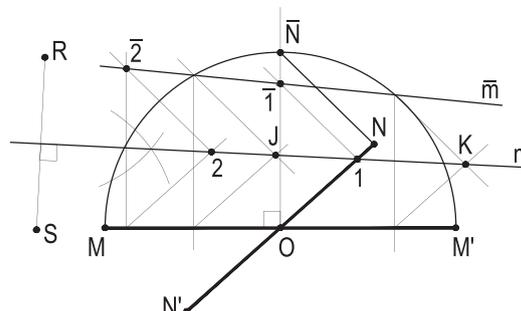


Figura 226

89 – Determinar o eixo menor BB' da elipse de eixo maior dado AA' , sabendo que ela é equivalente ao círculo (J, r) dado.

Resolução: Sendo $2b$ o valor de NN' , como $\pi ab = \pi r^2$ (número 43), r será a média geométrica entre a e b (Figura 227).

90 – Dada uma elipse por um par de diâmetros conjugados MM' e NN' , trace as tangentes à curva paralelas à reta MN .

Resolução: A afinidade com a circunferência de diâmetro MM' traz a tangente pedida t_1 , seu ponto de contato T_1 e, por simetria em relação ao centro da curva, t_2 (Figura 228).

91 – Dada uma elipse e por seus eixos AA' e BB' , considere uma rotação de 90° em torno de seu centro O , proporcionando uma segunda elipse \bar{e} , de eixos $\bar{A}\bar{A}'$ e $\bar{B}\bar{B}'$, iguais, respectivamente, aos da primeira. Pede-se determinar os pontos J de interseção das duas.

Resolução: As igualdades, dois a dois, de seus eixos implicam em que os pontos J procurados pertençam às bissetrizes b e b' dos ângulos retos formados por seus eixos (Figura 229). Estabelecida a afinidade normal, basta levar a bissetriz b à sua afim \bar{b} e obter um traço seu \bar{J} com (O, OA) para, com simetrias, obter os quatro pontos J (Figura 230).

89

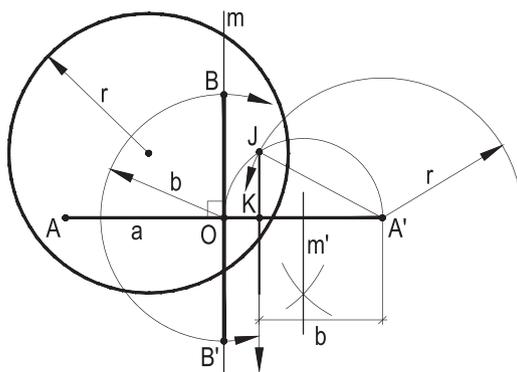


Figura 227

90

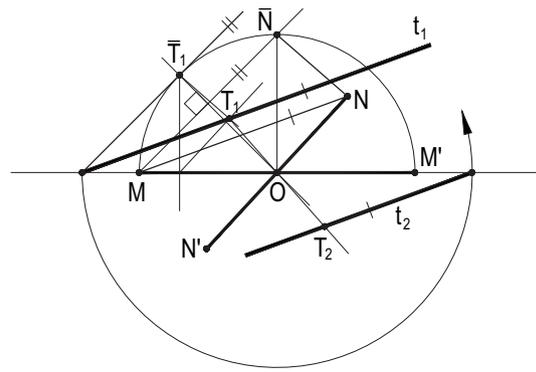


Figura 228

91

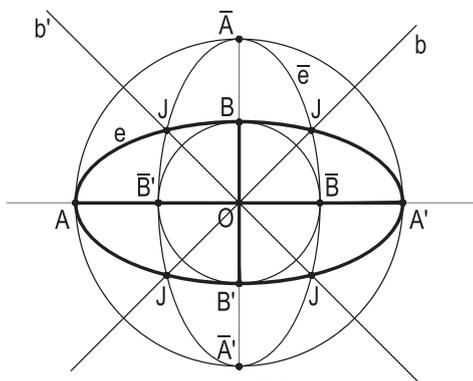


Figura 229

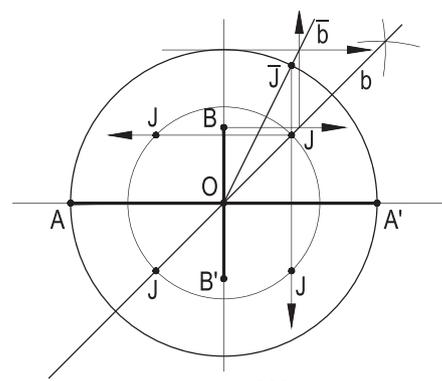


Figura 230

92 – Construir a corda EG, suplementar da corda dada EF, de uma elipse de centro dado O, sabendo que o diâmetro MM' correspondente à corda EF mede o triplo dela.

Resolução: O ponto C, médio de EF, unido a O, proporciona o suporte do diâmetro MM', de imediata construção e a corda pedida EG vem com a paralela a MM', aproveitado seu ponto médio J, pertencente ao diâmetro conjugado de MM' (Figura 231).

93 – Uma elipse é dada por seu diâmetro MM' e por um ponto corrente J. Construir o triângulo equilátero JKL, o lado JK contendo o ponto dado P, K na elipse e L abaixo de MM'.

Resolução: K é o traço da reta JP com a elipse (Figura 232).

94 – Dada uma elipse por seu diâmetro MM' e por um ponto corrente P, pede-se construir o quadrilátero KLOM, K e L pertencendo à reta dada r e à elipse, de centro O.

Resolução: K e L são os traços de r com a elipse (Figura 233).

95 – Dada uma elipse por dois diâmetros conjugados MM' e NN', pede-se construir o quadrilátero convexo MKM'L, sabendo que KL é uma corda paralela a NN', cortando MM' no ponto C, médio de MO, O sendo o centro da curva.

Resolução: K e L são os cortes de r, por C, com a elipse (Figura 234).

92

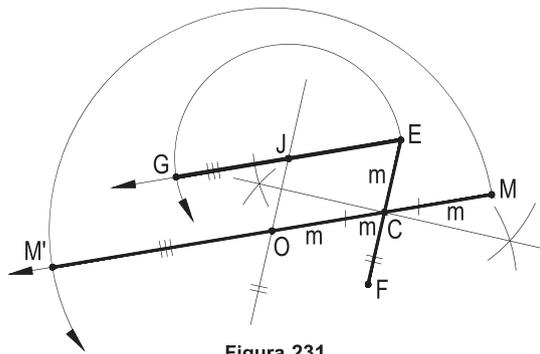


Figura 231

93

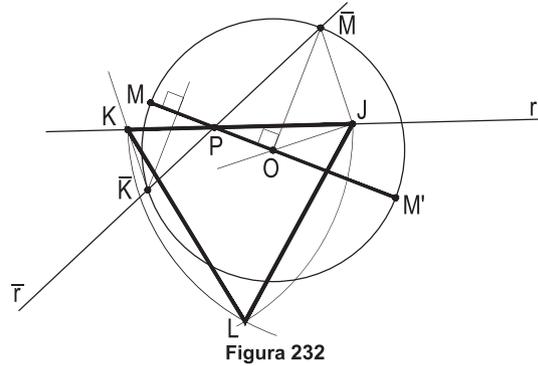


Figura 232

94

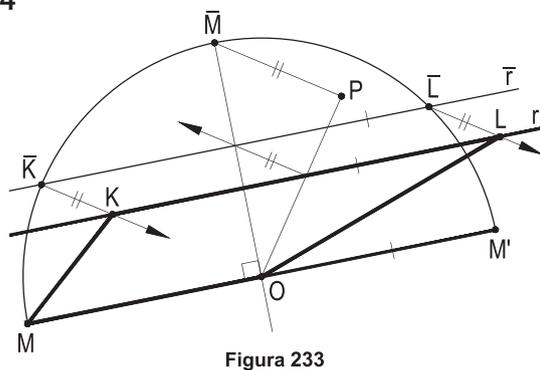


Figura 233

95

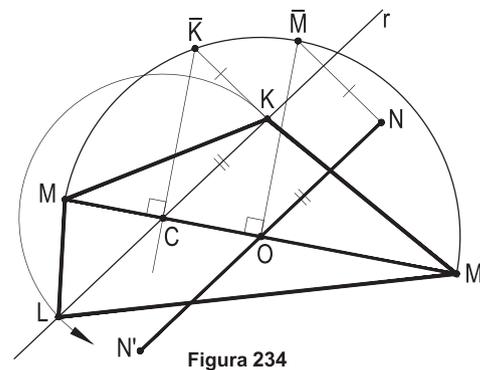


Figura 234

CAPÍTULO VI

HIPÉRBOLE

97 – Definições

Hipérbole é a curva plana cujos pontos possuem a mesma diferença de distâncias – naturalmente não nula – a dois pontos fixos de seu plano.

Os pontos fixos – F e F' , na Figura 235 – são os focos da hipérbole e a distância entre eles, a distância focal. Os segmentos MF e MF' formados por um ponto M corrente da curva e por cada um dos focos são denominados raios vetores do ponto M (Figura 235).

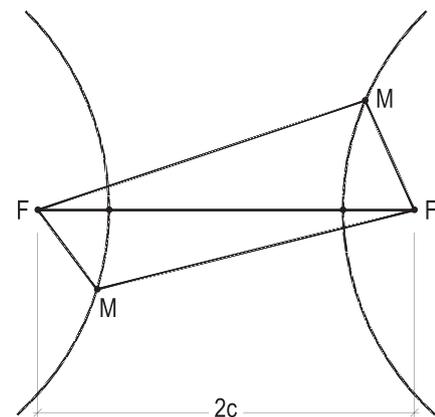


Figura 235

98 – Condição de existência

Designando respectivamente por $2c$ e $2a$ a distância focal e o valor constante da diferença dos raios vetores dos pontos da hipérbole, para que exista a curva, isto é, para que existam triângulos como MFF' (Figura 236), é necessário e suficiente que:

$$FF' > MF - MF' \quad \therefore \quad \boxed{2c > 2a}$$

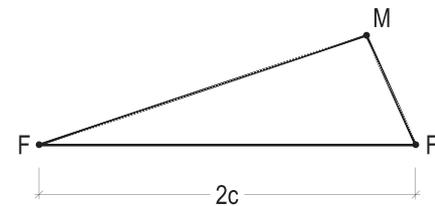


Figura 236

99 – Natureza

Tal como a elipse, a hipérbole é uma curva contínua. Mas, ao contrário daquela, a hipérbole é aberta, pois um ponto corrente, desde que conserve constante o valor da diferença entre seus raios vetores, pode se afastar indefinidamente dos focos, pelos crescimentos dos valores desses raios vetores.

Conforme se considere o ponto corrente M mais próximo de F' ou de F , respectivamente, pode-se escrever:

$$MF - MF' = 2a \quad \text{ou} \quad MF' - MF = 2a$$

Daí se concluir que a hipérbole possui dois ramos distintos (Figura 235).

100 – Processo espontâneo para a construção da hipérbole

Sejam F e F' os focos e $2a$ o valor da diferença constante entre os raios vetores, de qualquer ponto da curva.

Arbitremos um ponto J no prolongamento do segmento auxiliar $PQ = 2a$, obtendo dois valores m e n , tais que $m - n = 2a$ (Figura 237) e, com centros nos focos e raios iguais àqueles segmentos, construamos arcos de circunferência que, por interseção, determinem os pontos M_1, M_2, M_3 e M_4 da curva.

Variando a posição de J , e conseqüentemente os valores dos raios vetores m e n , e repetindo-se a operação, obtém-se tantos pontos correntes quantos sejam desejados (Figura 238).

101 – Eixos e centro de simetria

Do próprio processo espontâneo conclui-se, (Figura 237), pela igualdade dos triângulos M_1FF' , M_2FF' , M_3FF' e M_4FF' (3º caso), a simetria de M_1 e M_4 e de M_2 e M_3 em relação à reta que contém os focos e de M_1 e M_2 e de M_3 e M_4 em relação à mediatriz s do segmento FF' .

Pode-se, então, afirmar que:

1 – A hipérbole possui dois eixos de simetria.

O eixo AA' (Figura 237) colinear com os focos é denominado real, transversal ou focal.

O segundo eixo – mediatriz de FF' – não toca a curva, pois seus pontos equidistam dos focos, sendo denominado imaginário, não transversal ou não focal (Figura 238). Observe-se que tal mediatriz s funciona como um eixo de simetria para os dois ramos da curva, sem, no entanto, tocá-los.

2 – A hipérbole possui dois vértices e centro.

Os vértices são os pontos A e A' em que o eixo transversal encontra a curva (Figura 238) e o centro é o ponto O , médio de AA' , comum ao eixo transversal e à mediatriz do segmento formado pelos dois focos.

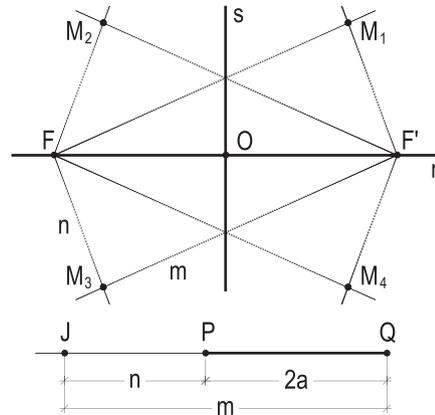


Figura 237

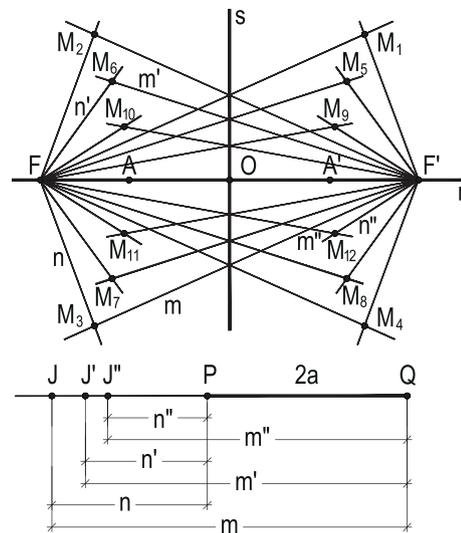


Figura 238

102 – Relações métricas

1 – O segmento AA' , que representa o eixo transversal, é igual à diferença constante $2a$ dos raios vetores de todos os pontos da curva (Figura 239).

De fato, porque A' pertence à curva, podemos escrever: $FA' - A'F' = 2a$. E como $A'F' = FA$, vem $FA' - FA = 2a$.

Assim, pode-se anotar:

$$AA' = 2a$$

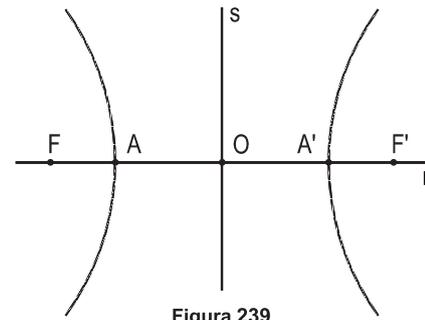


Figura 239

2 – Convencionou-se atribuir ao eixo não transversal um valor $2b$ representado por um segmento BB' . E de tal modo que os dois semieixos sejam os catetos de um triângulo retângulo de hipotenusa igual à semidistância focal.

Isto implica em que (Figura 240) o retângulo construído sobre eixos AA' e BB' seja necessariamente inscrito na circunferência que tem por diâmetro a distância focal FF' .

Naturalmente os extremos B e B' do segmento criado para representar o eixo imaginário não são pontos da hipérbole.

3 – Relação entre os eixos e a distância focal.

Do triângulo BOA (Figura 240), vem: $c^2 = a^2 + b^2$

$$\text{Ou } 4c^2 = 4a^2 + 4b^2 \quad \therefore (2c)^2 = (2a)^2 + (2b)^2$$

$$\therefore FF'^2 = AA'^2 + BB'^2$$

Ao contrário do que ocorre com a elipse, para a hipérbole o eixo real não é necessariamente maior que o imaginário, e porque AA' pode ser maior, igual ou menor que BB' não se usam, para a hipérbole, as denominações eixo maior e eixo menor.

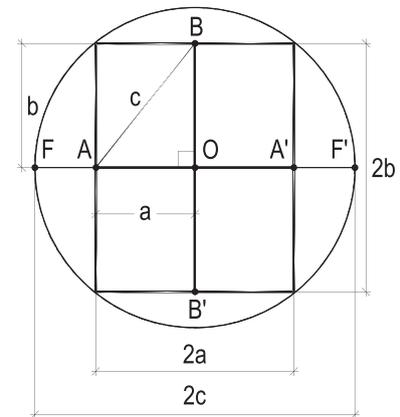


Figura 240

4 – Corda focal – parâmetro.

Corda focal de uma hipérbole é aquela que, passando por um dos focos, é perpendicular ao eixo transversal. Há, portanto, duas cordas focais, uma para cada foco.

Parâmetro de uma hipérbole é a ordenada, em relação ao eixo transversal, do ponto da curva, cuja projeção ortogonal sobre esse eixo coincide com um dos focos.

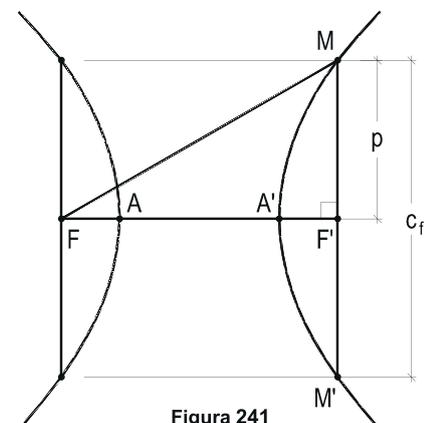


Figura 241

Seendo $MM' = c_f$ uma das cordas focais, para o cálculo do parâmetro p , consideremos o triângulo retângulo MFF' (Figura 241), que fornece:

$$MF^2 = FF'^2 + MF'^2 \quad (1) \quad \text{E, porque } M \text{ pertence à curva:}$$

$$MF - MF' = 2a \quad \therefore \quad MF - p = 2a \quad \therefore \quad MF = 2a + p$$

Assim, a relação (1) fica:

$$(2a + p)^2 = (2c)^2 + p^2 \quad \therefore \quad 4a^2 + p^2 + 4ap = 4c^2 + p^2 \quad \therefore \quad 4a^2 + 4ap = 4c^2$$

$$\therefore \quad a^2 + ap = c^2 \quad \therefore \quad ap = c^2 - a^2 \quad \therefore \quad ap = b^2$$

Daí, as seguintes relações:

$$p = \frac{b^2}{a}$$

$$c_f = \frac{2b^2}{a}$$

Multiplicando por 2 numerador e denominador, vem $c_f = \frac{(4b)^2}{2a} \quad \therefore \quad c_f = \frac{(2b)^2}{2a}$

5 – Excentricidade.

Excentricidade de uma hipérbole é a razão entre sua semidistância focal e seu semieixo transversal. A excentricidade e de uma hipérbole se calcula por uma das seguintes expressões:

$$e = \frac{c}{a}$$

ou $e = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{a^2}} \quad \therefore \quad e = \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2}$

103– Observações

1 – A excentricidade da hipérbole é necessariamente maior que um.

De fato, porque $c > a$ (número 98), vem: $\frac{c}{a} > 1 \quad \therefore \quad e > 1$

2 – Quando, mantido fixo o valor $2c$ da distância focal, faz-se tender a um a excentricidade, a tende a c e, então, os vértices A e A' aproximam-se, respectivamente, dos focos fixos F e F' . Assim, b tende a zero e a hipérbole tende a degenerar em duas semirretas de sentidos contrários, exteriores uma à outra, com origens em F e F' , tendo por suporte comum a reta FF' (Figura 242).



Figura 242

3 – Quando, mantidos fixos os focos, faz-se crescer indefinidamente o valor da excentricidade, a tende a zero e, conseqüentemente, os vértices A e A' aproximam-se simultaneamente do ponto O, médio de FF'. Assim, a hipérbole tende a degenerar na mediatriz s do segmento FF' (Figura 243).

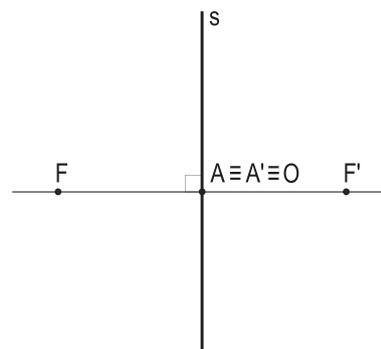


Figura 243

4 – A excentricidade de uma hipérbole pode ser expressa em função de seu eixo transverso e de seu parâmetro (ou de sua corda focal). De fato (números 102.4 e 102.5):

$$e = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a} \cdot \frac{1}{a}} \quad \therefore \quad e = \sqrt{1 + \frac{p}{a}}$$

$$e = \sqrt{1 + \frac{p}{a}} = \sqrt{1 + \frac{2p}{2a}} \quad \therefore \quad e = \sqrt{1 + \frac{c_f}{2a}}$$

5 – Do acima instituído, conclui-se que a excentricidade de uma hipérbole é um parâmetro adimensional, indicando quanto mais, ou menos, a hipérbole adquire forma alongada.

104 – A hipérbole referida a seus eixos

Consideremos uma hipérbole referida a um sistema cartesiano tal que seus eixos coincidam com os coordenados, os focos F e F' estando sobre o eixo das abscissas (Figura 244).

Fazendo $AA' = 2a$, $BB' = 2b$ e $FF' = 2c$ e, sendo M (x, y) um ponto genérico da hipérbole, podemos escrever:

$$MF - MF' = 2a \quad \therefore \quad MF = MF' + 2a$$

Elevando ao quadrado:

$$MF^2 = MF'^2 + 4a^2 + 4a MF'$$

E como F (-c, O) e F' (c, O), vem:

$$(x + c)^2 + y^2 = (x - c)^2 + y^2 + 4a^2 + 4a \sqrt{(c - x)^2 + y^2}$$

$$\therefore x^2 + c^2 + 2cx = x^2 + c^2 - 2cx + 4a^2 + 4a \sqrt{(c - x)^2 + y^2}$$

$$\therefore 4cx = 4a^2 + 4a \sqrt{(c - x)^2 + y^2}$$

$$\therefore cx - a^2 = a \sqrt{(c - x)^2 + y^2}$$

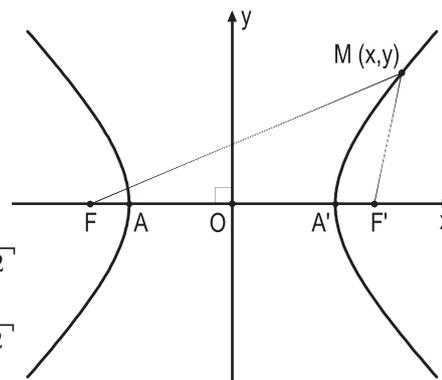


Figura 244

Elevando ao quadrado:

$$c^2 x^2 + a^4 - 2a^2 cx = a^2 x^2 + a^2 c^2 - 2a^2 cx + a^2 y^2$$

$$\therefore c^2 x^2 - a^2 x^2 = a^2 c^2 + a^2 y^2 - a^4 = a^2 (c^2 - a^2) + a^2 y^2$$

$$\therefore (c^2 - a^2) x^2 = a^2 (c^2 - a^2) + a^2 y^2$$

E como $c^2 - a^2 = b^2$ (número 102.3), vem $b^2 x^2 = a^2 b^2 + a^2 y^2$

$$\therefore \boxed{b^2 x^2 - a^2 y^2 = a^2 b^2}$$

que também se escreve:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

105 – Hipérbole equilátera

Por definição, uma hipérbole é dita equilátera quando são iguais seus dois eixos.

Decorre, então, que, para toda hipérbole equilátera:

1 – A razão entre a distância focal $2c$ e qualquer um dos dois eixos ($2a$ ou $2b$) é constante e igual a $\sqrt{2}$. De fato (número 102.3), se os eixos são iguais, temos:

$$c^2 = 2a^2 = 2b^2 \quad \therefore \boxed{c = a\sqrt{2} = b\sqrt{2}}$$

ou

$$\boxed{2c = 2a\sqrt{2} = 2b\sqrt{2}}$$

2 – O parâmetro é igual aos dois semieixos (Figura 245).

De fato (número 102.4), se $a = b$:

$$p = \frac{b^2}{a} = \frac{a^2}{a} \quad \therefore \boxed{p = a = b}$$

3 – A corda focal é igual aos eixos.

Pois, se $c_f = 2p$, da propriedade anterior, vem:

$$\boxed{c_f = 2a = 2b}$$

4 – A excentricidade é igual a $\sqrt{2}$.

$$e = \frac{c}{a} = \frac{a\sqrt{2}}{a} \quad \therefore \boxed{e = \sqrt{2}}$$

5 – A equação da curva, referida a seus eixos (sendo o focal o das abscissas), adquire aspecto simples, pois, se $a = b$:

$$a^2 x^2 - a^2 y^2 = a^4 \quad \therefore \boxed{x^2 - y^2 = a^2 = b^2}$$

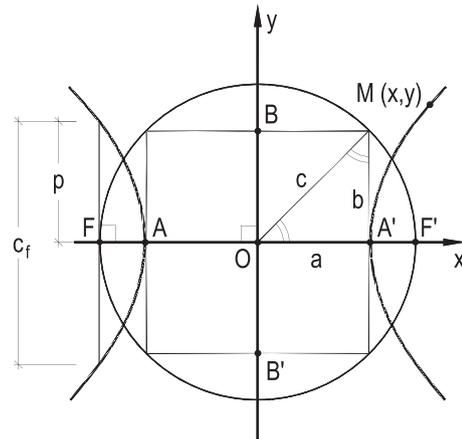


Figura 245

106 – Teorema

O lugar geométrico dos pontos M , para os quais a diferença $MF - MF'$ das distâncias a dois pontos fixos F e F' é constante, é o ramo relativo a F' da hipérbole de focos F e F' e eixo transversal igual àquela constante.

Demonstração:

Seja $2a$ o valor constante da diferença $MF - MF'$, naturalmente menor que FF' .

Consideremos, da hipérbole de focos F e F' e eixo transversal $2a$, o ramo relativo a F' .

Sabe-se que (números 97 e 102.1), para todos os pontos M desse ramo, vale a relação:

$$MF - MF' = 2a \quad (1)$$

Sejam J e L dois pontos não pertencentes à hipérbole, respectivamente, exterior e interior à concavidade desse ramo (Figura 246), os triângulos JMF e $LM'F'$ fornecem:

$$JF < MF + JM$$

$$\therefore JF - JF' < MF + JM - JF' \quad \therefore JF - JF' < MF - (JF' - JM)$$

$$\therefore JF - JF' < MF - MF' \quad \therefore JF - JF' < 2a \quad (2)$$

$$LF' < LM' + M'F' \quad \therefore LF' - LF < LM' + M'F' - LF$$

Multiplicando os dois membros por (-1) , vem:

$$LF - LF' > (LF - LM') - M'F' \quad \therefore LF - LF' > M'F - M'F'$$

$$\therefore LF - LF' > 2a \quad (3)$$

As relações (1), (2) e (3) demonstram o teorema.

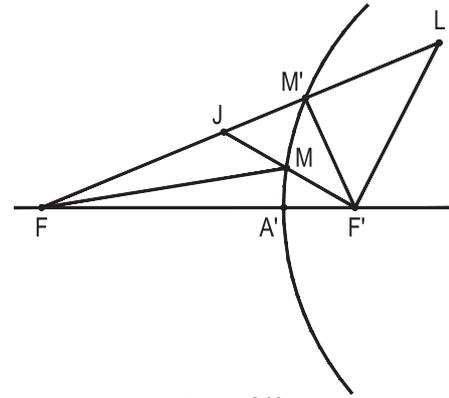


Figura 246

107 – Escólios

1 – Uma hipérbole de focos F e F' e eixo transversal $2a$ é o lugar geométrico dos pontos para os quais as diferenças das distâncias a F e a F' têm módulo constante e igual a $2a$.

2 – A hipérbole divide seu plano em duas regiões: a exterior, entre os dois ramos, à qual pertencem os pontos cujas diferenças de distâncias aos focos são menores que o valor do eixo real, e a interna, composta pelas duas porções situadas nas concavidades de cada um dos ramos, à qual pertencem os pontos cujas diferenças de distâncias aos focos são, em módulo, maiores que o eixo real da curva.

108 – Circunferências diretoras – circunferência principal

Circunferências diretoras de uma hipérbole são as que têm por centros cada um dos focos e raios iguais ao eixo real (Figura 247).

Circunferência principal de uma hipérbole é a que tem por diâmetro o eixo real da curva (Figura 247).

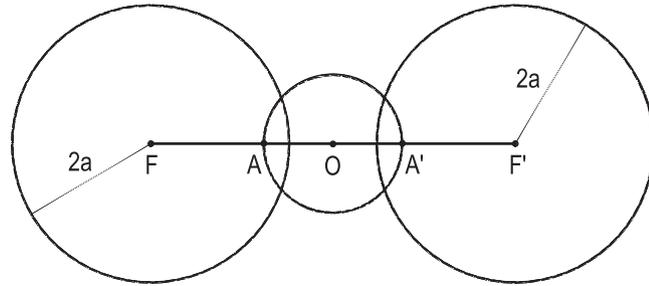


Figura 247

109 – Teorema

A bissetriz do ângulo interno formado pelo raios vetores relativos a um ponto qualquer da hipérbole é tangente à curva nesse ponto.

Demonstração:

Sejam M um ponto qualquer de uma hipérbole de focos F e F' e de eixo transversal $2a$ e r a bissetriz do ângulo interno formado pelos raios vetores de M (Figura 248).

Traçando $F'S$ perpendicular a r , o triângulo isósceles $MF'S$ garante a simetria de F' e S , em relação a r .

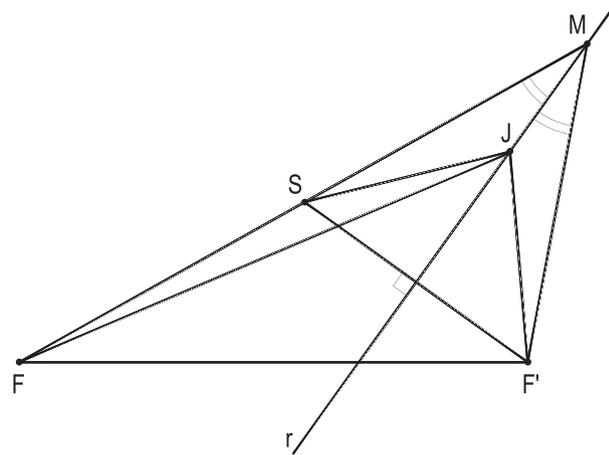


Figura 248

Assim, para todo ponto J de r , não coincidente com M (Figura 248), vale escrever:

$$JS = JF', \text{ além de } MS = MF'$$

E no triângulo JFS : $JF - JS < SF$.

$$\text{Ou: } JF - JF' < MF - MS \quad \therefore \quad JF - JF' < MF - MF' \quad \therefore \quad JF - JF' < 2a$$

Assim, todos os pontos J de r , exceto M , por possuírem diferenças de distâncias aos focos menores que o valor do eixo real, são exteriores à curva (número 107.2). E, então, a bissetriz interna r , tendo apenas em comum com a curva o ponto M , e todos os seus demais pontos no exterior da curva, é tangente a ela, em M .

Naturalmente, seria idêntica a demonstração para pontos situados no outro ramo da hipérbole.

110 – Corolários

1 – A bissetriz do ângulo externo formado pelos raios vetores de um ponto corrente da hipérbole é normal à curva, nesse ponto (Figura 249).

De fato, basta ver que essa bissetriz é perpendicular à interna.

2 – Os pontos de interseção da tangente e da normal relativas a um ponto corrente com a reta suporte do eixo real formam, com os focos, uma divisão harmônica.

Porque tais pontos são (Figura 249) os pés das bissetrizes, interna e externa, relativas ao vértice M do triângulo MFF' (*Geometria Plana*, número 166).

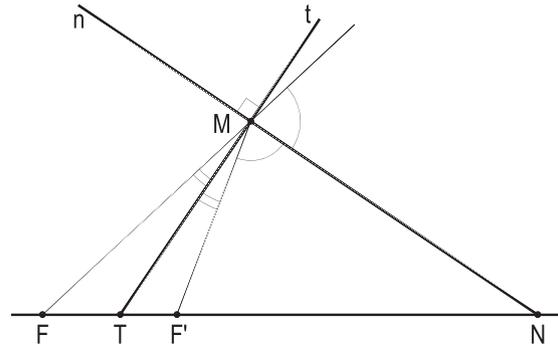


Figura 249

3 – Um dos focos, o ponto de contato de uma tangente qualquer, e o simétrico do outro foco em relação a essa tangente são sempre colineares, tal como visto no item 109 (Figura 248).

4 – As tangentes nos vértices são perpendiculares ao eixo real.

Assim são as tangentes t e t' (Figura 250), respectivamente, nos vértices A e A' .

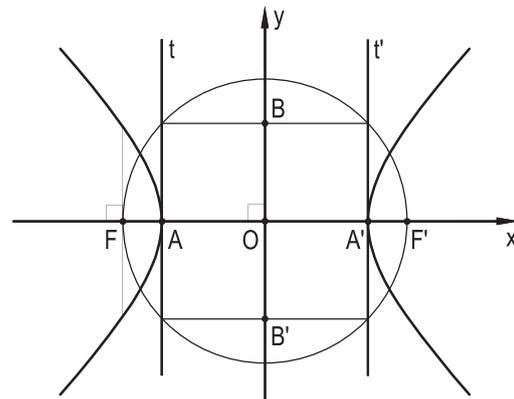


Figura 250

5 – Uma hipérbole e uma elipse homofocais, isto é, com os mesmos focos, são ortogonais.

De fato, basta ver que, sendo M um ponto qualquer comum às duas curvas e F e F' seus focos comuns, as tangentes às curvas, em M , são as bissetrizes interna e externa do ângulo FMF' (Figura 251) formado por seus raios vetores. E, porque essas duas tangentes são perpendiculares entre si, as duas curvas são ortogonais.

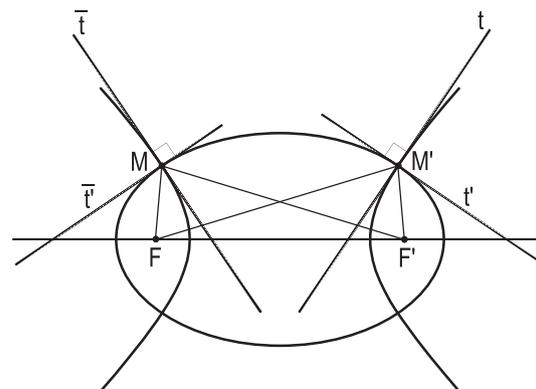


Figura 251

Observe-se que isso ocorre nos dois ramos da hipérbole de focos comuns com os da elipse.

111 – Teorema

O lugar geométrico dos simétricos de um foco de uma hipérbole em relação às tangentes é a circunferência diretora relativa ao outro foco.

Demonstração:

Seja r a tangente num ponto M qualquer da hipérbole de focos F e F' e eixo real $2a$ (Figura 252) e S o simétrico de F' em relação a r , o triângulo isósceles $MF'S$ dá:

$$MF' = MS$$

E como $MF - MF' = 2a$, vem:

$$MF - MS = 2a \quad \therefore \quad FS = 2a$$

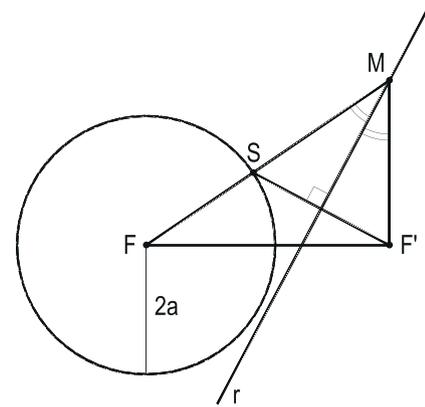


Figura 252

Assim, o lugar geométrico dos simétricos de um dos focos de uma hipérbole em relação às tangentes é a circunferência diretora relativa ao outro foco.

112 – Corolários

1 – O lugar geométrico dos pontos equidistantes de uma circunferência e de um ponto fixo, exterior à circunferência, é um dos ramos de uma hipérbole, para a qual o ponto fixo é um dos focos e a circunferência é a diretora relativa ao outro foco.

Seja $(F, 2a)$ a circunferência, F' o ponto fixo exterior e M um ponto equidistante dos dois (Figura 252), temos $MS = MF'$.

Mas como $MF - MS = FS = 2a$, vem $MF - MF' = 2a$

Assim, M descreve um dos ramos da hipérbole de focos F e F' e eixo real $2a$, o relativo ao foco F' . A circunferência considerada é, então, uma das diretoras da hipérbole.

2 – O lugar geométrico dos centros das circunferências pertencentes a um ponto fixo, exterior a uma circunferência dada, e tangentes a ela é a hipérbole para o qual o ponto fixo é um dos focos e a circunferência dada é a diretora relativa ao outro foco.

Sejam $(F, 2a)$ a circunferência e F' o ponto fixo dados. Se M é o centro de uma circunferência pertencente ao ponto F' e tangente exteriormente à circunferência dada (Figura 253), vale escrever: $MS = MF'$

E, $MF - MS = 2a \quad \therefore \quad MF - MF' = 2a$

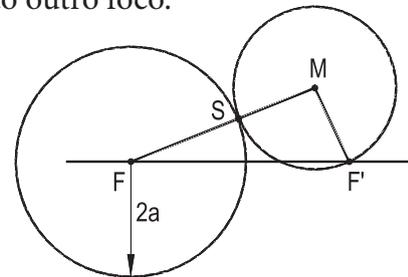


Figura 253

Isto significa que o lugar dos centros M das circunferências pertencentes a F' e tangentes exteriormente à circunferência $(F, 2a)$ é o ramo da hipérbole, relativo ao foco F' .

Sendo, agora, N o centro de uma circunferência pertencente a F' e tangente interiormente à dada (Figura 254), temos $NS' = NF'$

$$\text{Mas, } NS' - NF = 2a \quad \therefore \quad NF' - NF = 2a$$

Por isso que o lugar dos centros N das circunferências pertencentes a F' e tangentes interiormente à circunferência $(F, 2a)$ é o ramo da hipérbole, relativo ao foco F .

E, porque a circunferência dada é uma das diretoras da hipérbole obtida, de um modo geral, conclui-se que o lugar geométrico dos centros das circunferências pertencentes ao ponto F' e tangentes exterior ou interiormente à circunferência $(F, 2a)$ é a hipérbole, para a qual a circunferência e o ponto dados são uma diretora e um foco.

113 – Determinação do ponto de contato de uma tangente

Quando dados os dois focos F e F' e uma tangente t a uma hipérbole, para determinar o ponto de contato dessa tangente, basta construir o simétrico S de um dos focos em relação a ela e uni-lo ao outro foco (Figura 255).

O ponto de contato procurado é o ponto M de interseção desta reta FS com a tangente dada t .

114 – Construção direta da hipérbole a partir da circunferência diretora

Análise: Como a circunferência diretora $(F, 2a)$ é o lugar dos simétricos do foco F' , em relação às tangentes (número 111), a mediatriz t do segmento formado por F' e por um ponto S qualquer daquela circunferência será uma tangente à hipérbole (Figura 256). E porque o ponto de contato dessa tangente, o simétrico S de F' em relação a t , e o foco F devem ser colineares (número 110.3), a reta $F'S$ corta t segundo um ponto M da curva.

Construção: Dados os dois focos F e F' e o valor $2a$ do eixo real, constrói-se uma das circunferências diretoras $(F, 2a)$, arbitrando-se, nela, pontos S . Para cada S , a interseção da reta FS com a mediatriz do segmento $F'S$ é um ponto M da hipérbole (Figura 257).

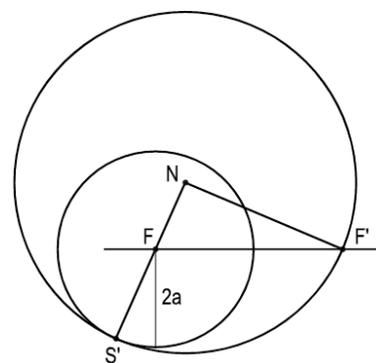


Figura 254

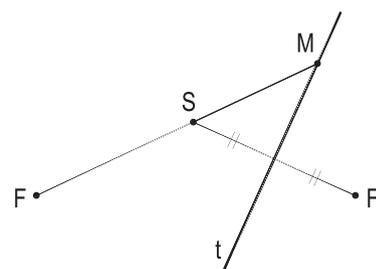


Figura 255

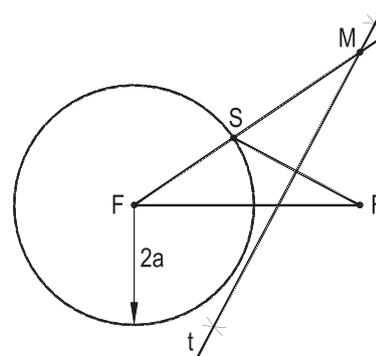


Figura 256

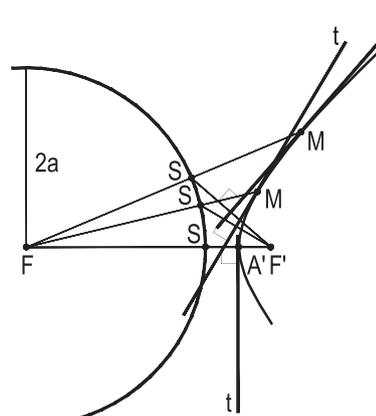


Figura 257

115 – Observações

1 – O processo apresentado no item anterior proporciona, com o emprego de apenas uma das circunferências diretoras, pontos dos dois ramos da hipérbole. De fato, consideremos as tangentes $F'\bar{S}_1$ e $F'\bar{S}_2$ do foco F' à diretora relativa ao foco F .

Todo ponto S da circunferência diretora pertencente ao menor arco $\bar{S}_1\bar{S}_2$ produz, segundo o processo antes indicado (número 114), ponto M do ramo relativo ao foco F' (Figura 258), enquanto que todo ponto S do maior arco $\bar{S}_1\bar{S}_2$ da diretora produz ponto M do ramo relativo ao foco F (Figura 259).

2 – Oportunamente (número 131) será provado que os pontos \bar{S}_1 e \bar{S}_2 são os simétricos do foco F' em relação às assíntotas da hipérbole.

116 – Construção das tangentes

1 – Tangente num ponto M da curva (dados M e os dois focos).

Para a determinação da tangente, basta girar o menor raio vetor MF' , em torno de M , até que ele venha a ocupar a posição MS sobre MF (Figura 260) e traçar, por M , a perpendicular t à reta $F'S$. A reta t será a tangente.

De fato, dessa construção resulta que t é a bissetriz do ângulo interno formado pelos raios vetores de M , já que o triângulo $MF'S$ é isósceles.

2 – Tangentes paralelas a uma reta r (dados os focos, o valor $2a$ do eixo real e a reta r).

Análise: Sejam t_1 e t_2 as tangentes procuradas, paralelas à reta r . Porque os simétricos S_1 e S_2 do foco F' em relação àquelas tangentes devem pertencer à circunferência diretora ($F, 2a$), t_1 e t_2 serão mediatrizes dos segmentos $F'S_1$ e $F'S_2$, respectivamente (Figura 261). E estes segmentos devem pertencer à perpendicular traçada, por F' , à reta dada r .

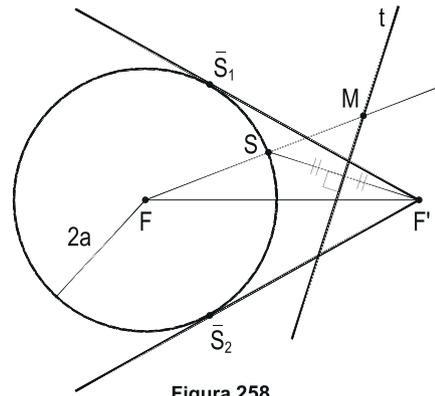


Figura 258

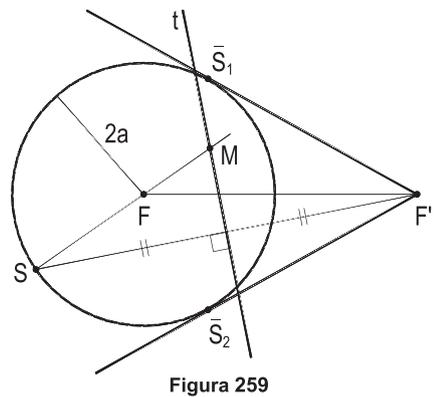


Figura 259

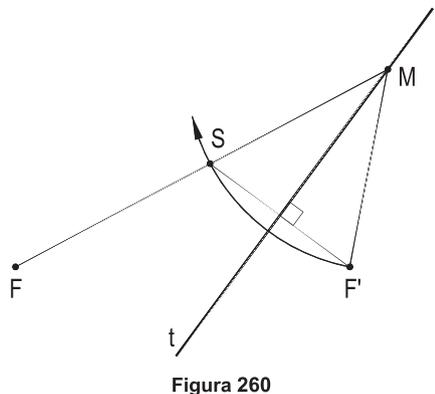


Figura 260

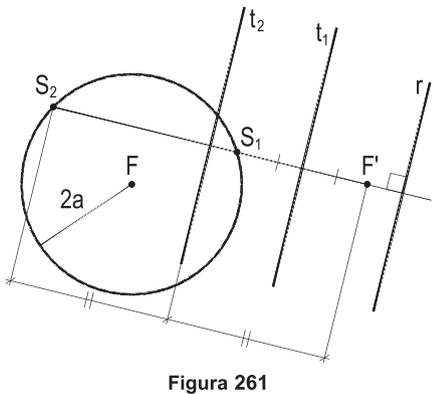


Figura 261

Construção:

Dados os dois focos F e F' e o valor $2a$ do eixo real, bem como a direção r das tangentes, constrói-se inicialmente uma das circunferências diretoras ($F, 2a$) e, a seguir, a perpendicular, pelo outro foco F' , à reta r , a qual corta a diretora segundo os pontos S_1 e S_2 (Figura 262).

Determina-se, então, as mediatrizes t_1 e t_2 dos segmentos $F'S_1$ e $F'S_2$, as quais são as tangentes procuradas.

Os pontos de contato M_1 e M_2 são obtidos com o auxílio das retas FS_1 e FS_2 (número 113).

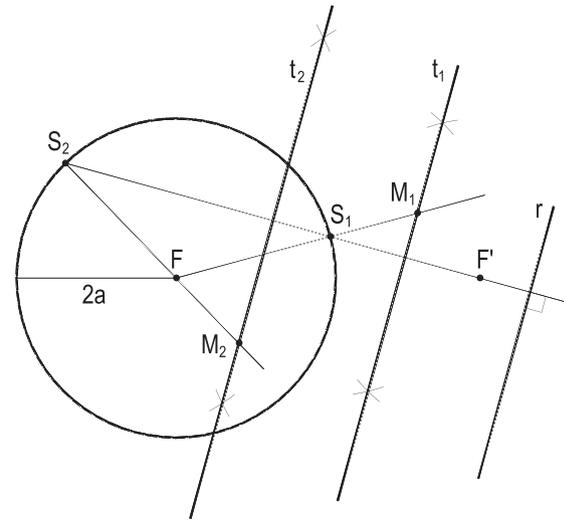


Figura 262

As tangentes t_1 e t_2 , por serem paralelas (Figura 262), são simétricas em relação ao centro da hipérbole. Assim, construída uma delas, a outra pode ser obtida mediante o emprego dessa simetria.

Observe-se que a direção dada r (Figura 262) não pode ser qualquer. De fato, só existirá tangente paralela a r enquanto houver ponto comum à circunferência diretora relativa a um foco e a perpendicular traçada pelo outro foco à reta r .

3 – Tangentes por um ponto J exterior (dados os dois focos, o valor $2a$ do eixo real e o ponto J).

Análise: Sejam t_1 e t_2 as tangentes procuradas e ($F, 2a$) uma das circunferências diretoras da hipérbole. Como os simétricos S_1 e S_2 do outro foco F' em relação a essas tangentes devem pertencer à diretora considerada (número 111), conclui-se que: $JF' = JS_1 = JS_2$ (Figura 263).

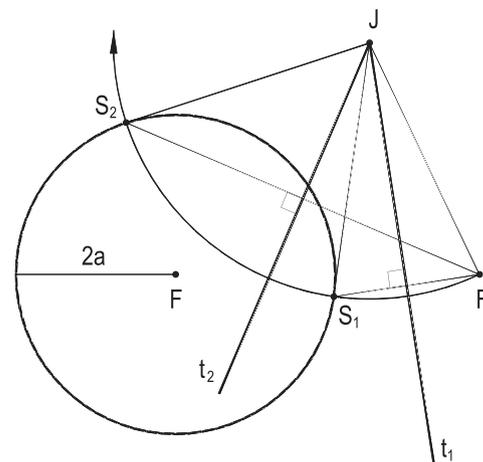


Figura 263

Por isso que os dois simétricos S_1 e S_2 e o foco F' devem pertencer a uma outra circunferência, com centro em J e raio JF' (Figura 263).

Construção: Dados os dois focos F e F' e o valor $2a$ do eixo real, bem como o ponto J , constrói-se inicialmente uma das circunferências diretoras ($F, 2a$) e a circunferência que tem centro em J e que passa pelo segundo foco F' (Figura 264). As duas circunferências cortam-se segundo os pontos S_1 e S_2 , simétricos de F' em relação às tangentes procuradas.

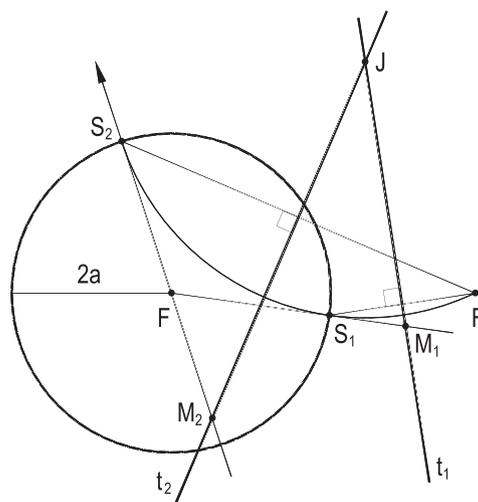


Figura 264

Assim, obtidos S_1 e S_2 , as perpendiculares t_1 e t_2 , traçadas por J aos segmentos $F'S_1$ e $F'S_2$, sendo as próprias mediatrizes desses segmentos, são as tangentes pedidas (Figura 264).

Os pontos de contato M_1 e M_2 das tangentes t_1 e t_2 são determinados pela união dos simétricos S_1 e S_2 ao foco F (número 113).

117 – Teorema de La Hire

O lugar geométrico das projeções ortogonais dos focos de uma hipérbole sobre as tangentes é a circunferência principal da curva.

Demonstração: Seja t uma tangente qualquer à hipérbole de focos F e F' , centro O e eixo real $2a$ (Figura 265).

Como o simétrico S do foco F' em relação a t pertence à circunferência diretora relativa a F (número 111), vem $FS = 2a$.

E porque o ponto P , projeção ortogonal de F' sobre t , é o próprio ponto médio do segmento $F'S$, o triângulo $FF'S$ fornece (*Geometria Plana*, número 86):

$$OP = \frac{1}{2} FS = \frac{1}{2} 2a \quad \therefore \quad OP = a$$

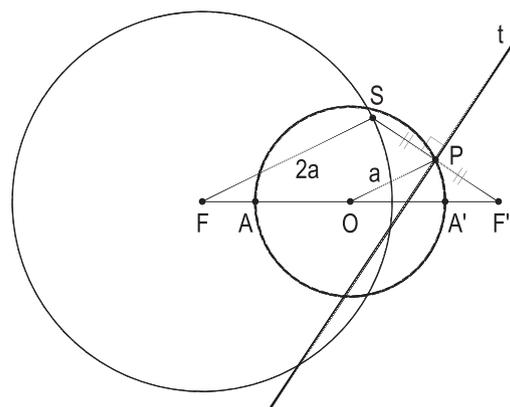


Figura 265

E se o ponto P , projeção ortogonal do foco F' sobre uma tangente qualquer t , dista a do centro O da curva, conclui-se que o lugar geométrico dos pontos P é a circunferência (O, a) .

Então, o lugar geométrico das projeções ortogonais dos focos de uma hipérbole sobre as tangentes é a circunferência principal da curva.

118 – Teorema

O produto das distâncias de um dos focos de uma hipérbole a duas tangentes paralelas é constante e igual ao quadrado do semieixo não transversal.

Demonstração: Sejam t e t' duas tangentes paralelas a uma hipérbole e P e P' as projeções ortogonais do foco F sobre elas (Figura 266).

Porque P e P' pertencem à circunferência (O, a) , principal da hipérbole (número 117), a potência do foco F em relação a essa circunferência (*Geometria Plana*, números 234 e 242) se escreve:

$$PF(O) = FP \cdot FP' = FA \cdot FA'$$

$$\therefore d \cdot d' = (c - a)(c + a) = c^2 - a^2$$

E como $c^2 - a^2 = b^2$ (número 102.3), vem:

$$d \cdot d' = b^2$$

Então, o produto das distâncias de um dos focos de uma hipérbole a duas tangentes paralelas é constante e igual ao quadrado do semieixo não transversal.

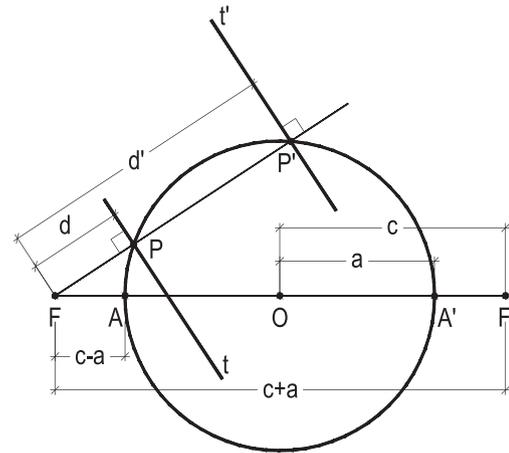


Figura 266

119 – Corolário

O produto das distâncias dos focos de uma hipérbole a uma tangente qualquer é constante e igual ao quadrado do semieixo não transversal.

Consideremos uma segunda tangente t' , paralela à dada t .

Porque as duas tangentes t e t' paralelas, sendo simétricas em relação ao centro O da hipérbole, acarretam a igualdade dos triângulos FOP' e $F'OP''$ (Figura 267), pode-se anotar:

$$d' = d''$$

Assim, a relação $d \cdot d' = b^2$ também se escreve:

$$d \cdot d'' = b^2$$

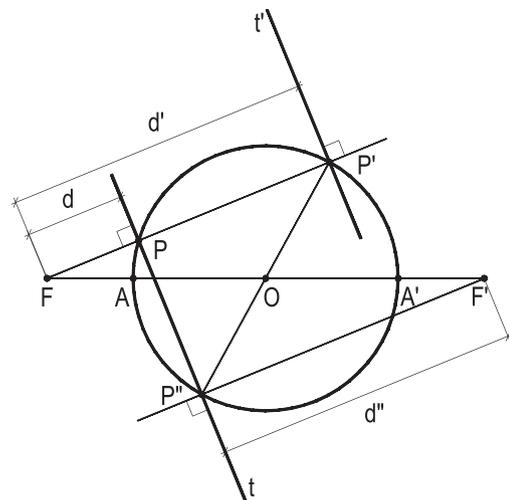


Figura 267

120 – Construções

Do teorema de La Hire resultam as seguintes construções:

1 – Determinação dos focos a partir do eixo transverso AA' e de uma tangente t .

Sendo dados o eixo real AA' e uma tangente t a uma hipérbole, para obter seus focos, basta construir a circunferência principal e , pelos pontos P e P' em que ela corta a tangente t , traçar as perpendiculares a essa tangente, as quais cortam a reta suporte de AA' segundo os focos F e F' procurados (Figura 268).

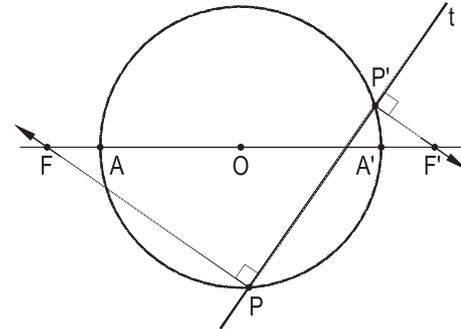


Figura 268

2 – Determinação dos eixos a partir dos focos F e F' e de uma tangente t .

Sendo dados os dois focos F e F' e uma tangente qualquer t , para determinar o eixo real, basta projetar um dos focos (F' , na Figura 268) sobre a tangente, obtendo-se um ponto P' da circunferência principal.

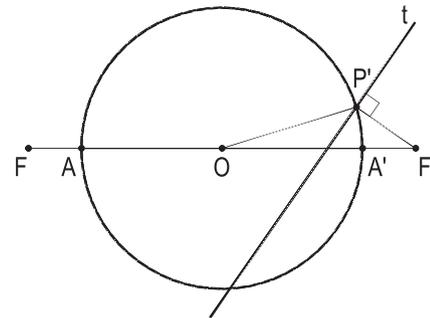


Figura 269

E, com centro no próprio centro O da hipérbole e raio OP' , descreve-se a circunferência principal que corta a reta FF' segundo os vértices A e A' .

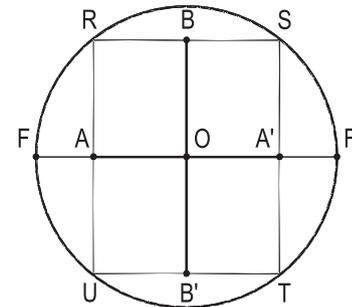


Figura 270

Determinados os vértices A e A' do eixo real, para obter o eixo imaginário BB' , basta construir a circunferência de diâmetro FF' e levantar, pelos vértices A e A' , as perpendiculares ao eixo focal, que entregam os pontos R , S , T e U completando, a seguir, o retângulo $RSTU$ inscrito naquela circunferência (Figura 270). O eixo não transversal BB' ficará, então, limitado entre as bases daquele retângulo, na mediatriz de FF' .

3 – Construção das tangentes paralelas a uma reta r (dados o eixo real AA' , um dos focos F' e a reta r).

Com diâmetro AA' constrói-se a circunferência principal, à qual pertencerão as projeções ortogonais P_1 e P_2 do foco F' sobre as tangentes procuradas (número 117). E, como essas tangentes devem ser paralelas à reta r , P_1 e P_2 são obtidos com o auxílio da perpendicular a r , traçada pelo foco F' .

Assim, basta traçar a perpendicular, pelo foco F' à reta dada r , obtendo, por interseção com a circunferência principal, os pontos P_1 e P_2 e construir, por estes pontos, as paralelas t_1 e t_2 a r , as quais são as tangentes pedidas (Figura 271).

Os pontos de contato das duas tangentes, não incluídas na Figura 271, são determináveis pela aplicação do processo usualmente utilizado (número 113).

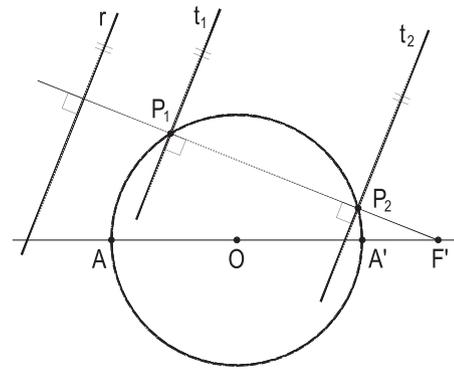


Figura 271

Naturalmente, não é toda direção r que proporciona solução ao problema. De fato, para que exista tangente à hipérbole dada, paralela a r , é indispensável que a perpendicular traçada por um dos focos a essa reta encontre a circunferência principal.

4 – Construção das tangentes por um ponto J exterior (dados o eixo transversal AA' , um dos focos F' e o ponto J).

Análise:

Sendo t_1 e t_2 as tangentes procuradas, sabe-se que as projeções ortogonais P_1 e P_2 do foco F' sobre elas pertencem à circunferência principal (O, a) da hipérbole (número 117).

E, como os triângulos $JF'P_1$ e $JF'P_2$ são retângulos (Figura 272), os pontos P_1 e P_2 pertencem, também, à circunferência de diâmetro JF' .

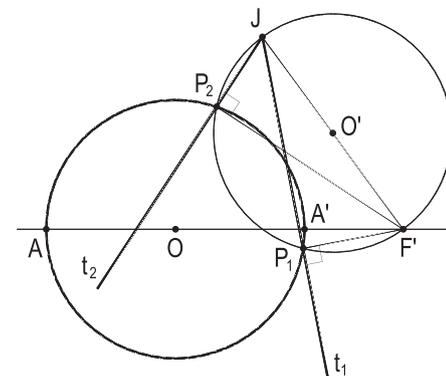


Figura 272

Construção: Traça-se, inicialmente, a circunferência principal da hipérbole e, a seguir, a circunferência que tem por diâmetro o segmento JF' , a qual corta a primeira segundo os pontos P_1 e P_2 , por onde passarão as tangentes procuradas t_1 e t_2 (Figura 273).

Assim, para obtê-las basta unir o ponto dado J a P_1 e a P_2 .

Os pontos de contato dessas duas tangentes, não incluídos na Figura 273, são determináveis pela aplicação do processo usualmente utilizado (número 113).

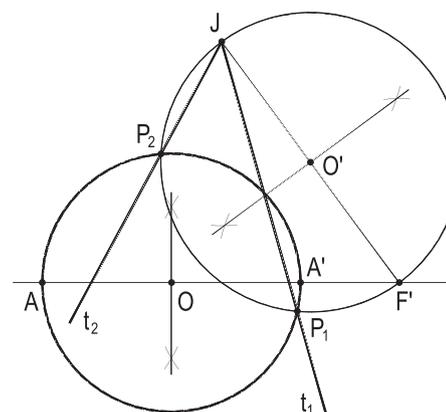


Figura 273

121 – Teoremas de Poncelet

1 – As tangentes traçadas por um ponto exterior a uma hipérbole são duas cevianas isogonais do triângulo formado por esse ponto e pelos focos da hipérbole.

2 – A reta que une um foco de uma hipérbole a um ponto exterior é a bissetriz do ângulo externo formado pelas retas que unem aquele foco aos pontos de contato das duas tangentes traçadas pelo ponto exterior.

Demonstrações:

1 – Consideremos as tangentes t e t' de um ponto qualquer J a uma hipérbole de focos F e F' e eixo transversal $2a$. Sendo S e S' os simétricos de F e de F' em relação a t e a t' , respectivamente (Figura 274), temos: $JS = JF$ (1) e $JS' = JF'$ (2)

E, como FS' e $F'S$ são raios de cada uma das circunferências diretoras da hipérbole (número 111), podemos escrever: $FS' = F'S$ (3)

Das relações (1), (2) e (3) conclui-se a igualdade dos triângulos JFS' e $JF'S$ (3º caso) e, conseqüentemente, a igualdade dos ângulos opostos aos lados iguais FS' e $F'S$.

$$\text{Assim, } \widehat{FJS'} = \widehat{S'JF'} \quad \therefore \quad \alpha + \beta - \gamma = \gamma + \beta - \alpha \quad \therefore \quad \alpha - \gamma = \gamma - \alpha$$

$$\therefore \quad 2\alpha = 2\gamma \quad \therefore \quad \alpha = \gamma, \text{ relação que demonstra o primeiro teorema.}$$

2 – Além das considerações feitas para o primeiro teorema, incluamos os pontos de contato M e M' das tangentes t e t' .

Sabe-se que o ponto M' de contato da tangente t' pertence à reta formada pelo foco F e pelo simétrico S' do outro foco em relação àquela tangente (número 110.3). E que, analogamente, o ponto M de contato da tangente t pertence à reta $F'S$ (Figura 275).

Os triângulos iguais JFS' e $JF'S$ permitem escrever: $\theta = \varphi$ (externos homólogos). E, da simetria dos pontos S' e F' em relação à tangente t' , ou seja, da igualdade dos triângulos $JS'M'$ e $JF'M'$ (Figura 275), vem: $\theta = \rho$ (2)

E, então, $\varphi = \rho$

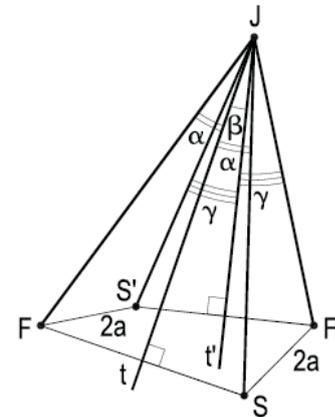


Figura 274

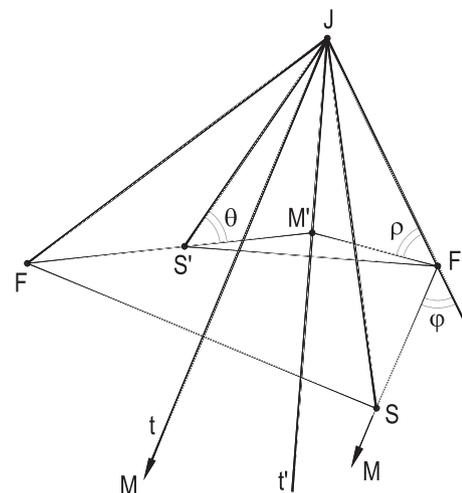


Figura 275

Assim, a reta formada pelo foco F' e pelo ponto J , comum às tangentes t e t' à hipérbole, é a bissetriz do ângulo externo formado pelas retas que unem F' aos pontos de contato daquelas duas tangentes.

122 – Corolário do primeiro teorema de Poncelet

Dados um ângulo $t_1 \hat{J} t_2$ e um ponto F a ele exterior, o lugar geométrico dos focos F' das hipérboles que têm um foco fixo F e que são tangentes a t_1 e a t_2 é a semirreta Jw isogonal de JF em relação aos lados do ângulo dado (Figura 276), exceto, naturalmente, o ponto J .

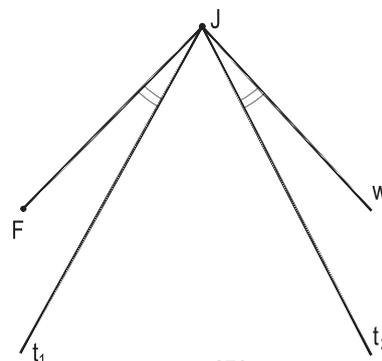


Figura 276

123 – Observações

1 – Tal corolário pode ser instituído diretamente.

De fato, sendo S_1 e S_2 os simétricos do foco F de uma hipérbole em relação a duas tangentes t_1 e t_2 , eles deverão (número 111) pertencer à circunferência diretora do outro foco F' , em estudo. Considerando o triângulo FS_1S_2 (Figura 277), porque t_1 e t_2 são mediatrizes de dois de seus lados, seu circuncentro J há de pertencer também à mediatriz w de seu terceiro lado S_1S_2 .

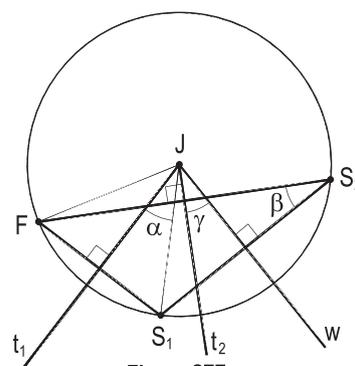


Figura 277

O ângulo central α , subtendendo a metade do arco a que corresponde o ângulo inscrito β , é igual a este ângulo β . Mas β e γ são iguais por terem lados respectivamente perpendiculares.

Assim, são iguais α e γ , o que comprova o corolário.

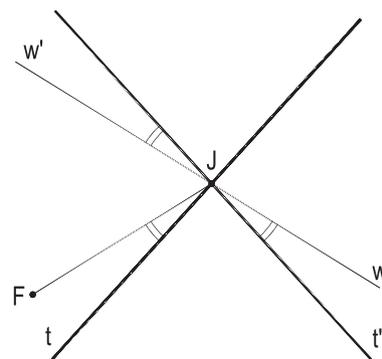


Figura 278

2 – Porque os teoremas de Poncelet são válidos tanto para a elipse quanto para a hipérbole, pode-se concluir que, dadas duas retas secantes t e t' e um ponto F exterior, todas as elipses e hipérboles tangentes a t e a t' , tendo um foco fixo em F , têm seu segundo foco F' sobre a reta ww' , isogonal da reta JF (Figura 278) em relação a um dos ângulos formados pelas tangentes, excluído, é claro, o ponto J .

E mais: para que se obtenha elipse, deve-se tomar os focos F' sobre a semirreta Jw' situada na mesma região do plano (em relação às tangentes) em que se encontra o foco dado F , enquanto que, para que se obtenha hipérboles, deve-se tomar os focos F' sobre a semirreta Jw oposta (Figura 278).

E, enfim, é claro que a origem J dessas duas semirretas deve ser excluída em ambas as hipóteses.

124 – Teorema

O lugar geométrico dos pontos dos quais se pode traçar tangentes perpendiculares a uma hipérbole é a circunferência concêntrica com ela, tendo raio igual ao segundo cateto de um triângulo retângulo cuja hipotenusa e cujo primeiro cateto são respectivamente iguais aos semieixos real e imaginário.

Demonstração: Consideremos uma hipérbole de focos F e F' , eixos $2a$ e $2b$ e distância focal $2c$. Sendo J um ponto do lugar procurado, isto é, tal que as tangentes t e t' de J à hipérbole sejam perpendiculares e S' o simétrico do foco F' em relação à tangente t' (Figura 279), o primeiro teorema de Poncelet fornece:

$$\alpha = \beta \quad (1)$$

Da simetria existente entre F' e S' em relação a t' , vem:

$$\beta = \gamma \quad (2) \quad \text{e} \quad JS' = JF' \quad (3)$$

Comparando as relações (1) e (2), temos: $\gamma = \alpha$ (4)

Como, por hipótese, $\gamma + \rho = 90^\circ$, a relação (4) permite escrever: $\alpha + \rho = 90^\circ$.

Assim, o triângulo JFS' é retângulo em J (Figura 279). Como a hipotenusa FS' é um raio da circunferência diretora relativa ao foco F :

$$JF^2 + JS'^2 = (2a)^2$$

$$\text{Aplicando a relação (3): } JF^2 + JF'^2 = (2a)^2$$

Mas, então, se a soma dos quadrados das distâncias do ponto J em estudo a dois pontos fixos F e F' é constante, o lugar desses pontos é uma circunferência (*Geometria Plana*, número 204.1) que tem por centro o ponto O , médio de FF' (centro da hipérbole), e raio OJ dado pela expressão:

$$OJ = \frac{1}{2} \sqrt{2(JF^2 + JF'^2) - FF'^2}$$

$$OJ^2 = \frac{1}{4} [2(JF^2 + JF'^2) - FF'^2] = \frac{1}{4} (2(2a)^2 - (2c)^2)$$

$$OJ^2 = \frac{1}{4} (8a^2 - 4c^2) = \frac{4}{4} (2a^2 - c^2) = 2a^2 - c^2 = a^2 - (c^2 - a^2)$$

$$\text{Mas como (número 102.3) } c^2 - a^2 = b^2, \text{ temos: } OJ^2 = a^2 - b^2$$

Assim, o lugar procurado é a circunferência concêntrica com a hipérbole, tendo raio igual ao segundo cateto de um triângulo retângulo de hipotenusa a , cujo primeiro cateto é b .

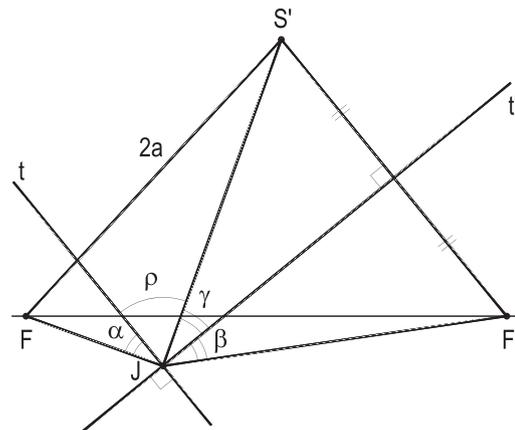


Figura 279

125 – Circunferência de Monge

A circunferência, lugar geométrico dos pontos dos quais se pode traçar tangentes perpendiculares a uma hipérbole, é denominada circunferência ortótica da hipérbole (Figura 280) ou, como homenagem ao geômetra francês Gaspard Monge, seu criador, circunferência de Monge.

Isto é o mesmo que concluir que todos os retângulos cujos lados pertencem a retas tangentes a uma hipérbole são inscritíveis na circunferência ortótica da hipérbole, como, por exemplo, o retângulo RSPQ da Figura 280.

Naturalmente, só existe a circunferência ortótica para a hipérbole, quando ela tem o eixo real maior que o imaginário, em atenção a que o valor $OJ^2 = a^2 - b^2$, acima (número 124) instituído, seja maior que zero.

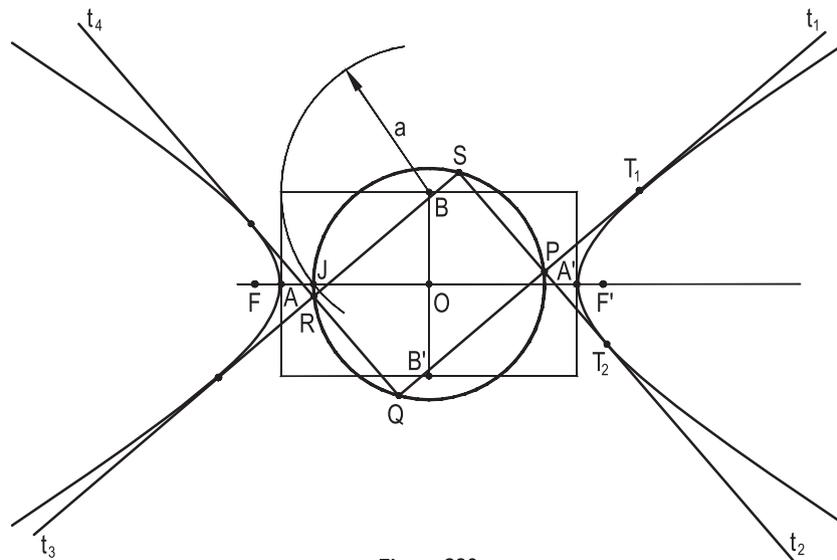


Figura 280

A Figura 280 apresenta, a partir dos dois eixos AA' e BB' e dos dois focos F e F' de uma hipérbole, sendo $AA' > BB'$, a determinação do raio OJ de sua circunferência de Monge.

Aliás, no caso particular em que a hipérbole é equilátera, apenas seu centro é capaz de enviar, à curva, tangentes perpendiculares entre si (Figura 281). Porque o valor instituído para o raio do círculo OJ (número 124), neste caso, se anula. E tais tangentes, como adiante (número 135) se verá, são as duas assíntotas a essa hipérbole.

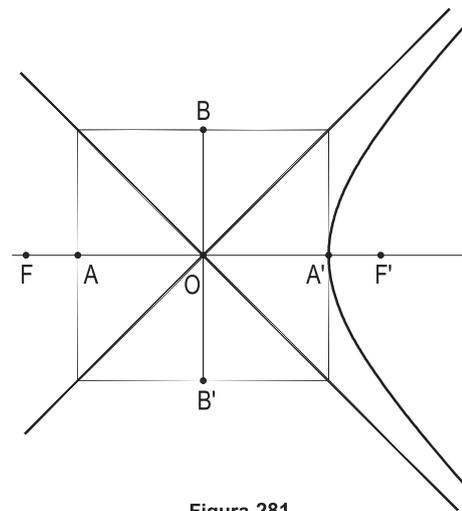


Figura 281

126 – Teorema

O lugar geométrico dos centros de todas as circunferências tangentes a duas circunferências exteriores e diferentes é constituído por duas hipérbolas homofocais, tendo por focos os centros das duas circunferências e eixos reais iguais à soma ou à diferença dos raios das duas circunferências.

Demonstração: Consideremos duas circunferências (O, R) e (O', R') segundo a hipótese, isto é, diferentes e exteriores uma à outra.

Para estudar o lugar geométrico dos centros de todas as circunferências tangentes a essas duas, observemos que elas podem tangenciar as duas dadas exteriormente (Figura 282), interiormente (Figura 283), ou externamente a uma e internamente à outra (Figuras 284 e 285).

Vejamos, para cada uma das quatro hipóteses, como se comportam os pontos M , centros dessas circunferências (M, r) procuradas.

1 – A circunferência (M, r) é tangente exteriormente às duas dadas (Figura 282).

$$\text{Temos: } MO - MO' = (R + r) - (R' + r)$$

$$\therefore MO - MO' = R - R' \text{ (constante)}$$

2 – A circunferência (M, r) é tangente interiormente às duas dadas (Figura 283).

$$\text{Temos: } MO - MO' = (r - R) - (r - R')$$

$$\therefore MO - MO' = -R + R'$$

$$\therefore MO' - MO = R' - R \text{ (constante)}$$

3 – A circunferência (M, r) é tangente externamente à maior das dadas e internamente à menor (Figura 284).

$$\text{Temos: } MO - MO' = (r + R) - (r - R')$$

$$\therefore MO - MO' = R + R' \text{ (constante)}$$

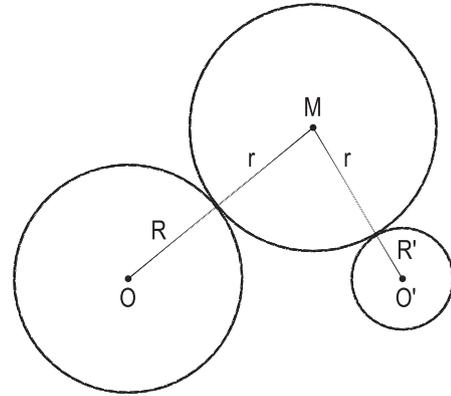


Figura 282

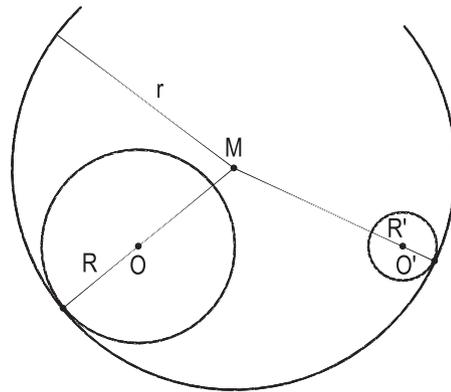


Figura 283

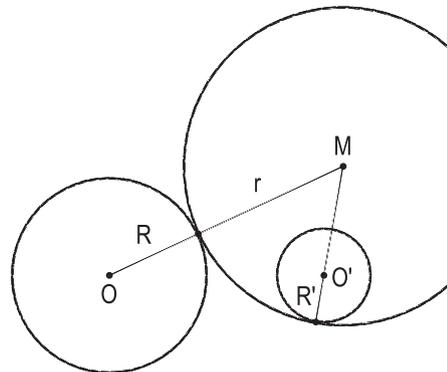


Figura 284

4 – Ao contrário, (M, r) é tangente internamente à maior e externamente à menor.

Temos: $MO - MO' = (r - R) - (r + R')$

$$\therefore MO - MO' = -R - R'$$

$$\therefore MO' - MO = R + R' \text{ (constante)}$$

Assim, por serem sempre constantes as diferenças entre as distâncias dos pontos M , em estudo, aos pontos fixos O e O' , mas com valores diferentes, para cada hipótese, conclui-se que o lugar geométrico procurado consiste em um par de hipérbolas, todas tendo por focos os centros das duas circunferências dadas e por eixos reais a diferença ou a soma dos raios das duas circunferências dadas, tal como se queria demonstrar.

127 – Observação

No caso, contrariando a hipótese, de as circunferências exteriores serem iguais, os centros de todas as circunferências tangentes às duas, seja externamente (Figura 286) ou internamente (Figura 287), têm de pertencer à mediatriz do segmento formado pelos centros O e O' das duas circunferências dadas, para proporcionarem segmentos iguais.

$$MO = MO' = r + R \text{ (Figura 286)}$$

ou $MO = MO' = r - R \text{ (Figura 287)}$

É claro que essa mediatriz bem pode ser entendida como as degenerações das hipérbolas antes estudadas (número 103.3).

128 – Determinação rigorosa dos pontos de corte de uma reta dada com uma hipérbole dada por seus focos F e F' e por seu eixo real $2a$

Análise: Seja $(F, 2a)$ uma das circunferências diretoras da hipérbole dada. Os pontos procurados M e N , comuns à reta r e à hipérbole, são (número 112.2) centros de duas circunferências que, passando pelo foco F' , tangenciam a circunferência diretora considerada (Figura 288).

Assim, tudo reside em determinar, sobre a reta r , os centros M e N dessas duas circunferências.

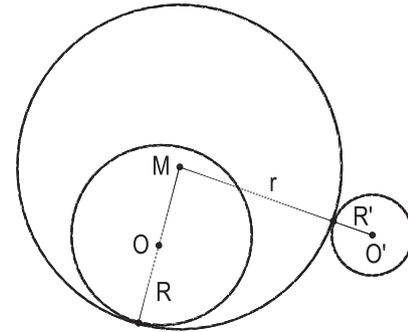


Figura 285

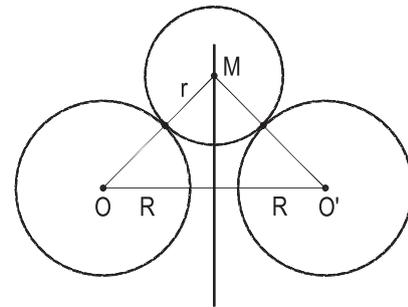


Figura 286

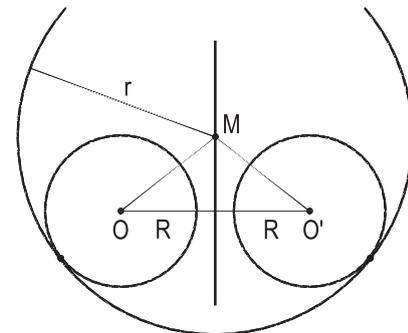


Figura 287

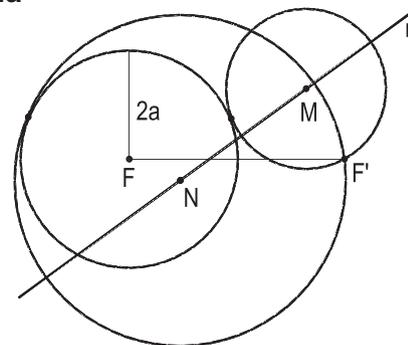


Figura 288

Porque a reta dada r servirá de suporte a um diâmetro da circunferência (M), tal circunferência passará também pelo ponto J , simétrico de F' em relação a r (Figura 289).

Assim, se considerarmos uma terceira circunferência (X), também pertencente aos pontos F' e J e secante à diretora, poderemos determinar o centro radical CR das três circunferências e, a seguir, o eixo radical CRT entre a diretora e a circunferência (M), uma vez que tal eixo deve ser tangente à diretora (Figura 286).

E, obtido o ponto T de contato das duas circunferências, o ponto M procurado será proveniente da interseção, com r , da reta FT (Figura 289).

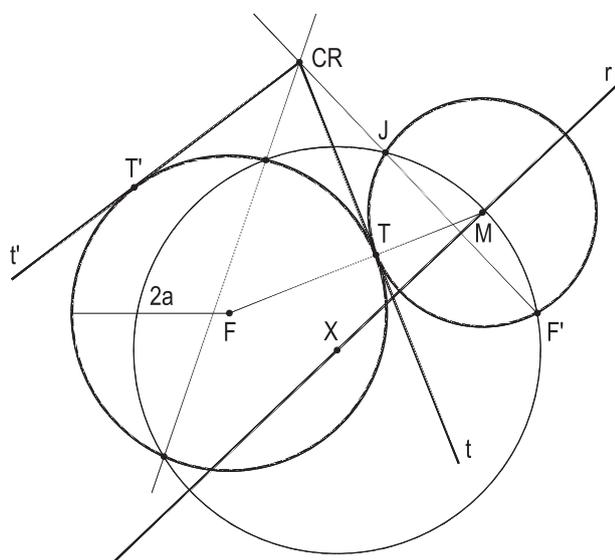


Figura 289

Construção: Determina-se inicialmente a circunferência diretora (F , $2a$) e o simétrico J de F' em relação a r e, com centro num ponto X qualquer de r , traça-se uma circunferência auxiliar, pertencente aos pontos F' e J e secante à diretora (Figura 290), produzindo dois pontos de corte 1 e 2.

Como a reta formada por esses dois pontos de corte é o eixo radical entre as duas circunferências traçadas e como a reta $F'J$ é o eixo radical entre a circunferência (X), auxiliar, e a procurada, a interseção dessas duas retas produz o centro radical CR das três circunferências em jogo (Figura 290).

Obtido CR , determina-se, com rigor, os pontos de contato T e T' das tangentes do centro radical CR à circunferência diretora (F , $2a$).

Finalmente, as retas FT e FT' cortam r nos pontos M e N procurados (Figura 290).

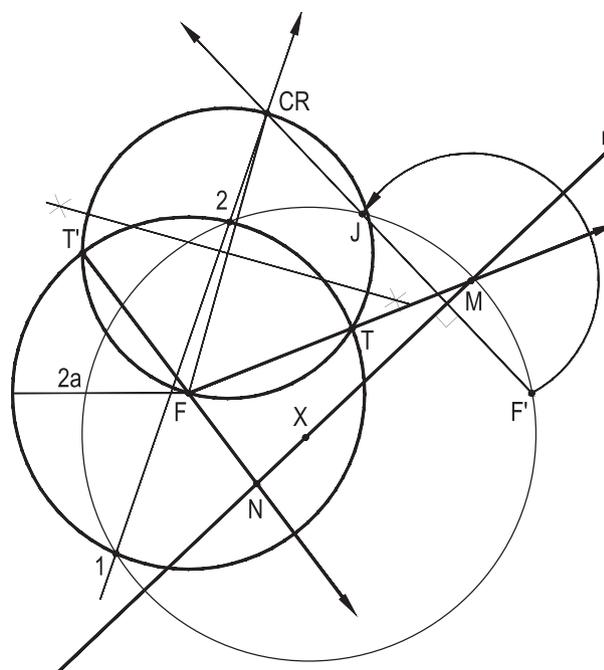


Figura 290

129 – Problemas resolvidos

Os nove problemas abaixo reúnem as medidas dos semieixos, da semidistância focal, os vértices, os focos e os extremos do eixo imaginário, sempre grupados adequadamente, pedindo-se, em todos os casos, completar esses elementos.

As soluções, todas bem simples, vão indicadas caso a caso, sempre apoiadas na relação básica $c^2 = a^2 + b^2$ (número 102.3).

96 – Dados A, F, b

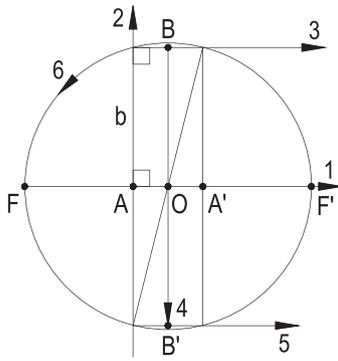


Figura 291

97 – Dados B, F, c

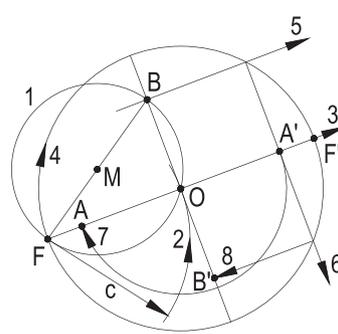


Figura 292

98 – Dados A, a, b

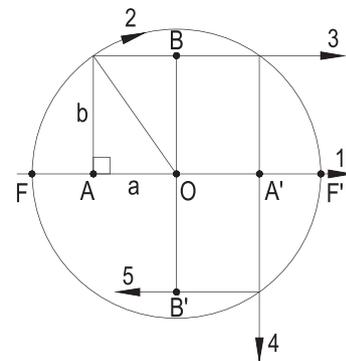


Figura 293

99 – Dados A, O, c

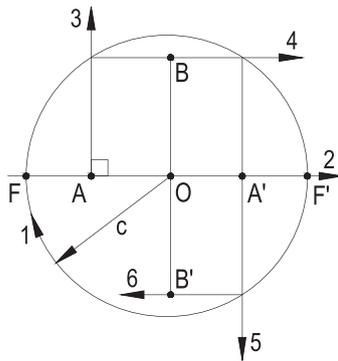


Figura 294

100 – Dados A, B, a

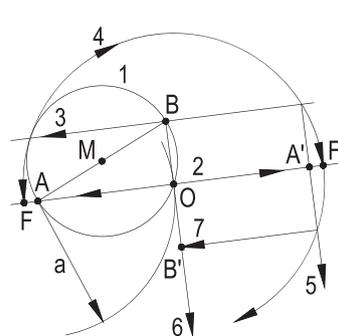


Figura 295

101 – Dados A, A', b

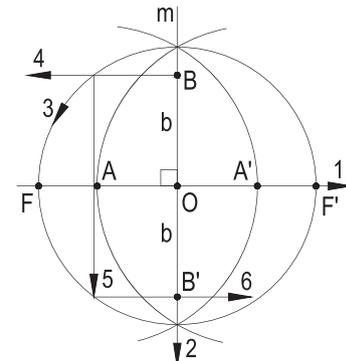


Figura 296

102 – Dados F, F', b

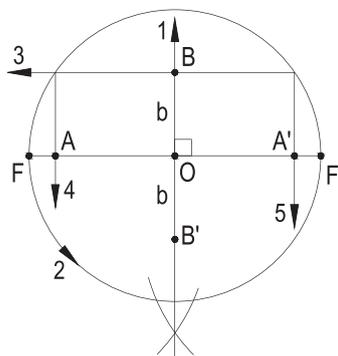


Figura 297

103 – Dados B, B', c

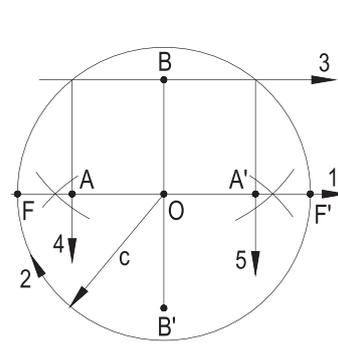


Figura 298

104 – Dados B, O, a

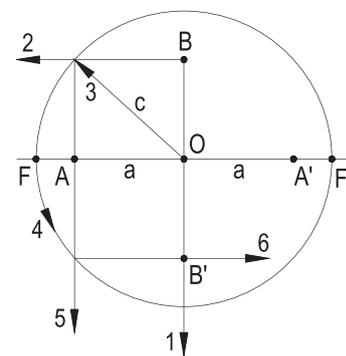


Figura 299

105 – De uma hipérbole são dados os dois focos F e F' e o pé P , no eixo real, de uma tangente t à curva, tal que seu ponto de contato T fique o mais próximo possível da reta dada w .

Pede-se determinar t , T e os vértices A e A' da curva.

Resolução: Obtido o pé Q , da normal no ponto procurado T , como conjugado harmônico de P em relação a FF' , T há de ser o traço da perpendicular a w pelo centro M do arco capaz de 90° para PQ com esse arco capaz, trazendo $t \equiv PT$ e os vértices A e A' , com a determinação da medida $2a$ do eixo real (Figura 300).

106 – Mesmo problema, T equidistando dos pontos dados X e Y

Resolução: T há de pertencer à mediatriz m do segmento XY (duas soluções) (Figura 301).

107 – Mesmo problema, $F'TP$ sendo um triângulo isósceles de base $F'P$. Basta construir a tangente t .

Resolução: T tem que pertencer à mediatriz m de $F'P$ (duas soluções) (Figura 302).

108 – Dado o triângulo JKL de incentro I , determine os vértices da hipérbole de focos J e K , um de seus pontos correntes sendo I .

Resolução: Determinado o incentro I , obtém-se a medida $J\bar{K} = 2a$ do eixo real e , a partir do centro O , A e A' (Figura 303).

109 – O triângulo JKL , dado, inscrito na circunferência (F) , diretora da hipérbole de segundo foco F' , também dado, proporciona, por projeções de seus vértices, a partir de F , os pontos \bar{J} , \bar{K} e \bar{L} , de um trecho dessa hipérbole, relativo ao ramo correspondente ao foco F' , trecho que se pede construir.

Resolução: As mediatrizes dos segmentos $F'J$, $F'K$ e $F'L$ cortam as projetantes FJ , FK e FL , respectivamente, trazendo os pontos \bar{J} , \bar{K} e \bar{L} do trecho pedido, construído com as tangentes nesses pontos, que são as mediatrizes antes traçadas (número 114) (Figura 304).

110 – Dada uma hipérbole por seus focos F e F' e pela medida $2a$ de eixo real, pede-se construir as tangentes à curva que sejam paralelas à mediana JM do triângulo dado JKL .

Resolução: A perpendicular, por F , à mediana JM traz, na diretora relativa a F' , os pontos S_1 e S_2 . As mediatrizes t_1 e t_2 de FS_1 e FS_2 são as tangentes pedidas (número 116.2) (Figura 305).

105

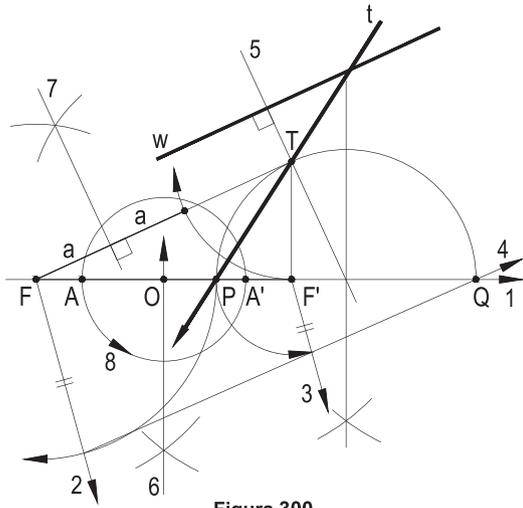


Figura 300

106

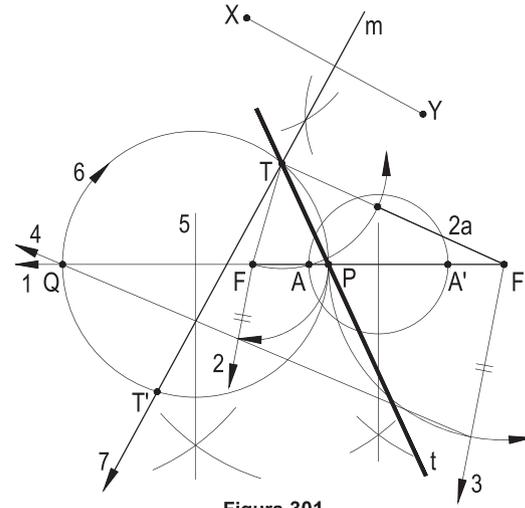


Figura 301

107

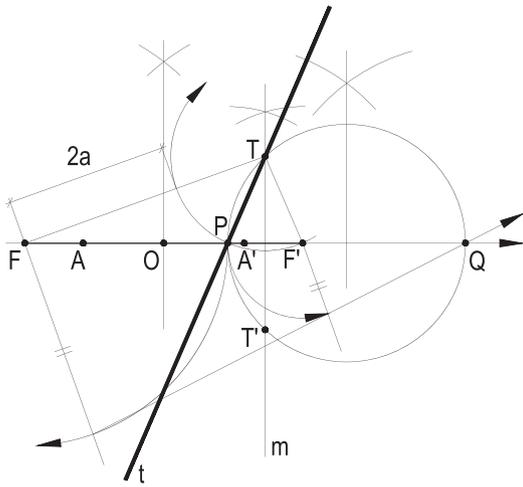


Figura 302

108

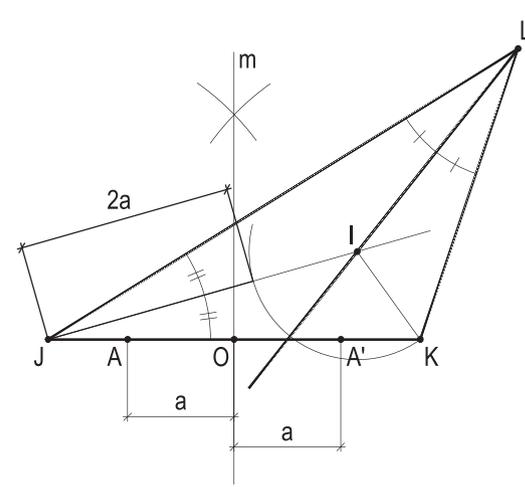


Figura 303

109

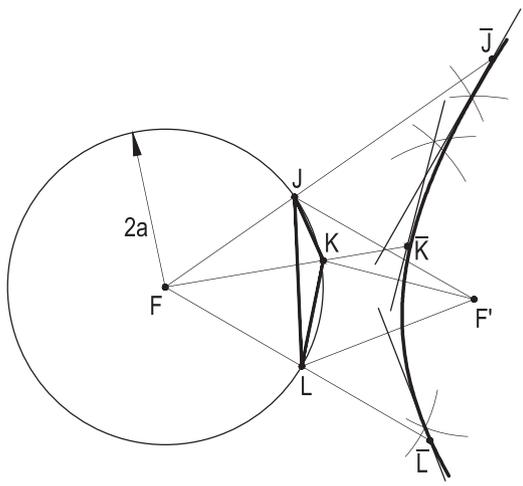


Figura 304

110

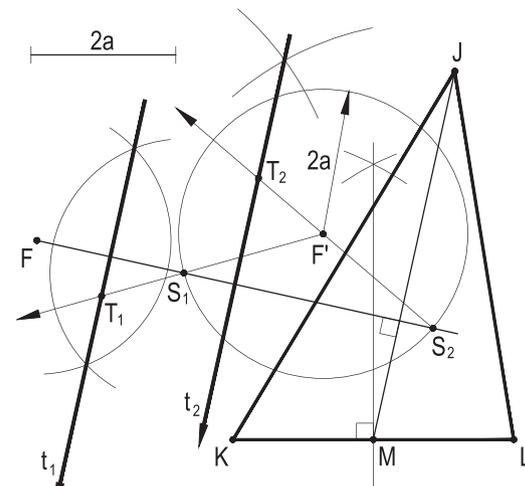


Figura 305

111 – De uma hipérbole são dados o centro O , o foco F' e o vértice A . Traçar as tangentes a ela a partir do vértice J do triângulo isósceles da base AF' , sabendo que $JA = JF' = 2a$.

Resolução: Traçadas a circunferência diretora relativa ao foco F , com centro O e raio $2a$, igual ao dobro de OA , e a circunferência (J, JF') , suas interseções S_1 e S_2 trazem as cordas $F'S_1$ e $F'S_2$ e, então (número 116.4), as tangentes t_1 e t_2 , perpendiculares, por J , a essas cordas e seus pontos de contato T_1 e T_2 (Figura 306).

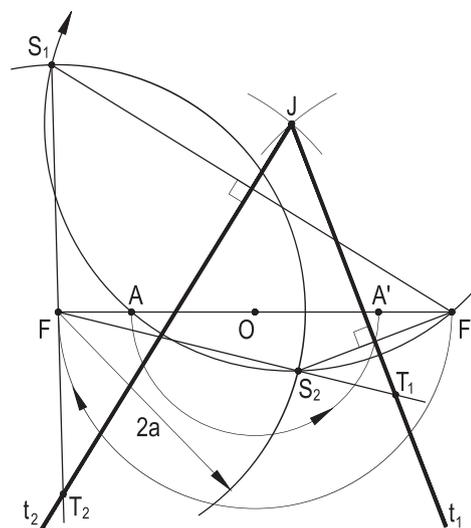


Figura 306

112 – A circunferência dada (O) é a principal de uma hipérbole, da qual é dado o foco F , sendo o segundo, F' , inacessível. Pede-se traçar as tangentes à curva paralelas à bissetriz do ângulo $x\hat{Q}y$, dado.

Resolução: Construída a bissetriz b do ângulo $x\hat{Q}y$, a perpendicular p , por F , a ela, corta a circunferência principal nos pontos P_1 e P_2 de passagem das tangentes pedidas t_1 e t_2 (Figura 307), naturalmente paralelas à bissetriz b .

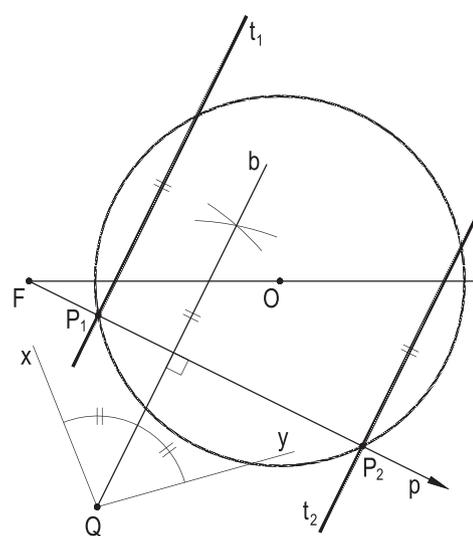


Figura 307

113 – Dados os vértices A e A' de uma hipérbole equilátera, pede-se determinar seus focos, seu eixo imaginário BB' e construir as tangentes a ela a partir do ponto J , também dado.

Resolução: Marcado o centro O da curva, a reta w , inclinada de 45° em relação a AA' e conduzida por O , proporciona o raio OK da circunferência focal e, então, os focos F e F' , além do eixo BB' pedido. A construção das tangentes t_1 e t_2 se faz com a determinação dos simétricos S_1 e S_2 de F' em relação a elas (ver número 116.3) (Figura 308), naturalmente pertencentes à circunferência diretora do foco F .

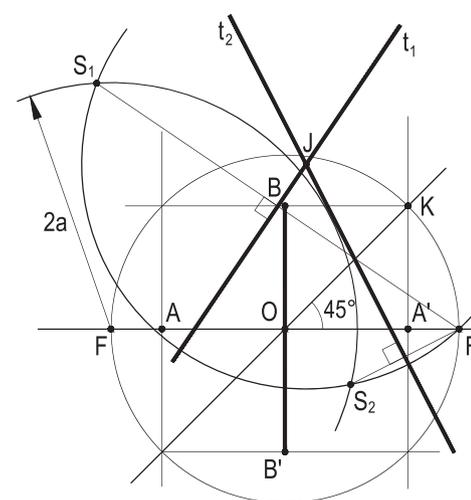


Figura 308

114 – Determinar, graficamente, a medida do ângulo α formado, no ponto comum dado J, entre duas hipérboles, uma com focos F e F' e outra, com focos \bar{F} e \bar{F}' , todos dados.

Resolução: O ângulo α entre as duas curvas, no ponto comum J, é o formado entre as tangentes b e \bar{b} àquelas curvas, em J (número 4), que são as bissetrizes, respectivamente, dos ângulos $F\hat{J}F'$ e $\bar{F}\hat{J}\bar{F}'$ (Figura 309).

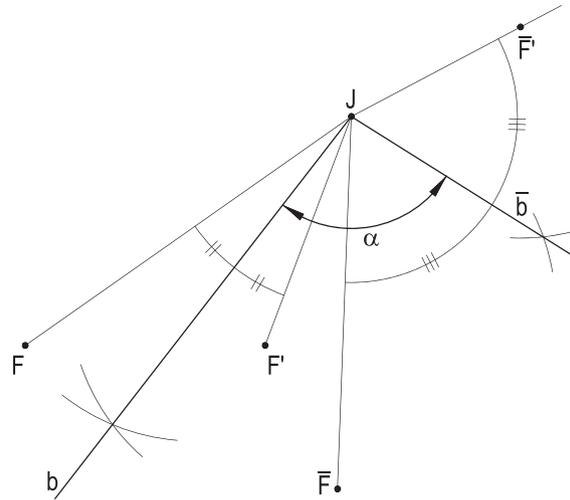


Figura 309

115 – Determinar o segmento MN pertencente à reta dada r e limitado, por seus extremos, pela hipérbole de focos F e F', dados, conhecido o valor 2a de seu eixo real.

Resolução: Trata-se de determinar os traços M e N de r com a curva (ver número 128), com o auxílio da circunferência auxiliar (X) (Figura 310).

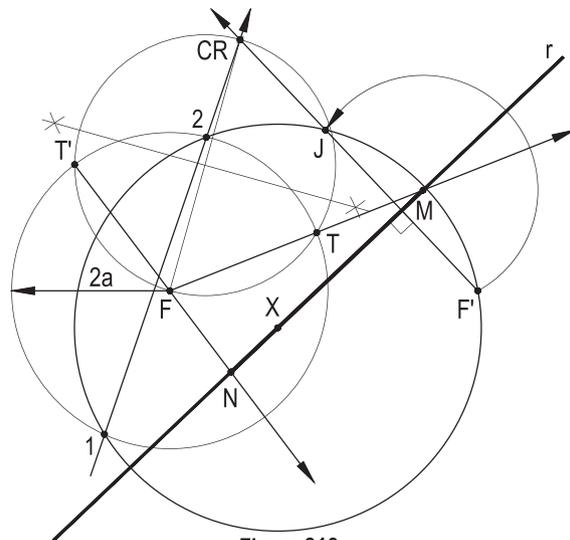


Figura 310

116 – Dado o foco F de uma hipérbole tangente às semirretas dadas Jt e Jt', pede-se determinar seu segundo foco F', sabendo que o centro da curva pertence à reta dada r.

Resolução: Construída a semirreta Jw, isogonal de JF para o ângulo formado pelas duas tangentes (ver número 122) e, com o auxílio de um segmento qualquer FL apoiado, por L, em Jw, obtido seu ponto médio M e traçada \bar{w} homotética de Jw para o polo F, na razão (1/2), obtém-se, por interseção com r, o centro O da curva e, com sua união a F, o segundo foco F', procurado (Figura 311).

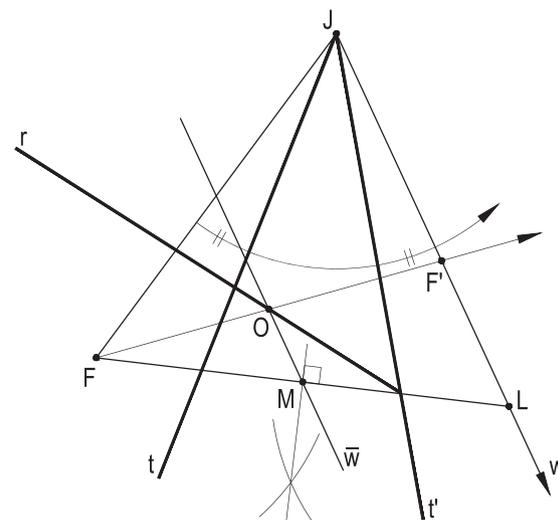


Figura 311

117 – Determinar os focos da hipérbole dada por um vértice A e pela direção r de seu eixo real, conhecendo a razão $3/5$ entre seus eixos real e imaginário, para duas hipóteses:

1 – semidistância focal c dada.

2 – o extremo B do eixo imaginário pertence à reta w , dada.

Resolução: A construção do triângulo retângulo ALJ com catetos $AL = 3u$ e $LJ = 5u$, unidades arbitradas, trazem o ponto B e, em seguida, os focos F e F' (Figuras 312 e 313).

118 – O ponto dado J vê a hipérbole de eixo real AA' e eixo imaginário BB' sob um ângulo reto.

Dado um dos eixos, AA' no primeiro caso e BB' no segundo, pede-se determinar o segundo eixo.

Resolução: Dizer que J vê a hipérbole sob ângulo reto é o mesmo que afirmar que são perpendiculares as duas tangentes de J à curva e que, então, J pertence à circunferência de Monge da curva, cujo raio OJ mede (número 124) o segundo cateto de um triângulo retângulo em que a hipotenusa e o primeiro cateto valem os semieixos real e imaginário.

Assim, as construções dos triângulos retângulos OAK (Figura 314), com um cateto igual ao raio da circunferência de Monge e hipotenusa igual ao semieixo real, e, igualmente, OBK (Figura 315) resolvem os problemas.

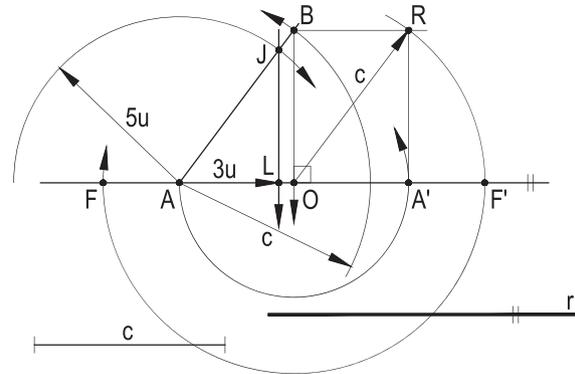


Figura 312

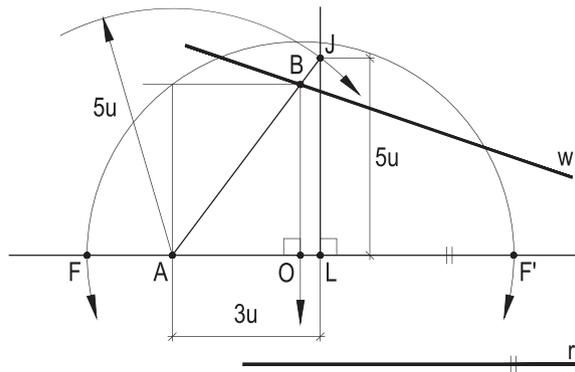


Figura 313

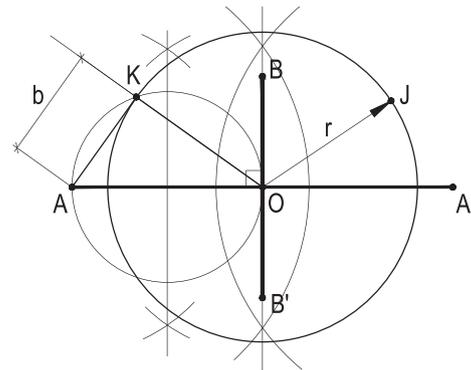


Figura 314

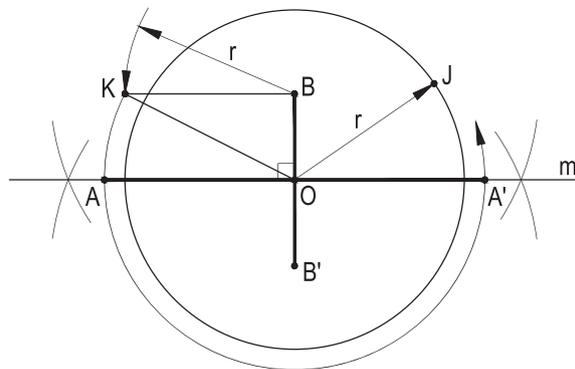


Figura 315

CAPÍTULO VII

ASSÍNTOTAS DA HIPÉRBOLE

130 – Definições

Quando uma reta tangente a uma curva tem seu ponto de contato rejeitado ao infinito, essa tangente é denominada assíntota da curva.

131 – Teorema

A hipérbole possui duas assíntotas.

Demonstração: Para efeito de análise, consideremos uma tangente genérica t a uma hipérbole de focos F e F' e eixo transverso $2a$. Sabe-se que o simétrico S do foco F' em relação àquela tangente pertence à circunferência diretora $(F, 2a)$ relativa ao outro foco (número 111) e que o ponto de contato M daquela tangente é (número 110.3) o ponto comum a ela e à reta FS (Figura 316).

Para que exista assíntota à hipérbole é necessário e suficiente que o ponto M seja impróprio, o que só se conseguirá se o ângulo $\widehat{F'SF}$ for reto.

Pois, para examinar a existência de um ponto da circunferência diretora $(F, 2a)$ que aviste o segmento FF' sob um ângulo reto, tracemos a circunferência de diâmetro FF' , lugar geométrico dos pontos capazes dessa propriedade (*Geometria Plana*, número 128.2).

Porque F' é necessariamente exterior à circunferência diretora $(F, 2a)$, as duas circunferências consideradas são secantes (Figura 317), existindo, pois, dois pontos \bar{S}_1 e \bar{S}_2 , segundo a condição imposta.

Conseqüentemente, existem duas e apenas duas assíntotas: as mediatrizes \bar{t}_1 e \bar{t}_2 dos segmentos $F'\bar{S}_1$ e $F'\bar{S}_2$ (Figura 317).

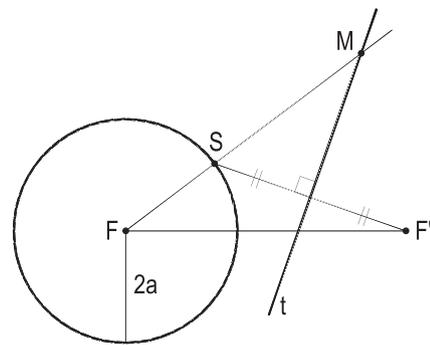


Figura 316

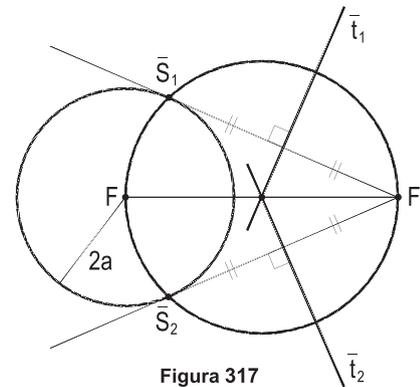


Figura 317

132 – Observação

1 – Os simétricos \bar{S}_1 e \bar{S}_2 do foco F' em relação às assíntotas (Figura 318) são os pontos de contato das tangentes traçadas de F' à circunferência diretora relativa ao foco F .

133 – Propriedades

1 – As assíntotas passam pelo centro da hipérbole, pois são mediatrizes de duas cordas $F'\bar{S}_1$ e $F'\bar{S}_2$ da circunferência que tem por diâmetro o segmento FF' (Figura 318).

2 – Os eixos da hipérbole pertencem às bissetrizes dos ângulos formados pelas assíntotas porque (Figura 318) as assíntotas são simétricas em relação ao eixo transverso e contêm o centro da hipérbole.

3 – A distância de um foco a uma assíntota é igual ao semieixo imaginário, pois o triângulo retângulo $F'OP'$ é semelhante ao triângulo $F'F\bar{S}_1$ na razão $(\frac{1}{2})$ (Figura 318).

Assim, como $OF' = c$ e $OP' = a$, vem: $F'P' = b$

4 – As assíntotas são os suportes das diagonais do retângulo construído sobre os eixos da hipérbole.

Sendo α o ângulo que as assíntotas formam com o eixo real (Figura 320), o triângulo FOP dá:

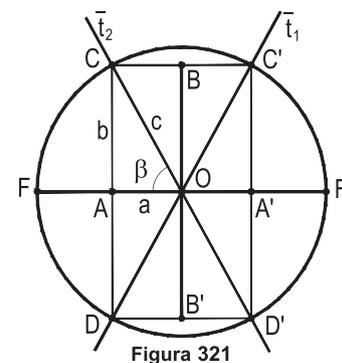
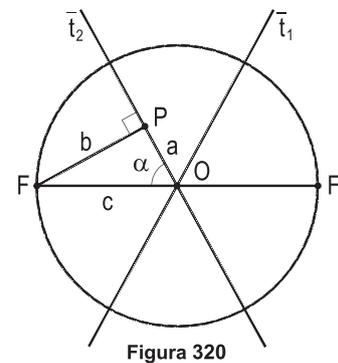
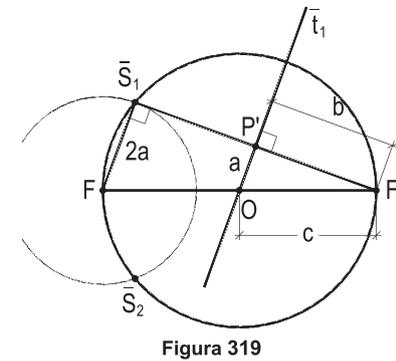
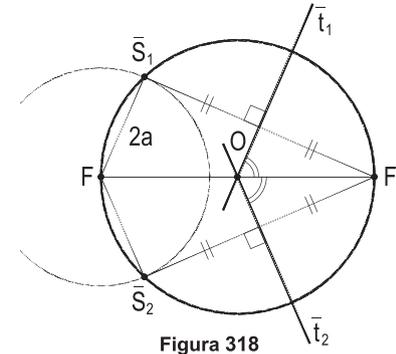
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{b}{a} \quad (1)$$

Sendo β o ângulo que as diagonais do retângulo $CDD'C'$ (construído sobre os eixos) formam com o eixo real (Figura 321), o triângulo OAC dá:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{b}{a} \quad (2)$$

Comparando (1) e (2), vem $\alpha = \beta$.

Mas, então, se as assíntotas passam pelo centro da hipérbole, com a mesma inclinação em relação ao eixo real que as diagonais do retângulo $CDD'C'$ (Figura 321), elas coincidem, respectivamente, com as retas suportes das diagonais desse retângulo.



5 – O cosseno do ângulo que a assíntota forma com o eixo real é igual ao inverso da excentricidade da hipérbole.

De fato, temos (Figura 321):

$$\cos \beta = \frac{a}{c} \quad \therefore \quad \boxed{\cos \beta = \frac{1}{e}}$$

134 – Observação

Todas as propriedades apresentadas para as tangentes à hipérbole são, evidentemente, válidas para as assíntotas.

Assim, por exemplo, temos que o simétrico de um foco em relação a uma assíntota pertence à circunferência diretora relativa ao outro foco (número 111) e que as projeções ortogonais dos focos sobre as assíntotas pertencem (Figura 322) à circunferência principal da hipérbole (número 117).

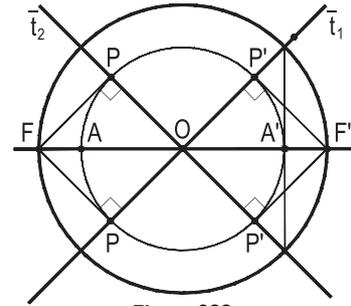


Figura 322

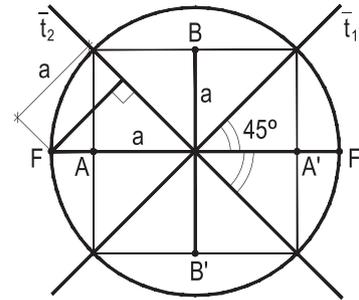


Figura 323

135 – Hipérbole equilátera

Do que foi visto, resultam, para a hipérbole equilátera, as seguintes propriedades:

1 – As assíntotas são perpendiculares entre si (Figura 323).

2 – As assíntotas formam 45° com cada um dos dois eixos da hipérbole.

3 – As distâncias dos focos às assíntotas são iguais aos semieixos, iguais, da hipérbole (Figura 323).

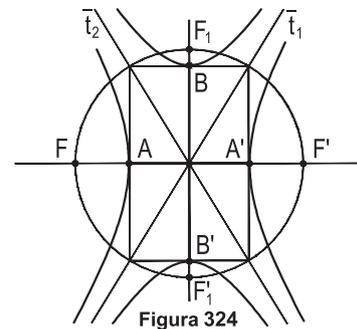


Figura 324

136 – Hipérboles conjugadas

Por definição, duas hipérboles são ditas conjugadas quando o eixo real de uma é o imaginário da outra e reciprocamente (Figura 324).

É claro, então, que duas hipérboles conjugadas possuem as mesmas assíntotas e a mesma distância focal. E mais, os focos de uma das hipérboles podem ser considerados como resultantes de uma rotação de 90° , em torno do centro comum, dos focos da outra (Figura 324).

Como caso particular notável, vale observar que, dada uma hipérbole equilátera, a que lhe é conjugada é também equilátera e igual à dada, podendo inclusive ser considerada como proveniente de uma rotação de 90° da primeira, em torno do centro comum às duas (Figura 325).

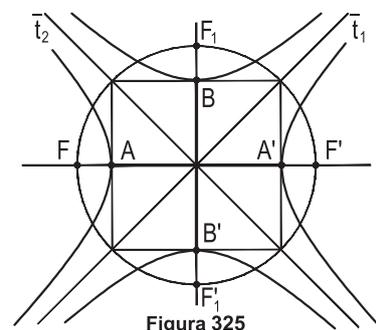


Figura 325

137 – Teorema

Os segmentos formados sobre uma reta paralela a um dos eixos entre um ponto corrente e as assíntotas têm por média geométrica o semieixo considerado.

Demonstração: Consideremos uma hipérbole referida a um sistema cartesiano em que os eixos da curva sejam os próprios coordenados, os focos pertencendo ao das abscissas e, por um ponto M qualquer da curva, tracemos as paralelas r e s , respectivamente, aos eixos real e imaginário, obtendo, sobre as assíntotas, respectivamente, os pontos P e Q (Figura 326) e K e L (Figura 327).

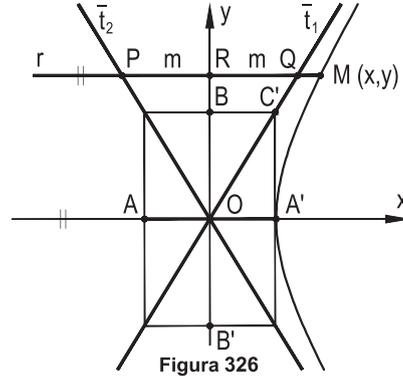


Figura 326

Deseja-se instituir as relações:

$$MP \cdot MQ = a^2 \quad \text{e} \quad MK \cdot ML = b^2$$

Façamos $PR = RQ = m$ (Figura 326)

e $KJ = JL = n$ (Figura 327).

Os triângulos ORQ (Figura 326) e OJK (Figura 327), semelhantes a OBC' , fornecem:

$$\frac{m}{y} = \frac{a}{b} \quad \therefore \quad m = \frac{ay}{b} \quad \text{e} \quad \frac{n}{x} = \frac{b}{a} \quad \therefore \quad n = \frac{bx}{a}$$

Assim, temos:

$$MP \cdot MQ = (x + m)(x - m) = x^2 - m^2 \quad \text{e} \quad MK \cdot ML = (n - y)(n + y) = n^2 - y^2$$

$$\therefore MP \cdot MQ = x^2 - \left(\frac{ay}{b}\right)^2 = \frac{b^2 x^2 - a^2 y^2}{b^2}$$

$$\text{e} \quad MK \cdot ML = \left(\frac{bx}{a}\right)^2 - y^2 = \frac{b^2 x^2 - a^2 y^2}{a^2}$$

Mas, como M é ponto da hipérbole, vale (número 104) escrever:

$$b^2 x^2 - a^2 y^2 = a^2 b^2$$

$$\text{Logo:} \quad MP \cdot MQ = \frac{a^2 b^2}{b^2} \quad \therefore \quad MP \cdot MQ = a^2$$

$$\text{e} \quad MK \cdot ML = \frac{a^2 b^2}{a^2} \quad \therefore \quad MK \cdot ML = b^2$$

Estas duas relações provam o teorema.

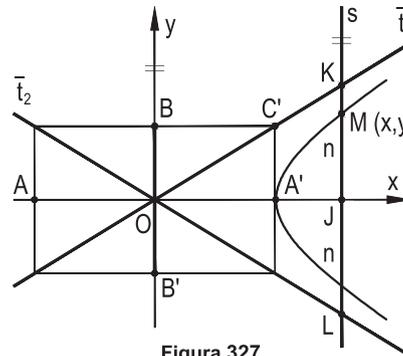


Figura 327

138 – Determinação dos eixos e dos focos de uma hipérbole dada pelas assíntotas e por um ponto corrente

Dada uma hipérbole por suas duas assíntotas \bar{t}_1 e \bar{t}_2 e por um ponto corrente M, pede-se determinar seus eixos e seus focos.

Para tanto, traça-se, inicialmente, as bissetrizes dos ângulos formados pelas assíntotas que, como se sabe, são os suportes dos eixos (Figuras 328 e 329).

Traça-se, a seguir, pelo ponto M, a paralela a um dos eixos, obtendo, por interseção com as assíntotas, os pontos P e Q (Figura 328) ou K e L (Figura 329).

Constrói-se, então, a média geométrica entre os segmentos MP e MQ (Figura 328), obtendo-se o valor a do semieixo real (número 137) ou a média geométrica entre os segmentos MK e ML (Figura 329), obtendo-se o valor b do semieixo imaginário (número 137).

Aplicando, em posição, o valor do semieixo obtido e construindo o retângulo CC'D'D, apoiado pelos vértices nas assíntotas, e traçando o círculo circunscrito a esse retângulo (Figuras 328 e 329), ficam determinados os eixos AA' (real) e BB' (imaginário) e os focos F e F' da hipérbole dada.

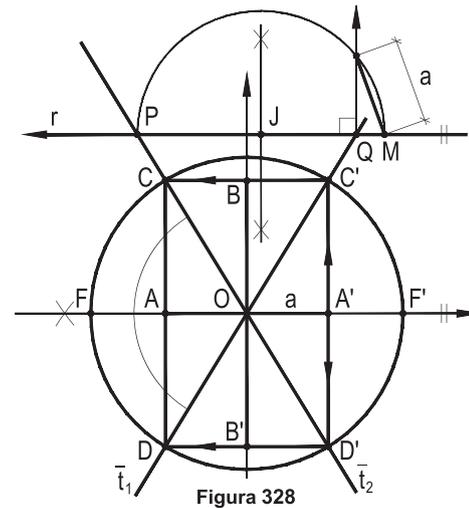


Figura 328

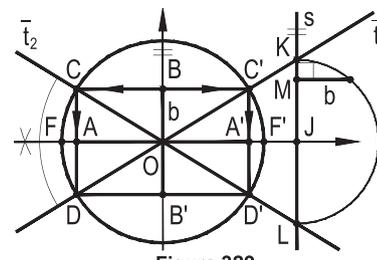


Figura 329

139 – Determinação do eixo imaginário e dos focos a partir do eixo real e de um ponto corrente

Análise: Consideremos as assíntotas \bar{t}_1 e \bar{t}_2 de uma hipérbole de eixo real AA', bem como a reta MQP, paralela a AA', traçada por um ponto M da curva (Figura 330).

Como a média geométrica entre os segmentos MP e MQ é igual ao semieixo real a da hipérbole (número 137), o segmento MZ tangente à circunferência de diâmetro PQ será igual àquele semieixo (*Geometria Plana*, número 239).

E, porque o ângulo MZR é reto (Figura 330), o ponto Z pertencerá, também, à circunferência de diâmetro MR.

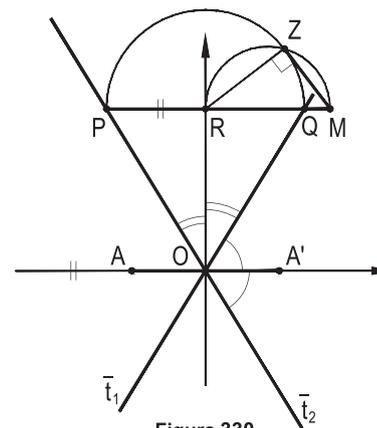


Figura 330

Construção: Dados o eixo real AA' e o ponto corrente M , traça-se, inicialmente, a mediatriz de AA' que serve de suporte ao eixo imaginário, bem como a paralela r , por M , a AA' (Figura 331), obtendo-se, por interseção, o ponto R .

Constrói-se, então, a semicircunferência de diâmetro MR e aplica-se a corda MZ igual ao semieixo real.

Com centro em R e raio RZ , descreve-se a circunferência que produz, na reta r , os pontos P e Q de passagem das assíntotas (Figura 331).

E, obtidas as assíntotas, basta construir o retângulo $CC'D'D$ e a circunferência a ele circunscrita (Figura 331), para determinar o eixo imaginário BB' e os focos F e F' procurados.

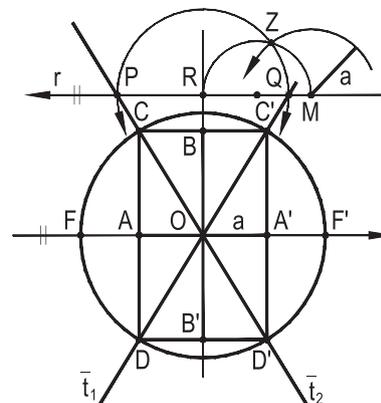


Figura 331

140 – Determinação do eixo real e dos focos a partir do eixo imaginário e de um ponto corrente

Análise: Consideremos as assíntotas \bar{t}_1 e \bar{t}_2 de uma hipérbole de eixo imaginário BB' , bem como a reta KML , paralela a BB' , traçada por um ponto M da curva (Figura 332).

O segmento MZ , por representar a média geométrica entre MK e ML (*Geometria Plana*, número 197.2), será igual ao semieixo imaginário (número 137).

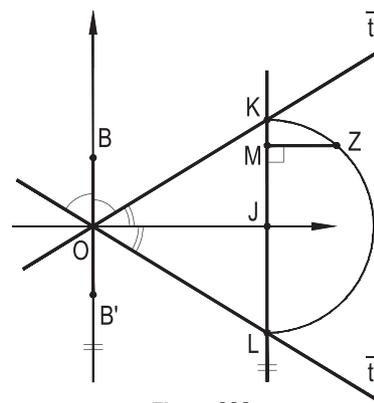


Figura 332

Construção: Dados o eixo imaginário BB' e o ponto corrente M , traça-se, inicialmente, a mediatriz de BB' , que serve de suporte ao eixo real, bem como a reta s , pertencente a M e paralela a BB' (Figura 333), obtendo-se, por interseção, o ponto J .

Constrói-se, então, o segmento MZ , perpendicular à reta s e igual ao semieixo imaginário, e descreve-se a circunferência de centro J e raio JZ que produz, na reta s , os pontos K e L de passagem das assíntotas (Figura 333).

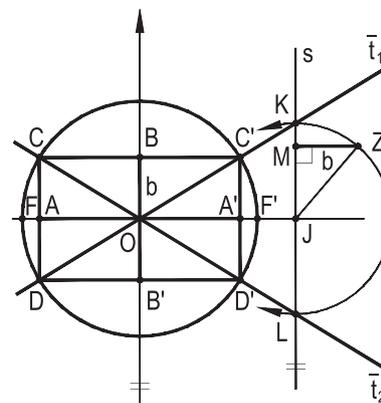


Figura 333

E, obtidas as assíntotas, basta construir o retângulo $CC'D'D$ e a circunferência a ele circunscrita, para determinar o eixo real AA' e os focos F e F' procurados (Figura 333).

141 – Teorema

O produto das distâncias de um ponto qualquer de uma hipérbole às assíntotas é constante.

Demonstração: Consideremos uma hipérbole de eixos AA' e BB' e assíntotas \bar{t}_1 e \bar{t}_2 e tracemos, por um ponto M qualquer da curva, as perpendiculares MQP , MG e MH , respectivamente, ao eixo imaginário e às assíntotas (Figura 334).

Por terem lados respectivamente perpendiculares, temos:

$$\alpha = \gamma \quad (1) \quad \text{e} \quad \beta = \varphi \quad (2)$$

Porque as assíntotas são simétricas em relação ao eixo imaginário, vem:

$$\gamma = \varphi \quad (3)$$

As relações (1), (2) e (3) permitem escrever:

$$\alpha = \beta = \gamma$$

E, então, concluir que os triângulos MGQ e MHP são semelhantes ao triângulo OBC' .

Pois, fazendo $MG = d_1$ e $MH = d_2$, aquelas semelhanças fornecem:

$$\frac{MG}{MQ} = \frac{OB}{OC'} \quad \therefore \quad \frac{d_1}{MQ} = \frac{b}{c} \quad (4)$$

$$\frac{MH}{MP} = \frac{OB}{OC'} \quad \therefore \quad \frac{d_2}{MP} = \frac{b}{c} \quad (5)$$

Multiplicando, membro a membro, as relações (4) e (5), temos:

$$\frac{d_1 d_2}{MP \cdot MQ} = \frac{b^2}{c^2} \quad \therefore \quad d_1 d_2 = MP \cdot MQ \cdot \frac{b^2}{c^2}$$

E como (número 137), $MP \cdot MQ = a^2$:

$$d_1 d_2 = \frac{a^2 b^2}{c^2}$$

Então, o produto das distâncias de um ponto qualquer de uma hipérbole às assíntotas é constante, como se queria demonstrar.

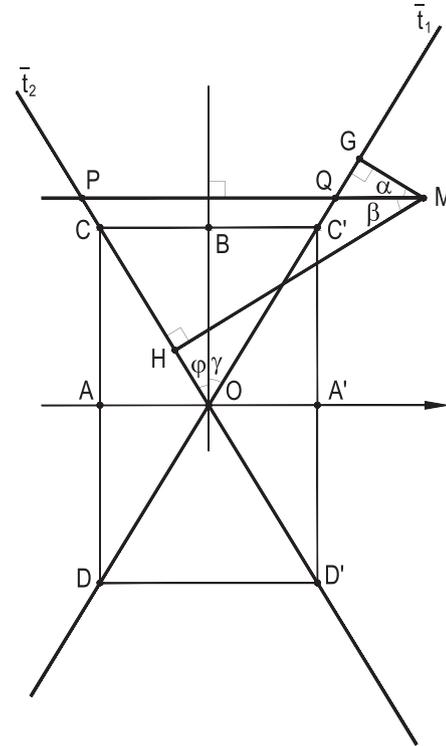


Figura 334

142 – Teorema

Uma hipérbole e suas assíntotas determinam, sobre uma secante qualquer, três segmentos consecutivos, sendo iguais o primeiro e o terceiro.

Demonstração: Sendo r uma secante genérica a uma hipérbole, designemos por M e M' os pontos em que ela encontra a curva e por X e X' os pontos segundo os quais ela corta as assíntotas \bar{t}_1 e \bar{t}_2 dessa hipérbole. Deseja-se provar a igualdade dos segmentos XM e $X'M'$ formados entre a curva e cada assíntota, quer a secante corte apenas um dos ramos (Figura 335), quer ela corte os dois ramos (Figura 336) da hipérbole.

Estudemos, em conjunto, as duas hipóteses. Para tanto, consideremos as perpendiculares MG , MH , $M'G'$ e $M'H'$ às assíntotas e os triângulos retângulos XGM , $XG'M'$, $X'H'M'$ e $X'HM$ (Figuras 335 e 336). Das semelhanças entre os dois primeiros e os dois últimos, vem:

$$\frac{XM}{XM'} = \frac{MG}{M'G'} \quad \text{e} \quad \frac{X'M}{X'M'} = \frac{MH}{M'H'}$$

que, multiplicadas membro a membro, dão:

$$\frac{XM \cdot X'M}{XM' \cdot X'M'} = \frac{MG \cdot MH}{M'G' \cdot M'H'}$$

Mas como (número 141) $MG \cdot MH = M'G' \cdot M'H'$,

$$\frac{XM \cdot X'M}{XM' \cdot X'M'} = 1 \quad \therefore \quad XM \cdot X'M = XM' \cdot X'M'$$

Ou seja, $m \cdot (q + n) = (q + m)n$ (Figura 335).

$$\therefore \quad mq + mn = qn + mn \quad \therefore \quad mq = qn \quad \therefore \quad m = n$$

$$\therefore \quad \text{Logo} \quad \boxed{XM = X'M'} \quad (\text{Figura 335})$$

$$\text{Analogamente,} \quad \boxed{XM' = X'M} \quad (\text{Figura 336})$$

Então, uma hipérbole e suas assíntotas determinam, sobre uma secante qualquer, três segmentos consecutivos, sendo iguais o primeiro e o terceiro.

143 – Corolário

O ponto de contato de uma tangente genérica a uma hipérbole é o ponto médio do segmento limitado sobre a tangente pelas assíntotas. Porque, sendo a tangente t a posição limite ocupada por uma secante XX' à hipérbole, paralela a t , quando se aproximam os pontos M e M' que ela tem em comum com a curva, dos três segmentos XM , MM' e $M'X'$, anulando-se o central (Figura 337), restam apenas o primeiro e o último, iguais.

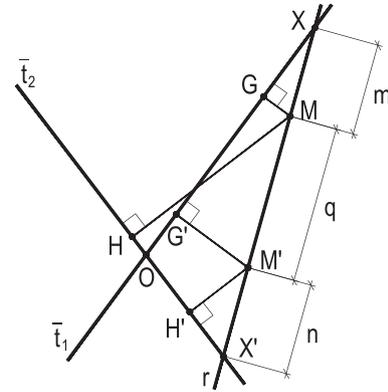


Figura 335

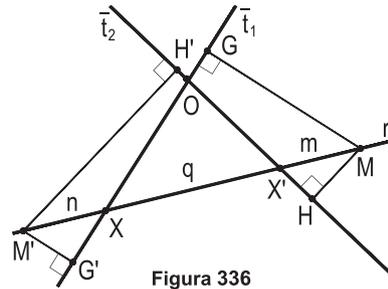


Figura 336

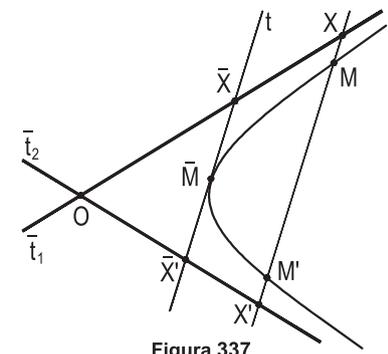


Figura 337

144 – Construção direta da hipérbole a partir das assíntotas e de um ponto corrente

Sendo dados as duas assíntotas \bar{t}_1 e \bar{t}_2 e um ponto corrente M de uma hipérbole, para construir diretamente a curva, isto é, sem determinar seus eixos nem seus focos, basta traçar, pelo ponto dado M , uma série de transversais às assíntotas, e, sobre cada uma delas, aplicar, a partir da segunda assíntota atingida, um segmento igual ao que fica limitado, sobre as transversais, entre M e a primeira assíntota (Figura 338).

Assim, por exemplo, com a primeira transversal r_1 , repetindo-se o valor do segmento formado MX_1 , a partir do corte na segunda assíntota, obtém-se o ponto M_1 da hipérbole, com $M_1X'_1 = MX_1$.

Naturalmente (número 142), o processo produz, a partir do ponto dado M , pontos dos dois ramos da hipérbole.

É claro, ainda, que, pelos novos pontos correntes obtidos, podem ser enviadas outras transversais às assíntotas, ampliando-se a quantidade de pontos da curva (Figura 338).

145 – Construção da tangente num ponto corrente M , dados as assíntotas e o ponto M

Dados as duas assíntotas \bar{t}_1 e \bar{t}_2 e um ponto corrente M de uma hipérbole, para construir a tangente à curva, em M , basta determinar, dentre as retas que passam por M , aquela que limite, entre as assíntotas, um segmento XY , do qual M seja o ponto médio (número 143).

E isso se consegue, por exemplo, traçando a paralela ME a \bar{t}_1 e construindo o ponto Y , simétrico de O em relação a E (Figura 339), numa homotetia de razão 2 e polo O .

A reta YM , assim formada, será a tangente t procurada.

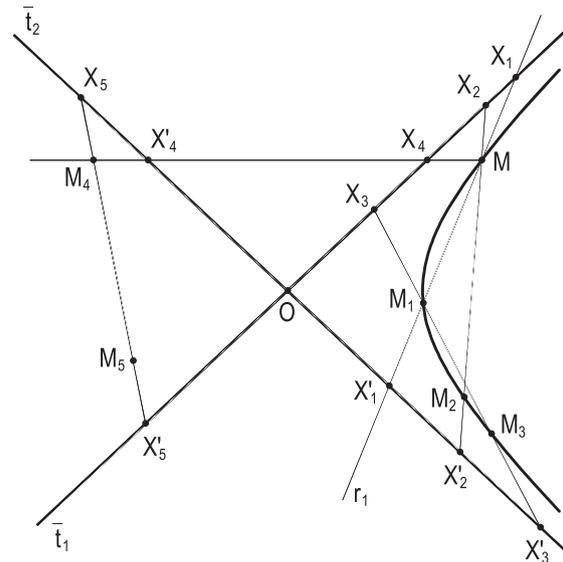


Figura 338

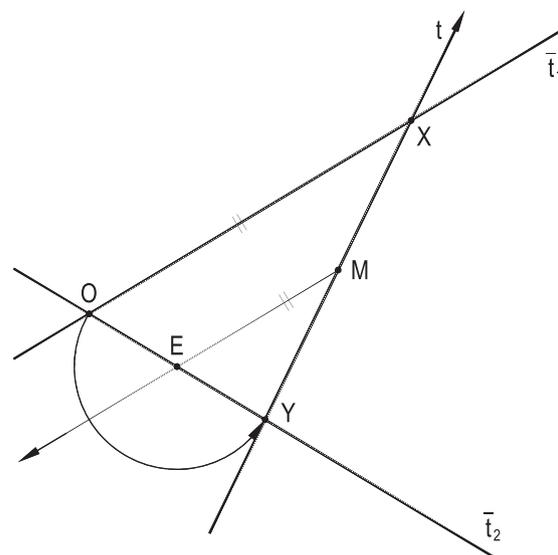


Figura 339

146 – Problemas resolvidos

Neste grupo de problemas, trataremos de hipérboles de eixos AA' , real, e BB' , imaginário, focos F e F' , centro O , ponto corrente M e assíntotas \bar{t}_1 e \bar{t}_2 , fornecendo dados variados caso a caso, pedindo, sempre, que sejam determinados os focos e os eixos da curva.

119 – Dados B , A' e a direção w do eixo real.

Resolução: A perpendicular p a w por B dá o centro O (Figura 340).

120 – Dados A , B e a reta w pertencente a O .

Resolução: Os arcos capazes de 90° para AB cortam w dando O (duas soluções, a segunda indicada por O') (Figura 341).

121 – Dados B , F e a reta w pertencente ao segundo foco F' .

Resolução: O arco capaz de 90° para BF corta a homotética \bar{w} de w , para o polo F , na razão $(1/2)$, proporcionando o centro O (duas soluções) e, então, F' . Com centro em B e raio OF , vêm os vértices A e A' (Figura 342).

122 – Dados as duas assíntotas \bar{t}_1 e \bar{t}_2 e o valor $2c$ da distância focal.

Resolução: As bissetrizes b_1 e b_2 dos ângulos formados pelas assíntotas são os suportes dos eixos e a circunferência (O, c) proporciona os focos F e F' (duas soluções) e o retângulo inscrito $CC'D'D$ entrega os dois eixos (Figura 343). A segunda solução é a hipérbole conjugada da completada.

123 – Dadas as duas assíntotas \bar{t}_1 e \bar{t}_2 , A equidistante de L e K , dados.

Resolução: A é a interseção da bissetriz b_1 com a mediatriz m de LK , com uma segunda solução \bar{A} , para a segunda bissetriz (Figura 344).

124 – Dados os dois focos F e F' e um ponto corrente M .

Resolução: Repetido o raio vetor MF' sobre MF , vem MJ e $FJ = 2a$. A mediatriz de FF' dá o centro O .

Aplicada a medida a , metade de FJ sobre o eixo focal, a partir do centro O , obtém-se os vértices A e A' e determina-se a medida $c = OF$, metade de FF' .

Enfim, a circunferência (A, c) corta a mediatriz de FF' , proporcionando os extremos B e B' do eixo BB' (Figura 345).

119

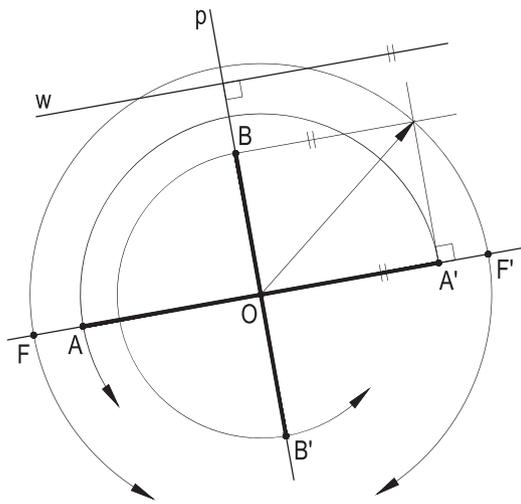


Figura 340

120

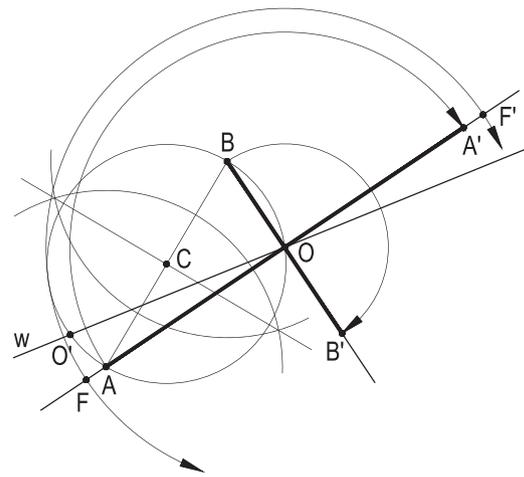


Figura 341

121

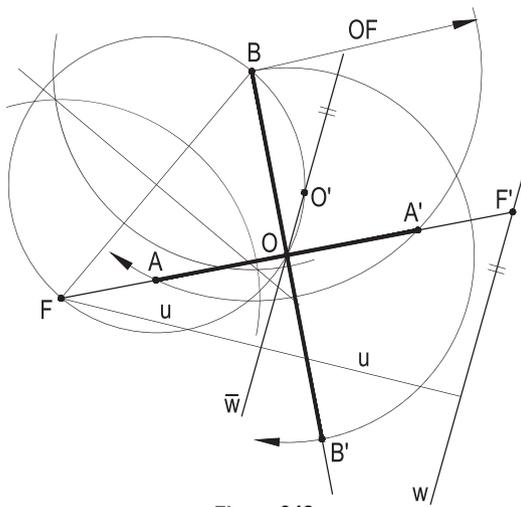


Figura 342

122

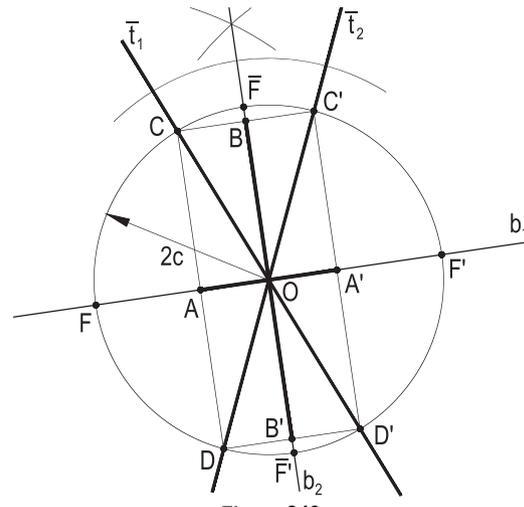


Figura 343

123

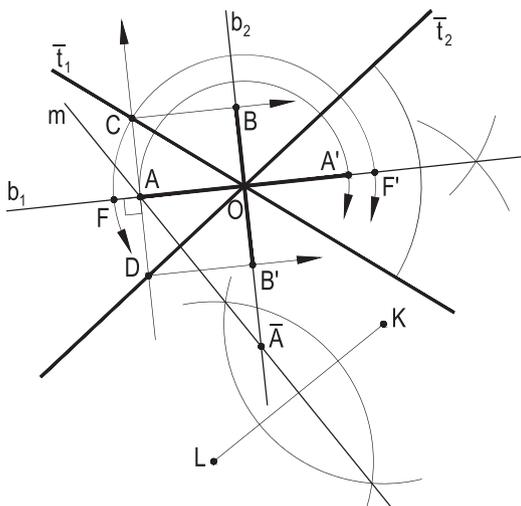


Figura 344

124

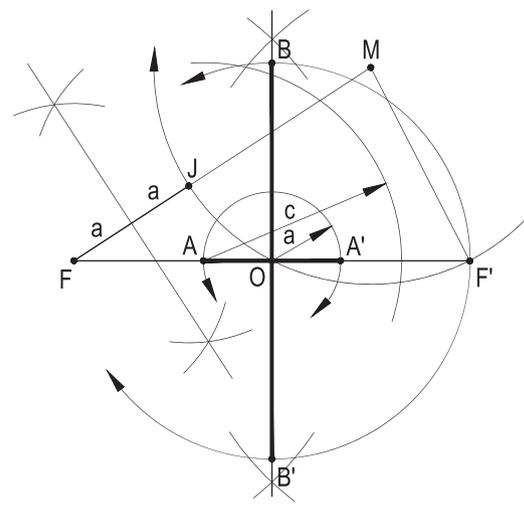


Figura 345

No próximo conjunto, pede-se, sempre, a partir dos dados, construir os dois eixos AA' , real, e BB' , imaginário, de cada hipérbole estudada.

125 – Dadas as assíntotas \bar{t}_1 e \bar{t}_2 , sabendo que o vértice A equidista das retas secantes dadas r e s .

Resolução: A há de ser um dos pontos de corte de cada bissetriz b_1 e b_2 dos ângulos formados por r e s com as bissetrizes dos ângulos formados pelas assíntotas, com quatro soluções, apenas uma completada na Figura 346.

126 – Dada uma assíntota \bar{t} e a semirreta Fx , com origem no foco F , suporte do eixo real.

Resolução: \bar{t} e Fx cortam-se no centro O da curva (Figura 347).

127 – Hipérbole equilátera, dados uma assíntota \bar{t} , as retas r e s que passam pelo extremo B do eixo imaginário e pelo centro O da curva e seu valor $2b$. Basta uma solução.

Resolução: Sobre uma reta w arbitrada, mas inclinada de 45° em relação a \bar{t} , aplica-se a medida b e com uma translação desse segmento na direção de r , com \bar{r} , encontra-se, no cruzamento com s , o centro O da curva, recaindo-se no problema anterior (Figura 348).

128 – Dada a reta \bar{t}_1 , assíntota de uma hipérbole equilátera, contendo o ponto dado O , centro da curva, e um ponto P corrente, também dado, pede-se, sem determinar seus focos e seus eixos, obter mais quatro pontos da curva.

Resolução: Simples, pela aplicação do detalhado no número 144, obtendo-se os pontos P_1, P_2, P_3 e P_4 (Figura 349).

129 – Determinar os focos da hipérbole de eixos AA' e BB' , sabendo que seu centro O é equipotente em relação às circunferências secantes dadas (C) e (D) . Dados A e B .

Resolução: O centro O há de ser a interseção do eixo radical JK de (C) e (D) com a circunferência de diâmetro AB (Figura 350), com duas soluções.

130 – Determinar o eixo não transversal BB' da hipérbole que tem seu eixo transversal AA' na semirreta dada. Fx , conhecendo as medidas $JK = a + c$ e $PQ = c - a$, sendo a e c as medidas do semieixo real e da semidistância focal. F é um foco da curva.

Resolução: Marcados os vértices A e A' e determinada a mediatriz m de AA' , ela corta a circunferência (A, c) , proporcionando os pontos B e B' (Figura 351).

125

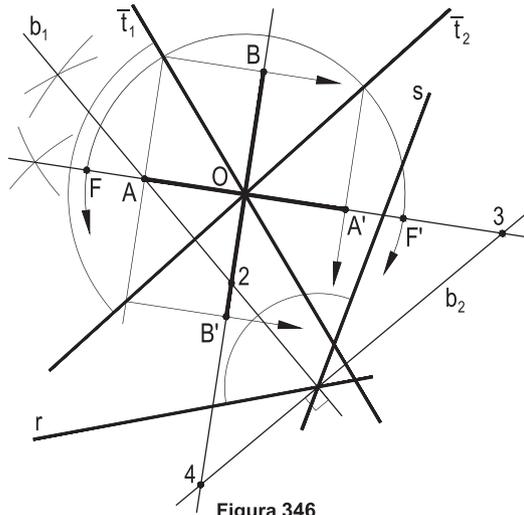


Figura 346

126

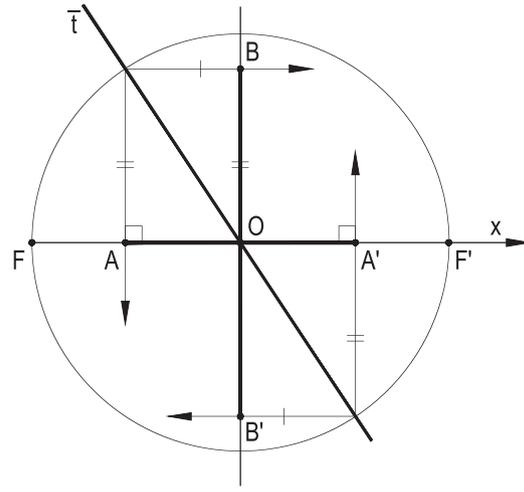


Figura 347

127

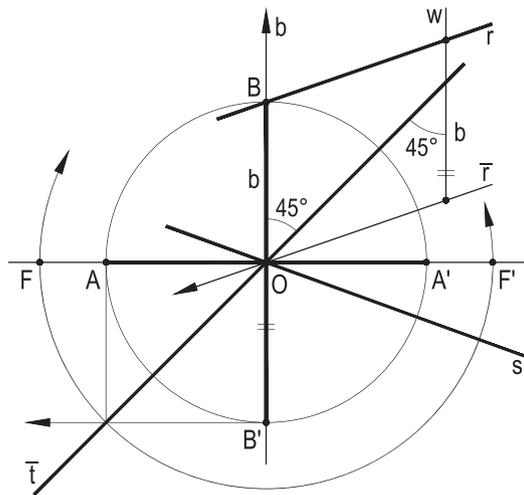


Figura 348

128

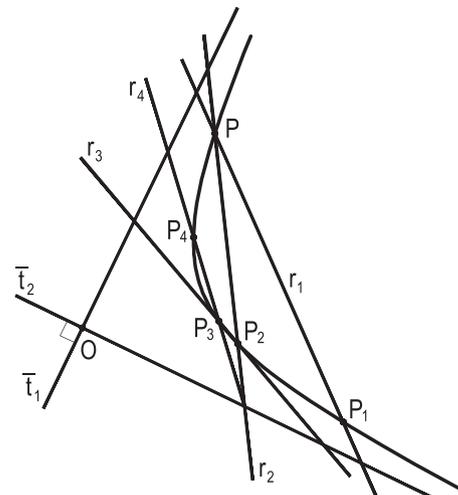


Figura 349

129

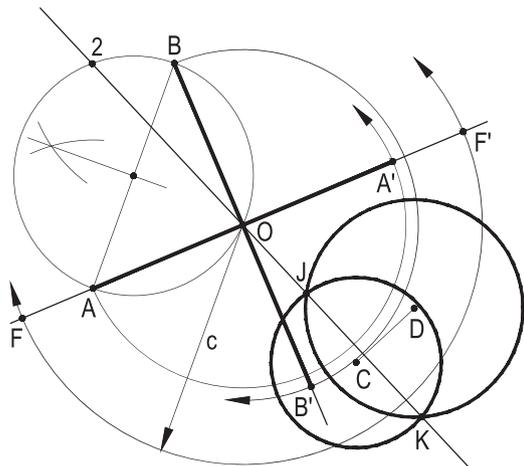


Figura 350

130

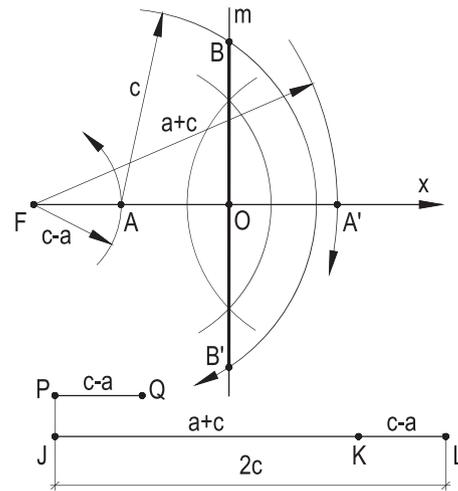


Figura 351

131 – Determinar os vértices e os focos da hipérbole de assíntotas dadas \bar{t}_1 e \bar{t}_2 , sabendo que o ortocentro H do triângulo dado XYZ pertence à curva.

Resolução: Determinado o ponto H (Figura 352) e traçadas as bissetrizes b_1 e b_2 dos ângulos formados por \bar{t}_1 e \bar{t}_2 , a aplicação da construção detalhada no item 139 resolve a questão, com uma segunda solução, não incluída, correspondente à pertinência dos focos à segunda bissetriz b_2 (Figura 352).

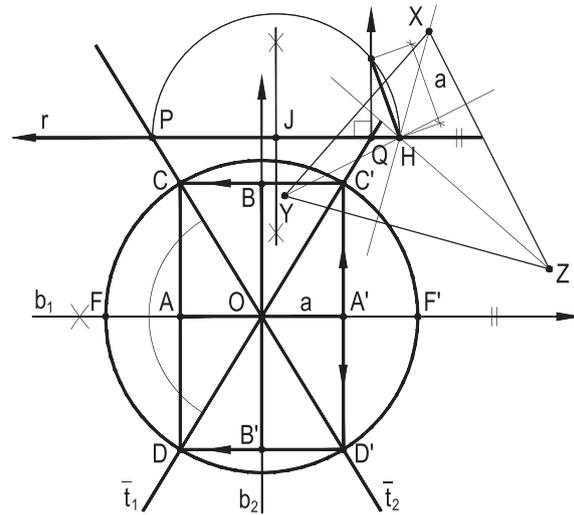


Figura 352

132 – Mesmo problema, sendo, agora, H o circuncentro do triângulo dado XYZ .

Resolução: Idêntica à do problema anterior, operando-se, neste exemplo, com a busca do semieixo menor b , tal como detalhado no item 140 (Figura 353), mais uma vez com duas soluções.

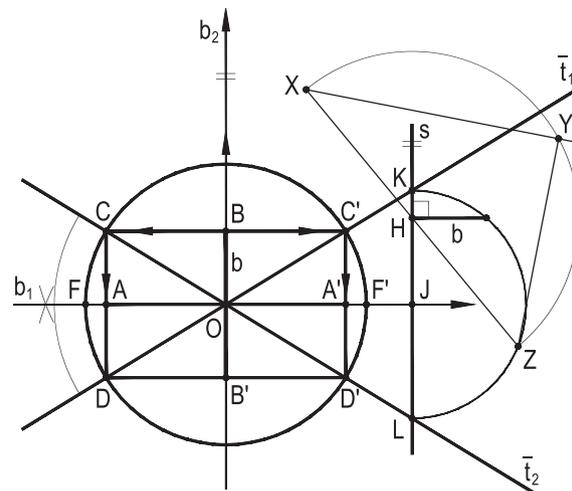


Figura 353

133 – Determinar os vértices e os focos das duas hipérboles equiláteras conjugadas, conhecendo seu centro comum O , a reta r , pertencente a O , que serve de suporte ao eixo focal de uma delas, além do ponto M pertence à primeira delas.

Resolução: Imediata, por terem que ser ambas as assíntotas comuns às duas curvas inclinadas de 45° em relação a reta r (Figura 354).

Com a mesma construção utilizada no problema anterior, obtém-se a medida MN dos semieixos iguais, no caso, das duas hipérboles equiláteras (Figura 354).

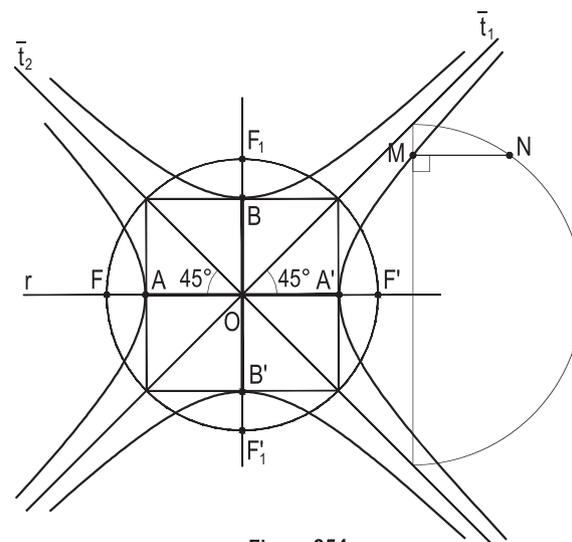


Figura 354

CAPÍTULO VIII

DIÂMETROS CONJUGADOS DA HIPÉRBOLE

147 – Diâmetros da hipérbole

Consideremos um sistema genérico de cordas paralelas de uma hipérbole de assíntotas \bar{t}_1 e \bar{t}_2 e estudemos o diâmetro relativo à direção d , dessas cordas.

Para tanto, analisemos uma corda NN' qualquer do sistema (Figura 355). Porque $XN = X'N'$ (número 142), o ponto médio M da corda NN' será também o médio do segmento XX' limitado entre as assíntotas sobre a reta que serve de suporte àquela corda (Figura 355).

Mas então, porque os triângulos OXX' formados são todos, aos pares, homotéticos, em relação ao centro O da hipérbole, é imediato concluir que os pontos médios de todas as cordas do sistema pertencem a uma reta que contém o centro da hipérbole.

Finalmente, porque entre os pontos C e C' comuns àquela reta e à hipérbole não existem cordas (Figura 355), o diâmetro obtido consta de duas semirretas Cz e $C'z'$.

Como a direção d das cordas escolhidas foi genérica, conclui-se que a hipérbole possui uma infinidade de diâmetros, cada um constituído por um par de semirretas exteriores, com sentidos opostos, limitados pelos dois ramos da curva, tendo por suporte uma reta pertencente ao centro da hipérbole (Figura 355).

Por questões de interesse métrico, convencionou-se, no entanto, designar por diâmetro da hipérbole, relativo a uma direção d , o segmento CC' limitado entre os dois ramos da curva (Figura 355), isto é, entre as origens C e C' daquelas semirretas Cz e $C'z'$.

Assim, passaremos a dizer que os diâmetros da hipérbole são segmentos limitados entre os dois ramos da curva, todos tendo por ponto médio o centro O da hipérbole.

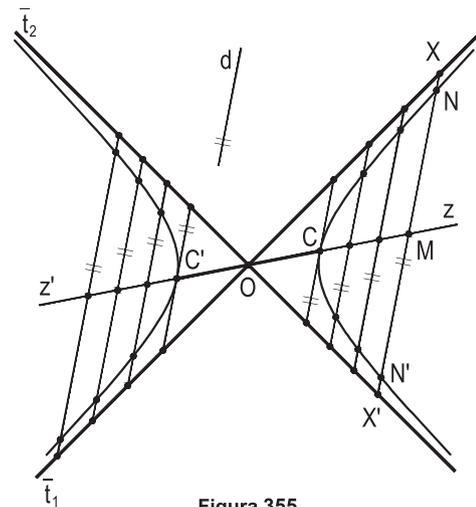


Figura 355

148 – Observação

Embora evidente, vale observar que as tangentes t e t' nos extremos de um diâmetro são paralelas às cordas que definem esse diâmetro (Figura 356).

149 – Diâmetros conjugados da hipérbole

Consideremos, para uma hipérbole de assíntotas \bar{t}_1 e \bar{t}_2 , o diâmetro MM' relativo a uma direção genérica d , bem como as tangentes GG' e HH' e o paralelogramo $GG'H'H$, cujos vértices são os pontos de encontro daquelas duas tangentes com as assíntotas da hipérbole (Figura 357).

Evidentemente, o lugar geométrico dos pontos médios dos segmentos paralelos ao diâmetro MM' e apoiados pelos extremos nas duas assíntotas é uma reta s (Figura 357) que, por passar pelos pontos N e N' , médios dos lados GH e $G'H'$ do paralelogramo $GG'H'H$, é paralela à reta d .

Embora NN' não seja diâmetro da hipérbole, porque os segmentos paralelos a MM' não são cordas da curva, convencionou-se dizer que o segmento NN' é o diâmetro conjugado de MM' .

Assim, dois diâmetros conjugados de uma hipérbole são tais que um sempre encontra a curva e o outro não, e inversamente em relação à hipérbole conjugada da considerada.

150 – Observações

1 – O paralelogramo construído sobre dois diâmetros conjugados tem suas diagonais sobre as assíntotas da hipérbole.

2 – Quando a hipérbole é equilátera, porque as assíntotas são perpendiculares (número 135), o paralelogramo construído sobre dois diâmetros conjugados quaisquer é um losango (Figura 358) e, em consequência, os dois diâmetros são sempre iguais entre si e simétricos em relação a cada assíntota (Figura 358).

3 – Reciprocamente, apenas a hipérbole equilátera tem diâmetros conjugados iguais.

De fato, essa igualdade implica na perpendicularidade das assíntotas, o que só ocorre quando a hipérbole é equilátera.

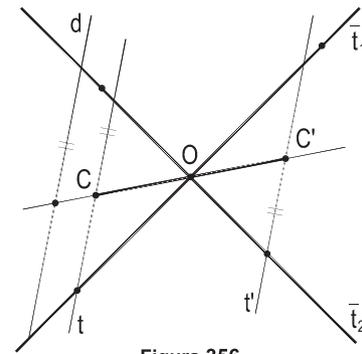


Figura 356

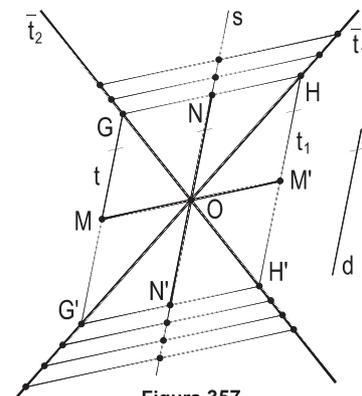


Figura 357

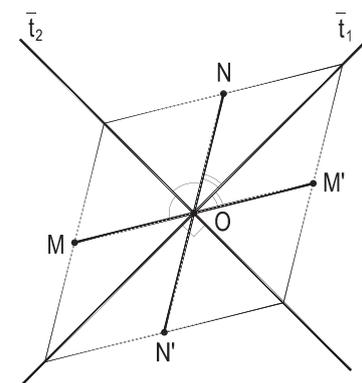


Figura 358

151 – Determinação dos eixos e dos focos a partir de dois diâmetros conjugados

Dados dois diâmetros conjugados MM' e NN' de uma hipérbole e sabendo-se qual dos dois encontra a curva (MM' , na Figura 359), para determinar eixos e focos da hipérbole, constrói-se, inicialmente, o paralelogramo $GG'H'H$ sobre os diâmetros dados, obtendo-se, por suas diagonais, as assíntotas \bar{t}_1 e \bar{t}_2 da hipérbole (Figura 359).

Conhecidas as assíntotas, constrói-se as bissetrizes dos ângulos por elas formados, obtendo-se os suportes dos eixos da curva (Figura 359), sabendo-se que a bissetriz r é a que contém o eixo real, por sua proximidade aos pontos correntes M e M' , extremos do diâmetro que toca a curva.

Traça-se, então, por M' , a paralela à segunda bissetriz s , encontrando-se os pontos 1 e 2, sobre as assíntotas, determinando-se, em seguida, a média geométrica $M'3$ entre $M'1$ e $M'2$, que, como se sabe (número 133.4), tem medida igual ao semieixo imaginário b .

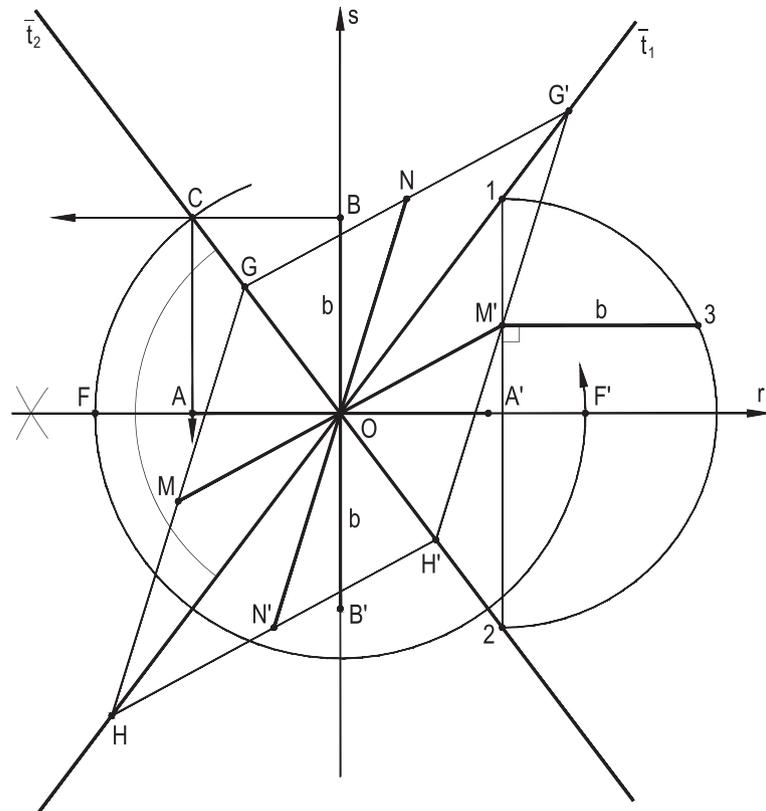


Figura 359

Aplica-se, então, esse valor b , a partir do centro O da hipérbole, sobre a bissetriz s , num sentido e no outro, determinando, em posição, o eixo imaginário BB' .

A paralela à bissetriz r , por B , encontrará a assíntota \bar{t}_2 num ponto C pertencente à circunferência focal da hipérbole (número 133.4) que pode, então, ser construída (Figura 359), produzindo, sobre r , os dois focos F e F' procurados.

Então, por simples projeção de C , sobre r , obtém-se o vértice A e, por simetria em relação a O , o segundo vértice A' da hipérbole.

Ficam, assim, determinados, em posição, os dois eixos e os dois focos da curva, tal como se desejava.

152 – Construção direta da hipérbole a partir de dois diâmetros conjugados

Dados dois diâmetros conjugados MM' e NN' de uma hipérbole e sabendo-se qual dos dois encontra a curva (MM' , na Figura 360), para construir diretamente a hipérbole, determina-se, inicialmente, as assíntotas \bar{t}_1 e \bar{t}_2 , com o auxílio do paralelogramo $GG'H'H$ traçado sobre os dois diâmetros dados (Figura 360).

Sabe-se (número 142) que todas as retas secantes a uma hipérbole determinam, entre suas assíntotas, três segmentos, o central, sendo uma corda da curva, e os outros dois, entre cada extremo dessa corda e cada assíntota, iguais entre si.

Então, para obter – a partir do conhecimento, em posição, de suas assíntotas \bar{t}_1 e \bar{t}_2 e de dois pontos correntes M e M' da hipérbole – novos pontos de passagem da curva, basta traçar secantes às assíntotas, por M e por M' , e, em cada uma delas, replicar o segmento, como $M'X$, sobre essa mesma secante, mas a partir da outra assíntota, obtendo-se, com o segmento $X'M'_1 = XM'$, novo ponto M'_1 da curva (Figura 360).

A repetição de tal procedimento, nesse mesmo ramo, produzirá tantos pontos P , quantos se deseje, para a construção da curva.

Aliás, para o outro ramo da hipérbole, tanto se pode repetir a construção acima, a partir do ponto M dado da curva, como indicado na Figura 360, quanto se utilizar secantes a partir do ponto M' , inicialmente estudado, visto que a propriedade em que se apoia a construção é válida também para secantes à hipérbole que atinjam suas duas assíntotas (número 142).

Por fim, para construções ainda mais precisas da curva, pode-se utilizar as tangentes em cada um dos pontos correntes obtidos, pela utilização da construção apresentada no número 145, pois a inclusão das tangentes orientará melhor as mudanças de curvatura da hipérbole procurada.

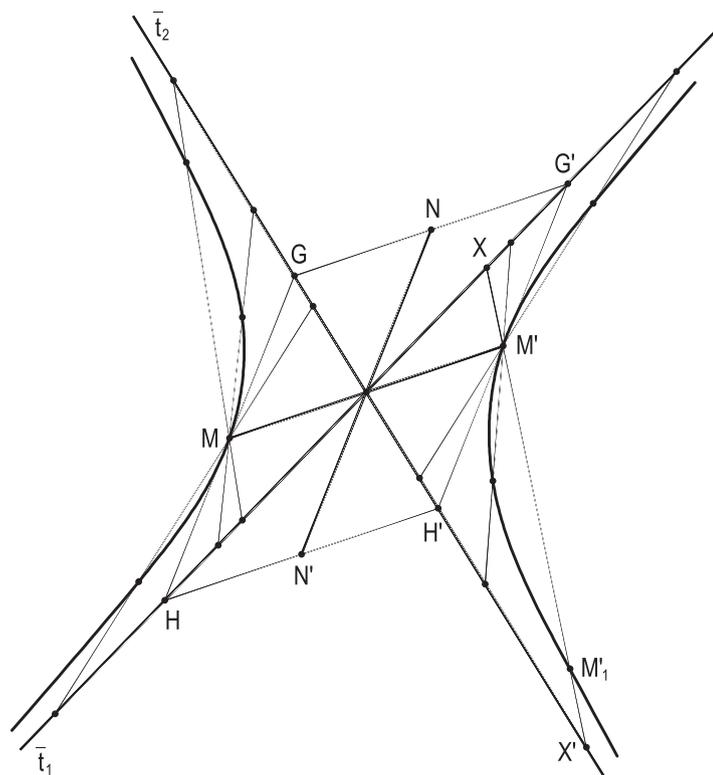


Figura 360

137 – O diâmetro MM' de uma hipérbole, correspondente à direção d , é igual ao seu conjugado NN' .

Dados MM' e a direção d , pede-se construir NN' .

Resolução: Se os dois diâmetros conjugados são iguais, a hipérbole tem que ser equilátera (número 150.3) e o paralelogramo $H_1H_2L_2L_1$ construído sobre os dois diâmetros iguais tem que ser um losango. Assim, marcado o ponto O , médio de MM' , e, com centro em M e raio MO , traçados $MH_1 = MH_2$ sobre a reta r , por M , paralela a d (Figura 364), basta completar tal losango e, pelo centro O da curva, traçar o diâmetro NN' pedido, naturalmente com a direção d .

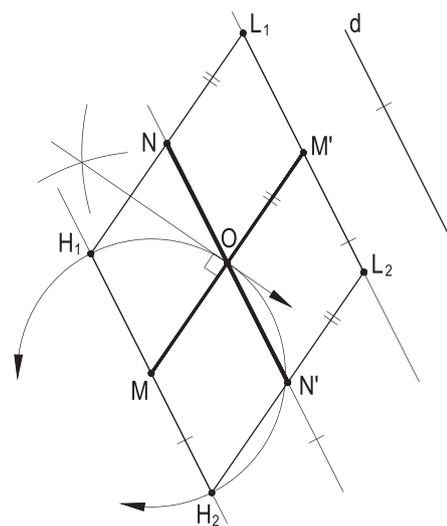


Figura 364

138 – De uma hipérbole equilátera são dados o centro O , um ponto corrente M e um ponto P de uma de suas assíntotas. Pede-se determinar os dois eixos da curva.

Resolução: Traçada a assíntota \bar{t}_1 , com a união de P a O , vem a segunda assíntota \bar{t}_2 , perpendicular à primeira, e, com o procedimento detalhado no número 140, consegue-se a medida $MJ = a$ dos dois semieixos da curva (Figura 365).

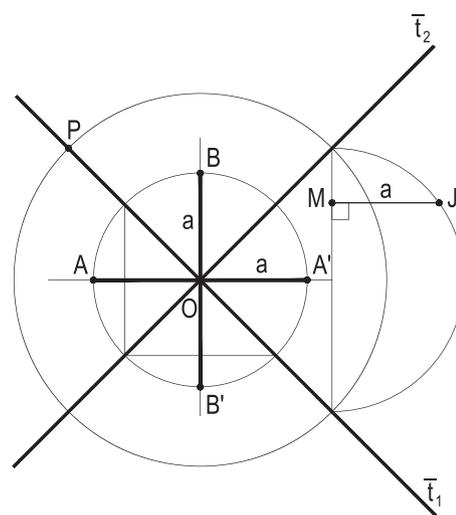


Figura 365

139 – Dois diâmetros conjugados MM' e NN' de uma hipérbole, que tem seu centro O sobre a reta dada w , formam, entre si, um ângulo dado α . Dados, ainda, os pontos M e N , pede-se construir os diâmetros MM' e NN' , sabendo que o ponto O fica à direita de MN .

Resolução: O arco capaz de α para MN proporciona o centro O , com duas soluções, a primeira completada na Figura 366 e a segunda apenas indicada pelo ponto 2, outra possível posição para o centro da hipérbole.

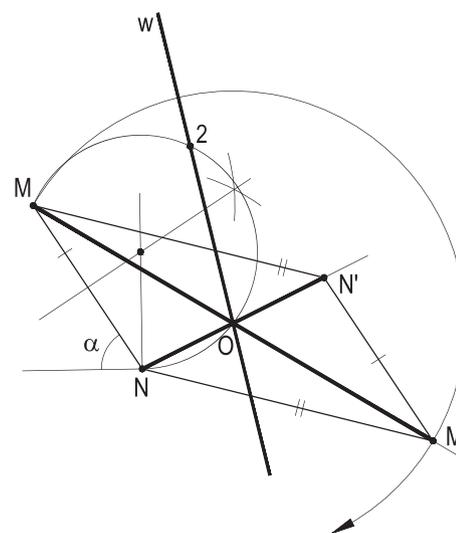


Figura 366

CAPÍTULO IX

PARÁBOLA

154 – Definições

Parábola é a curva plana cujos pontos equidistam de uma reta e de um ponto, fixos, pertencentes ao seu plano, respectivamente, denominados diretriz e foco da curva.

Assim são a reta d e o ponto F , na Figura 367.

O segmento formado por um ponto corrente M e pelo foco F é denominado raio vetor do ponto M .

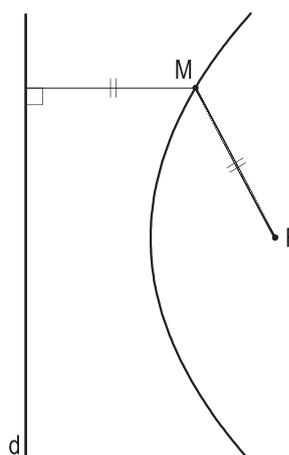


Figura 367

155 – Condição de existência

Para que exista uma parábola é necessário e suficiente que o foco seja exterior à diretriz.

De fato, se o foco pertencesse à diretriz, os únicos pontos equidistantes dos dois seriam os pertencentes à reta perpendicular a ela, traçada pelo foco. Isto é, não existiria a curva.

156 – Natureza

A parábola é uma curva contínua e aberta, constituída por um único ramo, o qual se situa inteiramente no semiplano, limitado pela diretriz, em que se encontra o foco.

Contínua, porque cada acréscimo infinitésimo atribuído ao raio vetor corresponde a um aumento infinitésimo igual da distância do ponto corrente à diretriz, o que sempre é possível; aberta, porque, naturalmente, o valor do raio vetor pode ser tão grande quanto se deseje, o que permite aumentar indefinidamente a distância do ponto corrente à diretriz. É constituída por apenas um ramo, porque não pode haver qualquer ponto da curva no semiplano com origem na diretriz e oposto ao foco, já que todos os pontos desse semiplano são mais próximos da diretriz que do foco.

157 – Processo espontâneo para a construção da parábola

Dados o foco F e a diretriz d , a própria definição da curva proporciona o seguinte processo:

Arbitrando-se um valor m maior que a metade da distância de F a d , constrói-se a paralela r à diretriz, dela distando m , no mesmo semiplano, em relação à diretriz, em que esteja o foco, e uma circunferência de centro no foco, de raio m , que corta r em dois pontos M_1 e M_2 (Figura 368) da curva.

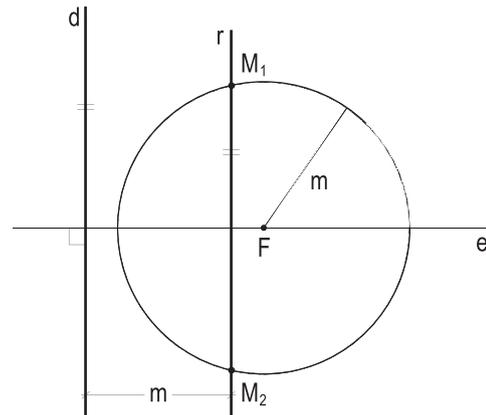


Figura 368

A variação de valor de m , naturalmente superior à metade da distância de F a d , proporciona novos pontos M da parábola procurada (Figura 369), tantos quantos se deseje.

158 – Eixo e vértice

Do próprio processo espontâneo (número 157) decorre a simetria dos pares de pontos da curva (como M_1 e M_2 , na Figura 368), em relação à reta e e pertencente ao foco e perpendicular à diretriz.

Conclui-se, então, que a parábola possui um eixo e um vértice.

O vértice, o ponto A em que aquela reta e encontra a curva, é, evidentemente, o ponto médio do segmento FS perpendicular à diretriz e limitado entre ela e o foco (Figura 370).

Como a curva é aberta e constituída por apenas um ramo, em termos precisos, o eixo é, então, a semirreta Ax (Figura 370) pertencente àquela reta e situada no mesmo semiplano, em relação à diretriz, ao qual pertence o foco, com origem no vértice A .

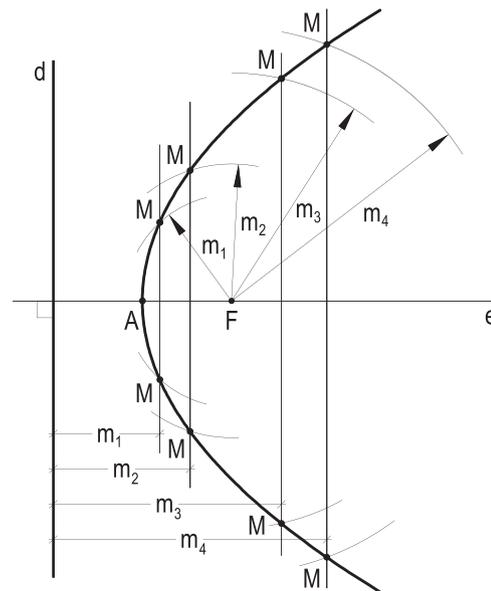


Figura 369

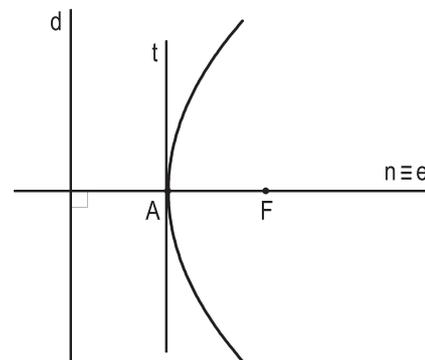


Figura 370

159 – Corda focal e parâmetro

Corda focal de uma parábola é a que pertence ao foco e é perpendicular ao eixo da curva.

Parâmetro é a ordenada, em relação ao eixo, do ponto da curva cuja projeção ortogonal sobre o eixo coincide com o foco. O valor do parâmetro é, pois, igual à metade da corda focal.

Note-se que o ponto M, da parábola, extremo do parâmetro MF, por equidistar do foco e da diretriz, proporciona a formação do quadrado MFSQ (Figura 371).

Assim, e é o que habitualmente se faz, o parâmetro da parábola pode ser medido pela distância FS, do foco à diretriz.

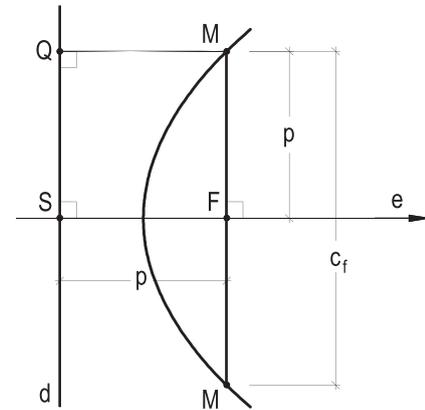


Figura 371

160 – Observação

Porque, quanto à grandeza, uma parábola fica perfeitamente determinada pelo valor de seu parâmetro, ou seja, da distância entre seu foco e sua diretriz, resulta que todas as parábolas são semelhantes. E que a razão de semelhança entre duas parábolas é igual à existente entre seus parâmetros.

161 – Teorema

O lugar geométrico dos pontos equidistantes de uma reta e de um ponto fixos, exteriores, é a parábola que tem por diretriz e foco a reta e o ponto fixos.

Demonstração: Sejam d e F a reta e o ponto fixos (Figura 372).

Consideremos a parábola de diretriz d e foco F.

Sabe-se que (número 154) para todos os pontos M da curva vale escrever:

$$MF = MQ \quad (1)$$

Sendo J e L pontos respectivamente exterior e interior à parábola, os triângulos JMF e LMF (Figura 372) fornecem, respectivamente:

$$MJ + JF > MF \quad (2)$$

$$e \quad LF - LM < MF \quad (3)$$

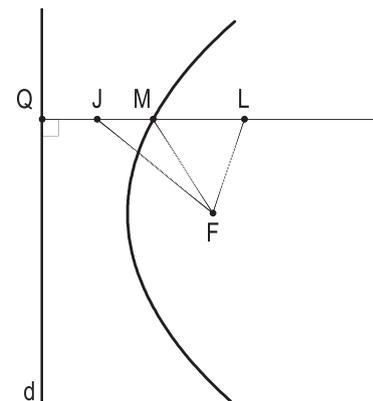


Figura 372

Desenvolvendo estas relações e aplicando (1), vem:

$$MQ - JQ + JF > MF \quad \therefore \quad -JQ + JF > 0 \quad \therefore \quad JF > JQ \quad (4)$$

$$LF - (LQ - MQ) < MF \quad \therefore \quad LF - LQ < 0 \quad \therefore \quad LF < LQ \quad (5)$$

As relações (1), (4) e (5) demonstram o teorema, visto que apenas para pontos M da curva a equidistância estudada é atendida.

162 – Escólio

A parábola divide seu plano em duas regiões: a externa, à qual pertencem os pontos mais próximos da diretriz que do foco, e a interna, à qual pertencem os pontos mais próximos do foco que da diretriz.

163 – Teorema

Seja M um ponto qualquer de uma parábola, MF seu raio vetor e MS a perpendicular baixada à diretriz, a bissetriz do ângulo \widehat{SMF} é tangente à parábola, em M.

Demonstração: Sejam F e d o foco e a diretriz e M um ponto corrente de uma parábola. Consideremos o raio vetor MF, a perpendicular MS à diretriz, S em d, e a bissetriz r do ângulo \widehat{SMF} (Figura 373).

Porque M é ponto da curva, o triângulo MSF é isósceles, resultando daí a simetria dos pontos F e S em relação àquela reta r, a qual será, por isso, a mediatriz de FS (Figura 373).

Assim, para todo ponto J de r vale escrever:

$$JF = JS \quad (1)$$

E, nos triângulos retângulos JSQ:

$$JS > JQ \quad (2)$$

As relações (1) e (2) fornecem:

$$JF > JQ$$

E, se todos os pontos J (exceto M) da bissetriz considerada r são mais próximos da diretriz que do foco, conclui-se (número 162) que todos esses pontos J são exteriores à parábola. Ou seja, que a bissetriz r do ângulo SF é tangente à curva, no ponto M.

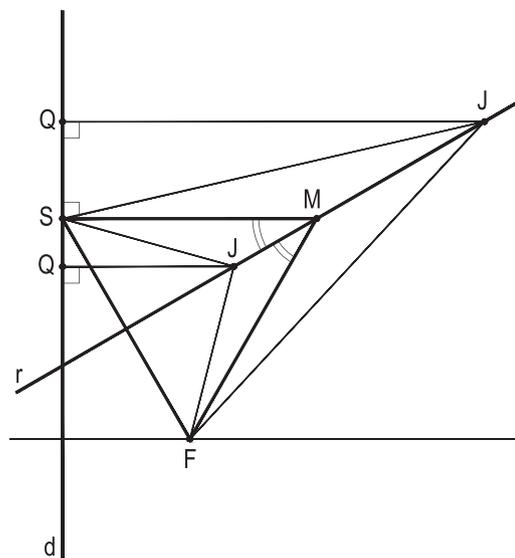


Figura 373

164 – Corolários

1 – A bissetriz n do ângulo formado entre o raio vetor MF e a semirreta paralela e de mesmo sentido que o eixo, traçada por um ponto M corrente (Figura 374), é normal à parábola nesse ponto.

Porque essa bissetriz é perpendicular à tangente t , no ponto M considerado (*Geometria Plana*, número 12.3).

2 – O foco é o centro da semicircunferência que, passando por um ponto corrente, tem por diâmetro o segmento formado pelos pés, no eixo, da tangente e da normal à curva, naquele ponto corrente.

Seja M um ponto genérico de uma parábola de foco F e diretriz d e T e N os pés, no eixo, da tangente e da normal à curva, naquele ponto M (Figura 375), temos:

$$\alpha = \beta \text{ (número 162)}$$

e $\alpha = \gamma$ (alternos internos)

Logo, $\beta = \gamma$

e $\beta' = \gamma'$ (complementos de β e de γ)

Assim, os triângulos isósceles FMT e FMN asseguram a igualdade dos segmentos FM , FT e FN , o que vale concluir ser o foco F o centro da semicircunferência que, passando por M , tem por diâmetro o segmento TN (Figura 375).

3 – Os segmentos formados, no eixo, pelo foco e pelos pés da tangente e da normal relativas a um ponto qualquer da parábola são iguais entre si e iguais ao raio vetor daquele ponto (Figura 375).

Pois que esta é, apenas, outra forma de enunciar a propriedade anterior.

4 – A tangente, no vértice, é paralela à diretriz.

É equivalente dizer que a normal, no vértice, coincide com o eixo da parábola (Figura 376).

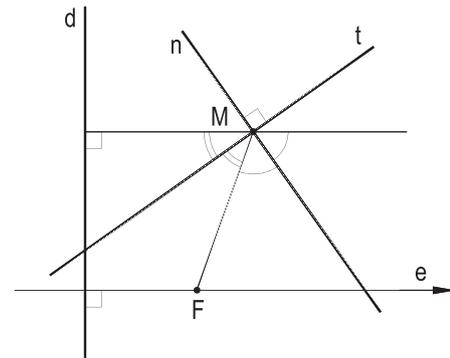


Figura 374

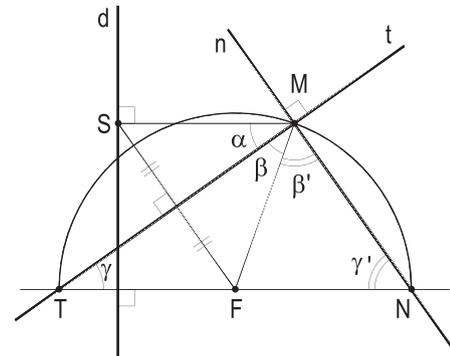


Figura 375

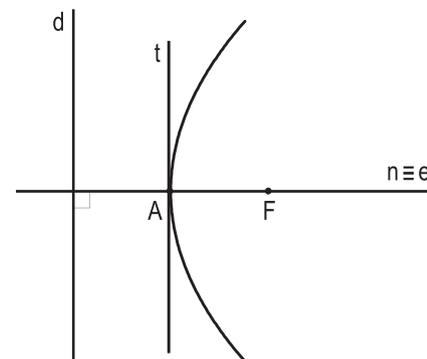


Figura 376

5 – A reta formada pelo ponto de contato de uma tangente qualquer e pelo simétrico do foco em relação à tangente é, sempre, paralela ao eixo da parábola.

Porque, segundo se viu (número 163), o simétrico S do foco F em relação a uma tangente genérica t (Figura 375) é o pé da perpendicular do ponto de contato M à diretriz d.

E, se a reta MS é perpendicular à diretriz, ela é, por isso mesmo, paralela ao eixo da parábola.

6 – O lugar geométrico dos simétricos do foco em relação às tangentes é a diretriz da parábola.

Porque o simétrico S do foco F em relação a uma tangente genérica t (Figura 375) é o pé da perpendicular MS, baixada do ponto de contato M da tangente à diretriz.

7 – Dados um ponto F e uma reta d exteriores, fixos, o lugar geométrico dos centros M das circunferências pertencentes ao ponto e tangentes à reta é a parábola que tem por foco e diretriz o ponto e a reta dados.

Porque (Figura 377) os centros M de todas essas circunferências devem ser equidistantes do ponto F e da reta d.

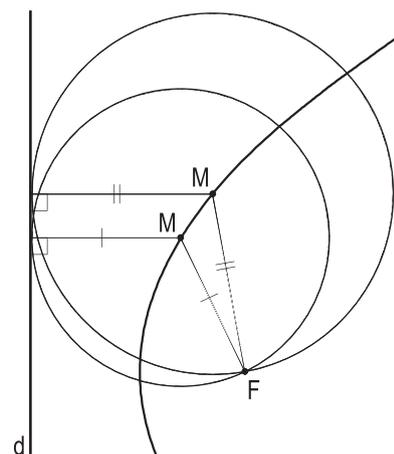


Figura 377

165 – A parábola referida a seu eixo e à tangente em seu vértice

Consideremos uma parábola de foco F, diretriz d e parâmetro p, com sua concavidade voltada para a direita (Figura 378) e tomemos como eixos cartesianos o próprio eixo da curva e a tangente em seu vértice A.

Para um ponto M (x, y) qualquer da curva, temos:

$$MF = MQ \text{ ou } MF^2 = MQ^2$$

$$y^2 + \left(x - \frac{p}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2$$

$$y^2 + x^2 + \frac{p^2}{4} - px = x^2 + \frac{p^2}{4} + px$$

Simplificando, vem: $y^2 = 2px$

Esta é a equação da parábola, nas condições estabelecidas.

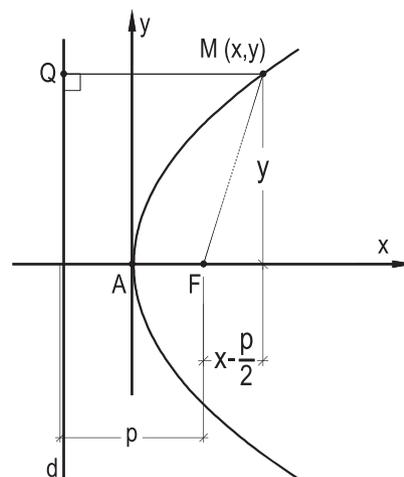


Figura 378

166 – Construção da parábola com auxílio das tangentes

Porque (número 164.6) a diretriz é o lugar geométrico dos simétricos do foco em relação às tangentes, para construir a curva a partir do foco F e da diretriz d , basta arbitrar vários pontos S , sobre a diretriz, e construir as mediatrizes dos diversos segmentos FS , assim formados, as quais serão tangentes à parábola (Figura 379). Os pontos de contato M dessas tangentes serão determinados pelas interseções dessas mediatrizes com as paralelas ao eixo traçadas pelos pontos S correspondentes (número 164.5).

O processo proporciona, além de pontos M de passagem da parábola, as tangentes à curva, nesses pontos, o que resulta em valiosa informação quanto à mudança de curvatura da parábola (Figura 379).

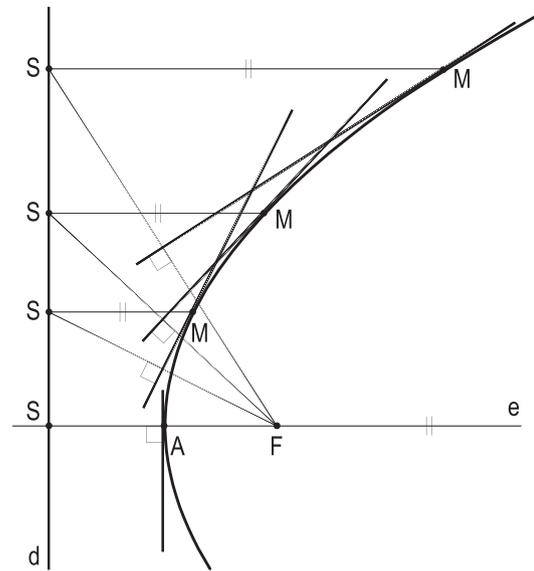


Figura 379

167 – Determinação do ponto de contato de uma tangente dada

1 – Dados o foco F , o eixo e e a tangente t .

Para determinar o ponto de contato M de uma tangente dada t a uma parábola de foco F e eixo e conhecidos, basta construir o simétrico S do foco em relação à tangente (Figura 380) e traçar, por S , a paralela ao eixo dado que (número 164.5) corta t segundo o ponto M procurado.

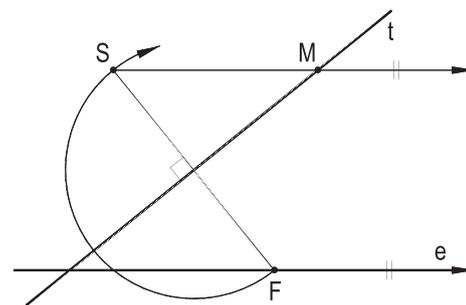


Figura 380

Vale, também, obter o ponto T , pé da tangente no eixo e (Figura 381), e construir o arco da circunferência de centro no foco F e raio FT , o qual corta a tangente, produzindo o ponto de contato M , pedido, já que o foco é centro da circunferência que passa por T e por M (número 164.2).

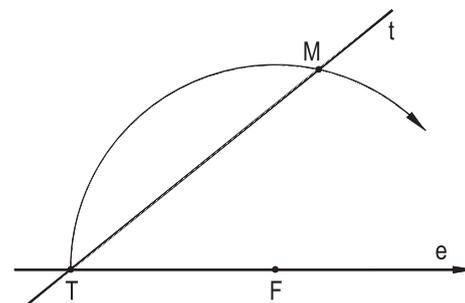


Figura 381

2 – Dados o eixo e , a diretriz d e a tangente t .

Porque o simétrico S do foco em relação à tangente deve pertencer à diretriz (número 164.6), para determinar o ponto de contato M de uma tangente dada t a uma parábola de eixo e e diretriz d conhecidas, basta construir a reta \bar{e} , simétrica do eixo em relação à tangente (Figura 382), a qual corta a diretriz segundo o ponto S . A paralela, por S , ao eixo, intercepta t , fornecendo o ponto M procurado.

Naturalmente, vale também construir a reta \bar{d} , simétrica da diretriz em relação à tangente, a qual corta o eixo (Figura 383), produzindo o foco F da parábola.

E, obtido o foco, retornamos ao item anterior, valendo, pois, aplicar um dos processos ali desenvolvidos.

Na Figura 383, optamos pelo segundo deles.

168 – Construção das tangentes

1 – Construção da tangente num ponto M da curva (dados o foco F , o eixo e e o ponto corrente M).

Para obter a tangente t , em M , basta girar o raio vetor MF até que ele ocupe a posição MS (Figura 384) paralela ao eixo e . A tangente procurada t será a perpendicular, por M , à reta FS .

De fato, o ponto S , evidentemente (número 164.6) pertencente à diretriz, é o simétrico do foco em relação à tangente procurada. E, porque o triângulo MFS é isósceles, sua altura t é também mediatriz da base FS e bissetriz do ângulo SME .

Como variante, se os dados houvessem sido a diretriz d , o foco F e o ponto corrente M , o arco de centro M e raio MS , perpendicular a d , traria F em e , retornando às condições acima (Figura 385).

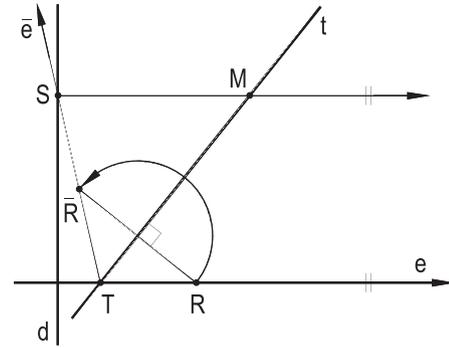


Figura 382

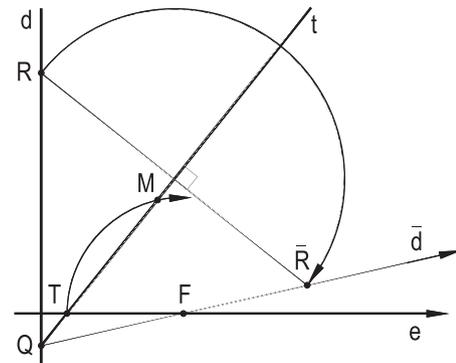


Figura 383

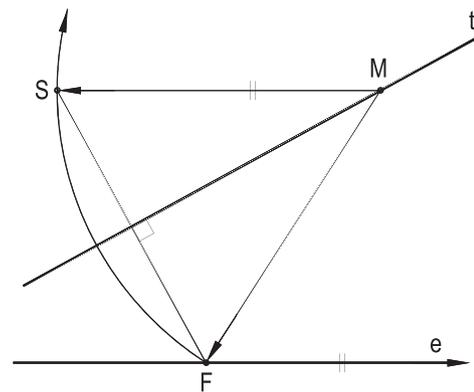


Figura 384

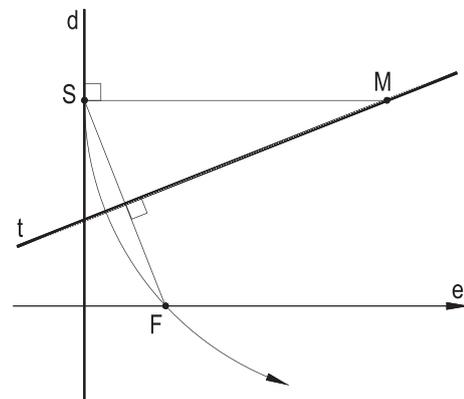


Figura 385

Há, naturalmente, duas posições possíveis para o ponto S , visto que a circunferência com centro em M e raio MF corta a paralela por M ao eixo em dois pontos S_1 e S_2 (Figura 386). Logo, há duas parábolas p_1 e p_2 e, em consequência, duas tangentes t_1 e t_2 , no ponto M , comum às duas parábolas, como indicado na Figura 386. E, porque t_1 e t_2 são perpendiculares entre si, as duas parábolas são ortogonais.

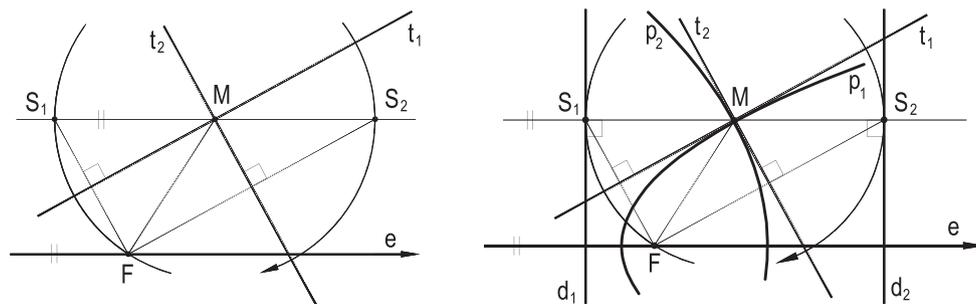


Figura 386

2 – Construção da tangente num ponto M da curva (dados o eixo e , a diretriz d e o ponto corrente M).

Para construir a tangente t , em M , basta descrever a circunferência de centro M , tangente à diretriz, a qual corta o eixo e segundo o foco F da parábola (Figura 387). E, obtido o foco, como no item anterior, a tangente procurada será a perpendicular traçada, por M , à reta FS .

Também aqui há duas soluções para o problema, visto que a circunferência utilizada corta o eixo e em dois pontos F_1 e F_2 , focos das duas parábolas possíveis. E, por isso, há duas tangentes t_1 e t_2 (Figura 387), em resposta ao pedido, uma para cada uma das duas parábolas possíveis.

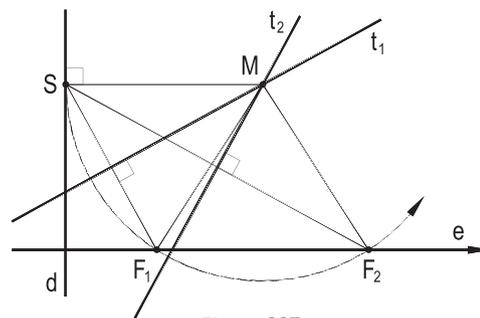


Figura 387

3 – Construção da tangente paralela a uma reta r (dados o foco F , a diretriz d e a reta r).

Análise: Sendo t a tangente paralela à reta dada r , sabe-se (número 164.6) que o simétrico S do foco em relação à tangente pertence à diretriz (Figura 388). E, porque a tangente deve ser paralela a r , o simétrico S pertencerá à perpendicular traçada, pelo foco F , à reta r .

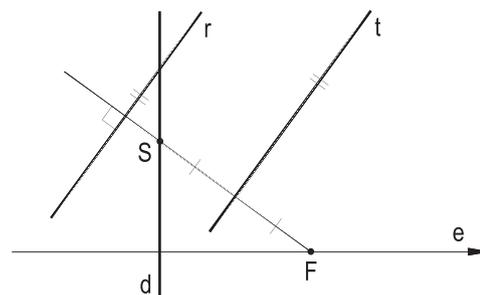


Figura 388

Construção: Dados o foco F e a diretriz d da parábola, além da direção r da tangente, traça-se, inicialmente, por F , a perpendicular a r , que corta a diretriz segundo o ponto S (Figura 389). Constrói-se, então, a mediatriz t do segmento FS , a qual é a tangente procurada.

Para obter o ponto de contato M da tangente, basta traçar, por S , a perpendicular SM à diretriz (número 164.5) (Figura 389).

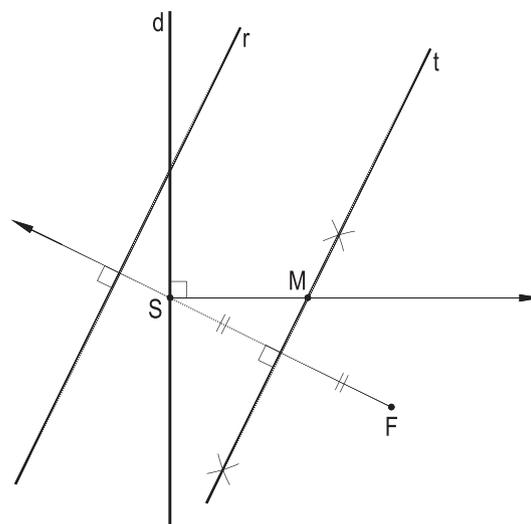


Figura 389

4 – Construção das tangentes por um ponto J exterior (dados o foco F , a diretriz d e o ponto J).

Análise: Sendo t_1 e t_2 as tangentes procuradas, sabe-se (número 164.6) que os simétricos S_1 e S_2 do foco F em relação a elas devem pertencer à diretriz da parábola. E, dessas simetrias, conclui-se a igualdade: $JS_1 = JF = JS_2$ (Figura 390).

Então, os simétricos S_1 e S_2 devem também pertencer a uma circunferência de centro J e raio JF .

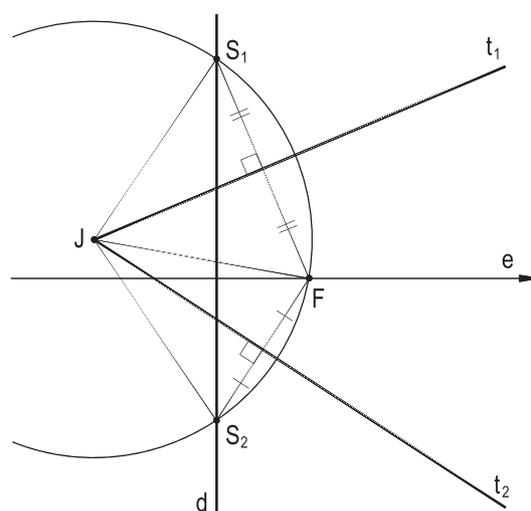


Figura 390

Construção: Dados o foco F , a diretriz d e o ponto J , constrói-se inicialmente uma circunferência de centro J e raio JF , a qual corta a diretriz segundo os pontos S_1 e S_2 (Figura 391). Traça-se, então, as perpendiculares, por J , aos segmentos FS_1 e FS_2 , as quais são as tangentes t_1 e t_2 procuradas.

Para obter os pontos de contato M_1 e M_2 dessas tangentes, basta traçar, pelos pontos S_1 e S_2 , as perpendiculares S_1M_1 e S_2M_2 à diretriz (número 164.5).

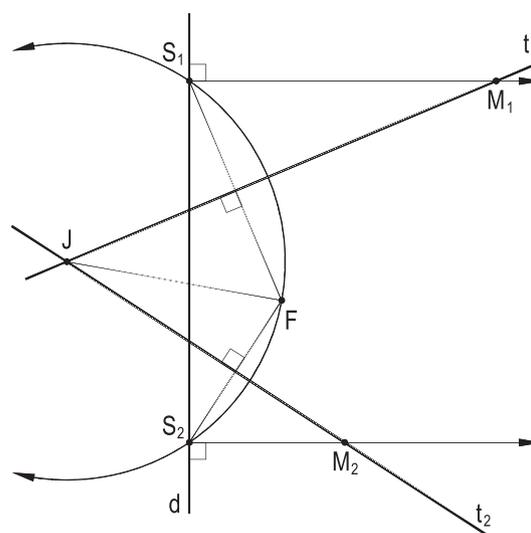


Figura 391

169 – Teorema de La Hire

O lugar geométrico das projeções ortogonais do foco sobre as tangentes a uma parábola é a tangente à curva no seu vértice.

Demonstração: Seja t uma tangente genérica a uma parábola de foco F e diretriz d . Consideremos o simétrico S do foco, em relação a t , e a projeção ortogonal P do foco sobre t (Figura 392).

Porque, ao variar a tangente, o lugar geométrico de S é a diretriz d (número 164.6) e, porque P é o homotético de S , para o polo F na razão $\frac{1}{2}$, o lugar geométrico de P será uma reta w paralela à diretriz, equidistante dela e do foco. Tal reta passará, então, pelo ponto médio do segmento FQ (Figura 392), ou seja (número 157), pelo vértice A da parábola.

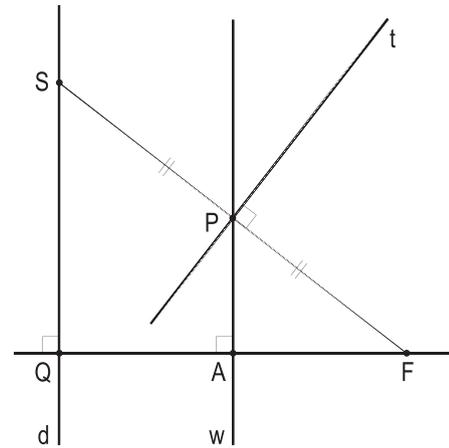


Figura 392

E, como esta reta w é perpendicular ao eixo, ela é tangente à curva, no vértice A .

Então, o lugar geométrico das projeções ortogonais do foco sobre as tangentes a uma parábola é a tangente à curva no seu vértice.

170 – Construções

Do teorema de La Hire, resultam as seguintes construções:

1 – Determinação do foco e da diretriz de uma parábola a partir do vértice A , do eixo e e de uma tangente t .

Dados o vértice A e o eixo e de uma parábola, além de uma tangente genérica t , para obter seu foco e sua diretriz, pode-se, inicialmente, traçar a tangente w à curva, em seu vértice, perpendicular, por A , a e , para obter, por interseção com t (Figura 392), o ponto P , projeção ortogonal do foco sobre t (número 169).

Por contraprojeção, isto é, traçando-se por P a perpendicular a t , determina-se o foco F , por interseção com o eixo e , na simetria do foco em relação ao vértice (Figura 393), o ponto S e, em seguida, a diretriz d , perpendicular, por S , a e .

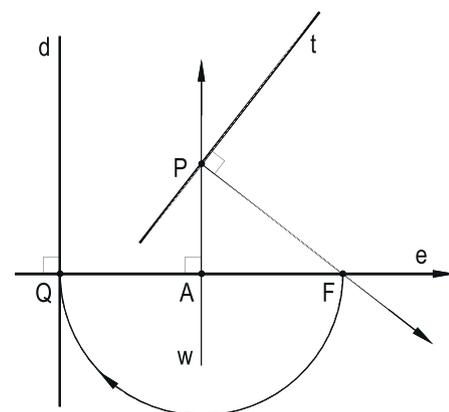


Figura 393

2 – Construção da tangente a uma parábola paralela a uma reta r , dados o vértice A , o foco F e a reta r .

Dados o vértice A e o foco F de uma parábola, para construir a tangente paralela a uma reta dada r , deve-se, inicialmente, traçar a tangente w à curva, em seu vértice, por A , perpendicular a AF , à qual pertencerá a projeção ortogonal P do foco sobre a tangente procurada (número 169).

E, como a tangente deve ter a direção de r , traçando-se por F a perpendicular a r , e obtém-se, por interseção com w , o ponto P (Figura 394). A tangente pedida t passa por P e é paralela a r .

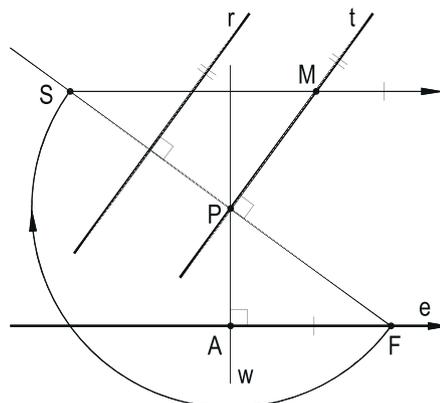


Figura 394

Para determinar o ponto de contato M dessa tangente, basta construir o simétrico S do foco, em relação a ela, e traçar, por esse ponto S , a paralela ao eixo AF (Figura 394).

3 – Construção das tangentes a uma parábola por um ponto J exterior, dados o vértice A , o foco F e o ponto J .

Análise: Sendo t_1 e t_2 as tangentes procuradas, porque os pontos P_1 e P_2 , projeções ortogonais do foco F sobre as tangentes, devem pertencer à tangente w à parábola, em seu vértice (número 169), os triângulos retângulos JFP_1 e JFP_2 (Figura 395) permitem concluir que os pontos P_1 e P_2 serão os de interseção daquela reta w com a circunferência de diâmetro JF , formado pelo ponto dado J e pelo foco F da parábola.

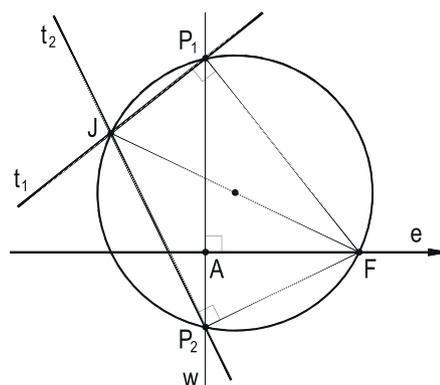


Figura 395

Construção: Dados o vértice A , o foco F e o ponto J , para obter as tangentes, por J , à parábola, deve-se, inicialmente, construir a circunferência de diâmetro JF e a tangente w à curva, em seu vértice, os quais se cortam, produzindo os pontos P_1 e P_2 (Figura 396).

As tangentes t_1 e t_2 procuradas são as retas JP_1 e JP_2 .

Para obter os pontos de contato dessas tangentes, não incluídos na Figura 396, basta utilizar o processo indicado no item anterior.

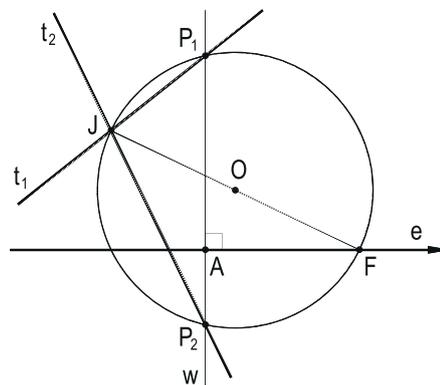


Figura 396

171 – Teoremas de Poncelet

1 – As tangentes traçadas por um ponto exterior a uma parábola são isogonais em relação aos lados do ângulo formado pela reta que une aquele ponto ao foco e pela semirreta paralela ao eixo, traçada por aquele ponto, com mesmo sentido que o eixo.

2 – A reta que une o foco de uma parábola a um ponto exterior é a bissetriz do ângulo formado pelas retas que unem o foco aos pontos de contato das duas tangentes traçadas à curva pelo ponto exterior.

Demonstrações:

1 – Sejam t e t' as tangentes do ponto J a uma parábola de foco F e diretriz d e S e S' os simétricos de F , respectivamente em relação a t e a t' , naturalmente (número 164.6) pertencentes à diretriz d (Figura 397).

Consideremos a circunferência de centro J , pertencente aos pontos F , S e S' , bem como a semirreta Jm paralela ao eixo da parábola e de mesmo sentido que esse eixo (Figura 397).

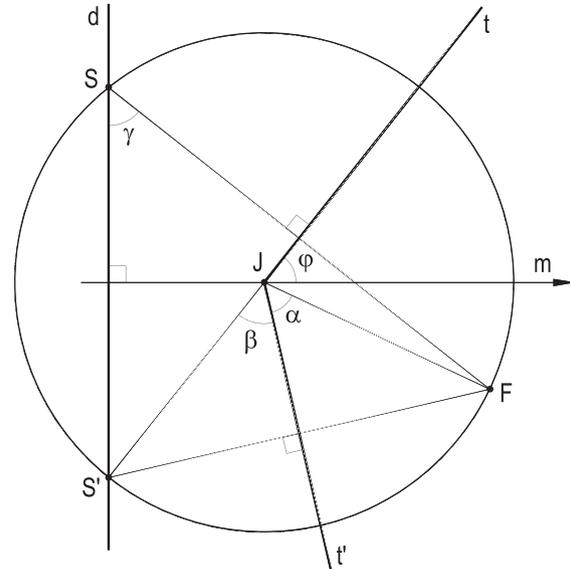


Figura 397

Da simetria de F e S' em relação a t' , vem: $\alpha = \beta$ (1)

Por terem lados respectivamente perpendiculares, $\gamma = \varphi$ (2)

E, na circunferência considerada, como inscrito e central, respectivamente, subtendendo o mesmo arco FS' , temos:

$$\gamma = \frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$\gamma = \frac{\alpha + \alpha}{2}$$

$$\gamma = \alpha \quad (3)$$

Das relações (2) e (3) resulta: $\alpha = \varphi$

Assim, as tangentes t e t' são isogonais em relação aos lados do ângulo \widehat{FJm} , formado pela reta que une o ponto J comum às duas tangentes ao foco e pela semirreta paralela ao eixo traçada por J , com mesmo sentido que ele, o que demonstra o primeiro teorema de Poncelet.

2 – Além do que já foi considerado, incluíamos os pontos de contato M e M' das tangentes t e t' (Figura 398).

Das simetrias existentes entre os triângulos FJM e SJM e entre FJM' e $S'JM'$, respectivamente, em relação a t e a t' (Figura 398), vem:

$$\theta = \rho \quad (1) \quad \text{e} \quad \lambda = \delta \quad (2)$$

E, da simetria dos pontos S e S' em relação ao diâmetro m da circunferência (J, JF) (Figura 398), vem

$$\rho = \delta \quad (3)$$

As relações (1), (2) e (3) fornecem: $\theta = \lambda$

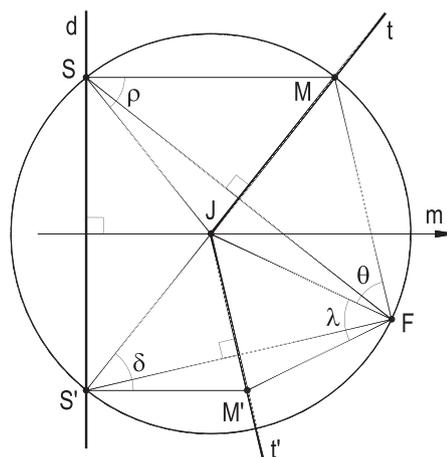


Figura 398

Assim, a reta formada pelo foco F e pelo ponto J , exterior à parábola, é a bissetriz do ângulo formado pelas retas que unem o foco aos pontos de contato M e M' das duas tangentes à curva, traçadas por J (Figura 398), o que prova o segundo teorema de Poncelet.

172 – Teorema

Os pontos comuns a três tangentes quaisquer, tomadas duas a duas, a uma parábola e o foco da curva são concíclicos.

Demonstração: Consideremos três tangentes genéricas t_1 , t_2 e t_3 a uma parábola de foco F e eixo e .

Sendo J , K e L os pontos de concurso dessas tangentes, tomadas aos pares (Figura 399), e Jm e Kn semirretas paralelas, e de mesmo sentido que o eixo e , o primeiro teorema de Poncelet (número 171.1) permite escrever:

$$\alpha = \beta \quad (1) \quad \text{e} \quad \gamma = \phi \quad (2)$$

Mas, como correspondentes, temos:

$$\alpha = \gamma \quad (3)$$

Das relações (1), (2) e (3) resulta: $\beta = \phi$

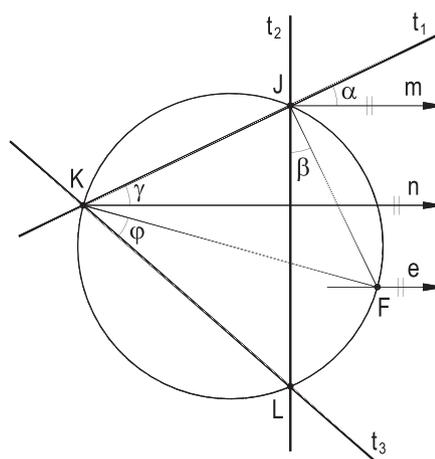


Figura 399

E, porque dos pontos J e K se avista o segmento FL sob um mesmo ângulo (Figura 399), os quatro pontos J , K , F e L pertencem a uma mesma circunferência, aquela que contém o arco capaz do ângulo $\beta = \phi$ para o segmento FL (*Geometria Plana*, número 128.1), como se queria provar.

173 – Teorema

Um ponto genérico pertencente à circunferência circunscrita a um triângulo qualquer é foco de uma parábola tangente aos três lados do triângulo.

Demonstração: Consideremos um triângulo qualquer JKL e um ponto F arbitrário de sua circunferência circunscrita (Figura 400).

Para provar que existe uma parábola tangente aos lados t_1 , t_2 e t_3 do triângulo JKL, tendo por foco aquele ponto F, basta provar que os simétricos de F em relação às retas t_1 , t_2 e t_3 são colineares (número 164.6), por, então, pertencerem à diretriz de tal parábola (Figura 400).

Para assegurar que S_1 , S_2 e S_3 sejam colineares, basta provar que também o são os pontos P_1 , P_2 e P_3 , projeções do foco F sobre os lados do triângulo, visto que tais projeções são respectivamente homotéticas de S_1 , S_2 e S_3 , em relação a F, na razão $(\frac{1}{2})$, e que, para que exista a tangência que se procura demonstrar, esses pontos P_1 , P_2 e P_3 hão de pertencer à tangente à parábola em questão em seu vértice (número 169).

Para tanto, observemos (Figura 401) que os quadriláteros FP_1JP_2 e FP_2P_3L são inscritíveis, o primeiro por ter dois ângulos opostos retos (*Geometria Plana*, número 128.4) e o segundo por ter dois ângulos inscritos FP_2L e FP_3L , subtendendo o mesmo arco FL (*Geometria Plana*, número 128.1).

Como inscritos, subtendendo o mesmo arco, temos (Figura 401):

$$\text{Em } FP_1JP_2 \quad : \quad \alpha = \beta = \frac{P_1J}{2} \quad (1)$$

$$\text{Em } FP_2P_3L \quad : \quad \gamma = \varphi = \frac{P_3L}{2} \quad (2)$$

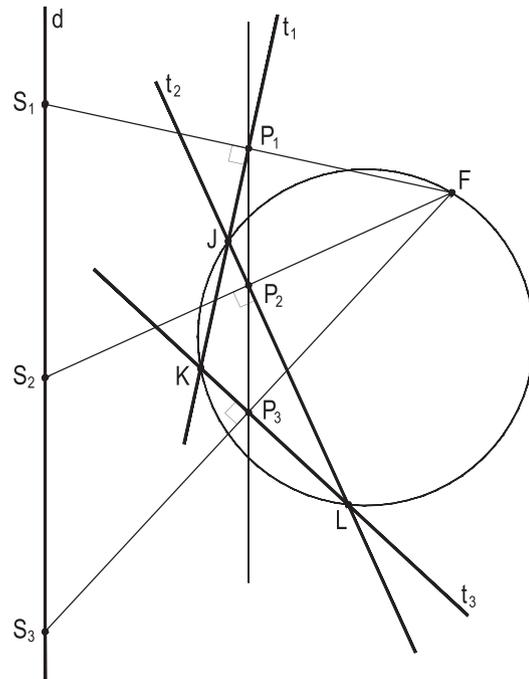


Figura 400

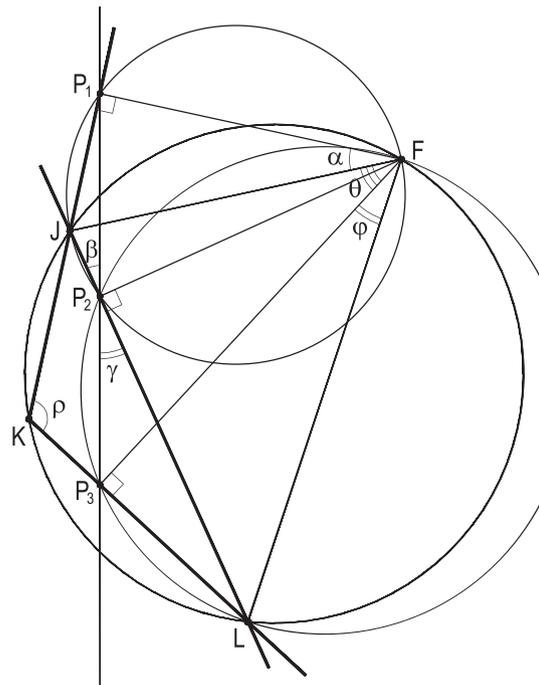


Figura 401

Vejamos, agora, o quadrilátero FP_1KP_3 (Figura 401) que, por ter dois ângulos opostos P_1 e P_3 retos, tem os outros dois suplementares (*Geometria Plana*, número 128.5), o que permite anotar:

$$\rho = 180^\circ - (\alpha + \theta) \quad (3)$$

E, enfim, no quadrilátero $JFLK$, inscrito na circunferência considerada, como ângulos opostos, temos (*Geometria Plana*, número 128.5):

$$\rho = 180^\circ - (\varphi + \theta) \quad (4)$$

$$\text{As relações (3) e (4) dão } \alpha = \varphi \quad (5)$$

Então, substituindo (1) e (2) em (5), chegamos a:

$$\beta = \gamma \quad (6)$$

Esta igualdade assegura que sejam estes dois ângulos β e γ opostos pelo vértice (Figura 401) ou, o que é o mesmo, que os três pontos P_1 , P_2 e P_3 , em estudo, sejam colineares (*Geometria Plana*, número 16), o que demonstra o teorema.

Assim, um ponto genérico pertencente à circunferência circunscrita a um triângulo qualquer é foco de uma parábola tangente aos três lados do triângulo.

174 – Observação

É claro que são exceções à propriedade acima demonstrada os vértices do triângulo formado pelas três tangentes.

175 – Recíproca

Toda parábola tangente aos três lados de um triângulo qualquer tem foco pertencente à circunferência circunscrita ao triângulo formado pelas três tangentes.

Porque apenas pontos F da circunferência circunscrita ao triângulo JKL (Figura 400) são capazes de proporcionar simétricos S_1 , S_2 e S_3 , em relação aos lados do triângulo colineares.

176 – Corolários

1 – O lugar geométrico dos focos de todas as parábolas tangentes aos lados de um triângulo qualquer é a circunferência circunscrita ao triângulo, exceto seus vértices.

2 – Uma parábola fica perfeitamente determinada quando são dadas quatro tangentes genéricas a ela.

Porque haverá apenas um foco – o ponto, único, comum às circunferências circunscritas aos triângulos formados pelas quatro tangentes, combinadas três a três.

177 – Reta de Simson

Como demonstrado acima (número 173), as projeções ortogonais de um ponto P qualquer da circunferência circunscrita a um triângulo genérico ABC sobre seus três lados pertencem a uma reta, que é denominada reta de Simson, em relação ao triângulo considerado, para aquele ponto. Assim é, por exemplo, a reta r (Figura 402) que reúne os pés P_1 , P_2 e P_3 das projeções ortogonais de um ponto P qualquer da circunferência circunscrita ao triângulo ABC sobre seus lados.

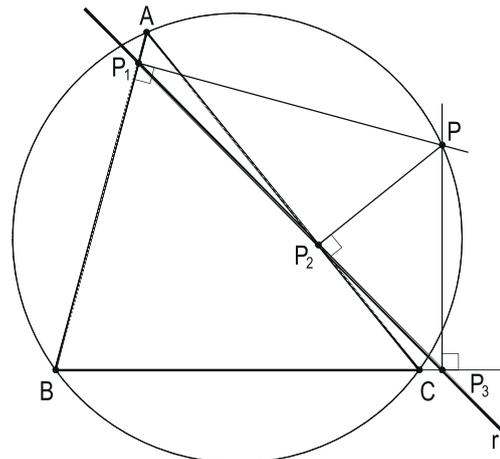


Figura 402

178 – Observações

1 – A reta r (Figura 402) é denominada reta de Simson, para o triângulo ABC , em homenagem a seu descobridor Robert Simson, embora não haja comprovação escrita desse fato. Em verdade, a primeira publicação conhecida sobre tal reta ocorreu quase três décadas após a morte de Simson e foi apresentada por William Wallace, o que faz com que diversos autores prefiram a denominação dupla Wallace – Simson para referência a tal reta.

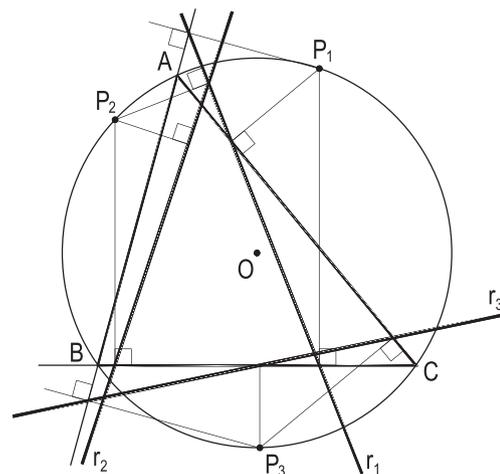


Figura 403

2 – Como o ponto P utilizado na demonstração do teorema (número 173) foi genericamente escolhido, conclui-se que há, para todo triângulo, uma infinidade de retas de Simson (Figura 403).

3 – No caso particular de a reta de Simson ser referente a um dos vértices do triângulo (A , na Figura 404), ela é a própria altura relativa a esse vértice, pois as projeções ortogonais desse ponto A sobre os lados que nele chegam, AB e AC , é ele próprio e a projeção ortogonal de A , sobre o lado oposto BC , é o pé da altura AH do triângulo.

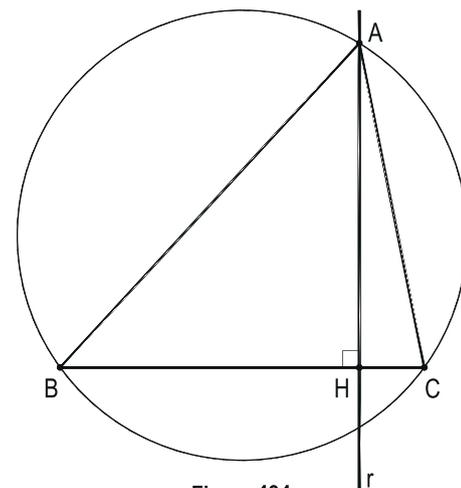


Figura 404

4 – No caso particular de o ponto considerado para a busca da reta de Simson ser o ponto M , diametralmente oposto a um vértice (A , na Figura 405), a reta de Simson é o próprio lado BC , oposto ao vértice A considerado, pois os triângulos AMB e AMC restarão retângulos em B e C , respectivamente, já que AM será um diâmetro. E, assim, suas projeções N , sobre BC e B e C , sobre os outros dois lados, pertencerão todas ao lado BC .

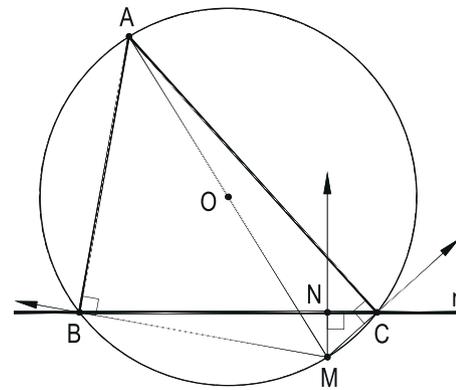


Figura 405

179 – Teorema

O lugar geométrico dos pontos dos quais se pode traçar tangentes perpendiculares entre si a uma parábola é a própria diretriz da curva.

Demonstração: Seja J um ponto qualquer do lugar, isto é, tal que as tangentes t_1 e t_2 por ele traçadas à parábola de foco F e diretriz d sejam perpendiculares entre si.

Consideremos os simétricos S_1 e S_2 do foco, em relação àquelas tangentes, naturalmente pertencentes à diretriz da parábola (número 164.6).

Porque o triângulo FS_1S_2 é necessariamente retângulo, da própria hipótese, e porque t_1 e t_2 são as mediatrizes dos catetos (Figura 406), J será o circuncentro do triângulo, devendo, por isso (*Geometria Plana*, número 140.2), pertencer à hipotenusa S_1S_2 .

Mas como S_1 e S_2 são pontos da diretriz (número 164.6), J forçosamente pertence a essa reta.

Então, o lugar geométrico dos pontos dos quais se pode traçar tangentes perpendiculares entre si a uma parábola é a própria diretriz da curva (Figura 407).

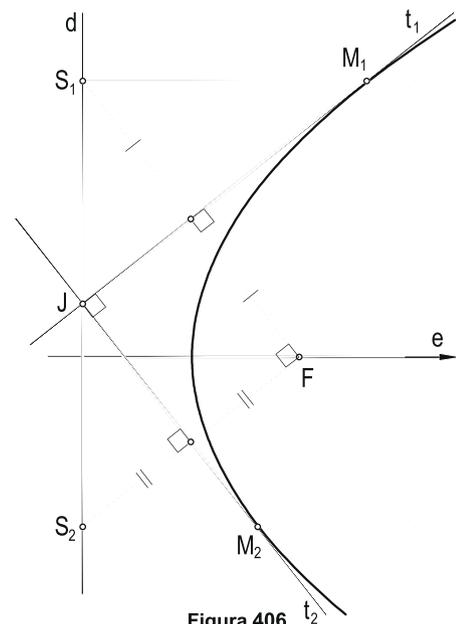


Figura 406

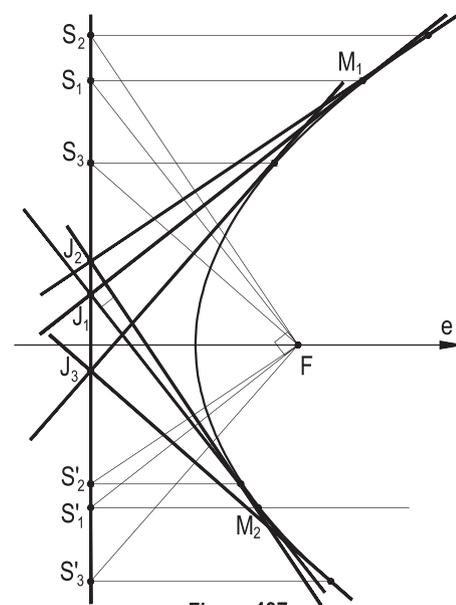


Figura 407

180 – Determinação rigorosa dos pontos de corte de uma reta dada com uma parábola dada por seu foco e sua diretriz

Análise: Consideremos uma parábola de foco F e diretriz d e uma reta r a ela secante e observemos, admitindo resolvida a questão, que sejam M e N os pontos de corte da reta na curva.

Sabe-se (número 164.7) que a parábola é o lugar geométrico dos centros das circunferências que, passando pelo ponto F , tangenciam a reta d .

Assim, trata-se de determinar os pontos M e N , pertencentes à reta r , que sejam centros de duas circunferências (M, MF) e (N, NF) tangentes a d .

O eixo radical ER dessas duas circunferências tem que passar por F , comum a elas, e ser perpendicular à reta r , linha de seus centros, determinando, sobre r , um ponto C que, sendo equipotente a elas, tem que ser o ponto médio do segmento SS' da tangente comum exterior a elas (Figura 408).

E, arbitrado um ponto X em r , a circunferência (X, XF) há de ter, com as duas primeiras, o mesmo eixo radical, além de que as tangentes CT, CT' e CT'' , a cada uma das três, têm que ser iguais (Figura 408), pois C é, enfim, o centro radical delas.

Construção: Traça-se, por F , a perpendicular p a r , que, por corte com d , proporciona o ponto C (Figura 409). Arbitra-se um ponto X , em r , e traça-se a circunferência com centro em X , contendo F , e constrói-se, com rigor, uma das tangentes CT a essa circunferência, girando T em torno de C até obter os pontos S e S' em d , para, com perpendiculares a d , por eles, obter, em r , os pontos M e N procurados (Figura 409).

Observação: O problema pode não oferecer solução, desde que o ponto C reste interior à circunferência (X, XF) (Figura 410), sendo, então, a reta dada r exterior à parábola. E, em situação particular, quando C pertence a essa circunferência, a reta r passa a ser tangente à parábola.

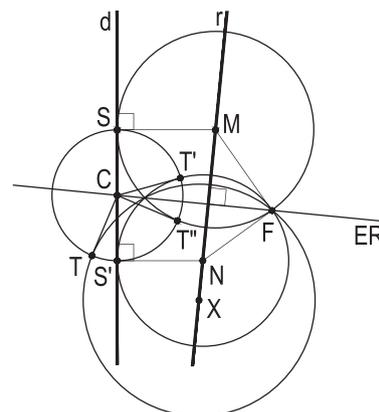


Figura 408

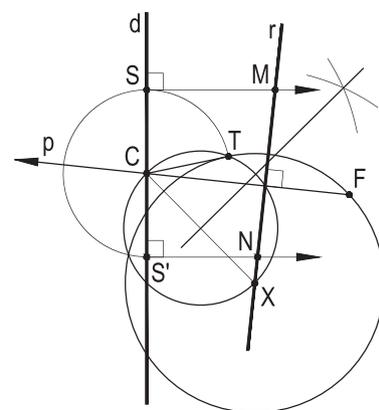


Figura 409

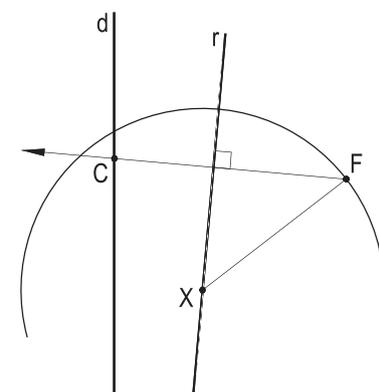


Figura 410

181 – Problemas resolvidos

Neste primeiro conjunto, ainda bem simples, serão estudadas parábolas de diretriz d , foco F , vértice A , eixo e , corda focal c_f , parâmetro p , tangente t e normal n , em pontos correntes M , com pés T e N , respectivamente, no eixo da curva.

Dados adequadamente grupados, caso a caso, pedindo-se, sempre, determinar a diretriz d e o foco F da parábola, com apenas uma solução.

A seguir as resoluções.

140 – M é o traço da circunferência de diâmetro TN com a mediatriz do segmento JK (Figura 411).

141 – A normal n , por M , retorna ao problema anterior (Figura 412).

142 – A perpendicular a n , por M , é a tangente t (Figura 413).

143 – A perpendicular a t , por seu traço M com w , tangente em A , dá o foco F e, então, a diretriz d (Figura 414).

144 – A mediatriz m de MM' é o próprio eixo e e o parâmetro p proporciona a diretriz (Figura 415).

145 – Variante do anterior (Figura 416).

146 – A construção do triângulo auxiliar $M12$, com a hipotenusa 12 paralela a e e sua mediana relativa a 12 , dá o foco F (Figura 417).

147 – Para serem simétricas em relação ao eixo, as duas tangentes t e t' têm que se cortar sobre a reta suporte do eixo, garantindo a simetria indicada. Assim, o ponto J comum a elas pertence a essa reta e . Então, marcado T' em t' , com $JT' = JT$, vem o ponto N , retornando-se ao problema 141 (Figura 418).

148 – As perpendiculares a t e a t' por seus traços com w dão, por corte, o foco F , e, com sua simetria em relação a A , vem a diretriz d (Figura 419).

140 – Dados T, N, J e K
 M equidista de J e de K

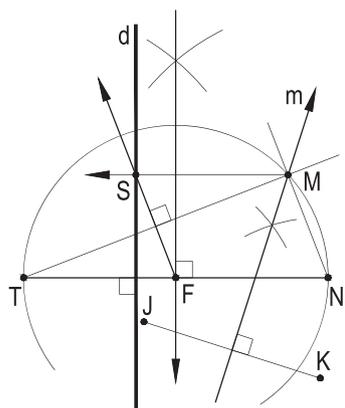


Figura 411

141 – Dados e, t, M

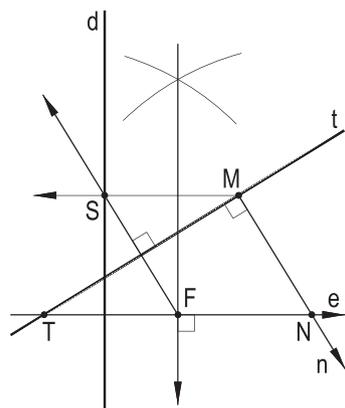


Figura 412

142 – Dados e, n, M

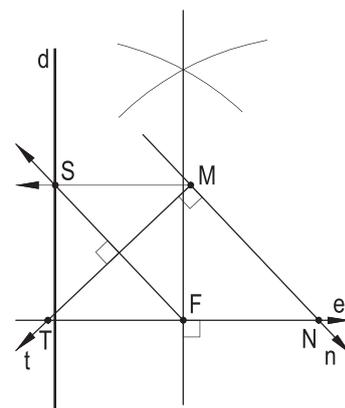


Figura 413

143 – Dados e, A, t

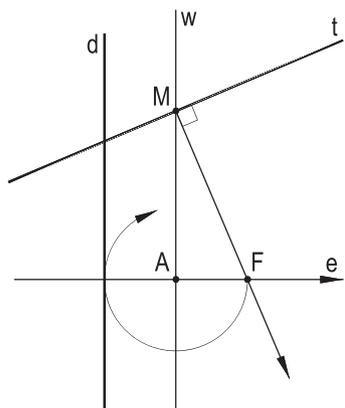


Figura 414

144 – Dada a corda focal MM'

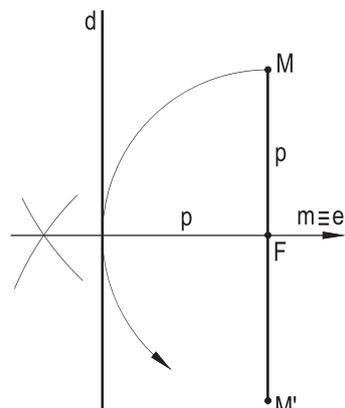


Figura 415

145 – Dado o parâmetro MF

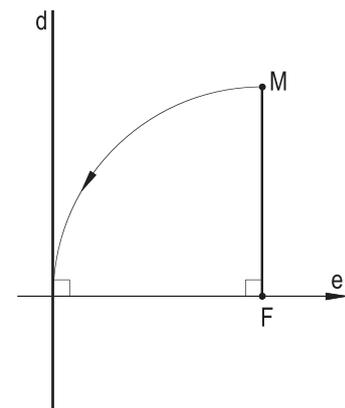


Figura 416

146 – Dados e, t e M

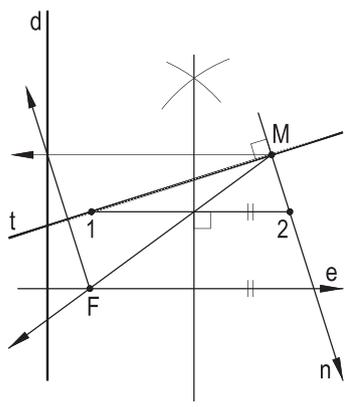


Figura 417

147 – T e as tangentes t e t' simétricas em relação a e

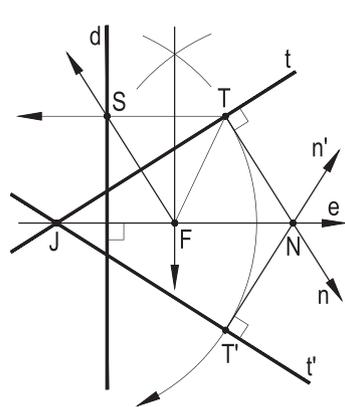


Figura 418

148 – t, t' e w , esta tangente em A

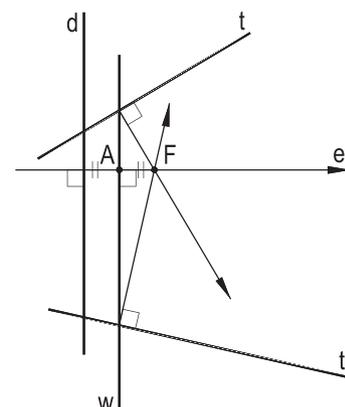


Figura 419

149 – De uma parábola são dados o eixo e e o vértice A . De um determinado ponto J , da reta dada w , consegue-se enviar tangentes à curva inclinadas, ambas, de 60° com seu eixo. Pede-se determinar J , as tangentes citadas e o foco F da parábola.

Resolução: Tal a igualdade dos ângulos das tangentes com o eixo da curva, o ponto J tem que pertencer ao suporte do eixo, sendo sua interseção com w . A tangente t à curva em A traz a projeção P de F sobre t_1 (número 169), o que proporciona F (Figura 420).

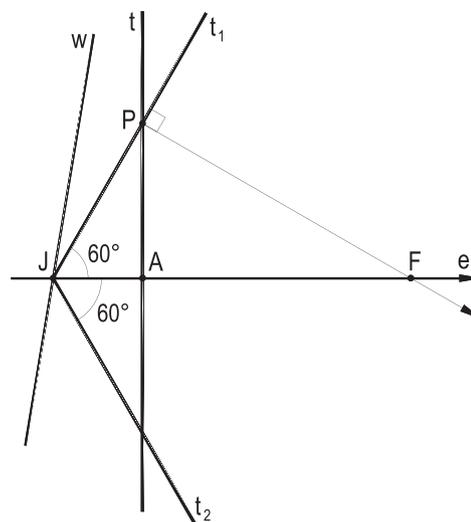


Figura 420

150 – Dadas três tangentes t_1, t_2 e t_3 a uma parábola, pede-se determinar seu foco F , sabendo que ele pertence à reta dada w .

Resolução: Com as mediatrizes m_1 e m_2 , obtém-se o circuncentro O da circunferência circunscrita ao triângulo JKL formado pelas tangentes dadas (Figura 421), à qual tem que pertencer o foco F da curva (número 173), com duas soluções, para os dados.

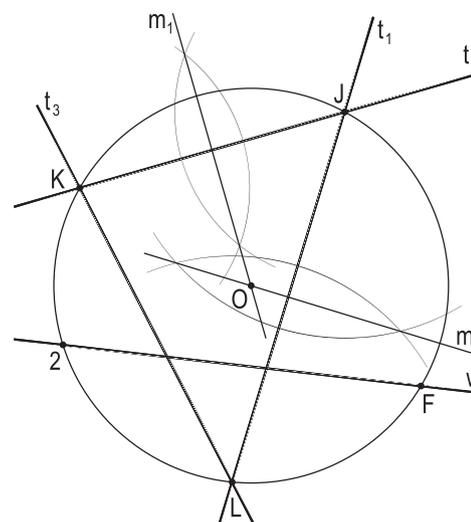


Figura 421

151 – Dado um triângulo escaleno JKL e um ponto X do lado JK , pede-se construir a reta de Simson desse triângulo, contendo X , para um certo ponto P , que se busca precisar.

Resolução: O ponto P deve (número 173) pertencer à circunferência (O) , circunscrita ao triângulo JKL , obtido pelo corte com a perpendicular, por X , ao lado JK (número 177), com duas soluções, a primeira w_1 completada na Figura 422 e a segunda apenas indicada pela posição 2 para o segundo ponto P .

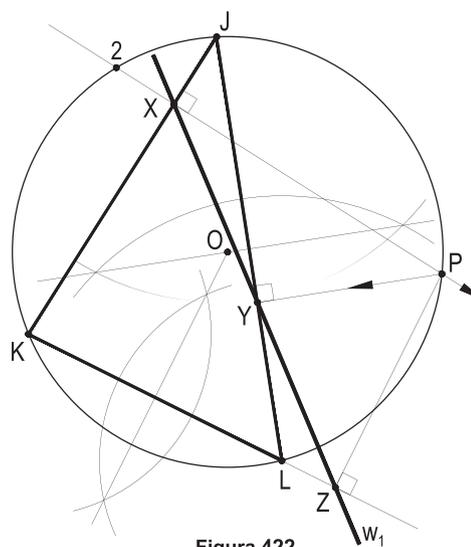


Figura 422

CAPÍTULO X

PARÁBOLA COMO LIMITE DE UMA CÔNICA BIFOCAL

No presente capítulo, demonstraremos que uma parábola pode ser considerada, em determinadas condições, como a posição limite ocupada por uma elipse ou por uma hipérbole, isto é, por uma cônica bifocal que tenha um foco impróprio, o que permitirá importar da elipse, ou da hipérbole, um sem-número de propriedades.

182 – Teorema

A parábola é a posição limite ocupada por uma elipse, quando são mantidos fixos um foco e o vértice mais próximo do eixo real, enquanto que o outro foco se afasta indefinidamente sobre esse eixo.

Demonstração: Consideremos uma elipse de eixo real AA' e focos F e F' , bem como a circunferência diretora relativa ao foco F .

Sabe-se (número 26.1) que um ponto M qualquer da elipse equidista do foco F e da circunferência diretora relativa ao outro foco F' (Figura 423), o que permite anotar:

$$MF = MQ \quad (1)$$

Fixemos, então, o foco F e o vértice A , do eixo real, mais próximo de F , e façamos o outro foco F' descrever o eixo real, afastando-se cada vez mais do fixo.

Porque F e A são mantidos fixos, o ponto S , simétrico de F em relação a A , comum ao eixo real e à circunferência diretora considerada, resta também fixo (Figura 423).

Durante o afastamento do foco F' , também o centro O da elipse se afasta, no mesmo sentido.

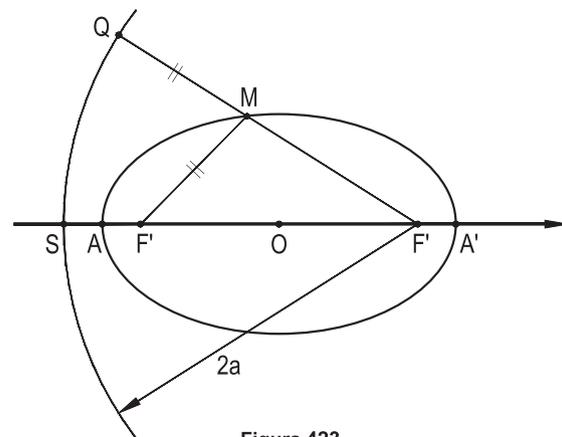


Figura 423

Pois então, quando F' chegar a ser o ponto impróprio da semirreta AF (Figura 424), a circunferência diretora, relativa a F' , ter-se-á degenerado na reta d pertencente ao ponto S e perpendicular a AF (Figura 424). E, como a relação (1) permanece válida durante todo o movimento de F' , até nesta posição final, o segmento MQ , por ter seu suporte pertencente ao ponto impróprio F'_∞ da semirreta AF , há de ser paralelo a AF , e, por isso, perpendicular à reta d , medindo, assim, a distância do ponto M considerado a esta reta.

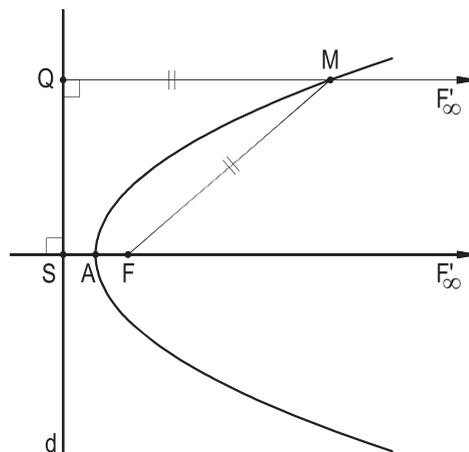


Figura 424

Nestas condições, a curva, inicialmente uma elipse, degenera na parábola do foco F e diretriz d , por ter seus pontos M equidistando desse ponto e dessa reta (Figura 424), ficando, pois, demonstrado o teorema.

183 – Corolários

1 – Mantidos fixos F e A , o deslocamento de F' para o infinito acarreta, também, que o centro O da elipse tenda a ser impróprio, na mesma direção, o que implica em que a circunferência (O, OA) , principal da elipse, degenera, na posição limite, segundo a tangente w , às suas posições inicial, intermédias e final.

Ou seja, quando, nos termos aqui considerados, a elipse se converte em parábola, sua circunferência principal degenera na tangente à parábola, em seu vértice (Figura 425).

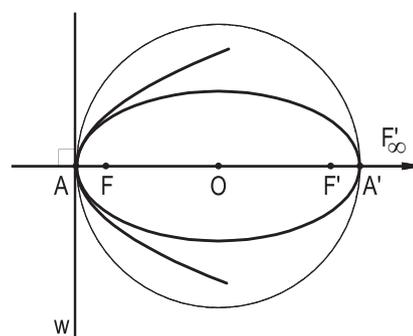


Figura 425

2 – A tangente à parábola num ponto corrente M é a bissetriz do ângulo formado pelo raio vetor de M e pela perpendicular baixada de M à diretriz (Figura 426).

Porque, ao se transformar a elipse em parábola, o segundo raio vetor MF'_∞ adquire a direção do eixo da parábola (Figura 426) e a bissetriz externa do ângulo formado pelos raios vetores (número 23) do ponto corrente M da elipse assume a posição de tangente à parábola limite, nesse ponto.

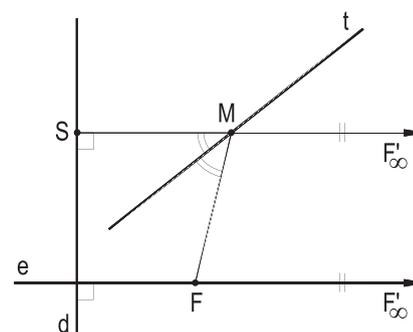


Figura 426

3 – O foco da parábola é o ponto médio do segmento determinado no eixo pela tangente e pela normal relativas a um ponto qualquer da curva.

Porque na divisão harmônica existente entre os pés da tangente e da normal num qualquer de seus pontos e os dois focos da elipse (número 24.2), ao se transformar a elipse em parábola, um foco é impróprio, obrigando o outro a ocupar a posição de médio do segmento formado por aqueles pés (Figura 427).

4 – O lugar geométrico dos simétricos do foco de uma parábola em relação às tangentes a ela é a sua diretriz.

Porque a diretriz é a posição limite ocupada pela circunferência diretora relativa ao foco impróprio (Figura 428).

5 – A reta formada pelo ponto de contato de uma tangente genérica a uma parábola e pelo simétrico do foco em relação a essa tangente é paralela ao eixo da curva (Figura 429).

Porque o alinhamento, obrigatório, entre o simétrico S do foco F , o ponto de contato M e o segundo foco (número 24.4) da elipse resulta nesse paralelismo, por ser impróprio esse segundo foco F'_∞ .

6 – O lugar geométrico das projeções ortogonais do foco sobre as tangentes à parábola é a tangente a ela em seu vértice.

Porque essa tangente é (número 183.1) a posição limite ocupada pela circunferência principal da elipse, quando tem ela seu segundo foco F' rejeitado ao infinito, na direção do eixo real.

E como, segundo o teorema de La Hire, para a elipse (número 29), a circunferência principal dessa curva é o lugar geométrico procurado, sua transformada, a reta w , tangente à parábola em seu vértice (Figura 430), é o lugar geométrico de tais projeções, para a posição limite da parábola.

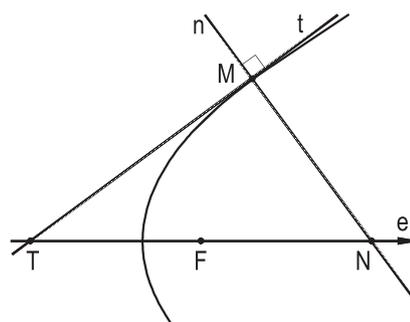


Figura 427

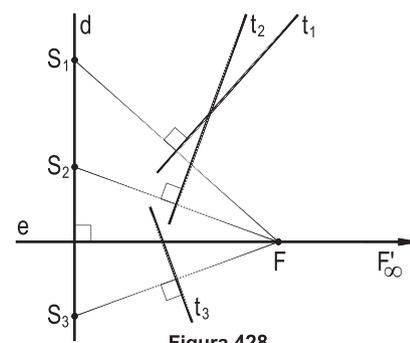


Figura 428

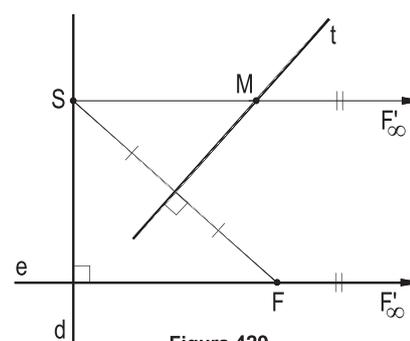


Figura 429

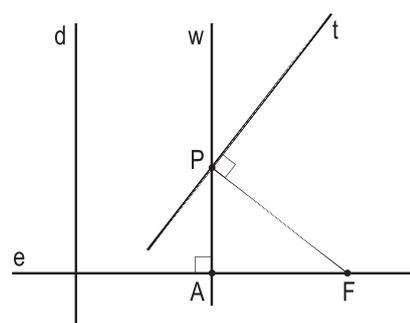


Figura 430

7 – As tangentes traçadas por um ponto exterior a uma parábola são isogonais em relação aos lados do ângulo formado pela reta que une o ponto exterior ao foco e pela semirreta com origem nesse ponto e direção e sentido iguais às do eixo da parábola.

Porque, conforme o primeiro teorema de Poncelet para a elipse (número 33), a reta que une o ponto exterior J (Figura 431) ao foco impróprio F'_∞ da elipse tem de ser paralela ao eixo e da parábola.

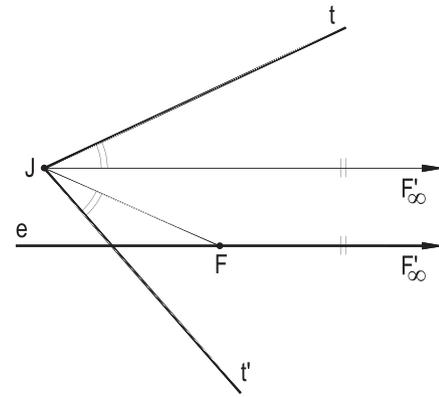


Figura 431

184 – Teorema

A parábola é a posição limite ocupada por uma hipérbole, quando são mantidos fixos um foco e o vértice mais próximo, enquanto que o outro foco se afasta indefinidamente sobre o eixo real.

Demonstração:

Consideremos uma hipérbole de focos F e F' e eixo real AA' , bem como a circunferência diretora relativa ao foco F' .

Sabe-se que um ponto M qualquer do ramo da hipérbole referente ao foco F equidista desse foco e da circunferência diretora relativa ao outro foco F' (Figura 432), o que permite escrever:

$$MF = MQ \quad (1)$$

Mantendo fixos o foco F e o vértice A , mais próximo, fazamos o segundo foco F' deslocar-se sobre o eixo real até o infinito.

Porque F e A permanecem fixos, resta fixo, também, o ponto S , simétrico de F em relação a A (Figura 432). Atenção para o fato de S pertencer à circunferência diretora do foco F' .

Assim, quando o foco F' , em seu movimento, chegar a ser o ponto impróprio F'_∞ do eixo real (Figura 433), a circunferência diretora relativa a ele ter-se-á transformado na reta d , que, passando por S , é perpendicular à reta AF .

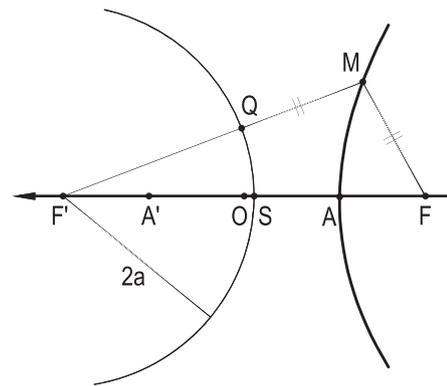


Figura 432

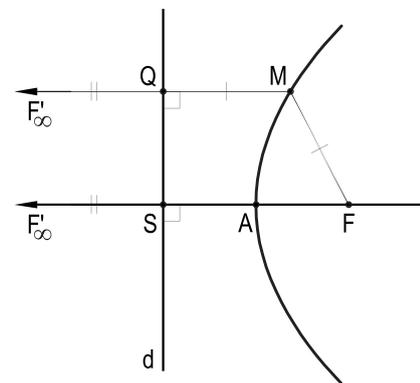


Figura 433

E, como a relação (1) permanece válida durante todo o movimento de F' , até sua posição final F'_∞ (Figura 433), por ter seu suporte pertencendo ao ponto impróprio F'_∞ da semirreta FA , o segmento MQ há de ser paralelo a essa semirreta e, então, perpendicular à reta d . Este segmento MQ , que mede a distância do ponto M corrente à reta d , sendo igual à sua distância ao ponto fixo F , assegura que a curva em estudo, nessa posição limite, é a parábola de diretriz d e foco F (Figura 433), ficando, assim, demonstrado o teorema.

185 – Corolários

1 – Mantidos fixos o foco F e o vértice A , o deslocamento de F' para o infinito acarreta que também o centro O da hipérbole tenda a ser impróprio, o que implica em que a circunferência principal (O, OA) da hipérbole venha a se degenerar, na situação limite, segundo a tangente w a essa circunferência no ponto A (Figura 434).

Assim, quando a hipérbole, nas condições em estudo, transforma-se em parábola, sua circunferência principal passa a ser a tangente à parábola em seu vértice (Figura 434).

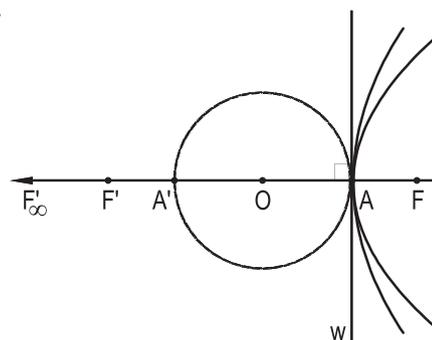


Figura 434

2 – A tangente à parábola num qualquer de seus pontos M é a bissetriz interna do ângulo formado por seu raio vetor MF e pela perpendicular MS baixada à diretriz d (Figura 435).

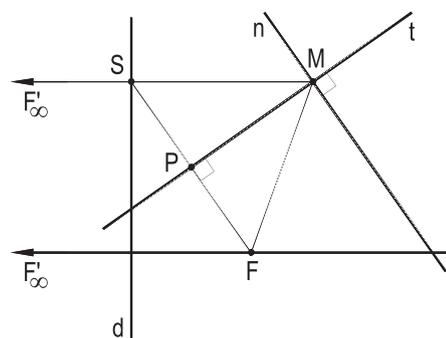


Figura 435

Porque ao se transformar a hipérbole em parábola é este o ângulo formado pelos raios vetores MF e MF' da hipérbole, agora nas posições MF e MF'_∞ (Figura 435). E, como se sabe (número 109), a bissetriz interna dos raios vetores da hipérbole é a tangente, em M , à curva.

3 – O foco da parábola é o ponto médio do segmento determinado em seu eixo pelos pés da tangente e da normal num qualquer de seus pontos.

Porque, para atender à divisão harmônica existente entre os dois focos da hipérbole e os pés da tangente e da normal num qualquer de seus pontos, quando um dos focos fica impróprio, o outro passa a ser o ponto médio do segmento TN formado por aqueles pés (Figura 436).

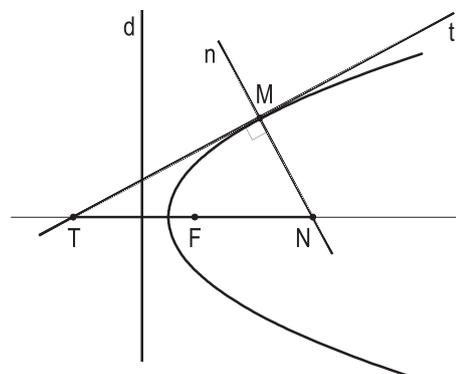


Figura 436

4 – O lugar geométrico dos simétricos dos focos de uma parábola em relação às suas tangentes é sua diretriz (Figura 437).

Porque a diretriz é a posição limite ocupada pela circunferência diretora relativa ao foco impróprio (número 182).

5 – A reta formada pelo ponto de contato de uma tangente qualquer a uma parábola e pelo simétrico do foco em relação a essa tangente é paralela ao eixo da curva (Figura 438).

Porque o alinhamento obrigatório, para qualquer ponto da hipérbole, entre o simétrico de um foco em relação a uma tangente, seu ponto de contato e o outro foco, implica nesse paralelismo, por ser impróprio o segundo foco, na posição limite da parábola (Figura 438).

6 – O lugar geométrico das projeções ortogonais do foco de uma parábola sobre suas tangentes é a tangente à curva em seu vértice (Figura 439).

Porque tal tangente é a posição limite ocupada pela circunferência principal da hipérbole, quando ela degenera em parábola. E, conforme o teorema de La Hire, a circunferência principal dessa curva é o lugar geométrico em estudo.

7 – As tangentes traçadas por um ponto exterior a uma parábola são isogonais em relação aos lados do ângulo formado pela reta que une esse ponto ao foco e a paralela ao eixo traçada pelo ponto exterior.

Porque, conforme o primeiro teorema de Poncelet, a reta que une o ponto exterior J (Figura 440) ao foco impróprio F'_∞ da hipérbole há de ser paralela ao eixo e da parábola.

Atenção para o fato de serem iguais os sentidos da semirreta paralela considerada e do eixo. (Figura 440).

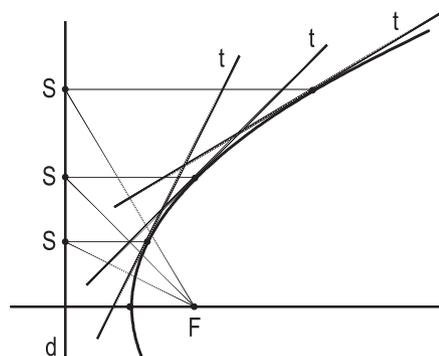


Figura 437

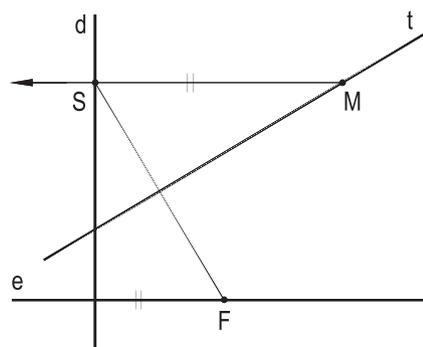


Figura 438

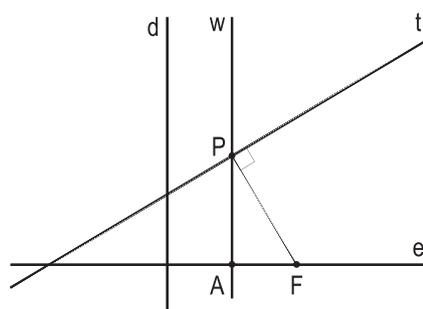


Figura 439

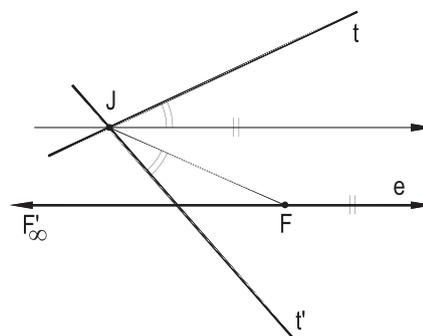


Figura 440

CAPÍTULO XI

DIÂMETROS DA PARÁBOLA

186 – Diâmetros da parábola

Pela própria definição (número 154), diâmetro da parábola relativo a determinada direção é a linha que contém os pontos médios de todas as cordas da parábola com aquela direção.

187 – Teorema

O lugar geométrico dos pontos médios das cordas de uma parábola paralelas a uma reta genérica é uma semirreta paralela ao eixo, limitada pela parábola e situada em seu interior.

Demonstração: Consideremos uma corda genérica NN' de uma parábola de foco F e diretriz d , bem como as circunferências pertencentes ao foco, tendo por centros os extremos N e N' daquela corda.

Tais circunferências, evidentemente tangentes à diretriz (número 164.7), voltam a se cortar no ponto S , simétrico de F , em relação a NN' (Figura 441).

Se \bar{N} e \bar{N}' os pontos de contato das duas circunferências consideradas com a diretriz, porque a reta SF é o eixo radical dessas circunferências, o ponto \bar{M} , segundo o qual ela corta a diretriz, é o médio do segmento $\bar{N}\bar{N}'$ (Figura 441) (*Geometria Plana*, número 254).

Assim, a paralela ao eixo da parábola, traçada por \bar{M} , por ser suporte da base média do trapézio retângulo $\bar{N}NN'\bar{N}'$, conterá o ponto M , médio da corda NN' (*Geometria Plana*, número 87) (Figura 441).

E, se considerarmos outras cordas paralelas a NN' , porque F é fixo, a reta $F\bar{M}$, sempre perpendicular à direção comum r dessas cordas (Figura 441), permanecerá fixa.

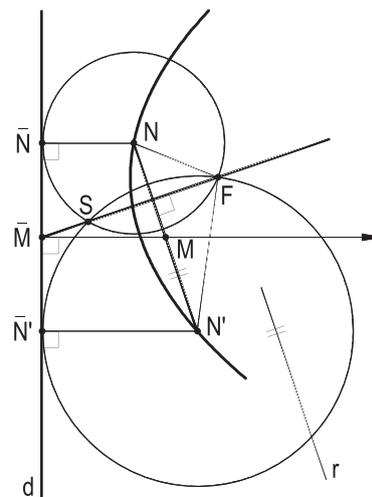


Figura 441

Mas então, o ponto \bar{M} , pé da perpendicular por F à direção constante r , considerada, há de ser, também, fixo e, então, os pontos M , médios de todas as cordas paralelas à reta r (Figura 442), pertencerão à paralela ao eixo da parábola, traçada por \bar{M} , visto que a construção é válida para todas elas.

E porque todos os pontos médios das cordas em estudo são, evidentemente, interiores à parábola, da paralela ao eixo pertencente ao ponto \bar{M} , é útil, como diâmetro, apenas a parte Jx interior à parábola (Figura 442).

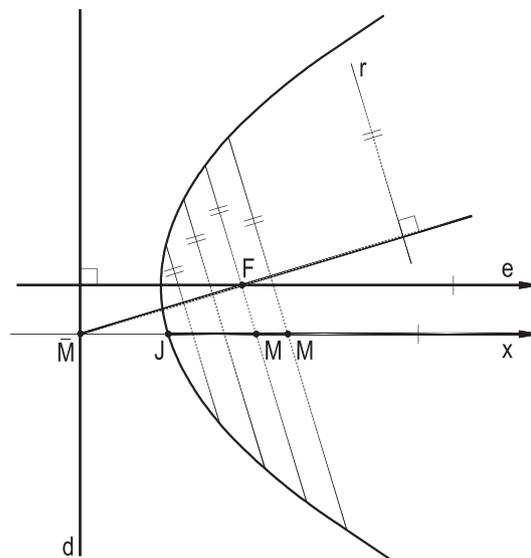


Figura 442

Então, o lugar geométrico dos pontos médios das cordas de uma parábola paralelas a uma reta genérica é uma semirreta paralela ao eixo, limitada pela parábola e situada em seu interior.

188 – Corolário

A parábola possui uma infinidade de diâmetros. Todos eles são semirretas paralelas ao eixo, limitadas pela curva, com o mesmo sentido do eixo.

De fato, basta observar que a direção r das cordas acima estudadas (número 187) foi arbitrária, sendo válida, pois, a propriedade para qualquer sistema de cordas paralelas da parábola.

189 – Observações

1 – O diâmetro relativo a uma direção r é denominado diâmetro conjugado daquela direção.

2 – Para estudar os diâmetros da parábola, poderíamos considerá-la como posição limite ocupada por uma elipse, ou por uma hipérbole, que tivesse fixos um foco e o vértice real mais próximo e o outro foco, móvel, afastando-se indefinidamente do primeiro (números 182 e 184), sobre o suporte do eixo real.

Como, nessas condições, o próprio centro da elipse, ou da hipérbole, chegaria a ser o ponto impróprio do eixo transversal, os diâmetros da elipse, ou da hipérbole, sendo todos pertencentes ao centro dessa cônica, transforma-se-iam, na posição limite da parábola, em semirretas paralelas ao eixo da curva, o que comprova a proposição.

190 – Propriedades

1 – A tangente à parábola no extremo de um diâmetro é paralela às cordas que definem esse diâmetro.

Porque tal tangente t é a posição limite ocupada por essas cordas NN' , à medida que caminham para chegar à posição da tangência (Figura 443).

Assim, a tangente à parábola num ponto M da curva e o diâmetro Mx , relativo a esse ponto, têm direções conjugadas (número 189.1).

2 – Dadas duas cordas paralelas $N_1N'_1$ e $N_2N'_2$ de uma parábola, as secantes N_1N_2 e $N'_1N'_2$ à curva, formadas pelos extremos correspondentes dessas duas cordas, cortam-se sobre a reta que serve de suporte ao diâmetro relativo àquelas cordas.

Porque (Figura 444) os pontos N_1 , N'_1 e M_1 , sendo homotéticos respectivamente de N_2 , N'_2 e M_2 , obrigam a existência de um ponto J comum às retas N_1N_2 , $N'_1N'_2$ e M_1M_2 .

Tal ponto J é o centro dessa homotetia.

E a reta formada pelos pontos M_1 e M_2 , médios das cordas consideradas, é a que serve de suporte ao diâmetro relativo a essas cordas (Figura 444).

3 – As tangentes nos extremos de uma corda cortam-se sobre a reta suporte do diâmetro relativo a essa corda.

De fato, basta ver que essas tangentes t e t' (Figura 445) podem ser consideradas como as posições limites ocupadas por duas secantes N_1N_2 e $N'_1N'_2$ (Figura 444) formadas pelos extremos de duas cordas paralelas $N_1N'_1$ e $N_2N'_2$ da parábola (número 190.1), quando ambas tendem às respectivas posições de tangência à curva.

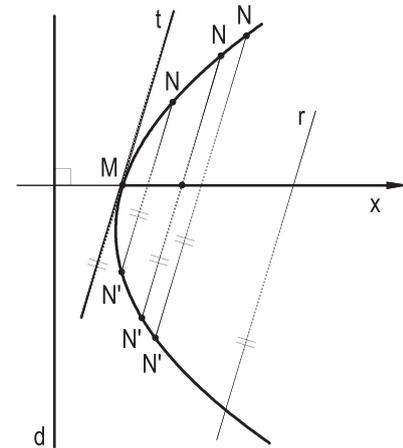


Figura 443

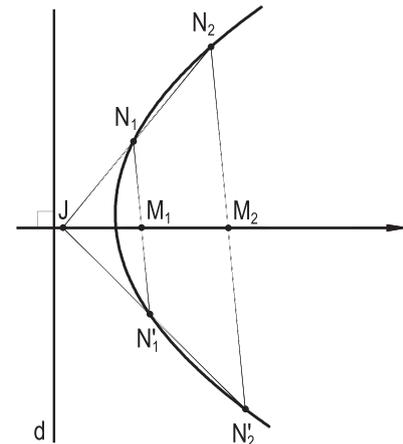


Figura 444

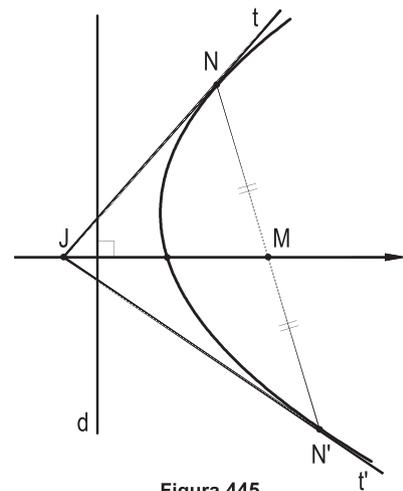


Figura 445

Esta propriedade pode, aliás, ser provada diretamente. Para tanto, consideremos as tangentes t e t' nos extremos N e N' de uma corda genérica NN' de uma parábola, bem como os simétricos S e S' do foco F , em relação àquelas tangentes (Figura 446).

Porque t e t' são as mediatrizes dos lados FS e FS' do triângulo FSS' , o ponto J comum a elas é o circuncentro desse triângulo. Ora, a mediatriz de SS' , sendo o suporte da base média do trapézio $SS'N'N$, passa pelo ponto médio do lado NN' (*Geometria Plana*, número 87). Assim, essa mediatriz passa por J (Figura 446). E, por ser paralela ao eixo e passar pelo ponto médio da corda NN' , ela é a reta que serve de suporte ao diâmetro relativo àquela corda.

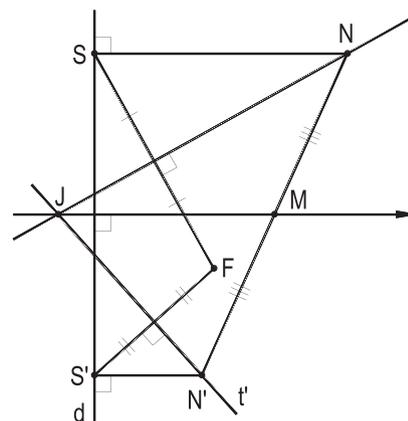


Figura 446

4 – Reciprocamente, a reta formada pelo ponto J comum a duas tangentes t e t' e pelo ponto médio M da corda que une os pontos de contato N e N' daquelas tangentes serve de suporte ao diâmetro relativo à corda NN' , sendo, pois, paralela ao eixo da parábola (Figura 446).

191 – Teorema

Sejam N e N' os pontos de contato de duas tangentes JN e JN' a uma parábola e R o ponto médio da corda NN' , o ponto comum à reta JR e à parábola é o médio M do segmento JR .

Demonstração: Sejam JN e JN' duas tangentes quaisquer a uma parábola e R o ponto médio da corda NN' formada pelos pontos de contato dessas tangentes.

Sabe-se (número 190.4) que a reta JR serve de suporte ao diâmetro relativo à corda NN' .

Pois, seja M (Figura 447) o ponto comum a esse diâmetro e à parábola e consideremos a tangente t'' , à curva, nesse ponto M , bem como a reta GH formada pelo ponto comum às tangentes t e t'' e pelo ponto H médio da corda MN .

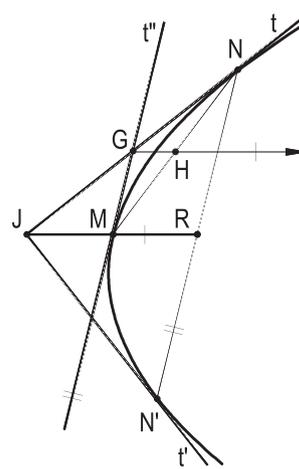


Figura 447

Porque GH é paralela a JR (número 190.4), no triângulo JNM , G será o ponto médio do lado JN (*Geometria Plana*, número 85).

E, porque t'' é paralela a NN' (número 190.1), no triângulo JNR (Figura 447), M será o ponto médio do lado JR .

Então, sendo N e N' os pontos de contato de duas tangentes JN e JN' a uma parábola e R o ponto médio da corda NN' , o ponto comum à reta JR e à parábola é o médio M do segmento JR (Figura 448), ficando, pois, demonstrado o teorema.

192 – Corolário

O extremo M do diâmetro MR relativo a uma corda qualquer NN' de uma parábola é o ponto médio do segmento JR formado pelo ponto J comum às tangentes nos extremos N e N' da corda considerada e pelo ponto médio R dessa corda (Figura 448).

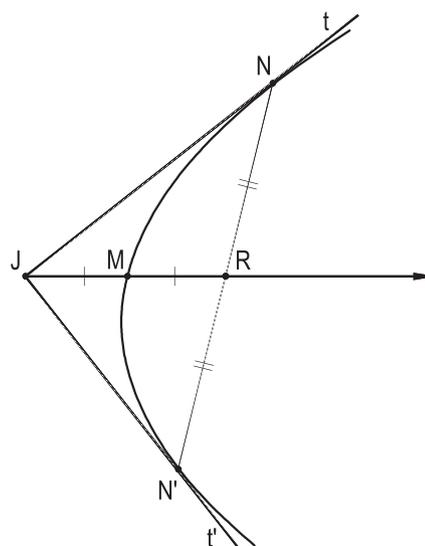


Figura 448

193 – Construção direta da parábola a partir de duas tangentes e de seus pontos de contato

Dadas duas tangentes genéricas t e t' a uma parábola e seus pontos de contato N e N' , para construir diretamente a curva, isto é, sem determinar o foco, nem a diretriz, basta obter novas tangentes e seus pontos de contato. Para tanto, une-se os pontos N e N' e determina-se o ponto R , médio de NN' , e o ponto M , médio de JR (Figura 449).

Sabe-se que M pertence à parábola (número 192) e que a reta t_1 , pertencente a M e paralela à corda NN' , é tangente à parábola (número 190.1).

Obtida esta nova tangente t_1 , repete-se a operação acima descrita para o par de tangentes t e t_1 , determinando-se, então, novo ponto corrente M' e nova tangente t_2 e para o par de tangentes t' e t_1 , obtendo-se, então, novo ponto corrente M'' e nova tangente t_3 (Figura 449).

As novas tangentes, assim determinadas, e seus pontos de contato permitem reiterar o processo, tanto quanto se julgue necessário, para conseguir ideal precisão no traçado da curva.

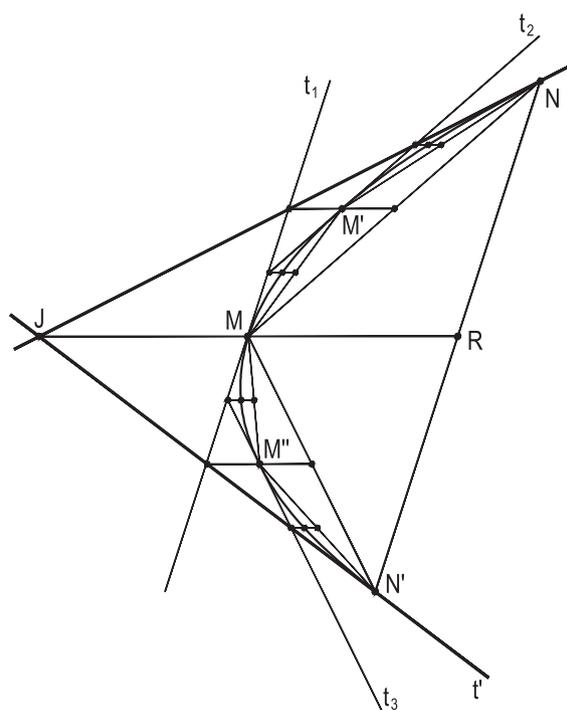


Figura 449

194 – Observação

O processo acima apresentado (número 193) para a construção direta da parábola, a partir de duas tangentes e de seus pontos de contato, ou seja, para concordar, diretamente, duas retas por um arco de parábola de extremos conhecidos, proporciona, apenas, pontos do arco de parábola limitado pelas duas tangentes.

Quando, no entanto, for preciso determinar pontos da curva situados além dos extremos daquele arco, para utilizar o mesmo processo de construção lá apresentado, basta obter novas tangentes à parábola, nos prolongamentos daquele arco.

Para analisar essa questão, admitamos que sejam conhecidas as tangentes t e t' e seus pontos de contato N e N' (Figura 450) e que se deseje estender a parábola além do ponto N' .

Consideremos, então, a corda NN' paralela à tangente t' (Figura 450). Sabe-se que o diâmetro relativo a essa corda passa por N' (número 190.1) e é (número 188) paralelo a JR , encontrando a corda NN' , naturalmente, em seu ponto médio \bar{R} . E que, além disso, as tangentes t e \bar{t} , nos extremos da corda NN' , concorrem num ponto \bar{J} situado sobre a reta suporte do diâmetro $N'\bar{R}$ considerado (número 190.3).

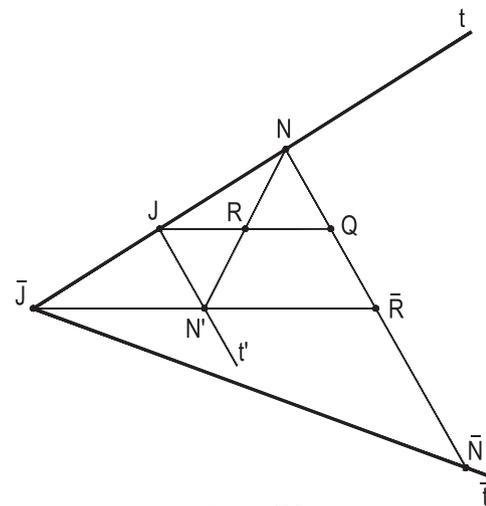


Figura 450

Observando, finalmente, que os pontos R , J , Q e \bar{R} são os médios dos segmentos NN' , $N\bar{J}$, $N\bar{R}$ e NN' , respectivamente (Figura 450), conclui-se que: $N\bar{J} = 2 \cdot NJ$ e $NN' = 4 \cdot JN'$

Assim, conhecidas as tangentes t e t' e seus pontos de contato N e N' , para obter um ponto corrente \bar{N} , no prolongamento do arco NN' , e a tangente \bar{t} nesse ponto, basta determinar o ponto \bar{J} , simétrico de N em relação a J , e aplicar sobre a paralela a t' , traçada por N , o segmento $N\bar{N}' = 4 \cdot JN'$ (Figura 451).

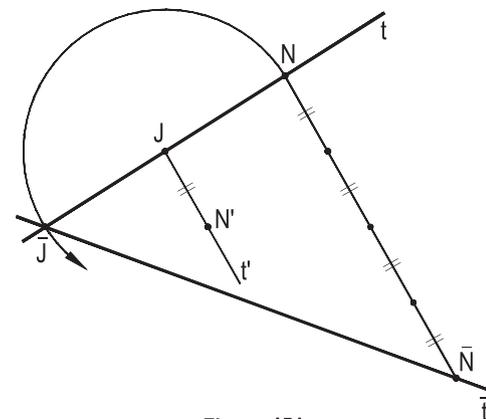


Figura 451

Evidentemente, a repetição do processo fornece tantas novas tangentes quanto se deseje, podendo-se, então, estender a parábola indefinidamente.

E, para obter pontos correntes entre N' e \bar{N} , basta voltar a aplicar o processo direto de construção (número 193).

195 – Determinação do foco e da diretriz de uma parábola dada por duas tangentes e seus pontos de contato

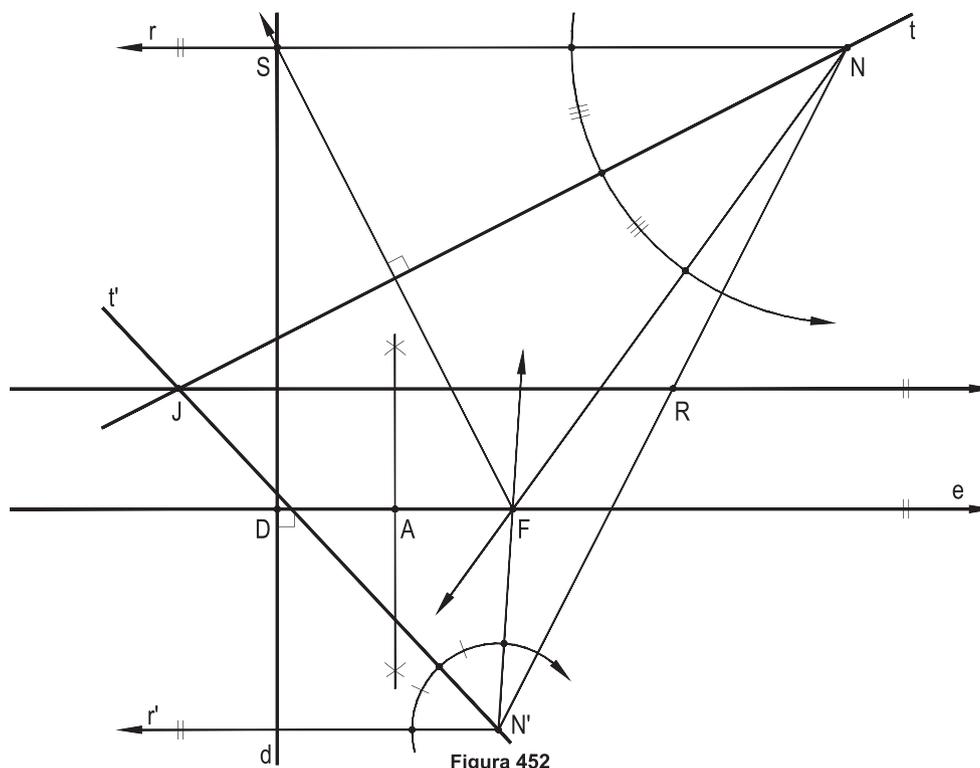
Dadas duas tangentes genéricas t e t' a uma parábola e seus pontos de contato N e N' , para determinar o foco e a diretriz dessa parábola, deve-se obter, inicialmente, a direção do eixo, o que se consegue unindo o ponto J , comum às tangentes, ao ponto R médio da corda NN' (número 190.3).

Como cada tangente deve ser (número 163) a bissetriz do ângulo formado pelo raio vetor do ponto de contato com a semirreta de direção igual à do eixo, mas com sentido oposto ao dele, deve-se traçar, por N e por N' , as paralelas r e r' ao eixo, ou seja, ao diâmetro JR (Figura 452).

Constrói-se, a seguir, as simétricas, em relação às tangentes, de cada uma dessas paralelas traçadas por N e N' , as quais produzem, por interseção, o foco F da parábola.

Obtido o foco, determina-se seu simétrico S , em relação a uma das tangentes (Figura 452), o que se consegue traçando, por F , a perpendicular a JN . E, então, traça-se, por S , a perpendicular ao diâmetro JR , que será a diretriz procurada d .

Como simples adição, é imediato, então, obter o vértice A da parábola, médio do segmento FD , perpendicular do foco à diretriz (Figura 452).



196 – Determinação da parábola dada por uma corda e pelo diâmetro relativo a essa corda

Sendo dados, de uma parábola, uma corda NN' e o diâmetro Mx , relativo a essa corda, é bem simples a construção das tangentes t e t' à parábola, nos pontos N e N' .

De fato, porque o extremo M do diâmetro deve ser o ponto médio do segmento formado pelo ponto comum àquelas tangentes e pelo ponto médio da corda (número 192), basta (Figura 453) construir o simétrico J do ponto R , médio da corda NN' , em relação a M e unir J aos extremos N e N' da corda, para obter as tangentes t e t' , nos pontos N e N' (número 191).

E, uma vez determinadas as tangentes t e t' , torna-se imediato obter o foco e a diretriz da parábola (número 195), ou construir diretamente, por pontos, a curva, conforme detalhado nos itens 193 e 194.

Convém observar que, em verdade, para determinar a parábola, basta fornecer uma corda NN' e o extremo M do diâmetro correspondente a essa corda, visto que o diâmetro a ela relativo necessariamente contém seu ponto médio.

De fato, é só ver que, dados uma corda e o diâmetro correspondente (Figura 453), é condição natural de possibilidade a pertinência do diâmetro ao ponto médio da corda.

Assim, como simples variação do problema, poderiam ter sido dados o diâmetro Mx , um ponto corrente N e a direção r conjugada daquele diâmetro (Figura 454).

Para retornar aos dados iniciais bastaria, então, traçar a paralela a r , por N , obtendo, por interseção com o diâmetro dado, o ponto R e completar a corda NN' , pela simetria de N em relação a R (Figura 454). Com isso, passaríamos a conhecer uma corda NN' da parábola procurada e o diâmetro Mx a ela correspondente.

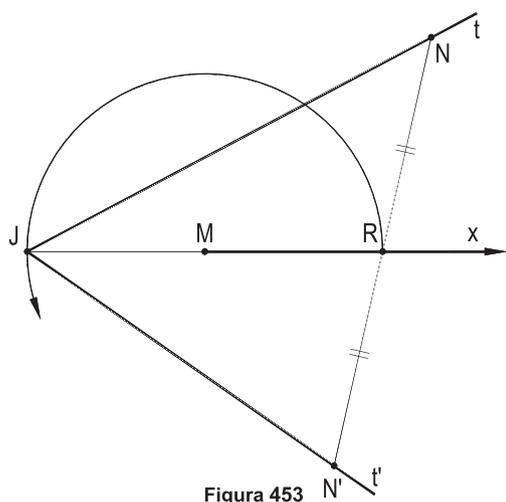


Figura 453

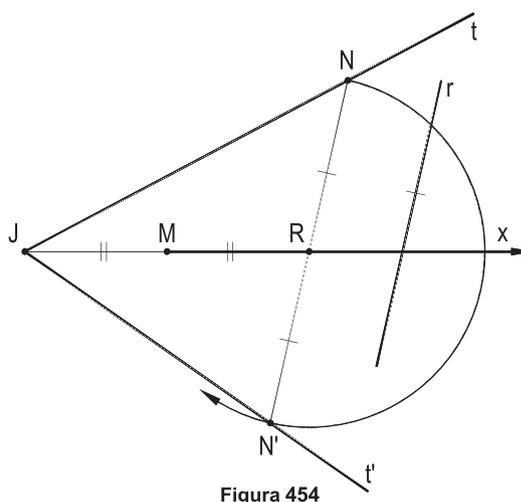


Figura 454

197 – Problemas resolvidos

149 – Dados uma corda MM' de uma parábola e o extremo J do diâmetro correspondente à família de cordas da curva, paralelas a MM' , pede-se construir esse diâmetro Jx e uma segunda corda NN' , paralela à dada, conhecido seu extremo N' .

Resolução: Obtido o ponto C , médio de MM' , J e C definem o diâmetro Jx e a paralela por N' a MM' traz C' em Jx e o simétrico N de N' em relação a C' completando a corda $N'N$ buscada (Figura 455).

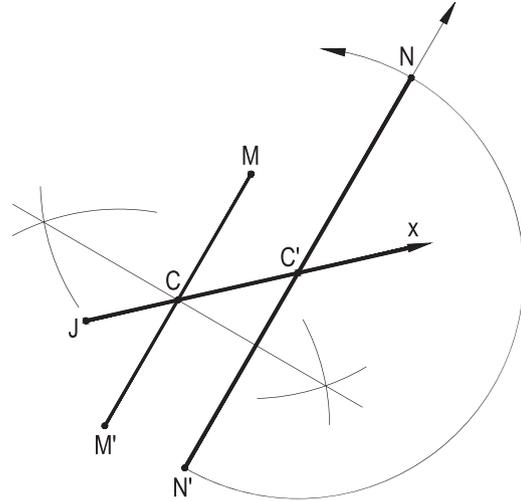


Figura 455

150 – Determinar a reta r , suporte do diâmetro da parábola que admite as duas cordas paralelas dadas MM' e NN' , a elas relativo.

Resolução: Obtido o ponto C , médio de MM' , sua união ao ponto J , comum às retas MN e $M'N'$, traz a reta r pedida (Figura 456), tal como detalhado no item 190.2.

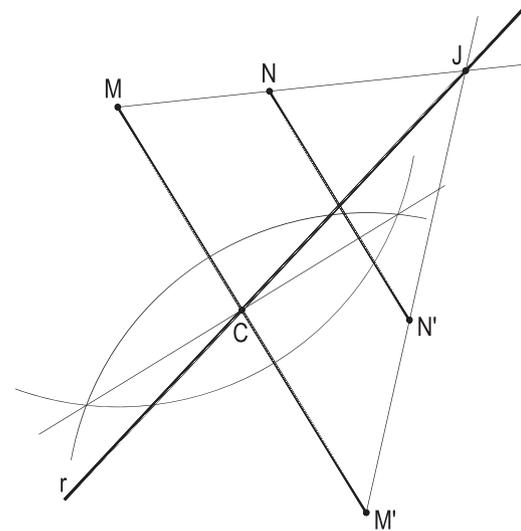


Figura 456

151 – Duas parábolas têm, para as famílias de cordas paralelas a MM' , na primeira, e para a família de cordas paralelas a NN' , na segunda, diâmetros paralelos, distantes, um do outro, a medida dada d . Pede-se determinar seus suportes r e s , dadas MM' e NN' .

Resolução: Marcados os pontos C , C' e \bar{C} , médios das duas cordas dadas e de CC' , respectivamente, a tangente CT à circunferência (C' , d) é a reta r , suporte do primeiro diâmetro (Figura 457), com duas soluções, a segunda indicada pelo número 2.

A segunda, s , vem por C' , paralela a r .

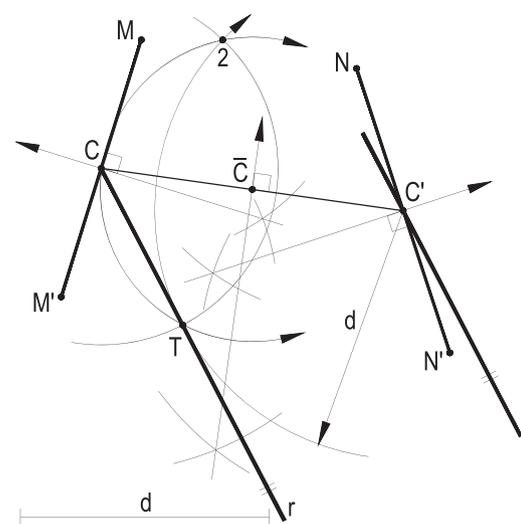


Figura 457

152 – MM' e NN' são cordas paralelas dadas de duas parábolas, tais que seus dois diâmetros conjugados, com suportes nas retas pedidas r e s , produzem, na reta dada w , um segmento de medida d , também dada.

Resolução: Aproveitando serem paralelas as duas cordas dadas, o trapézio $MM'N'N$ proporciona os pontos C e C' , médios dessas cordas e, por isso, pontos de passagem das retas paralelas pedidas r e s e a construção do triângulo $CC'K$, com CK pertencendo à reta \bar{w} paralela a w , por C , e com $CK = d$, proporciona a reta $s \equiv C'K$ e, então, a paralela r a ela, por C (Figura 458). (Duas soluções).

153 – Os segmentos dados MM' e NN' são cordas de duas parábolas, que admitem, para suas direções, diâmetros de direções iguais, que, além disso, têm seus suportes nas retas r e s , que produzem nas retas dadas x e y segmentos de mesmas dimensões. Pede-se determinar essas retas r e s .

Análise: Para que duas retas paralelas r e s produzam sobre duas secantes x e y dois segmentos iguais PP' e QQ' , elas devem ser perpendiculares a uma das bissetrizes b_1 ou b_2 dos ângulos formados por x e y (Figura 459).

Resolução: Assim, marcados os pontos médios C e C' de MM' e de NN' , pontos de passagem dos dois diâmetros em estudo, de suportes r e s procurados, basta construir as bissetrizes b_1 e b_2 dos ângulos formados por x e y e conduzir, por C e por C' , as retas r e s pedidas (duas soluções) (Figura 460), perpendiculares a uma dessas bissetrizes.

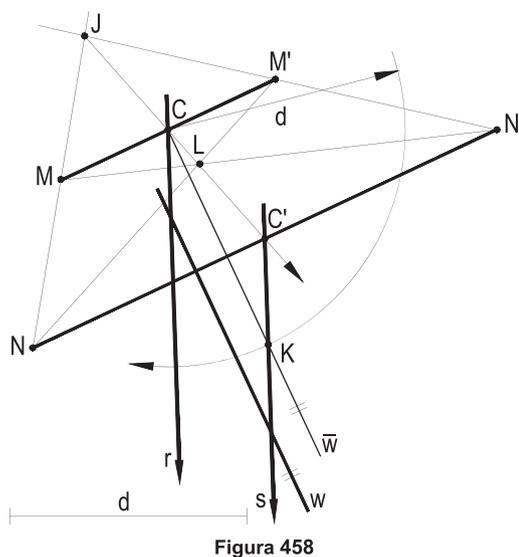


Figura 458

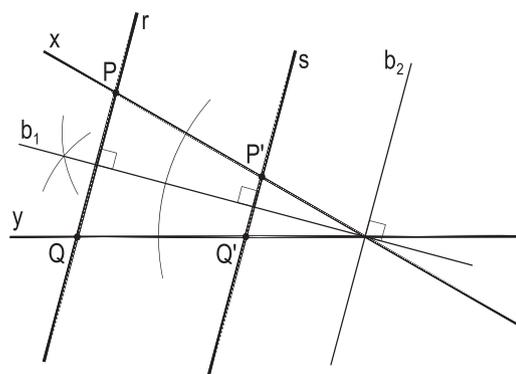


Figura 459

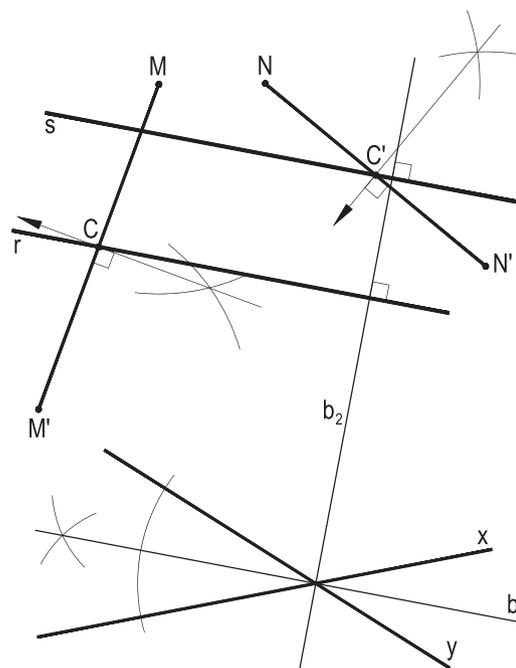


Figura 460

154 – Dadas as cordas MM' e NN' de duas parábolas, pede-se determinar as retas r e s , perpendiculares entre si, sabendo que o ponto comum às duas pertence à circunferência dada (O, OJ) e que elas são os suportes dos diâmetros, em cada parábola, conjugados das direções das cordas dadas MN' e NN' .

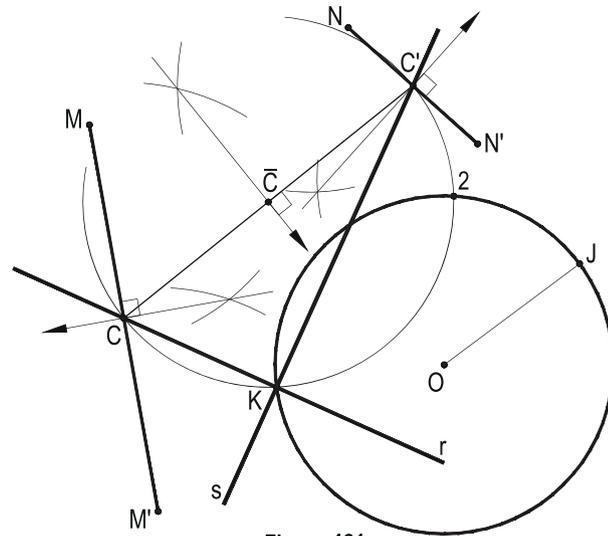


Figura 461

Resolução: Marcados os pontos médios C e C' das duas cordas dadas, o arco capaz de 90° para CC' corta a circunferência (O, OJ) no ponto K comum às retas r e s pedidas (Figura 461), com duas soluções.

155 – Para os mesmos dados e condições, pede-se determinar as retas r e s , sabendo que o ponto K , comum a elas, equidista dos pontos dados P e Q .

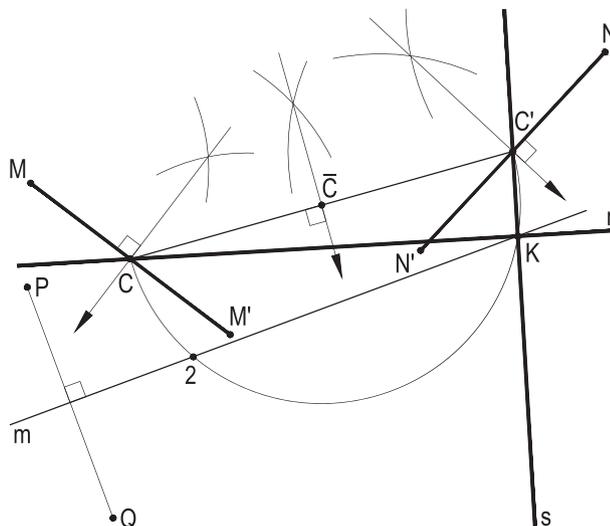


Figura 462

Resolução: O ponto K , comum às retas pedidas r e s , agora, deve pertencer à mediatriz m do segmento PQ (Figura 462) (duas soluções).

156 – Mesmos dados, o ponto K , comum às retas r e s pedidas, sendo capaz de ver o segmento dado PQ sob o ângulo de 60° .

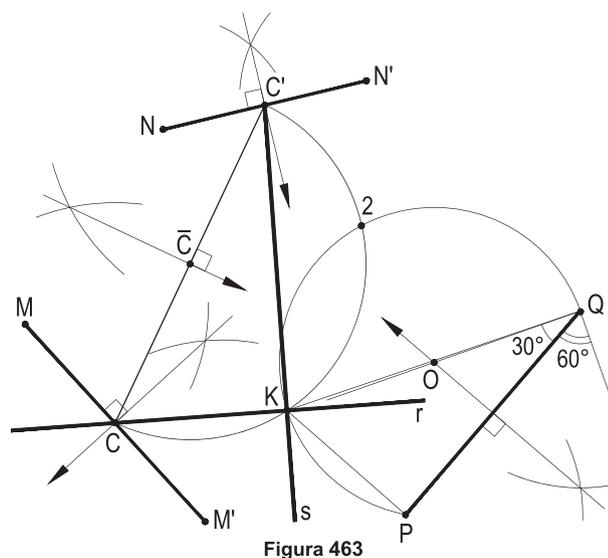
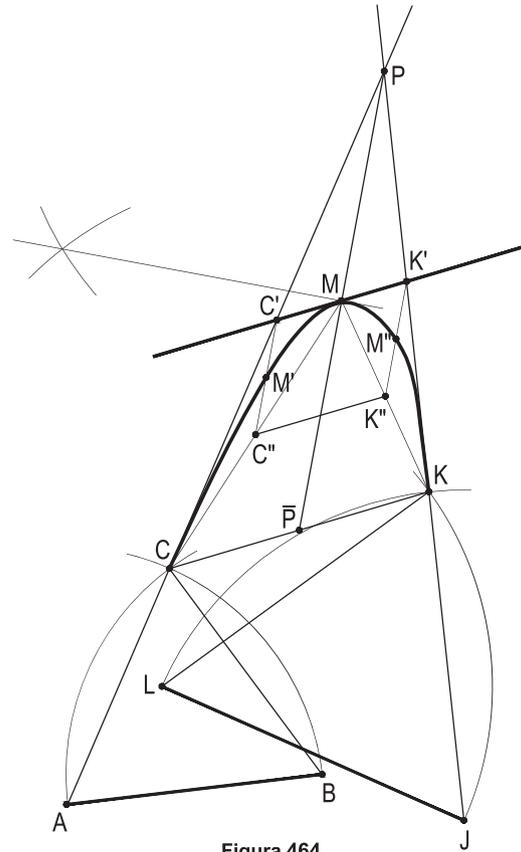


Figura 463

Resolução: O ponto K , agora, há de ser (duas soluções) uma das interseções dos arcos capazes de 90° para CC' e de 60° para PQ (Figura 463).

157 – Dados os segmentos AB e JL, construa os triângulos equiláteros ABC e JLK, escolhendo a situação que apresente cruzamento entre os lados BC e JK. Trace, então, as retas JK e AC e as concorde por um arco de parábola, com extremos C e K, tal que os pontos B e L fiquem em sua concavidade.

Resolução: Marcados o ponto \bar{P} , médio da corda CK, e o ponto M, médio de $P\bar{P}$ (Figura 464), obtém-se a tangente $C'K'$ à parábola, paralela a CK e, pela utilização do processo detalhado no item 193, ficam determinados novos pontos M' e M'' do arco de parábola pedido (Figura 464).

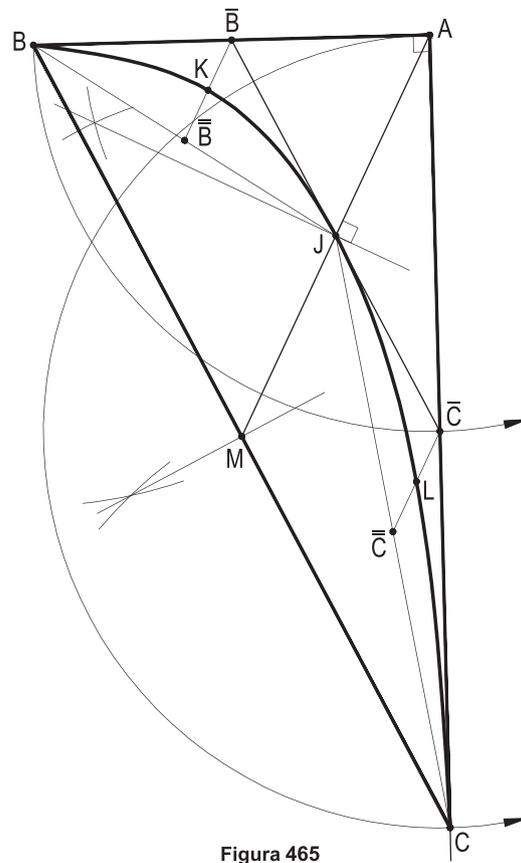


158 – Dado o segmento AB, construa o triângulo ABC, retângulo em A, com o cateto AC medindo o dobro de AB, escolhendo a solução que deixe o vértice C abaixo de AB.

Pede-se, então, concordar as retas AB e AC por um arco de parábola, de extremos B e C, determinando cinco pontos desse arco, ficando o ponto A no exterior da curva.

Resolução: Construído o triângulo retângulo ABC, conforme os dados e marcados os pontos M, médio da corda BC, e J, médio do segmento AM, vem a tangente $\bar{B}\bar{C}$ ao arco de parábola pedido, com a direção de BC (Figura 465).

A partir daí, basta seguir os procedimentos detalhados no item 193, para obter novos pontos K e L, para completar o arco BKJLC.



CAPÍTULO XII

SEÇÕES CÔNICAS

198 – Superfícies tangentes

Já estudamos (*Geometria Espacial*, números 184, 185, 186 e 187) as tangências entre planos e superfícies. Passemos, agora, generalizando, a analisar as tangências entre duas superfícies mais complexas que o plano.

Duas superfícies são ditas tangentes quando se tocam, mas não se atravessam, em tais posições.

Assim, duas superfícies tangentes podem ter apenas um ponto em comum, como nos exemplos indicados na Figura 466 que apresenta uma superfície esférica (O) tangente a um plano (π), ou duas superfícies esféricas (O) e (O') tangentes no ponto (T); ou podem ter uma linha em comum, como, por exemplo, nos casos mostrados, na Figura 467, de uma esfera (O) com uma superfície cônica (c), ou de uma superfície esférica (O) com uma superfície cilíndrica (s), tangentes, em ambos os casos, segundo uma linha (ℓ). O ponto ou a linha, elementos únicos, em cada caso, comuns às duas superfícies consideradas são denominados, respectivamente, pontos ou linhas de contato, ou de tangência, entre as duas superfícies.

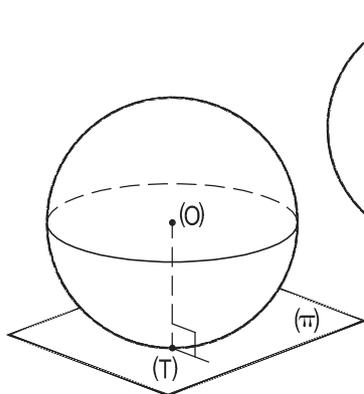


Figura 466

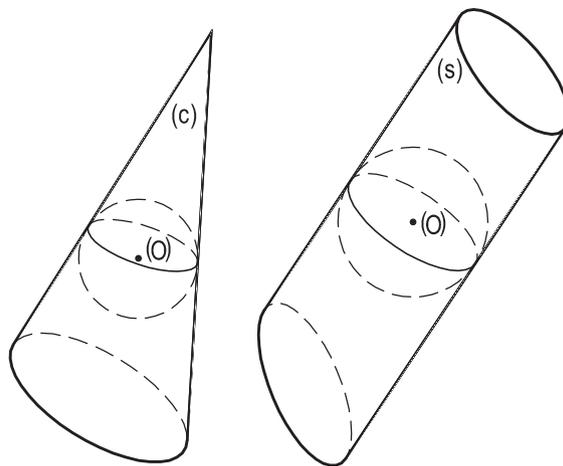


Figura 467

199 – Inscrição de uma esfera num cone de revolução

Diz-se que uma esfera está inscrita num cone de revolução quando ela é tangente a todas as geratrizes do cone e à sua base (Figura 468).

Isto implica em dizer que as superfícies esférica e cônica consideradas são tangentes.

Tão importante será esta inscrição, em estudos adiante abordados, que merecem serem destacadas algumas propriedades dela resultantes:

1 – O centro (O) da esfera inscrita pertence ao eixo (V)(H) do cone (Figura 468).

2 – Todos os pontos (T) de contato das duas superfícies pertencem, naturalmente, às geratrizes do cone e à circunferência (c) de contato dessas duas superfícies.

3 – Esta circunferência (c) pertence a um plano perpendicular ao eixo do cone (Figura 468).

4 – Todos os segmentos (V)(T), de geratrizes do cone, tangentes à esfera inscrita, são iguais, como geratrizes do cone de revolução de vértice (V) e base (c) (Figura 468).

5 – São iguais os ângulos que todas as geratrizes do cone formam com o plano de sua base (Figura 468).

6 – Cabe também ressaltar a igualdade (A)(H) = (A)(T) entre as tangentes de um ponto (A) qualquer da periferia da base do cone à esfera inscrita (Figura 468), que, aliás, vale, é claro, para todos os pontos da circunferência dessa base.

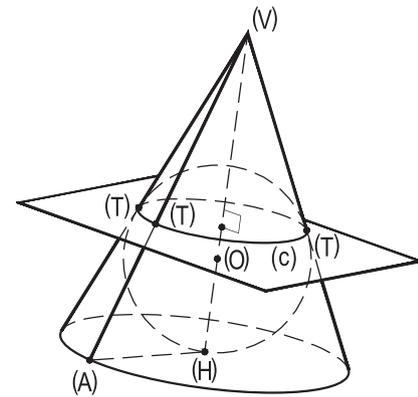


Figura 468

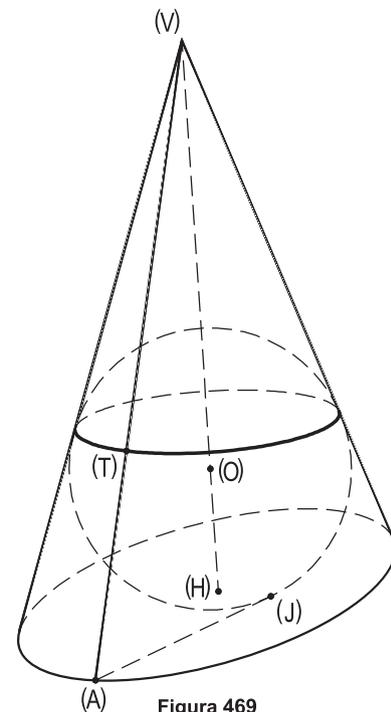


Figura 469

200 – Observação

Mesmo quando se considera a esfera (O) inscrita num cone oblíquo, extraído de uma superfície cônica de revolução (Figura 469), perdura a igualdade das tangentes (A)(T) e (A)(J) de um ponto (A) qualquer da periferia da base à superfície da esfera inscrita, embora varie seu valor com o movimento do ponto (A), ao longo da elipse, periferia da base, ao contrário daquela (A)(H) = (A)(T) abordada (Figura 468) para os cones de revolução, esta de valor constante, durante o movimento de (A).

201 – O estudo das seções cônicas

Desde a Antiguidade o assunto despertou interesse entre geômetras e matemáticos, tendo sido tema de especial importância para o matemático grego Menecmo, da Escola de Cízico, ao qual se atribui a descoberta das curvas cônicas, mesmo que, à época, não tivessem elas, ainda, essa denominação.

Seus estudos, limitados, no entanto, apontaram a elipse, a parábola e a hipérbole como seções planas em cones circulares retos por planos perpendiculares a uma de suas geratrizes. Apenas cones circulares retos foram, então, analisados.

Segundo Menecmo, tais seções decorriam, quanto a suas naturezas, do fato de o ângulo entre geratrizes opostas da seção meridiana do cone ser respectivamente menor, igual ou maior que o ângulo reto (Figuras 470, 471 e 472).

As limitações dessas conclusões, vinculadas apenas a seções por planos perpendiculares a uma geratriz, padeciam ainda, da identificação de um só ramo para as hipérboles, muito embora, é claro, os dois ramos da curva decorrente da seção em questão estivessem presentes.

Pouco menos de dois séculos após, surgiram os estudos de Apollonius de Perga, matemático e astrônomo, grego também, da Escola de Alexandria, que aprofundou-se na matéria a ponto tal de ter ficado conhecido, por isso, e não só, como o Grande Geômetra. Pena que importante parte de seus estudos escritos tenha se perdido, restando a respeito deles apenas referências, sempre muito elogiosas.

Coube a Apollonius generalizar os estudos iniciais desenvolvidos por Menecmo, abandonando a limitada análise dos planos perpendiculares a geratrizes de cones circulares retos, para a obtenção das seções cônicas.

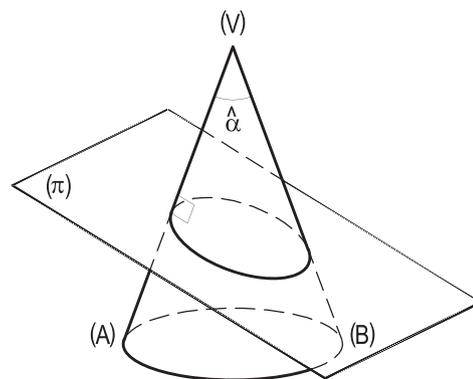


Figura 470

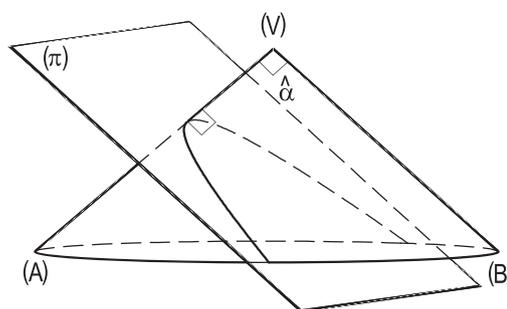


Figura 471

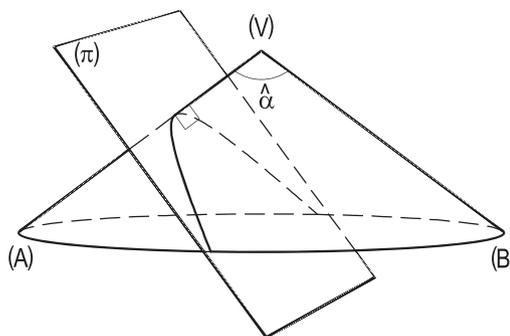


Figura 472

São dele as análises que comprovam ser possível, num mesmo cone de revolução, independentemente do ângulo formado por duas de suas geratrizes opostas, como defendia Menecmo, obter seções elíticas, parabólicas ou hiperbólicas, em função da variação do ângulo que o plano secante forma com o eixo do cone.

Foi, também, Apollonius que, substituindo a superfície cônica de revolução de uma só folha pela de duas folhas, comprovou que a hipérbole é composta por dois ramos (ver Figura 473), ao contrário do que, como antes se entendia, serem duas hipérboles as obtidas por uma única seção plana nessas superfícies.

Os estudos de Apollonius sobre as curvas cônicas foram o trabalho mais profundo e detalhado sobre elas, compreendendo oito livros com quase quatro centenas de proposições, teoremas e conclusões. O conjunto é, até hoje, reconhecido como um dos clássicos da Geometria e, sem dúvida, o mais completo sobre as cônicas.

Grande parte do trabalho se perdeu, embora alguns livros tenham sido conservados em grego e outros com traduções para a língua árabe.

Ressalte-se que as cônicas já haviam sido estudadas por geômetras anteriores, inclusive por Euclides, tido como o Pai da Geometria, mas nunca com a profundidade alcançada por Apollonius.

Apollonius estendeu, ainda, seus estudos para cones oblíquos.

Mas foi Dandelin que, séculos depois, apresentou demonstrações simples e claras para as propostas de Apollonius quanto às cônicas.

Germinal Pierre Dandelin, com colaboração de seu colega Adolphe Quetelet, ambos belgas, conseguiu, com o emprego de tangentes a esferas, demonstrar as seções elítica e hiperbólica por planos a superfícies cônicas de revolução, tendo cabido ao matemático inglês Pierce Morton, anos depois, instituir, com raciocínio semelhante ao utilizado por Dandelin, a seção plana parabólica a uma superfície cônica de revolução.

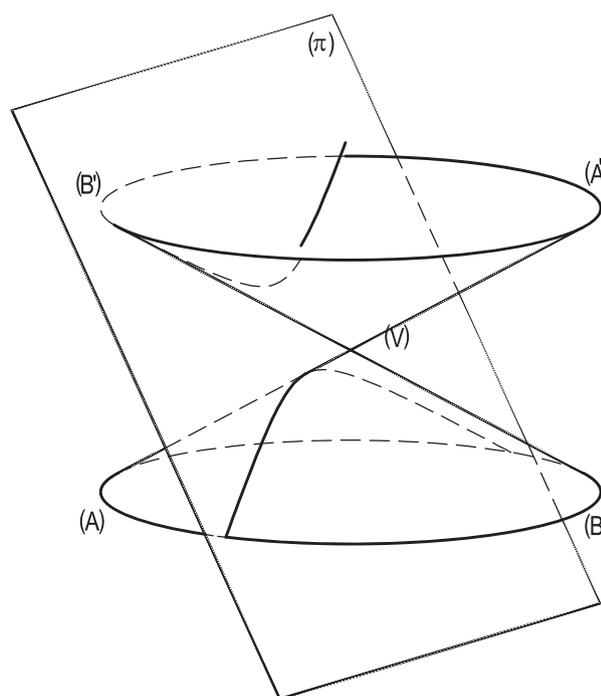


Figura 473

202 – Esferas de Dandelin

As assim ditas esferas de Dandelin são as esferas inscritas numa superfície cônica de revolução de duas folhas e tangentes a um plano secante a essa superfície.

Três hipóteses se põem:

- 1 – O plano secante (π) atinge todas as geratrizes de uma única folha (Figura 474);
- 2 – O plano secante (π) é paralelo a uma das geratrizes (Figura 475);
- 3 – O plano secante (π) corta as duas folhas da superfície (Figura 476).

Tais possibilidades são as indicadas pelas seções meridianas nas superfícies cônicas de revolução consideradas, aqui representadas por duas de suas geratrizes opostas VA e VB e pela interseção π do plano secante com tais seções meridianas, nas figuras que se seguem:

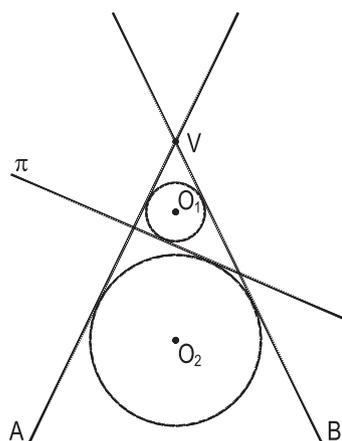


Figura 474

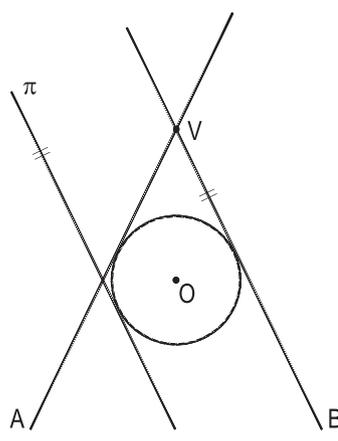


Figura 475

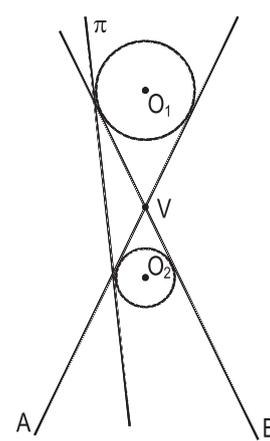


Figura 476

203 – Teorema de Dandelin

Um plano exterior ao vértice de uma superfície cônica de revolução a secciona segundo uma elipse, uma hipérbole ou uma parábola, conforme o ângulo desse plano com o eixo da superfície seja maior, menor ou igual ao ângulo que as geratrizes da superfície formam com o eixo.

Demonstração:

Primeira parte: seção elítica.

Estudemos uma superfície cônica de revolução de duas folhas, seccionada por um plano (π), exterior ao seu vértice (V), que forme com seu eixo (e) um ângulo agudo $\hat{\alpha}$ maior que o ângulo $\hat{\theta}$ que as geratrizes da superfície formam com seu eixo.

Tal essa inclinação é, que (π) atinge apenas uma das folhas da superfície (Figura 477).

Porque, considerando a seção meridiana da superfície cônica produzida por plano perpendicular a (π) , $\hat{\alpha}$ é ângulo externo de um triângulo que tem $\hat{\theta}$ como interno (Figura 477), o que implica em que a seção provocada por (π) interesse a apenas uma de suas folhas (ver número 202.1).

Com isso, a seção produzida por (π) na superfície há de ser uma curva fechada.

Para tal estudo, consideremos as duas esferas de Dandelin que lhe correspondem, ou seja, as esferas (O) e (O') inscritas na superfície e tangentes ao plano (π) .

Sejam, então, (F) e (F') os pontos de contato dessas duas esferas com o plano secante e (c) e (c') os paralelos de contato de cada uma dessas esferas com a superfície cônica (Figura 477).

Tomemos um ponto (M) qualquer da seção e unamo-lo a (F) e a (F') (Figura 477). Por pertencerem ao plano (π) , tangente às duas esferas, os segmentos $(M)(F)$ e $(M)(F')$ serão tangentes a cada uma das duas esferas.

Unamos, agora, aquele ponto genérico (M) ao vértice (V) da superfície, criando a geratriz $(V)(M)$, também tangente às duas esferas, já que elas estão inscritas na superfície cônica, e consideremos, sobre esta geratriz, os segmentos $(M)(R)$ e $(M)(S)$ limitados por aqueles dois paralelos de contato (Figura 477).

Ora, como pares de tangentes de um mesmo ponto (M) a cada uma das duas esferas consideradas, podemos (números 199.4 e 199.6) escrever:

$$(M)(F') = (M)(R)$$

$$(M)(F) = (M)(S)$$

Somando, membro a membro:

$$(M)(F) + (M)(F') = (M)(R) + (M)(S)$$

Como $(M)(R) + (M)(S) = (R)(S)$, vem:

$$(M)(F) + (M)(F') = (R)(S)$$

Mas $(R)(S)$ é constante, para todos os pontos (M) da seção, por ser a geratriz da superfície do tronco de cone de revolução de primeira espécie de bases (c) e (c') (Figura 477). Assim, conclui-se, em obediência à própria definição da curva, que a seção produzida por (π) , nas condições fixadas, é uma elipse de focos (F) e (F') e de eixo transversal igual ao segmento $(R)(S)$.

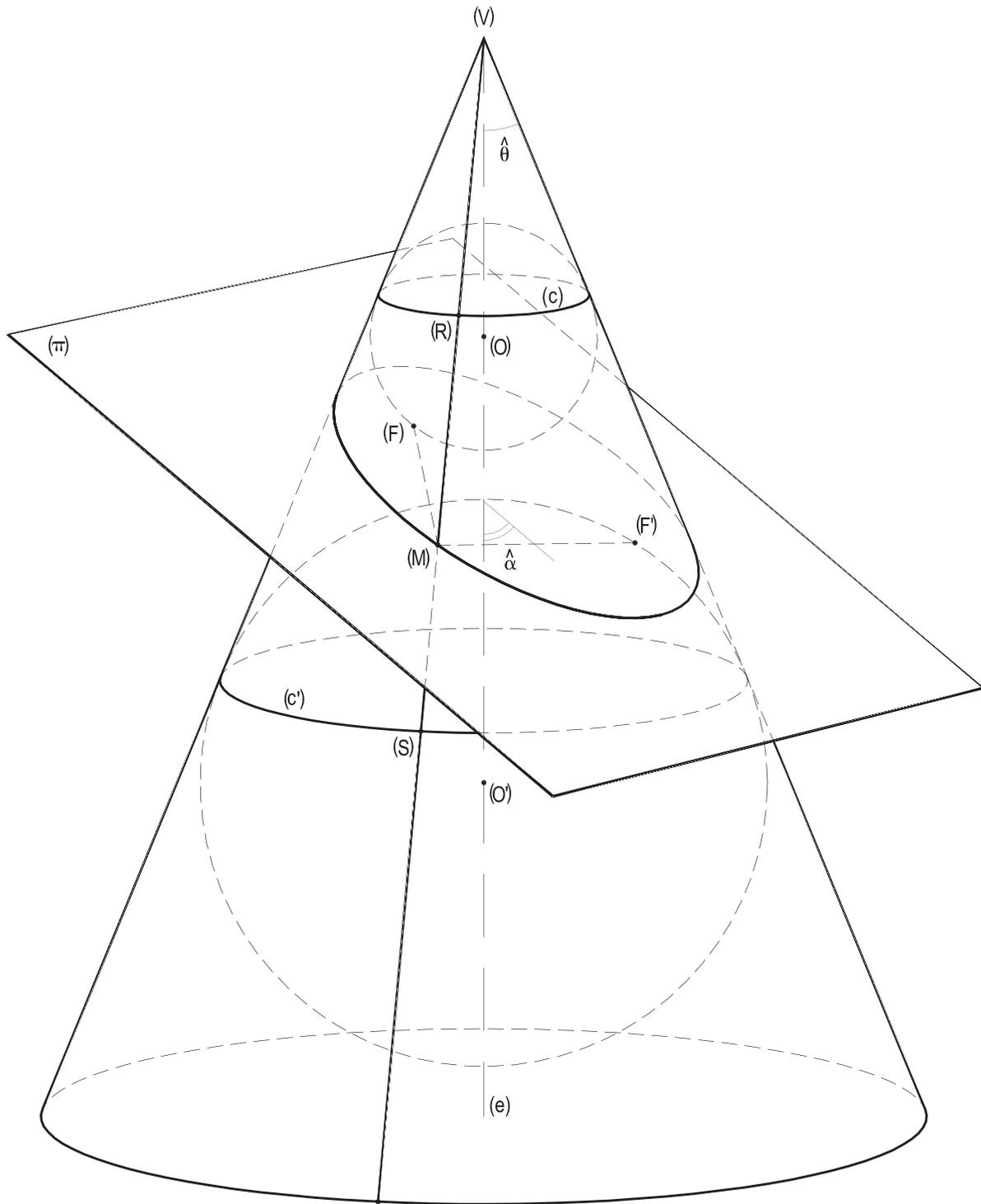


Figura 477

Segunda parte: seção hiperbólica.

Consideremos, agora, uma superfície cônica de revolução de duas folhas, com vértice (V) e eixo (e), bem como o plano secante (π), exterior ao vértice (V), que forme com (e) ângulo $\hat{\alpha}$ menor que o ângulo $\hat{\theta}$ que as geratrizes de superfície formam com o eixo (e).

Porque $\hat{\alpha} < \hat{\theta}$, o plano (π) atinge as duas folhas da superfície (Figura 478).

De fato, neste caso, na seção meridiana da superfície cônica de revolução de duas folhas produzida por plano perpendicular a (π), $\hat{\theta}$ é que é ângulo externo no triângulo (Figura 478), em que $\hat{\alpha}$ é interno (ver número 202.3).

Com isso, a seção produzida será uma curva aberta, com dois ramos, cada um em cada folha da superfície.

Voltemos a considerar as duas esferas de Dandelin, para o caso, isto é, as esferas (O) e (O') inscritas em cada uma das folhas da superfície cônica, tangentes ao plano (π), respectivamente, nos pontos (F) e (F'), bem como seus paralelos de contato (c) e (c') com tal superfície (Figura 478).

Tomemos, para o estudo, um ponto qualquer (M) de um dos ramos da seção e unamo-lo ao vértice (V), criando a geratriz (R)(S), limitada entre os dois paralelos de contato, e observemos que, por ser (R)(S) tangente às duas esferas e, por também serem tangentes a cada uma delas os segmentos (M)(F) e (M)(F'), pertencentes ao plano (π), podemos anotar:

$$(M)(F) = (M)(R)$$

$$(M)(F') = (M)(S)$$

Subtraindo, membro a membro:

$$(M)(F) - (M)(F') = (M)(R) - (M)(S)$$

Como $(M)(R) - (M)(S) = (R)(S)$, vem:

$$(M)(F) - (M)(F') = (R)(S)$$

Ora, como (R)(S) tem valor constante, por ser a geratriz da superfície do tronco de cone de revolução de segunda espécie limitado pelas circunferências (c) e (c'), da própria definição da curva, concluímos que a seção em estudo é uma hipérbole de focos (F) e (F') e de eixo transversal igual ao segmento (R)(S).

É claro que o teorema vale, com demonstração exatamente igual, para pontos (N) do segundo ramo da seção.

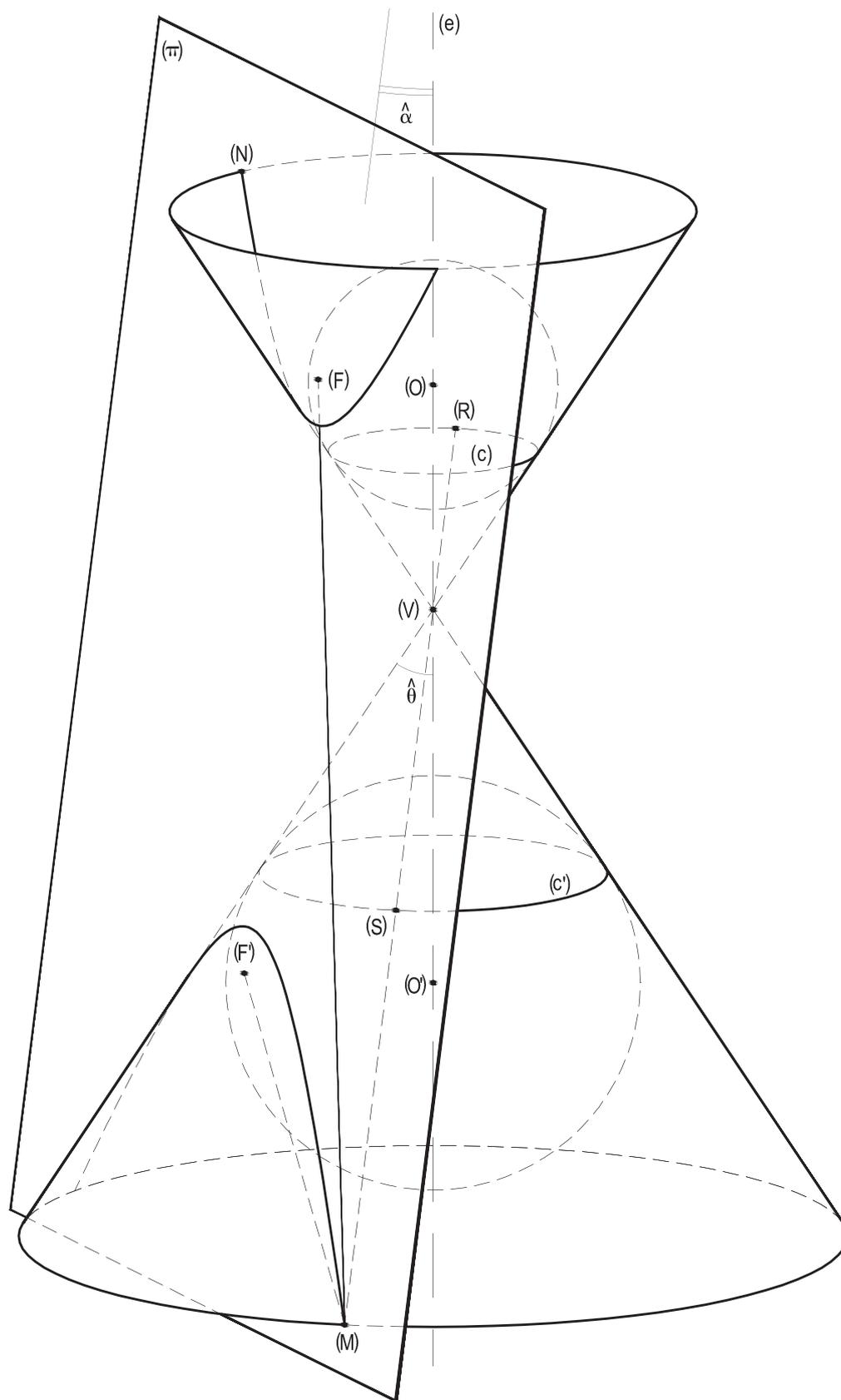


Figura 478

Terceira parte: seção parabólica.

Estudemos, por último, uma superfície cônica de revolução de duas folhas, seccionada por um plano (π) exterior ao seu vértice (V) , que forme com seu eixo (e) um ângulo $\hat{\alpha}$ igual ao ângulo $\hat{\theta}$ que as geratrizes da superfície formam com o eixo, isto é, um plano (π) paralelo a uma geratriz $(V)(J)$ da superfície (Figura 479).

Naturalmente, nestas condições, para o estudo da seção, pode ser desconsiderada a segunda folha de superfície cônica, visto que a superfície só será atingida por (π) numa de suas folhas.

A seção, então, será uma curva aberta com apenas um ramo.

Observemos que, no presente caso, existe apenas uma esfera de Dandelin que tem a circunferência (c) como paralelo de contato com a superfície cônica (Figura 479).

Para análise da seção produzida, tomemos um qualquer de seus pontos (M) , unamo-lo ao ponto (F) de tangência de (π) com a esfera e com o vértice (V) , criando, sobre a geratriz $(V)(M)$, o segmento $(M)(R)$ (Figura 479), também tangente à esfera de Dandelin, limitado pela circunferência (c) , e anotemos que, como tangentes do ponto (M) àquela esfera, cabe a igualdade:

$$(M)(F) = (M)(R) \quad (1)$$

Consideremos, ainda, o plano meridiano (φ) da superfície cônica, perpendicular a (π) , dando origem ao quadrilátero $(J)(S)(T)(U)$ (Figura 479), limitado pelos planos (π) e (φ) e pelo par de planos (β) , da circunferência (c) e (γ) , traçado, por (M) , perpendicularmente ao eixo (e) .

Ora, porque (β) e (γ) são paralelos, $(J)(S)(T)(U)$ é um paralelogramo, o que nos dá:

$$(J)(S) = (U)(T) \quad (2)$$

Como geratrizes do tronco do cone de revolução produzido na superfície considerada entre os planos paralelos (β) e (γ) , temos:

$$(M)(R) = (J)(S) \quad (3)$$

Por último, tracemos, pelo ponto (M) , em estudo, a perpendicular $(M)(E)$ à reta (d) , interseção dos planos (π) e (β) (Figura 479). O retângulo $(M)(E)(T)(U)$, assim formado, fornece:

$$(U)(T) = (M)(E) \quad (4)$$

Reunindo as relações (1), (2), (3) e (4), temos:

$$(M)(F) = (M)(R) = (J)(S) = (U)(T) = (M)(E)$$

Ou simplesmente, $(M)(F) = (M)(E)$

Observe-se que, para qualquer ponto (M) da seção em estudo, são fixos a reta (d), interseção de dois planos fixos (π) e (β), bem como o ponto (F) de tangência do plano secante (π) com a esfera de Dandelin (O).

Tal equidistância, a um ponto fixo (F) e a uma reta (d) fixa também, provada para um ponto genérico (M) da seção, valerá para todos os seus pontos.

Assim, porque um ponto (M), qualquer, da seção equidista do ponto fixo (F) e da reta fixa (d), concluímos, pela própria definição, que a seção é uma parábola de foco (F) e diretriz (d) (Figura 479).

Fica, por isso, provada a terceira parte do teorema.

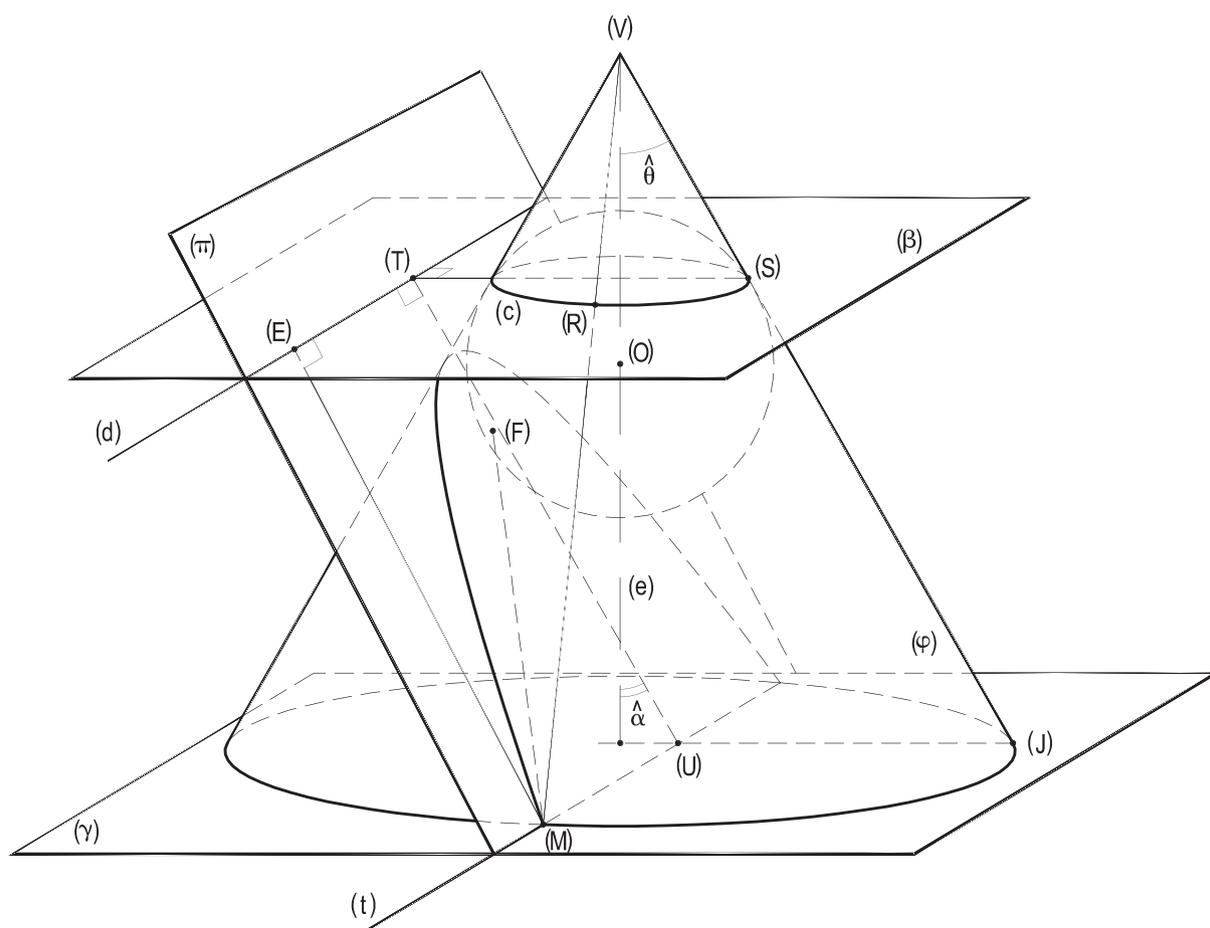


Figura 479

Então, um plano exterior ao vértice de uma superfície cônica de revolução a secciona segundo uma elipse, uma hipérbole ou uma parábola, conforme o ângulo desse plano com o eixo da superfície seja maior, menor ou igual ao ângulo que as geratrizes da superfície formam com o eixo.

204 – Observações

1 – Observando as seções meridianas da superfície cônica de revolução de duas folhas de vértice (V) e os traços (r), nelas, dos planos secantes (π), para as três hipóteses estudadas, fica evidente o atingimento por (π) em apenas uma folha da superfície (Figura 480), para a seção de natureza elítica, que corresponde a uma inclinação $\hat{\alpha}$ do plano com o eixo (e) maior que o ângulo $\hat{\theta}$ das geratrizes com esse eixo, já que no triângulo (V)(1)(2), $\hat{\alpha}$ é externo e $\hat{\theta}$ interno.

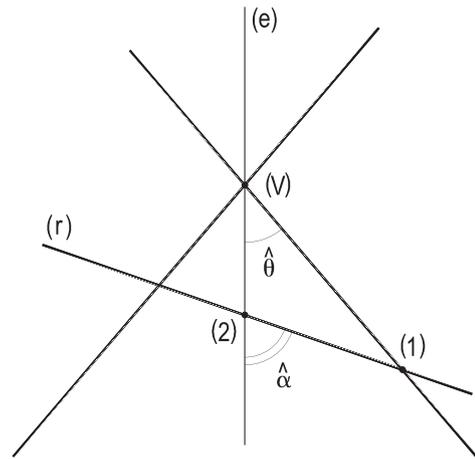


Figura 480

Da mesma forma, resta claro o corte por (π), como indica sua seção (r) com o plano meridiano da superfície cônica, nas suas duas folhas (Figura 481), motivado pelo fato de o ângulo $\hat{\alpha}$ que (π) forma com o eixo ser menor que o ângulo $\hat{\theta}$ das geratrizes com esse eixo, para o caso da seção hiperbólica, pois, agora, no triângulo (V)(1)(2), $\hat{\theta}$ é que é o externo.

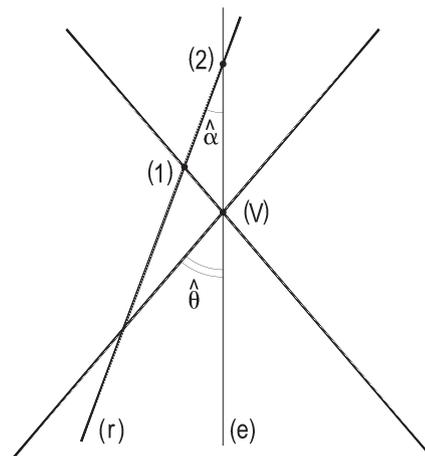


Figura 481

A última hipótese acima analisada, para a seção parabólica, é a mais evidente de todas, pelo paralelismo existente (Figura 482) entre o traço (r) do plano secante (π) com o meridiano da superfície cônica e sua geratriz (V)(J), o que implica na igualdade entre $\hat{\alpha}$ e $\hat{\theta}$.

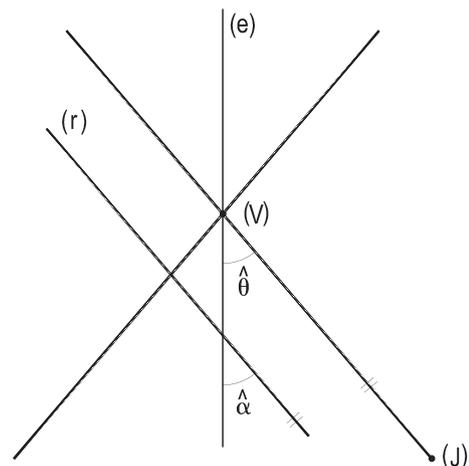


Figura 482

2 – Vale observar o caso particular em que o plano secante (π) é perpendicular ao eixo (e) da superfície cônica (V), que, naturalmente, se inclui na primeira das hipóteses antes estudadas. A seção é, obviamente, uma circunferência (Figura 483) que pode, então, ser considerada como elipse degenerada pela coincidência de seus dois focos com o traço (O) do eixo (e) com o plano secante (π).

3 – Para completar todas as possibilidades, quanto às posições relativas entre o plano (π) e a superfície cônica de revolução (V) , cabe considerar, mesmo contrariando a hipótese do teorema de Dandelin, aquelas em que (π) contém (V) , cortando (Figura 484) ou tangenciando (Figura 485) a superfície, além daquela em que, apenas passando por (V) , o plano (π) é exterior à superfície, tendo, então, apenas o próprio vértice (V) em comum com ela.

Quando (π) , contendo (V) , corta a superfície cônica, a seção (Figura 484) é um par de geratrizes $(V)(L)$ e $(V)(K)$; quando apenas tangencia a superfície (Figura 485), não há, obviamente, seção, sendo comum a (π) e à superfície cônica a geratriz $(V)(T)$ de contato.

Tais particularidades permanecem, naturalmente, válidas para a segunda folha da superfície.

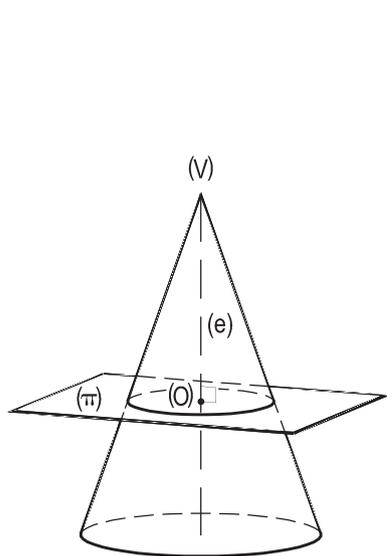


Figura 483

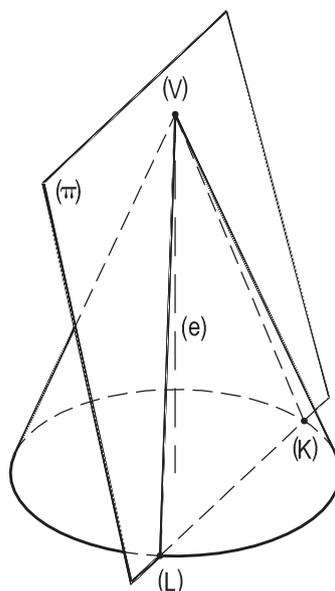


Figura 484

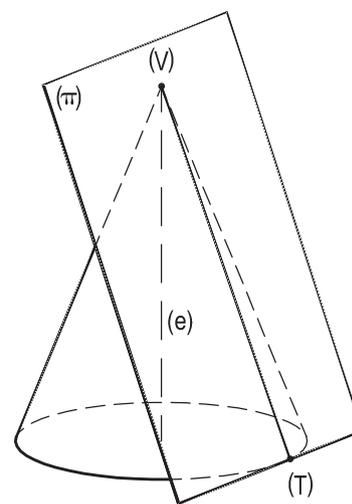


Figura 485

205 – A parábola como posição limite da elipse

Consideremos uma superfície cônica de revolução de duas folhas e um plano (π_1) que corte todas as geratrizes de uma das folhas.

Incluamos, para o presente estudo, o plano (γ) que, passando pelo vértice (V) da superfície, seja perpendicular ao seu eixo (e) , além da reta (r) , interseção de (γ) com (π_1) .

A seção de (π_1) na superfície, já se sabe (número 203), é uma elipse.

Façamos o plano (π_1) girar em torno de (r) , diminuindo progressivamente seu ângulo com o eixo (e) , buscando o paralelismo com uma geratriz $(V)(J)$ da superfície.

Durante essa rotação, o plano secante vai assumindo posições (π_2) , (π_3) , etc. que continuam a proporcionar seções elípticas na superfície cônica (Figura 486), cada vez mais alongadas, até que, na posição limite procurada (π_n) , em que o plano secante (π) chega a ser paralelo à geratriz $(V)(J)$, a seção passa a ser, como antes (número 203) demonstrado, uma parábola.

Pode-se, por isso, entender a parábola como posição limite da elipse, quando esta, nos termos acima colocados, tem seu plano tendendo a ficar paralelo a uma das geratrizes da superfície cônica de revolução de duas folhas, tomada como objeto para as sucessivas interseções.

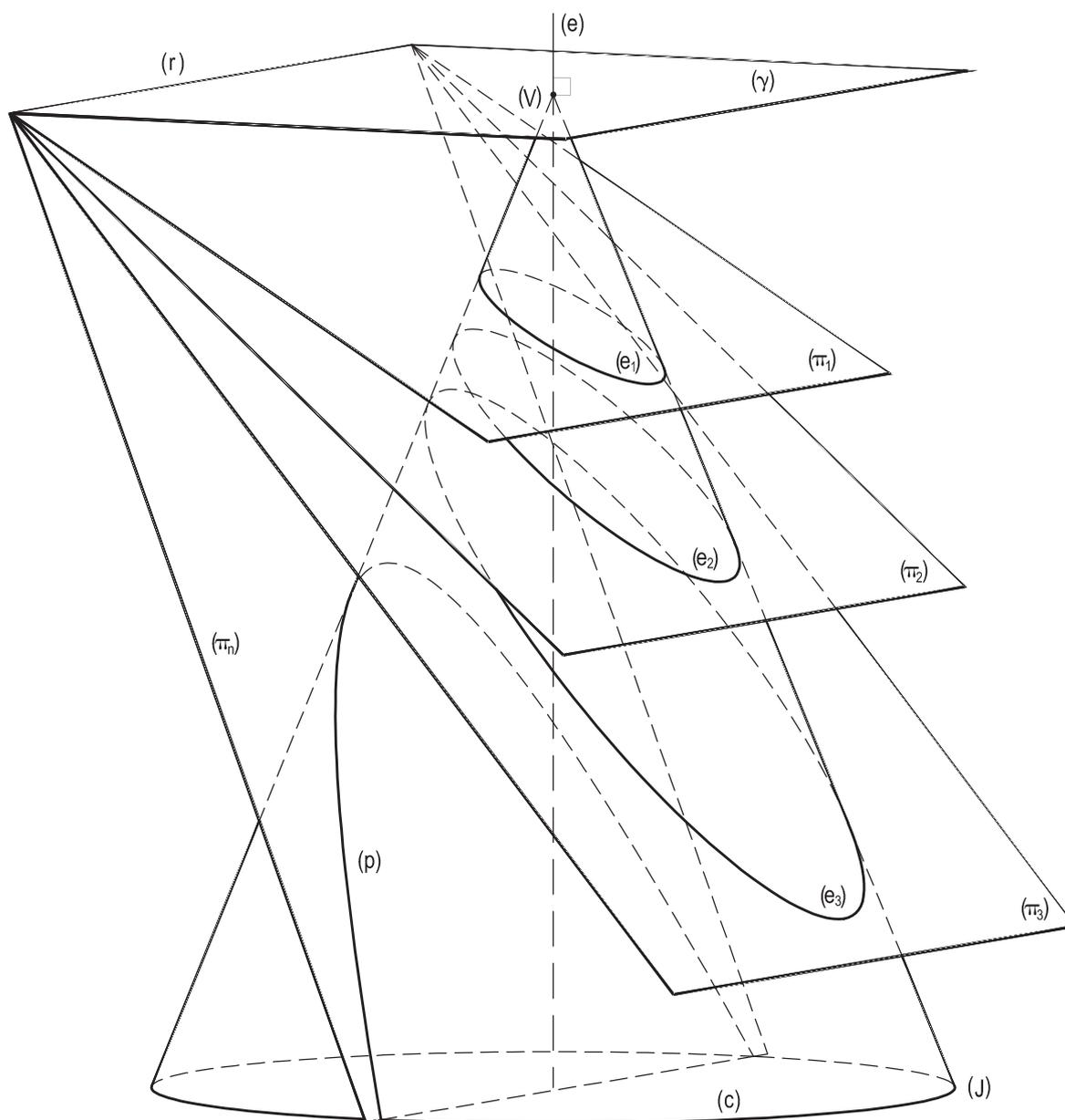


Figura 486

206 – A parábola como posição limite da hipérbole

Consideremos uma superfície cônica de revolução de duas folhas e um plano (π_1) que, sendo exterior ao seu vértice (V) , corte suas duas folhas (Figura 487).

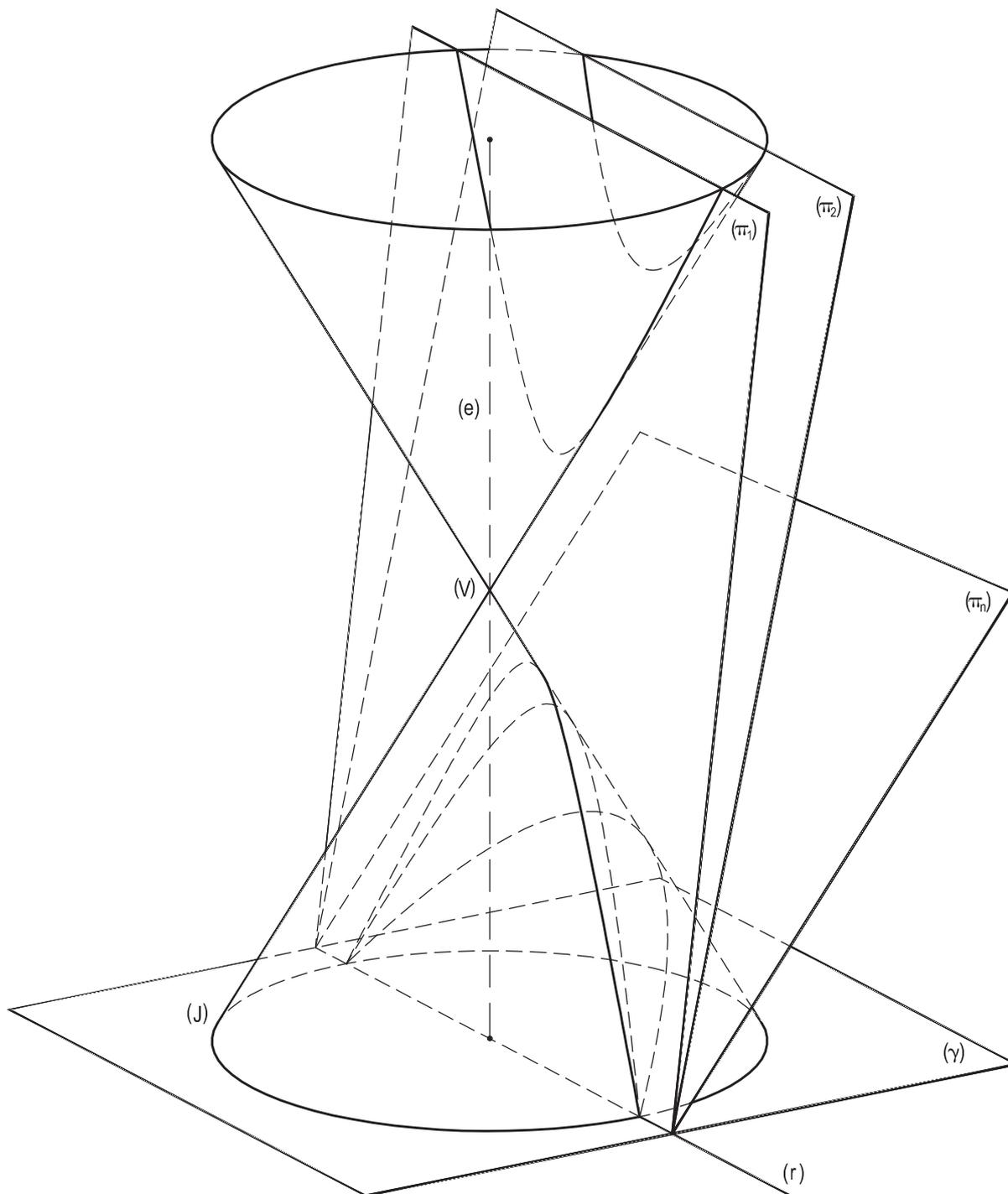


Figura 487

Tal como no estudo anterior, façamos girar o plano (π_1) , em torno da reta (r) , interseção desse plano (π_1) com o plano (γ) , perpendicular ao eixo da superfície, traçado por um ponto genérico desse eixo (Figura 487), aumentando o ângulo formado com o eixo da superfície, passando por posições intermediárias como (π_2) , provocando, por isso, novas seções hiperbólicas, até que esse plano secante venha a assumir a posição (π_n) , paralela à geratriz $(V)(J)$ da superfície.

Nesta posição final, a seção plana será uma parábola (número 203), o que nos leva a concluir que a parábola pode ser considerada como posição limite da hipérbole, quando esta, nos termos aqui assumidos, chega a ter seu plano paralelo a uma das geratrizes da superfície cônica de revolução de duas folhas, tomada como objeto dessas sucessivas interseções.

207 – Observações

1 – A rotação do plano secante (π) , estudada em torno da reta fixa (r) , analisada acima (número 205), pode ser bem apreciada pela observação das seções produzidas, em todo tal movimento, pelo plano meridiano da superfície perpendicular àquela charneira (r) .

É o que mostra a Figura 488, onde as diversas seções elípticas e, afinal, a parabólica são ressaltadas.

2 – Da mesma forma, pode ser observada a rotação dos planos secantes (π) , em torno da charneira escolhida (r) (Figura 489), na seção plana produzida na superfície cônica considerada pelo meridiano perpendicular àquela reta fixa, tal como indicado na Figura 489, onde são destacadas as hipérboles e a parábola final, seções estudadas.

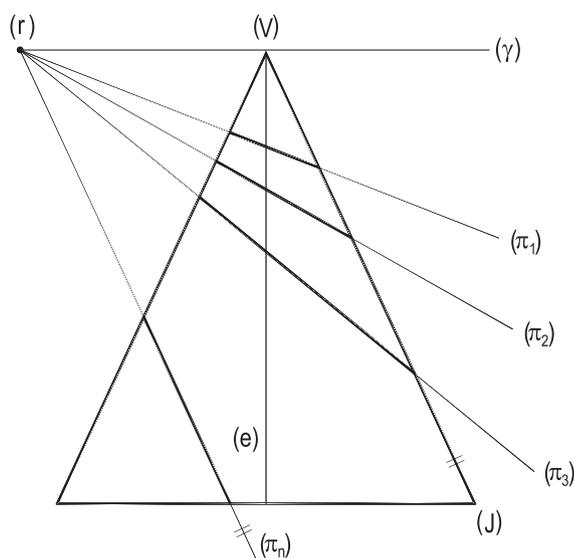


Figura 488

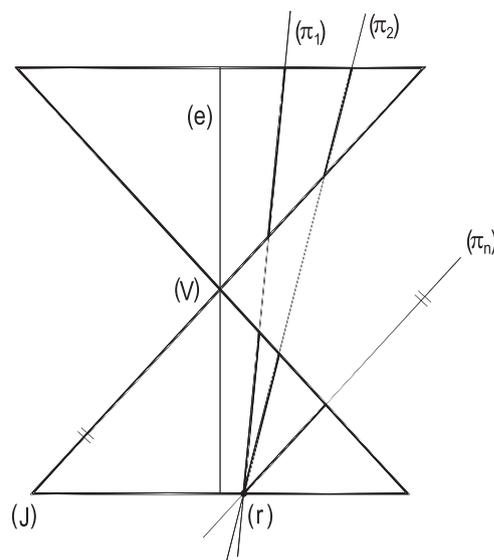


Figura 489

CAPÍTULO XIII

EXENTRICIDADES E DIRETRIZES

208 – Excentricidades das cônicas bifocais

Vimos anteriormente (números 17.5 e 102.5) que, tanto para a elipse, quanto para a hipérbole, denomina-se excentricidade a razão entre a semidistância focal e o semieixo real da curva.

$$\text{Que se escreve: } e = \frac{c}{a}$$

E que (números 18.1 e 103.1) as excentricidades das elipses variam no intervalo (0,1) e que as das hipérbolas são sempre superiores a 1.

Vamos, agora, aprofundar o estudo sobre as excentricidades das cônicas bifocais, verificando o que ocorre com os formatos dessas curvas, quando variam suas excentricidades.

209 – Variação da excentricidade da elipse

Consideremos uma elipse de eixo real $AA' = 2a$, distância focal $FF' = 2c$ e excentricidade e .

Para apreciar as modificações de forma que a curva sofre, com a variação do valor de sua excentricidade, fixemos seu eixo maior AA' e façamos os focos se movimentarem, primeiro, aproximando-se do centro O da elipse, e, depois, no sentido oposto, afastando-se dele.

No primeiro caso, a diminuição da distância focal $2c$ acarreta, durante o movimento proposto, que a excentricidade $\frac{c}{a}$ tenda a se anular, o que ocorre quando os focos chegam a coincidir com o centro O (Figura 490) e a elipse degenera em uma circunferência, a sua própria circunferência principal (O, a).

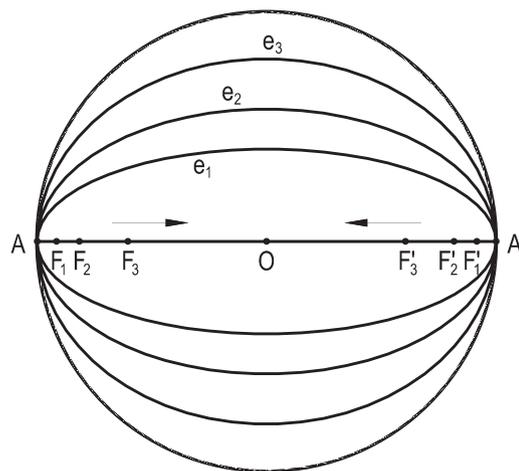


Figura 490

Quando, ao contrário, os focos se afastam, o valor crescente da distância focal implica em que a excentricidade $\frac{c}{a}$ tenda à unidade, o que ocorre quando cada foco coincide com cada vértice real, e, então, a elipse degenera segundo um segmento de reta AA' (Figura 491), o seu próprio eixo real.



Figura 491

210 – Variação da excentricidade da hipérbole

Consideremos uma hipérbole de eixo real $AA' = 2a$, distância focal $FF' = 2c$ e excentricidade e .

Como vimos (número 103.1), tal excentricidade é sempre maior que 1.

Para analisar as mudanças de forma da hipérbole, em função das variações de sua excentricidade, fixemos, inicialmente, seus vértices A e A' e façamos seus focos F e F' afastarem-se continuamente, buscando as posições impróprias da reta AA' , o que implica em constante crescimento da distância focal e , por consequência, da excentricidade em estudo.

Com isso (Figura 492), a curva se vai alargando até que, na posição limite em que os focos chegam a ser impróprios, a hipérbole degenera em duas retas r e r' , perpendiculares ao eixo real AA' , passando, respectivamente, por A e por A' (Figura 492).

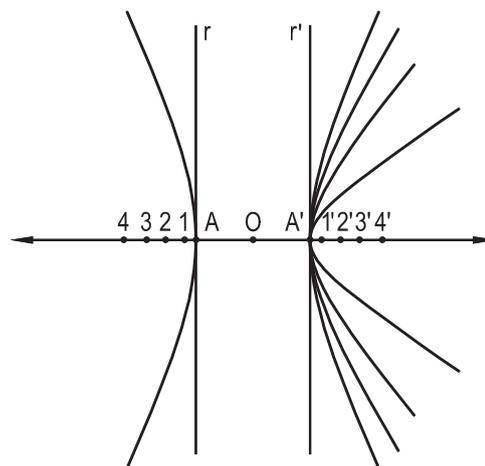


Figura 492

Agora, ao contrário, façamos os focos F e F' moverem-se em direção ao centro O , tendendo aos vértices A e A' , respectivamente (Figura 493).

Assim, a excentricidade $\frac{c}{a}$ tende a 1, visto que a distância focal $2c$ vai se aproximando do valor do eixo real $2a$.

Nesse movimento, a hipérbole vai gradualmente se achatando.

E, então, na posição limite, quando os focos chegam respectivamente aos vértices A e A' , a hipérbole degenera em duas semirretas de mesmo suporte que o eixo transversal AA' , com sentidos opostos e origens nos pontos A e A' (Figura 493).

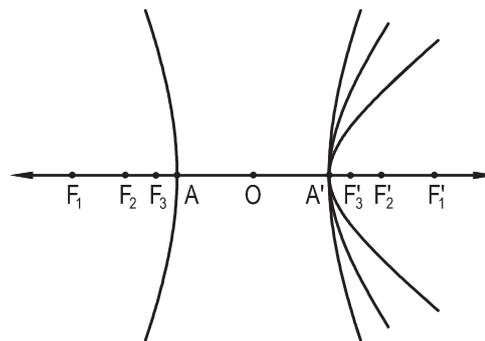


Figura 493

Por fim, fixemos os focos F e F' e façamos os vértices A e A' aproximando-se, tendem, ambos, ao centro O da hipérbole, o que implica em que, com a redução do valor do eixo real $AA' = 2a$, a excentricidade $\frac{c}{a}$ cresça, tendendo ao infinito. E, além disso, que a diferença $2a$ entre os raios vetores de todos os pontos da curva tenda a zero, o que resulta em que ela degenerere segundo a mediatriz m do segmento FF' (Figura 494).

O movimento dos vértices A e A' em sentido contrário a este último estudado, isto é, afastando-se do centro O da hipérbole, e, então, tendendo, cada um a cada vértice da hipérbole, é o mesmo já estudado na segunda hipótese anterior, visto que (número 98) os vértices não podem ser exteriores ao segmento FF' .

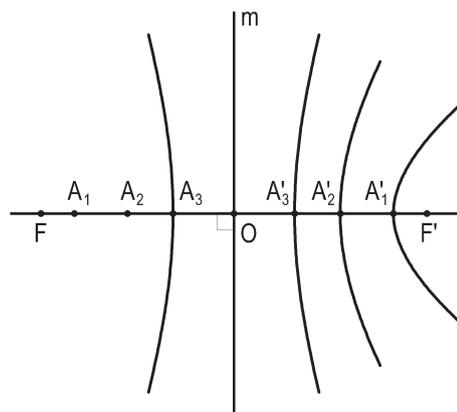


Figura 494

211 – Cálculo dos raios vetores para a elipse

Estudemos uma elipse cujos eixos maior $AA' = 2a$ e menor $BB' = 2b$ estejam sobre os eixos coordenados e os focos F e F' no das abscissas (Figura 495), buscando calcular as medidas dos raios vetores MF e MF' de um ponto corrente genérico $M(x, y)$ da curva, de distância focal $= 2c$.

Nestas condições, as coordenadas dos principais pontos da elipse são:

$$A(a, 0) \quad \text{e} \quad A'(-a, 0)$$

$$F(0, c) \quad \text{e} \quad F'(-c, 0)$$

Os triângulos retângulos MJF e MJF' (Figura 495) fornecem:

$$MF = \sqrt{MJ^2 + JF^2} = \sqrt{y^2 + (x - c)^2} \quad (1)$$

$$MF' = \sqrt{MJ^2 + JF'^2} = \sqrt{y^2 + (c + x)^2} \quad (2)$$

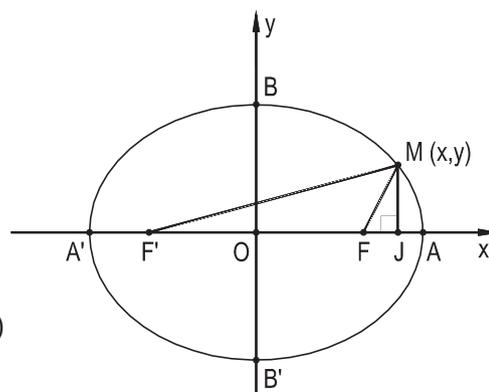


Figura 495

Assim, pela própria definição da curva, temos:

$$MF + MF' = 2a = \sqrt{y^2 + (x - c)^2} + \sqrt{y^2 + (c + x)^2}$$

$$\text{Ou,} \quad \sqrt{y^2 + (c + x)^2} = 2a - \sqrt{y^2 + (x - c)^2}$$

E, elevando ao quadrado:

$$y^2 + (c + x)^2 = 4a^2 + y^2 + (x - c)^2 - 4a \sqrt{y^2 + (x - c)^2}$$

$$\therefore y^2 + c^2 + x^2 + 2cx = 4a^2 + y^2 + c^2 + x^2 - 2cx - 4a \sqrt{y^2 + (x - c)^2}$$

$$\therefore 4cx = 4a^2 - 4a \sqrt{y^2 + (x - c)^2}$$

$$\therefore cx = a^2 - a \sqrt{y^2 + (x - c)^2} \quad (3)$$

Substituindo (1) em (3), vem:

$$cx = a^2 - a \text{ (MF)}$$

$$\therefore MF = \frac{a^2 - cx}{a}$$

$$\therefore MF = a - \left(\frac{c}{a}\right) x \quad (4)$$

Para o cálculo do segundo raio vetor MF', temos:

$$MF' = 2a - MF \quad (5)$$

Levando (4) a (5), temos:

$$MF' = 2a - a + \left(\frac{c}{a}\right) x$$

$$\therefore MF' = a + \left(\frac{c}{a}\right) x \quad (6)$$

Como se sabe (número 17.5) que a razão $\left(\frac{c}{a}\right)$ mede a excentricidade e da elipse, as relações (4) e (6), finalmente, se escrevem:

$$\boxed{MF = a - ex}$$

e

$$\boxed{MF' = a + ex}$$

São estas expressões as que permitem calcular os valores dos raios vetores MF e MF' de um ponto M qualquer de uma elipse referida aos seus eixos, nos termos aqui considerados, em função de seu semieixo real a, de sua excentricidade e e de sua abscissa x, as quais podem, de modo simplificado, ser apresentadas, para um raio vetor MF genérico, assim:

$$\boxed{MF = a \pm ex}$$

212 – Cálculo dos raios vetores para a hipérbole

Consideremos uma hipérbole referida a seus eixos, isto é, tal que seu eixo real $AA' = 2a$ esteja sobre o eixo das abscissas e seu eixo imaginário $BB' = 2b$ pertença ao das ordenadas (Figura 496), sendo $FF' = 2c$ sua distância focal e passemos a calcular os valores dos raios vetores MF e MF' de um ponto corrente $M(x, y)$ da curva.

Nestas condições, as coordenadas dos pontos mais importantes a observar são:

$$A(a, 0) \quad e \quad A'(-a, 0)$$

$$F(c, 0) \quad e \quad F'(-c, 0)$$

Os triângulos retângulos MJF e MJF' (Figura 496) fornecem:

$$MF = \sqrt{MJ^2 + JF^2} = \sqrt{y^2 + (x - c)^2} \quad (1)$$

$$MF' = \sqrt{MJ^2 + JF'^2} = \sqrt{y^2 + (x + c)^2} \quad (2)$$

Como M é ponto da hipérbole, pela própria definição da curva, temos:

$$MF' - MF = 2a$$

$$\therefore \sqrt{y^2 + (c + x)^2} - \sqrt{y^2 + (x - c)^2} = 2a$$

$$\therefore \sqrt{y^2 + (c + x)^2} = 2a + \sqrt{y^2 + (x - c)^2}$$

Elevando ao quadrado, vem:

$$y^2 + (c + x)^2 = 4a^2 + y^2 + (x - c)^2 + 4a\sqrt{y^2 + (x - c)^2}$$

$$\therefore y^2 + c^2 + x^2 + 2cx = 4a^2 + y^2 + c^2 + x^2 - 2cx + 4a\sqrt{y^2 + (x - c)^2}$$

$$\therefore 4cx = 4a^2 + 4a\sqrt{y^2 + (x - c)^2}$$

$$\therefore cx = a^2 + a\sqrt{y^2 + (x - c)^2} \quad (3)$$

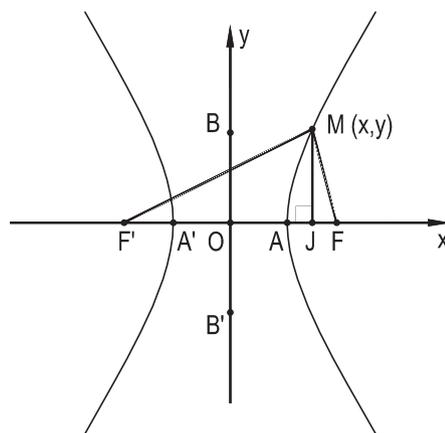


Figura 496

Substituindo (1) em (3), vem

$$cx = a^2 + a(MF)$$

$$\therefore MF = \frac{-a^2 + cx}{a}$$

$$\therefore MF = -a + \left(\frac{c}{a}\right)x \quad (4)$$

Para o cálculo de MF', temos:

$$MF' - MF = 2a$$

$$\therefore MF' = 2a + MF$$

$$\therefore MF' = 2a - a + \left(\frac{c}{a}\right)x$$

$$\therefore MF' = a + \left(\frac{c}{a}\right)x \quad (5)$$

Finalmente, como se sabe (número 102.5) que a razão $\left(\frac{c}{a}\right)$ mede a excentricidade e da hipérbole, as relações (4) e (5) se escrevem:

$$MF = -a + ex \quad \therefore \boxed{MF = ex - a}$$

$$e \quad MF' = a + ex \quad \therefore \boxed{MF' = ex + a}$$

Estas são as expressões procuradas para calcular os valores dos raios vetores MF e MF' de um ponto M qualquer de uma hipérbole, em função de seu semieixo real a, de sua excentricidade e e, naturalmente, de sua abscissa x, tudo dentro das condições aqui consideradas.

Tais expressões podem, de modo simplificado, se apresentar para um raio vetor MF genérico, assim:

$$\boxed{MF = ex \pm a}$$

213 – Observação

Reunindo as conclusões dos itens 211 e 212, acima, pode-se resumir a expressão do raio vetor FM genérico de uma cônica bifocal referida a seus dois eixos, os focos pertencendo ao das abscissas, assim:

$$\boxed{MF = \pm a \pm ex}$$

214 – Teorema

A razão entre as distâncias dos pontos de uma elipse a um de seus focos e a uma certa reta fixa perpendicular ao eixo real da curva é constante e igual à excentricidade da elipse.

Demonstração: Consideremos uma elipse de eixos real $AA' = 2a$ e distância focal $FF' = 2c$, referida a seus eixos, isto é, tal que eles pertençam aos eixos cartesianos, os focos sobre o das abscissas e que e seja o valor de sua excentricidade.

Incluamos, nesse mesmo sistema cartesiano, duas retas d e d' perpendiculares ao eixo real, com abscissas respectivamente iguais a $(+\frac{a}{e})$ e $(-\frac{a}{e})$ (Figura 497).

Seendo $M(x, y)$ um ponto qualquer da elipse, queremos provar que as razões entre as distâncias de M a F e a d e de M a F' e a d' sejam constantes e iguais à excentricidade da curva.

Ora, as distâncias de M a F e a F' são seus próprios raios vetores, já estudados (número 211), e as distâncias de M às retas d e d' (Figura 497) são iguais, respectivamente, aos segmentos MM_1 e MM_2 , o que permite anotar:

$$MF = a - ex \quad \text{e} \quad MF' = a + ex$$

$$MM_1 = \frac{a}{e} - x \quad \text{e} \quad MM_2 = \frac{a}{e} + x$$

E, então, por divisões, membro a membro:

$$\frac{MF}{MM_1} = \frac{a - ex}{\frac{a}{e} - x} = \frac{e(a - ex)}{a - ex} = e \quad (1)$$

$$\frac{MF'}{MM_2} = \frac{a + ex}{\frac{a}{e} + x} = \frac{e(a + ex)}{a + ex} = e \quad (2)$$

Como as abscissas das retas d e d' (Figura 497) são invariáveis, para a elipse considerada, as relações (1) e (2) demonstram o teorema, visto que o ponto M escolhido é genérico.

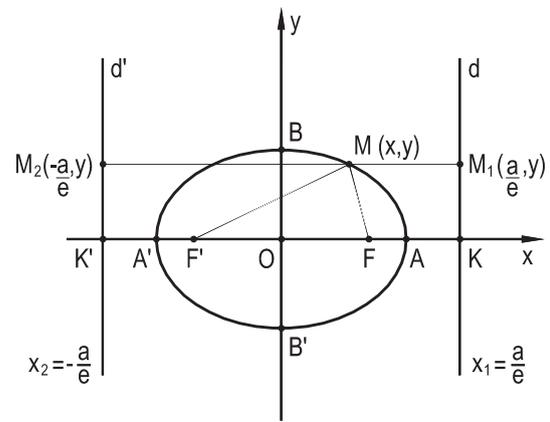


Figura 497

215 – Diretrizes da elipse

As retas d e d' , acima instituídas, são denominadas diretrizes da elipse.

Assim, a elipse possui duas diretrizes perpendiculares ao eixo real, distantes, ambas, $\frac{a}{e}$ de seu centro (Figura 498).

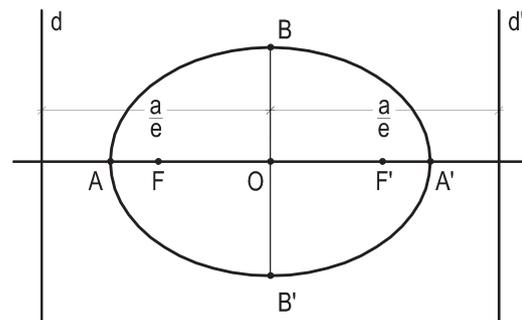


Figura 498

216 – Observações

- 1 – As diretrizes da elipse são simétricas em relação ao centro da curva.
- 2 – As diretrizes da elipse são exteriores à curva, pois o quociente $\frac{a}{e}$ é maior que a .
- 3 – A distância entre as diretrizes da elipse é igual à razão entre seu eixo real $2a$ e sua excentricidade e (Figura 498).
- 4 – Quanto menor for a excentricidade, maior será a distância entre suas diretrizes.

De fato, como essa distância vale $\frac{2a}{e}$ (número 216.3), a redução do denominador dessa fração implica no crescimento desse quociente.

5 – Como posição limite da redução acima abordada, quando a elipse degenera segundo sua circunferência principal, isto é, quando sua excentricidade se anula (ver número 209), as duas geratrizes são rejeitadas ao infinito, ou seja, deixam, em termos reais, de existir.

6 – Quando, ao contrário, cresce a excentricidade de uma elipse, a distância entre suas diretrizes decresce, até que, na ocasião limite em que toma o valor unitário, o que implica em que a elipse degenera segundo seu eixo real (número 209), as diretrizes passam a ser as perpendiculares a esse eixo, em seus extremos.

217 – Teorema

A razão entre as distâncias dos pontos de uma hipérbole a um de seus focos e a uma certa reta fixa perpendicular ao eixo real da curva é constante e igual à excentricidade da hipérbole.

Demonstração: Consideremos uma hipérbole de eixo real $AA' = 2a$ e distância focal $FF' = 2c$, referida a seus eixos, tal que seus focos pertençam ao eixo das abscissas e que e seja o valor de sua excentricidade. Incluamos, nesse sistema cartesiano, duas retas d e d' perpendiculares ao eixo real, com abscissas respectivamente iguais a $(+\frac{a}{e})$ e $(-\frac{a}{e})$ (Figura 499).

Seja $M(x, y)$ um ponto qualquer da hipérbole, queremos provar que as razões entre as distâncias de M a F e a d e de M a F' e a d' são constantes.

Sabemos (número 212) como calcular os valores dos raios vetores MF e MF' e, observando a Figura 499, como anotar as distâncias do ponto corrente M a cada uma das retas d e d' .

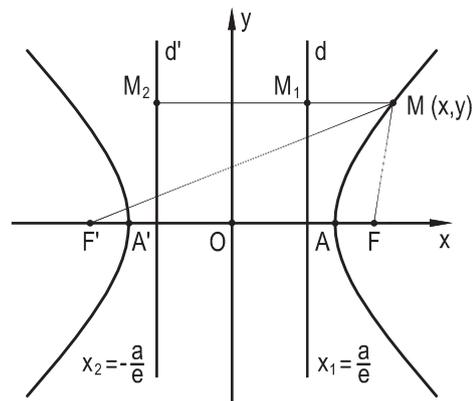


Figura 499

Assim, temos:

$$MF = -a + ex \quad e \quad MF' = a + ex$$

$$MM_1 = x - \frac{a}{e} \quad e \quad MM_2 = x + \frac{a}{e}$$

Assim, por divisões, membro a membro:

$$\frac{MF}{MM_1} = \frac{ex - a}{x - \frac{a}{e}} = \frac{e(ex - a)}{ex - a} = e \quad (1)$$

$$\frac{MF'}{MM_2} = \frac{a + ex}{\frac{a}{e} + x} = \frac{e(a + ex)}{a + ex} = e \quad (2)$$

Como as abscissas das retas d e d' (Figura 499) são invariáveis, para a hipérbole considerada, as relações (1) e (2) demonstram o teorema, visto que o ponto M escolhido é genérico.

218 – Diretrizes da hipérbole

As retas d e d' , acima instituídas, são denominadas diretrizes da hipérbole.

Então, a hipérbole possui duas diretrizes perpendiculares a seu eixo real, distantes, ambas, $\frac{a}{e}$ de seu centro (Figura 500).

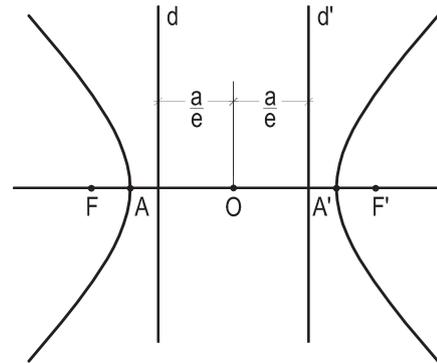


Figura 500

219 – Observações

1 – As diretrizes da hipérbole são simétricas em relação ao seu centro.

2 – As diretrizes da hipérbole situam-se entre os dois ramos da curva (Figura 500), pois o quociente $\frac{a}{e}$ é menor que a .

3 – A distância entre as diretrizes da hipérbole é igual à razão entre seu eixo real $2a$ e sua excentricidade e .

4 – Quanto maior for a excentricidade da hipérbole, menor será a distância entre suas diretrizes.

5 – Na situação limite em que a excentricidade da hipérbole tende ao infinito, a distância entre suas diretrizes tende a se anular, ou seja, elas tendem a coincidir com a perpendicular ao eixo real, traçada pelo centro da curva.

6 – Quando decresce o valor da excentricidade da hipérbole, tendendo a seu limite mínimo unitário, cresce a distância entre suas diretrizes que, na posição limite, tendem a ser as tangentes à hipérbole em seus vértices.

220 – Diretrizes das cônicas

Reunindo tudo o que já foi estudado, pode-se concluir que as cônicas bifocais (elipse e hipérbole) têm duas diretrizes cada, enquanto que a parábola tem apenas uma (Figuras 501, 502 e 503).

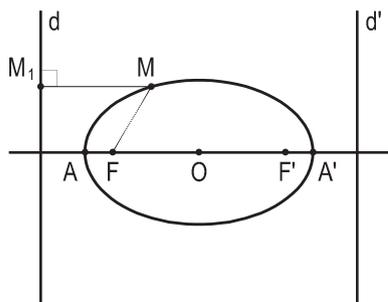


Figura 501

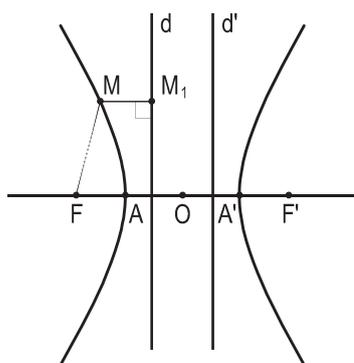


Figura 502

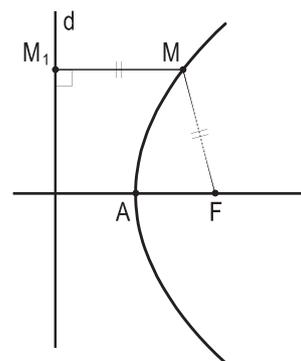


Figura 503

E que é constante a razão, para todas as três cônicas, entre as distâncias de seus pontos a um foco e à diretriz mais próxima, sempre igual à excentricidade e da curva.

Assim, pode-se organizar o seguinte resumo:

- para as elipses – $e < 1$
- para as parábolas – $e = 1$
- para as hipérboles – $e > 1$

221 – Observações

1 – As cônicas podem ser definidas como sendo as curvas cujos pontos guardam razão constante entre suas distâncias a um ponto e a uma reta fixos.

2 – Como a excentricidade é um valor sempre positivo, pode-se escrever, para as elipses:

$$0 < e < 1$$

3 – Como visto anteriormente (número 17.2), a circunferência de círculo pode ser entendida, em termos limites, como uma elipse de excentricidade nula.

222 – Diretrizes das seções cônicas

Tudo o que foi até agora estudado, no plano, para as diretrizes da elipse, da hipérbole e da parábola merece, também, ser observado no espaço tridimensional, como passamos a detalhar.

Para tanto, consideremos, em todos os casos, uma superfície cônica de revolução de duas folhas (V), um plano (γ) a ela secante e exterior ao seu vértice, bem como as esferas de Dandelin correspondentes.

223 – Diretrizes da elipse

Seja (γ) um plano secante à superfície cônica de revolução (V), que atinja todas as geratrizes de uma única folha, e (e) a elipse seção assim produzida.

Sendo (c_1) e (c_2) as circunferências de contato das esferas de Dandelin (O_1) e (O_2) consideradas, os planos (π_1) e (π_2) que contêm cada uma dessas circunferências, por serem perpendiculares ao eixo da superfície, são paralelos entre si, produzindo, por isso, interseções (d_1) e (d_2) paralelas com o plano (γ).

Tais retas (d_1) e (d_2) são (Figura 504) as diretrizes da elipse (e) em estudo.

Observe-se que as diretrizes (d_1) e (d_2), simétricas em relação ao centro da elipse (e), são exteriores à curva, tal como demonstrado anteriormente (número 216.2).

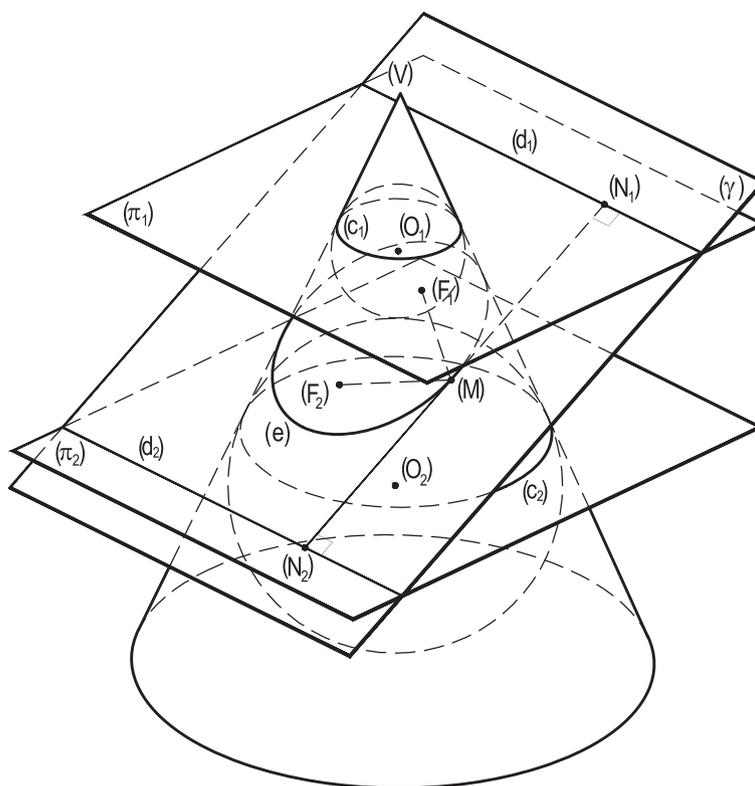


Figura 504

224 – Diretrizes da hipérbole

Admitamos, agora, que o plano secante (γ) , exterior ao vértice (V) da superfície cônica de revolução de duas folhas, atinja geratrizes dessas suas folhas, produzindo, como se sabe, uma hipérbole (h) (Figura 505).

Mais uma vez, os planos (π_1) e (π_2) das circunferências de contato das esferas de Dandelin (O_1) e (O_2) , por serem perpendiculares ao eixo da superfície, são paralelos entre si, produzindo, assim, por interseção com (γ) , as retas (d_1) e (d_2) , paralelas (Figura 505).

São estas retas (d_1) e (d_2) as diretrizes da hipérbole (h) , seção em estudo, simétricas em relação ao centro da curva seção e situadas, ambas, entre seus vértices (número 219.2).

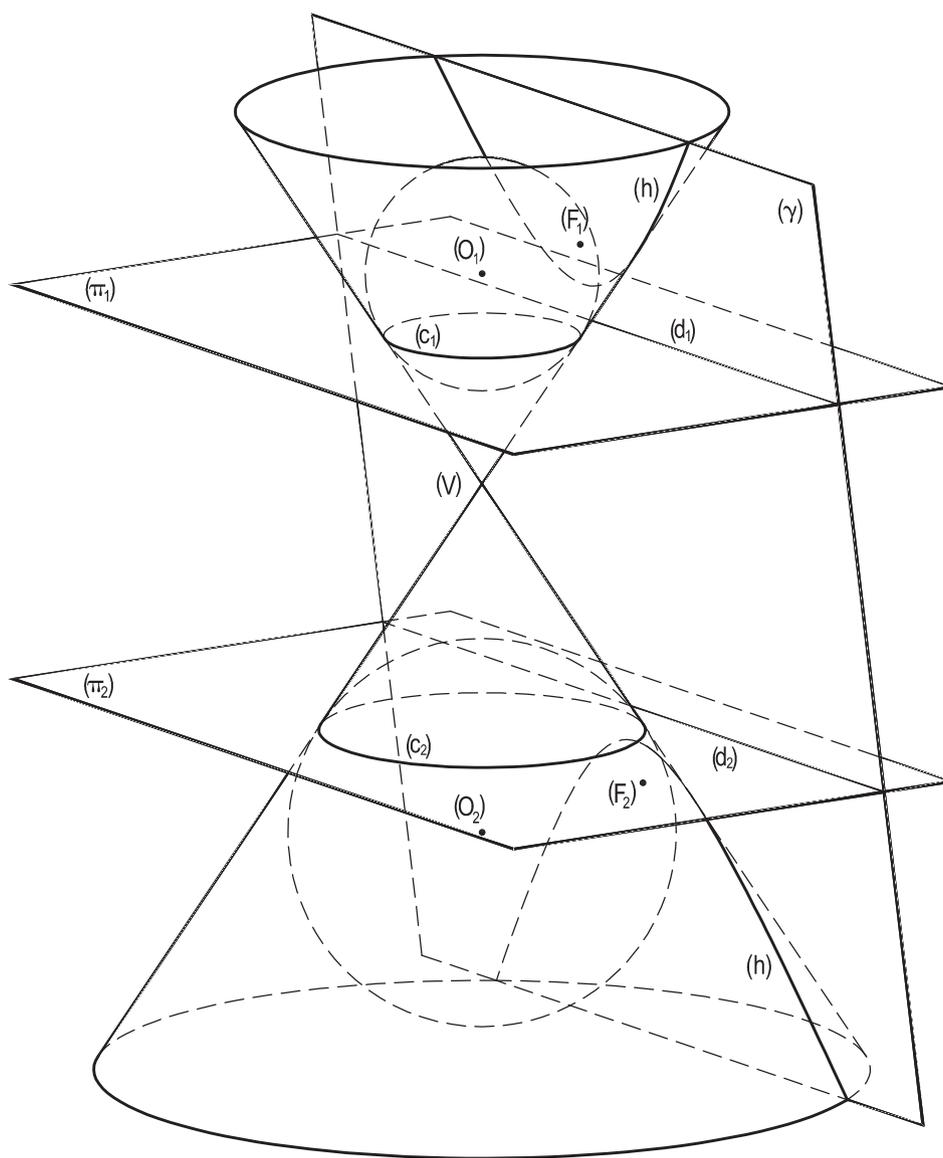


Figura 505

225 – Diretriz da parábola

Por último, voltemos a considerar a superfície cônica de revolução (V) e o plano secante (γ), agora paralelo à geratriz (V)(A) da superfície, atingindo, por isso, apenas uma folha da superfície (Figura 506), produzindo, então, por seção, a parábola (p).

No caso, há apenas uma esfera de Dandelin (O) e, assim, uma só circunferência (c) de contato, cujo plano (π) intercepta (γ) segundo a reta (d) que, como se sabe, é a diretriz da parábola (Figura 506), evidentemente, exterior à curva.

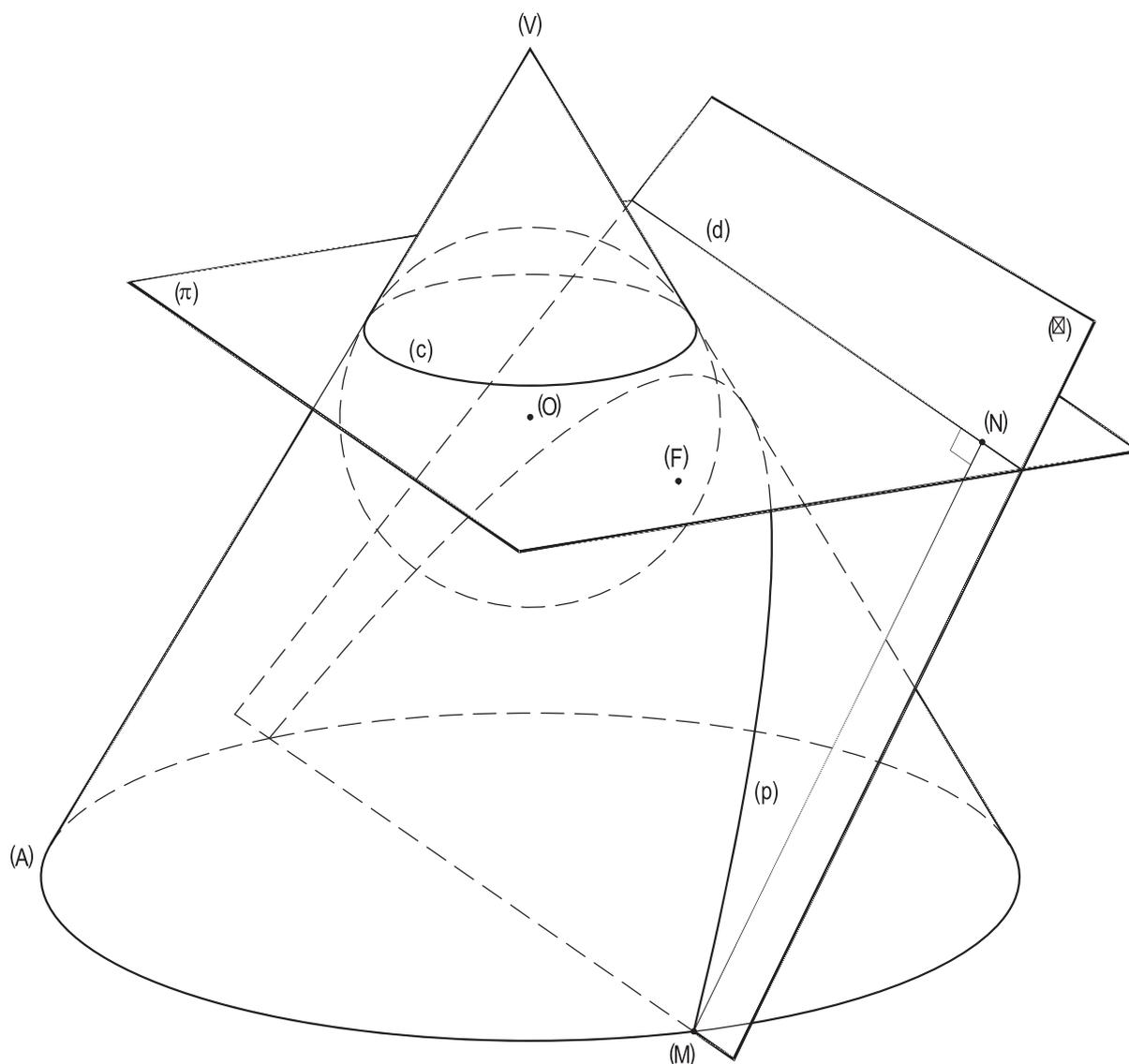


Figura 506

226 – Observações

Consideremos uma superfície cônica de revolução (V) de duas folhas e as seções que um plano (γ) a ela secante e exterior ao seu vértice (V) produz e, para a análise aqui pretendida, trabalhemos com uma seção meridiana da superfície e incluamos uma das esferas de Dandelin correspondentes, aqui representada pela circunferência (O), tangente a duas geratrizes VG e VJ axialmente opostas e ao traço $\gamma\pi$ do plano secante com o da seção meridiana utilizada (Figura 507).

Nesta posição inicial, sabe-se que a seção é elítica e que, na seção meridiana apreciada (Figura 507), o ponto F de contato dessa esfera com o plano secante é um dos focos da elipse e que a interseção d , do traço do paralelo de contato da esfera com a superfície cônica no plano secante, representa (número 223) uma das diretrizes da elipse seção.

Giremos o plano secante (γ), sempre tangente à esfera de Dandelin considerada, no sentido anti-horário, como indicado na Figura 508, observando que as seções assim conseguidas continuam a ser elíticas, cada vez mais alongadas, sendo um de seus focos F sempre o ponto de tangência do plano secante com a esfera de Dandelin que foi mantida fixa, sendo suas diretrizes sempre as interseções de (γ) com o plano de paralelo de contato dessa esfera, fixo também.

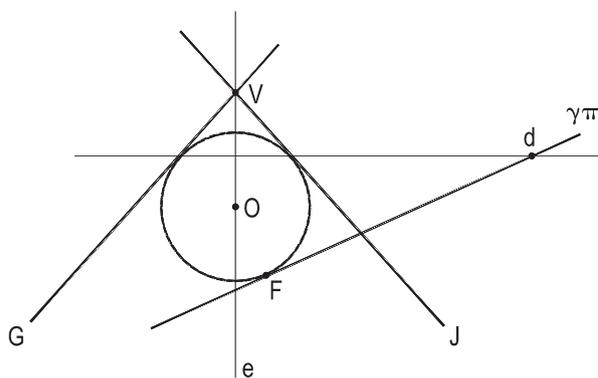


Figura 507

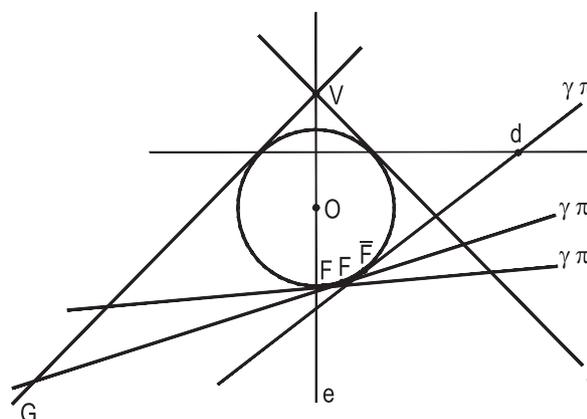


Figura 508

Mantida fixa essa esfera (O) de Dandelin, continuemos a girar o plano secante à superfície até que, em posição particular, ele venha a ficar (Figura 509) paralelo à geratriz VG da superfície, levando, como se sabe, a seção a conquistar a natureza parabólica.

Observe-se, o que, naturalmente, já seria previsível, que, ao girar, a reta $\gamma\pi$, interseção dos dois planos em estudo, muda a posição do ponto F , de contato de $\gamma\pi$ com a seção (O) na esfera de Dandelin, aproximando-se da geratriz VJ (Figura 508).

A parábola seção, nesta posição representada na seção meridiana em estudo (Figuras 508 e 509), tem foco \bar{F} e diretriz d .

Prosseguindo na rotação do plano secante e no mesmo sentido já adotado, observa-se que passam a ser, agora, atingidas as duas folhas da superfície e que, então, as seções produzidas são hiperbólicas (Figura 510).

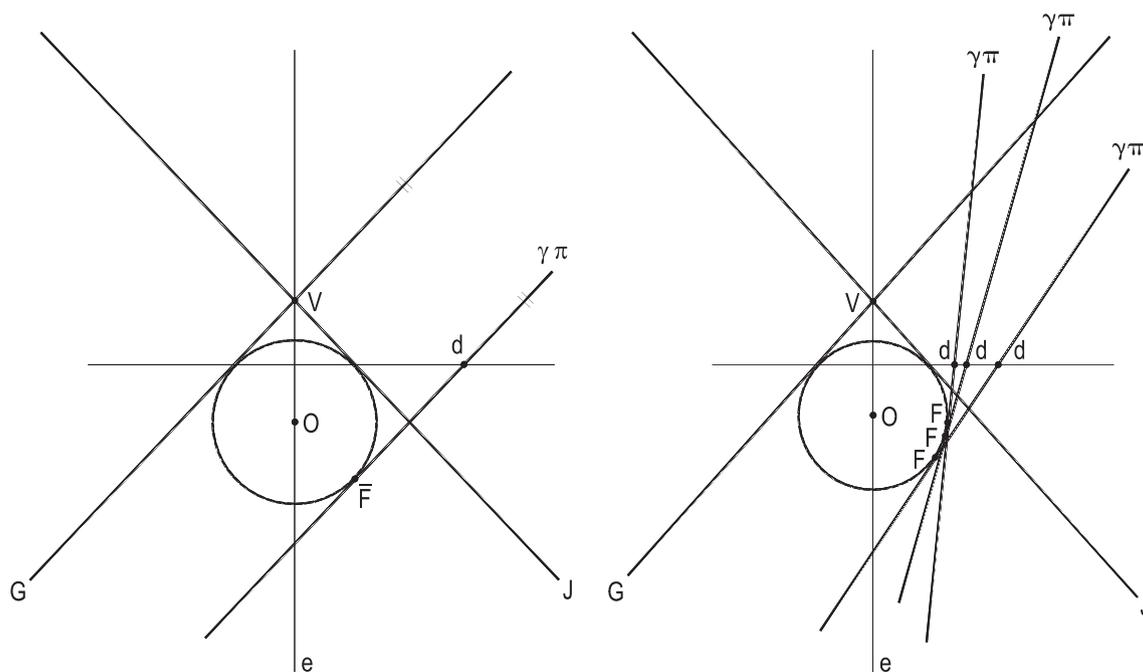


Figura 509

Figura 510

Esta sequência de interseções do plano considerado (γ) com a superfície cônica de revolução (V), de duas folhas, aqui apreciadas em seções meridianas da superfície, confirmam propriedades anteriormente demonstradas e que podem ser assim resumidas:

1 – As seções por um plano exterior a seu vértice numa superfície cônica de revolução de duas folhas são elipses, parábolas ou hipérboles, conforme, respectivamente, tais planos atinjam todas as geratrizes de uma das folhas, sejam paralelos a uma geratriz da superfície ou cortem suas duas folhas.

2 – A parábola pode ser considerada como posição limite de uma elipse, ou de uma hipérbole, quando um de seus focos é impróprio.

3 – Ao contrário da elipse e da hipérbole, que possuem duas diretrizes, a parábola tem apenas uma.

227 – Problemas resolvidos

159 – Calcular a área do retângulo inscrito numa elipse de eixos medindo 20 cm e 16 cm, sabendo que dois de seus lados passam por cada um dos focos e os outros dois são paralelos ao eixo transverso.

Resolução: Dois lados do retângulo são as cordas focais da elipse e os outros dois são iguais à distância focal.

Assim, a área S pedida será:

$$S = c_f \cdot 2c = \frac{2b^2}{a} \cdot 2c = \frac{4b^2}{a} \cdot \sqrt{a^2 - b^2}$$

$$\therefore S = \frac{4 \cdot 64}{10} \cdot \sqrt{100 - 64} \quad \therefore S = \frac{128}{5} \cdot 6 \quad \therefore S = 153,60 \text{ cm}^2$$

160 – Calcular o parâmetro p de uma elipse de eixo transverso igual a 50 m e excentricidade 0,6.

Resolução: Sabe-se (números 17.5 e 17.4) que, para a excentricidade e , para o parâmetro p e eixo transverso $2a$, vale a expressão:

$$e = \sqrt{1 - \frac{p}{a}} \quad \therefore e^2 = 1 - \frac{p}{a} \quad \therefore \left(\frac{6}{10}\right)^2 = 1 - \frac{p}{25}$$

$$\therefore \frac{p}{25} = 1 - \frac{36}{100} = \frac{64}{100} \quad \therefore p = 25 \cdot \frac{64}{100} \quad \therefore p = 16 \text{ m}$$

161 – Calcular a área de uma elipse de eixo menor igual a 12 cm e excentricidade $\frac{\sqrt{10}}{5}$.

Resolução: Sabe-se (número 17.5) que:

$$e = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2} \quad \therefore e^2 = 1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2$$

$$\therefore \frac{4}{10} = 1 - \frac{36}{a^2} \quad \therefore \frac{36}{a^2} = 1 - \frac{4}{10} = \frac{6}{10} \quad \therefore a^2 = 60$$

Então, a área S pedida vale (número 41):

$$S = \pi a b = \pi (\sqrt{60}) \cdot 6 = \pi \cdot 2 \sqrt{15} \cdot 6 \quad \therefore S = 12\pi \sqrt{15} \text{ cm}^2$$

162 – Calcular a excentricidade de uma elipse de eixos iguais a 20 cm e 12 cm.

$$\text{Resolução: } c^2 = a^2 - b^2 = 10^2 - 6^2 = 64 \quad \therefore c = 8$$

$$\text{Assim: } e = \frac{c}{a} = \frac{8}{10} \quad \therefore e = 0,8.$$

163 – Prove que, para toda elipse, a área do círculo principal é igual à soma das áreas dos círculos auxiliar e focal.

Resolução: Designemos por S_P , S_A e S_F as áreas dos círculos limitados, respectivamente, pelas circunferências principal, auxiliar e focal e por a , b e c seus respectivos raios.

A relação fundamental da elipse (número 17.2) se escreve:

$$a^2 = b^2 + c^2 \quad \therefore \quad \pi a^2 = \pi b^2 + \pi c^2$$

Ou seja: $S_P = S_A + S_F$

164 – Prove que, para toda elipse, a área de cada círculo diretor é igual ao dobro da soma das áreas de seus círculos principal, auxiliar e focal.

Demonstração: Sendo, respectivamente, S_D , S_P , S_A e S_F as áreas de um dos círculos diretores, do principal, do auxiliar e do focal da elipse e $2a$, $2b$ e $2c$ seus dois eixos e sua distância focal, a relação fundamental da elipse (número 17.2) dá

$$a^2 = b^2 + c^2 \quad \therefore \quad 4a^2 = 4(b^2 + c^2) = 2(a^2 + b^2 + c^2)$$

$$\therefore \quad 4a^2 \pi = 2(a^2 + b^2 + c^2) \pi \quad \therefore \quad \pi (2a)^2 = 2(\pi a^2 + \pi b^2 + \pi c^2)$$

Ou seja, $S_D = 2(S_P + S_A + S_F)$, comprovando a proposição.

165 – Prove que, em toda elipse que permita a inscrição de um quadrado com dois lados sendo as duas cordas focais, o eixo menor vale a média geométrica entre o eixo maior e a distância focal.

Resolução: Para a hipótese assumida, tal quadrado inscrito há de ter os lados iguais à distância focal $2c$, o que permite (número 17.4) anotar:

$$c_f = 2c \quad \therefore \quad \frac{2b^2}{a} = 2c \quad \therefore \quad \frac{4b^2}{2a} = 2c$$

$\therefore (2b)^2 = (2a) \cdot (2c)$, relação que demonstra a proposição.

166 – Para as condições do problema anterior, sendo A , A' , B e B' os vértices e F e F' os focos da elipse, prove que são retângulos os triângulos ABF' , $AB'F'$, $A'BF$ e $A'B'F$.

Resolução: De fato, em todos eles, temos (Figura 511) $b^2 = a \cdot c$, o que (*Geometria Plana*, número 197) garante que sejam todos retângulos em B , ou em B' .

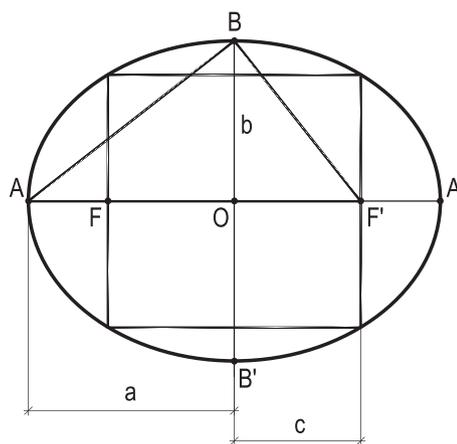


Figura 511

167 – Calcular a área S dos quadrados que têm lados opostos sobre as diretrizes de uma elipse de eixos 20 cm e 16 cm.

Resolução: Sabe-se (número 216.3) que a distância d entre as duas diretrizes de uma elipse vale o quociente da divisão de seu eixo real $2a$ por sua excentricidade e . E essa distância é, naturalmente, igual aos lados ℓ dos quadrados em estudo. Assim temos:

$$c^2 = a^2 - b^2 = 100 - 64 = 36 \quad \therefore \quad c = 6$$

$$\therefore \quad e = \frac{c}{a} = \frac{6}{10} \quad \therefore \quad d = \frac{2a}{e} = \frac{20 \cdot 10}{6} = \frac{100}{3}$$

$$\therefore \quad S = \ell^2 = d^2 = \frac{10.000}{9} \text{ cm}^2$$

168 – Calcular a excentricidade da hipérbole de eixos transverso 24 cm e imaginário 16 cm.

Resolução: A semidistância focal c vale: $c = \sqrt{a^2 + b^2}$

$$\therefore \quad c = \sqrt{12^2 + 8^2} = \sqrt{208} = 4\sqrt{13} \quad \therefore \quad e = \frac{c}{a} = \frac{4\sqrt{13}}{12} = \frac{\sqrt{13}}{3}$$

169 – Calcular a medida da corda focal de uma hipérbole de excentricidade 2, sabendo que seu eixo real mede 12 cm.

Resolução: Sabe-se (número 103.4) que $e^2 = 1 + \frac{c_f}{2a}$

$$\therefore \quad 2ae^2 = 2a + c_f \quad \therefore \quad 12 \cdot 4 = 12 + c_f \quad \therefore \quad c_f = 36 \text{ cm}$$

170 – Para uma hipérbole de eixo real 8 cm e excentricidade 1,5, pede-se calcular a área do retângulo que tem dois lados opostos coincidindo com suas cordas focais.

Resolução: Os segundos lados do retângulo são, naturalmente, iguais à distância focal $2c$ da hipérbole. Assim, a área S do retângulo valerá o produto $(2c \cdot c_f)$.

$$\text{Ora (número 103.4), } e^2 = 1 + \frac{c_f}{2a} \quad \therefore \quad (1,5)^2 = 1 + \frac{c_f}{8}$$

$$\therefore \quad 2,25 \times 8 = 8 + c_f \quad \therefore \quad c_f = 10$$

$$\text{Como } e = \frac{c}{a} \quad \therefore \quad c = a \cdot e = 4 \cdot 1,5 = 6, \text{ vem}$$

$$S = 2c \cdot c_f = 12 \cdot 10 \quad \therefore \quad S = 120 \text{ cm}^2$$

171 – Calcular a excentricidade da hipérbole de eixo real 4 cm e parâmetro 10 cm.

Resolução: $e = \sqrt{1 + \frac{p}{a}}$ (número 103.4)

$$\therefore \quad e = \sqrt{1 + \frac{10}{2}} \quad \therefore \quad e = \sqrt{6}$$

172 – Calcular a área do retângulo que tem dois lados coincidentes com as duas cordas focais de uma hipérbole equilátera de eixos iguais a $4\sqrt{2}$ cm.

Resolução: Os segundos lados do retângulo medem a distância focal $2c$.

Como a hipérbole é equilátera, sua distância focal $2c$ vale (número 105.1):

$$2c = 2a\sqrt{2} = 4\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 8$$

E, para a corda focal c_f , temos (número 105.3): $c_f = 2a$

$$\text{Logo, a área } S \text{ pedida vale: } S = 2a \cdot 2c = 4\sqrt{2} \cdot 8 = 32\sqrt{2} \text{ cm}^2$$

173 – De uma hipérbole são dados os focos F e F' e um ponto corrente M , tais que $FF' = 20$ cm, $MF = 12$ cm e $MF' = 16$ cm. Calcule as medidas dos eixos de curva.

Resolução: $2a = MF' - MF = 16 - 12 = 4$ cm

$$\text{e (número 102.3): } b^2 = c^2 - a^2 = 10^2 - 2^2 = 100 - 4 = 96$$

$$\therefore b = 4\sqrt{6}, \text{ então, } 2b = 8\sqrt{6} \text{ cm}$$

174 – Calcular a excentricidade e da hipérbole conjugada da que tem eixo real igual a 12 cm e imaginário 16 cm.

Resolução: Para as duas hipérboles, a dada e sua conjugada, a medida igual da distância focal $2c$, se calcula assim:

$$c^2 = a^2 + b^2 = 6^2 + 8^2 = 100 \quad \therefore c = 10$$

$$\text{Assim, para a conjugada, } e = \frac{10}{8} = 1,25$$

175 – Calcular a área do círculo tangente às duas diretrizes de uma hipérbole de eixo real igual a 4 m e de distância focal igual a 8 m.

Resolução: Todos os círculos tangentes às duas diretrizes da hipérbole são iguais, com raios, portanto, iguais a $\frac{a}{e}$ (ver número 218).

Então, a área S pedida vale:

$$S = \pi r^2 = \pi \left(\frac{a}{e}\right)^2 = \pi \left(\frac{a}{c/a}\right)^2 = \pi \left(\frac{a^2}{c}\right)^2 = \pi \left(\frac{4}{4}\right)^2:$$

$$\text{Concluindo, } S = \pi m^2$$

176 – Dada uma hipérbole por seus eixos real e imaginário, respectivamente, iguais a 12 cm e 16 cm, pede-se calcular a área do quadrado que tenha dois lados sobre as diretrizes da curva.

Resolução: O valor $2c$ da distância focal da hipérbole se calcula por sua relação fundamental (número 102.3):

$$c^2 = a^2 + b^2 = 6^2 + 8^2 = 100 \quad \therefore \quad c = 10$$

$$\text{Então, a excentricidade } e \text{ vale } e = \frac{c}{a} = \frac{10}{6}$$

O quadrado procurado há de ter, como valor do lado, a distância d entre as duas diretrizes da curva.

$$\text{Assim, (número 219.3), temos } d = \frac{2a}{e} = \frac{12}{10/6} = 7,2$$

$$\text{Por isso, a área } S \text{ do quadrado pedido vale } S = 51,84 \text{ cm}^2.$$

177 – Uma elipse e uma hipérbole têm os mesmos focos F e F' , tais que $FF' = 12$ cm. Sabendo que a distância entre os dois vértices A_1 e A_2 de cada curva, mais próximos de F , vale 6 cm, F ficando, em relação ao vértice A_1 da elipse, a uma distância dobro de sua distância ao vértice A_2 da hipérbole.

Pede-se calcular a distância entre as duas diretrizes, das curvas, ambas relativas ao foco F .

Resolução: Marcados o centro O comum às duas curvas, o foco comum F e os vértices A_1 da elipse e A_2 da hipérbole (Figura 512), conforme os dados, passa-se a calcular as excentricidades e_1 de elipse e e_2 da hipérbole:

$$e_1 = \frac{6}{10}; \quad e_2 = \frac{6}{4}$$

E, então (números 215 e 218), as distâncias x e y das diretrizes d_1 , da elipse, e d_2 , da hipérbole, ao centro comum às duas curvas (Figura 512) podem ser calculadas assim:

$$x = \frac{a_1}{e} = \frac{10}{6/10}; \quad y = \frac{a_2}{e} = \frac{4}{6/4}$$

Logo, a distância z entre as duas diretrizes em questão vale:

$$z = x - y = \frac{100}{6} - \frac{16}{6} = \frac{84}{6} = 14 \text{ cm}$$

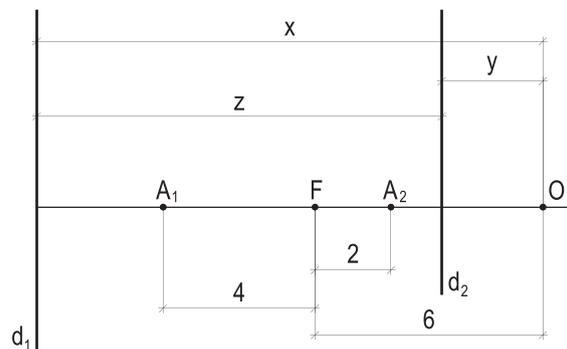


Figura 512

CAPÍTULO XIV

PROBLEMAS GERAIS

Neste capítulo, os problemas propostos e resolvidos compreendem toda a teoria antes desenvolvida, seguindo a numeração anterior.

178 – Duas parábolas de parâmetros p e p' têm a mesma diretriz e se situam num mesmo semiplano criado por essa diretriz. Pede-se calcular a área S do trapézio que tem por vértices os extremos das cordas focais dessas duas curvas, os dois focos numa perpendicular à diretriz.

Resolução: Pelos dados, temos para as cordas focais XY e $X'Y'$ e para a área S do trapézio $XY Y'X'$, (Figura 513):

$$XY = 2p ; X'Y' = 2p' ; FF' = p' - p$$

$$S = \frac{2p + 2p'}{2} \cdot (p' - p) = (p + p') \cdot (p' - p)$$

$$\text{Logo, } S = p'^2 - p^2$$

179 – Duas parábolas de parâmetros p e p' têm a mesma diretriz e se situam em semiplanos opostos em relação a essa diretriz, os dois focos numa perpendicular à diretriz.

Pede-se calcular a área S do trapézio que tem por vértices os extremos das cordas focais dessas duas curvas.

Resolução: Pelos dados, temos, para as cordas focais XY e $X'Y'$ e para a área S do trapézio $XY Y'X'$ (Figura 514):

$$XY = 2p ; X'Y' = 2p' ; FF' = p + p'$$

$$S = \frac{2p + 2p'}{2} \cdot (p + p') = (p + p') \cdot (p + p')$$

$$\text{Logo, } S = (p + p')^2$$

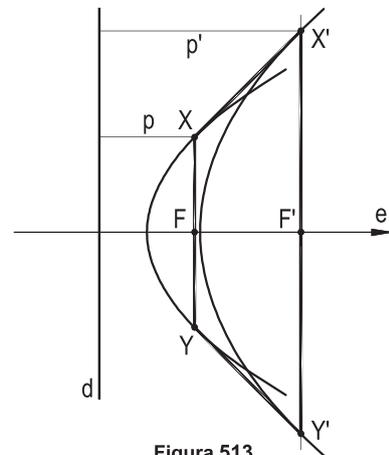


Figura 513

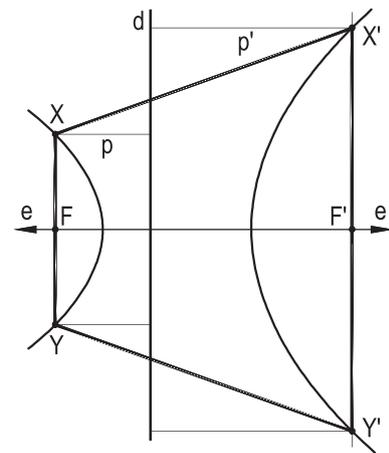


Figura 514

180 – Dadas as tangentes t e t' de um ponto exterior J a uma elipse, também dado, conhecendo-se um de seus focos F e o ponto de contato T da tangente t , pede-se determinar o ponto de contato T' da segunda tangente t' .

Resolução: Sabe-se (número 33.2) que a reta FJ que une o foco da elipse ao ponto exterior J é a bissetriz do ângulo formado pelas retas FT e FT' (segundo teorema de Poncelet), que unem o foco aos pontos de contato, bastando, assim, duplicar o ângulo α , que FT forma com FJ (Figura 515), para obter a reta w e, então, o ponto de contato T' .

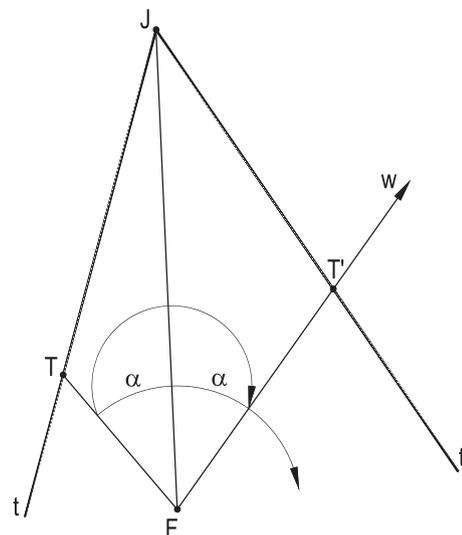


Figura 515

181 – Dadas duas tangentes t e t' a uma elipse, bem como seus pontos de contato T e T' , pede-se determinar o foco F da curva, sabendo que o ângulo formado entre os raios vetores FT e FT' mede 45° .

Resolução: Tal como no problema anterior, sabe-se (segundo teorema de Poncelet) que a reta FJ há de ser a bissetriz do ângulo $\widehat{TFT'}$ formado pelos raios vetores dos dois pontos de contato T e T' . Assim, construído o arco capaz de 45° para o segmento TT' , a união de J ao ponto M , médio do arco TT' replemantar daquele arco capaz, proporciona o foco F pedido (*Geometria Plana*, número 135) (Figura 516).

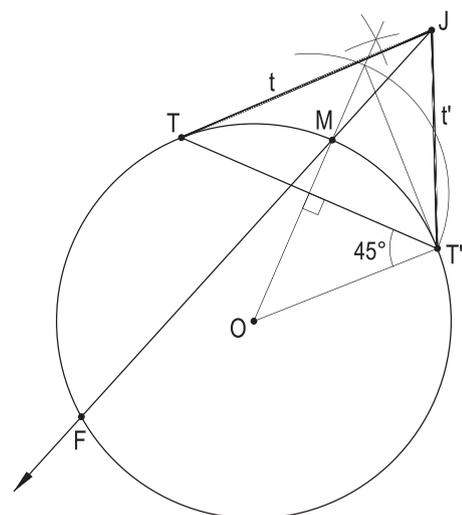


Figura 516

182 – Determinar o segundo eixo RS de uma elipse, dado seu eixo PQ , sabendo que o ortocentro H do triângulo dado ABC pertence à curva.

Resolução: Determinado o ortocentro H e construída a circunferência de diâmetro PQ , a paralela HH_1 a PQ , H_1 naquela circunferência (Figura 517), proporciona o triângulo HH_1H_2 (ver número 49) e, então, o segundo eixo RS pedido.

Para os dados, o eixo RS é o menor da elipse e, então, a circunferência utilizada é a sua principal.

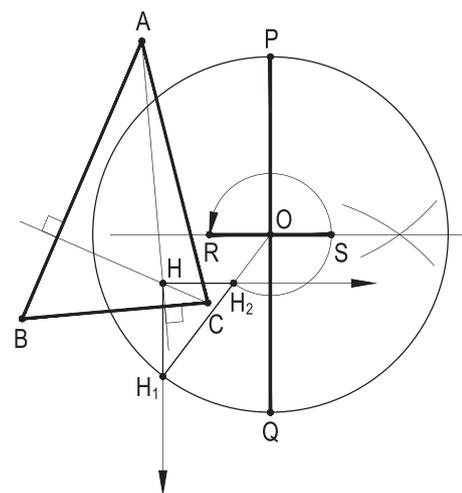


Figura 517

183 – Dada uma elipse por seu centro O , pelo suporte e de seu eixo real, pela medida a de seu semieixo real e por um ponto corrente M , pede-se construir seus diâmetros conjugados MM' e NN' , assim como as tangentes t e t' a ela nos pontos M e M' .

Resolução: Traçada a circunferência principal (O, a) da elipse, a afinidade ortogonal entre essa circunferência e a elipse proporciona o afim \bar{M} de M , os diâmetros perpendiculares $\bar{M}\bar{M}'$ e $\bar{N}\bar{N}'$ da principal (ver números 76 e 77.1) e a tangente \bar{t} , em \bar{M} (Figura 518), que, retornados ao ambiente da elipse, resolvem o problema. A segunda tangente t' , em M' , é paralela a t .

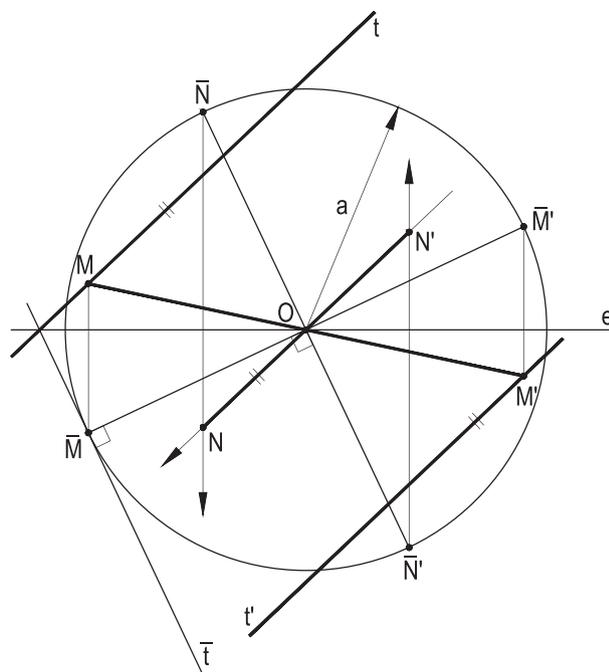


Figura 518

184 – Os eixos de uma hipérbole de distância focal $2k$, dada, têm por suportes as bissetrizes dos ângulos formados pelas retas secantes dadas r e s . Sabendo que a razão entre suas medidas é $5/2$, pede-se determinar os vértices da curva.

Resolução: Construídas as bissetrizes b_1 e b_2 e o triângulo retângulo OJL com catetos arbitrados, mas guardando a razão $5/2$, a aplicação da medida k sobre JL dá o ponto P e, por translação de JP , na direção b_1 , o ponto \bar{P} e, então, a medida $O\bar{J}$ de um de seus semieixos, o que proporciona as duas soluções para o problema, a primeira, apresentada na Figura 519, para os vértices A e A' sobre a bissetriz b_2 , observando que a segunda, para a hipérbole conjugada dessa, há de ter seus vértices sobre a bissetriz b_1 , visto que o enunciado não informa qual dos eixos é o real.

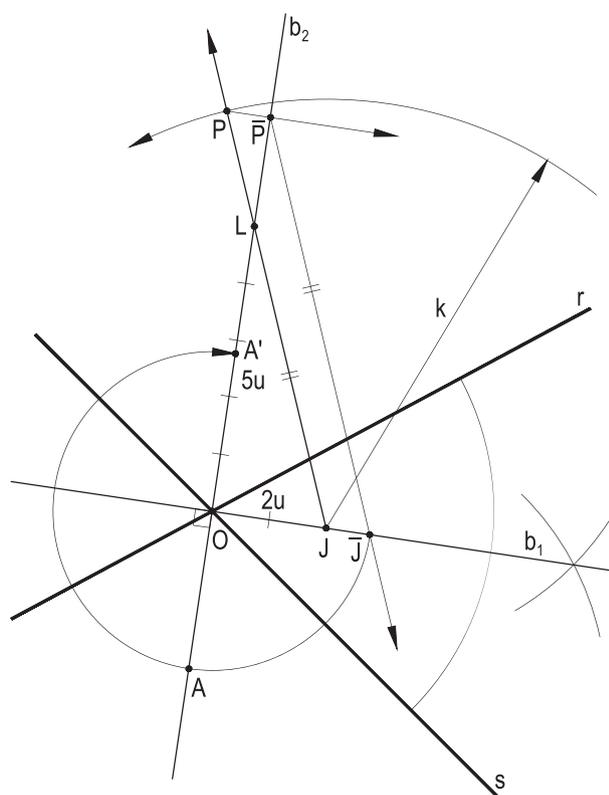


Figura 519

185 – Construir os diâmetros conjugados MM' e NN' de uma elipse de centro O , dados os pontos M , N e J , sabendo que esses dois diâmetros formam 135° entre si e que o centro O está o mais próximo possível de J .

Resolução: O centro O há de ser a interseção do arco capaz de 135° para o segmento MN , de centro C , com a reta JC , completados os diâmetros pedidos por simetrias de M e de N em relação a O (Figura 520).

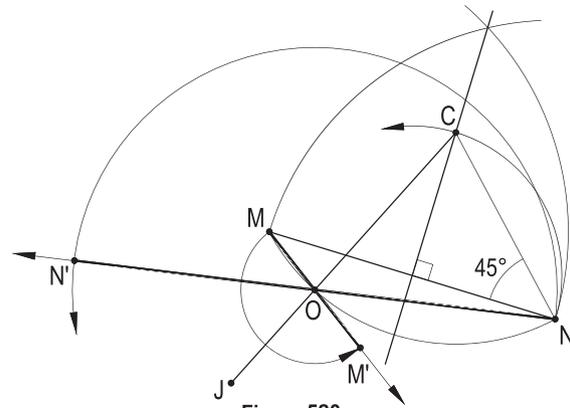


Figura 520

186 – Dadas as elipses e_1 e e_2 , por seus eixos $A_1A'_1$ e $B_1B'_1$ e $A_2A'_2$ e $B_2B'_2$, respectivamente, pede-se determinar a posição do ponto J , do qual se pode traçar tangentes às duas curvas, que sejam, para cada elipse, perpendiculares entre si.

Resolução: Os pontos J_1 e J_2 que atendem às condições impostas são (números 36 e 37) as interseções das circunferências de Monge (O_1, r) e (O_2, R) de cada elipse (Figura 521).

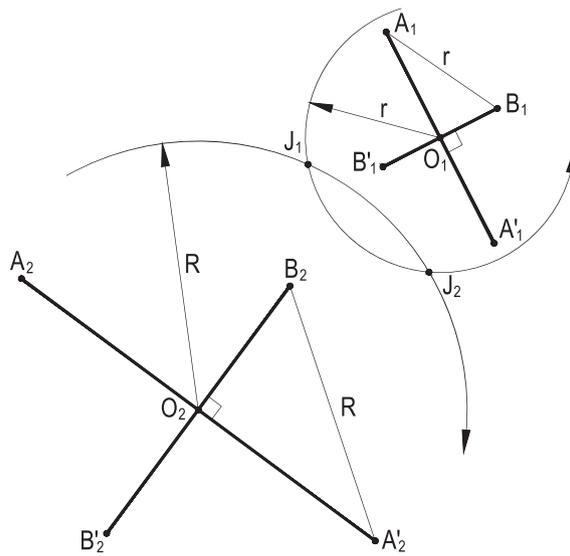


Figura 521

187 – Dadas uma elipse, por seus eixos $A_1A'_1$ e $B_1B'_1$ e uma hipérbole, também por seus eixos $A_2A'_2$ e $B_2B'_2$, pede-se determinar o ponto J que vê ambas as curvas sob ângulos retos.

Resolução: Tal como no problema anterior, os pontos J_1 e J_2 que resolvem a questão são (números 124 e 125) as interseções J_1 e J_2 das circunferências de Monge de cada uma das duas cônicas dadas (O_1, R) e (O_2, r) (Figura 522).

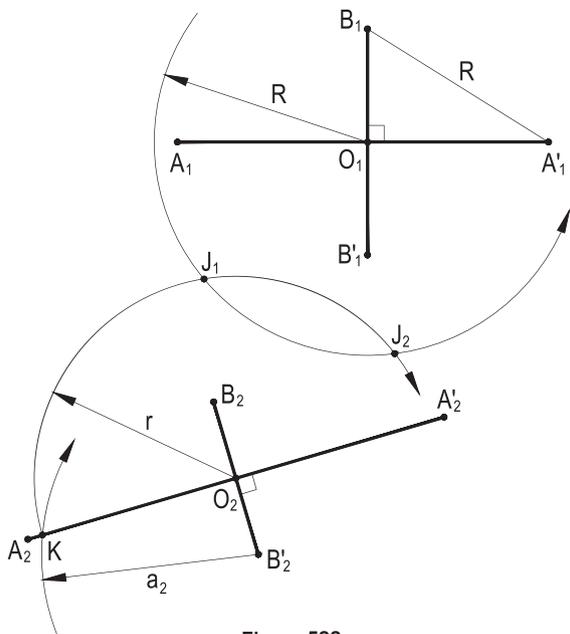


Figura 522

191 – De uma hipérbole são dadas as duas assíntotas t_1 e t_2 , que se cortam num ponto inacessível, exterior aos limites dados para a execução da questão. Dado também um ponto M da curva e informado que a reta suporte do eixo real da hipérbole resta exterior ao espaço oferecido, pede-se determinar a medida desse eixo real.

Resolução: Sabe-se (número 133.2) que os eixos da hipérbole situam-se sobre as bissetrizes dos ângulos formados pelas assíntotas. Assim, construída a bissetriz b , com o auxílio de \bar{t}_1 e de \bar{b} (Figura 526), e traçada a reta MPQ a ela perpendicular e, portanto, paralela ao suporte do eixo real, a construção detalhada nos números 138 e 139 proporciona a medida a , igual à tangente MZ , metade do eixo real pedido.

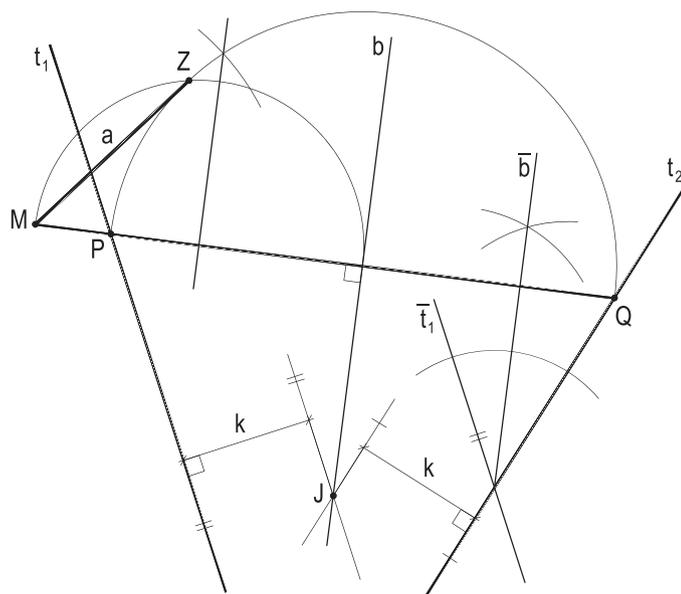


Figura 526

192 – Dados dois triângulos escalenos ABC e EFG , pede-se determinar o foco da parábola tangente tanto às retas suportes dos lados de ABC , quanto às retas suportes dos lados de EFG .

Resolução: Sabe-se (número 175) que os pontos da circunferência circunscrita a um triângulo podem ser foco de uma parábola tangente às retas suportes dos lados do triângulo.

Assim, basta determinar os circuncentros O_1 e O_2 dos dois triângulos dados e construir as circunferências (O_1) e (O_2) a eles circunscritas, pois seus pontos de corte F_1 e F_2 são as duas soluções procuradas (Figura 527).

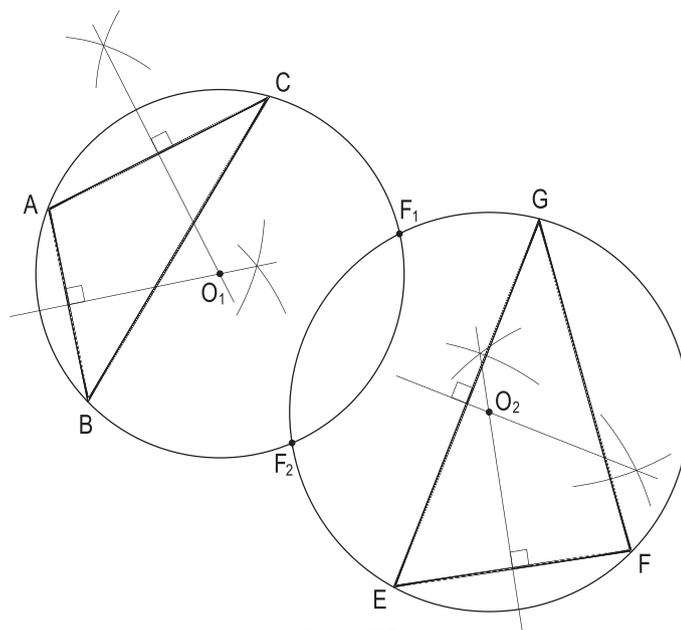


Figura 527

193 – De uma parábola são dados o foco F e duas tangentes t_1 e t_2 . Pede-se determinar sua diretriz d e os pontos de contato T_1 e T_2 das duas tangentes.

Resolução: As projeções A_1 e A_2 do foco sobre as tangentes definem a reta w , tangente à parábola em seu vértice (número 169) e, então, o vértice A que, por simetria de F , traz J e a diretriz d , perpendicular a AJ , além do ponto de contato T_1 , na paralela, por S_1 , ao eixo e (Figura 528). Como o simétrico de F em relação a t_2 é inacessível, a repetição do ângulo α (número 171.1) indica a posição do ponto de contato T_2 (Figura 528).

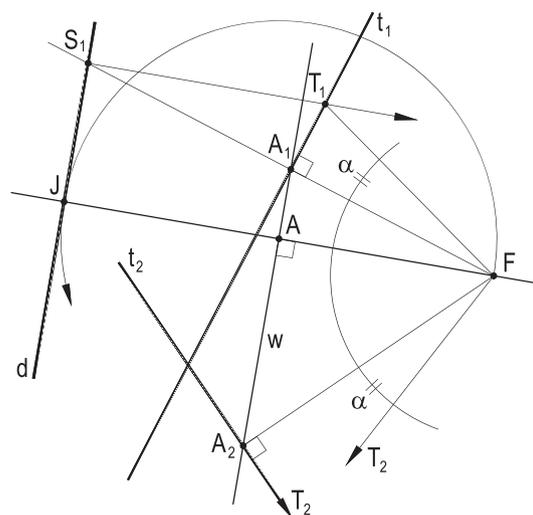


Figura 528

194 – Determinar duas tangentes t_1 e t_2 a uma parábola, sabendo que elas formam, entre si, 60° , conhecendo seus pontos de contato T_1 e T_2 e o foco F da curva.

Resolução: Traçado o arco capaz de 60° para T_1T_2 , a união de F ao ponto M , médio do arco a ele replementar, dá o ponto J , tal que JF seja a bissetriz (número 171.2) do ângulo formado pelas tangentes t_1 e t_2 (Figura 529).

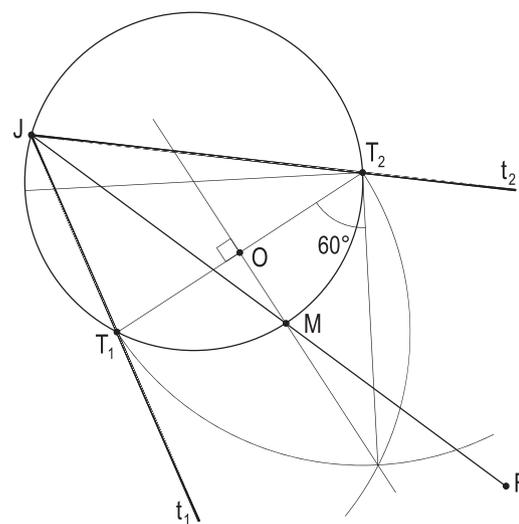


Figura 529

195 – Dada uma elipse por seus semieixos OA e OB e uma parábola por seu foco F e sua diretriz d , construa o triângulo equilátero JKL , sabendo que J e K veem as duas curvas sob ângulos retos e que L fica à esquerda de JK .

Resolução: J e K são as interseções de circunferência de Monge da elipse (número 37) com a tangente w à parábola em seu vértice P (número 169) (Figura 530).

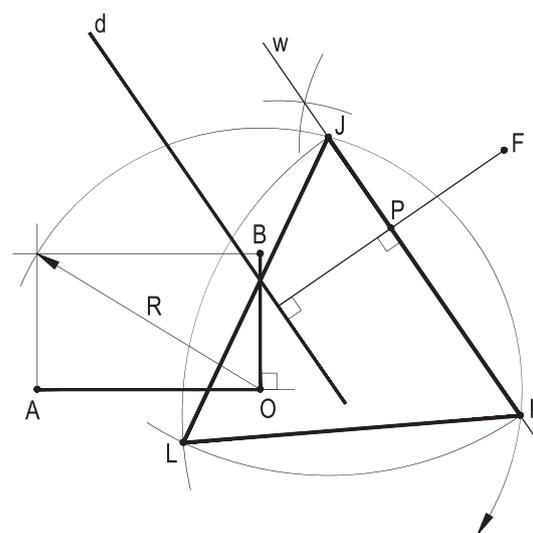


Figura 530

196 – Os diâmetros conjugados MM' e NN' de uma elipse formam 60° entre si e têm suas medidas proporcionais aos números 7 e 3. Dados os pontos M e N e sabendo que o centro O da elipse fica à direita da corda MN , pede-se construir os diâmetros MM' e NN' e as tangentes à curva nos extremos desses diâmetros.

Resolução: Em construção auxiliar é simples traçar um triângulo $O7L$ com lados medindo 7 e 3 unidades arbitradas e com ângulo $\widehat{L\hat{O}7} = 60^\circ$ para, aplicando sobre a reta $7L$ a medida da corda dada MN , por simples homotetia de polo 7, obter as medidas $7\bar{P}$ e $\bar{L}\bar{P}$ dos semidiâmetros pedidos, com o que se pode obter o centro O da elipse e, duplicando MO e NO , conseguir completar MM' e NN' (Figura 531).

As tangentes pedidas t_1 , t'_1 , t_2 e t'_2 são, como se sabe (número 75.4), paralelas aos diâmetros MM' e NN' já construídos.

197 – Duas parábolas têm o mesmo foco F e diretrizes d_1 e d_2 paralelas, F fora do intervalo entre elas.

Pede-se determinar a razão $k = p_1/p_2$ que deve haver entre seus parâmetros, para que o suporte comum às suas cordas focais proporcione entre as duas curvas três segmentos iguais.

Resolução: Pede-se (Figura 532) que $M_1M_2 = M_1M'_1 = M'_1M'_2$, ou seja, que:

$$p_2 - p_1 = 2p_1 \quad \therefore \quad p_2 = 3p_1$$

$$\text{Logo, a razão é } k = p_1/p_2 = \frac{1}{3}$$

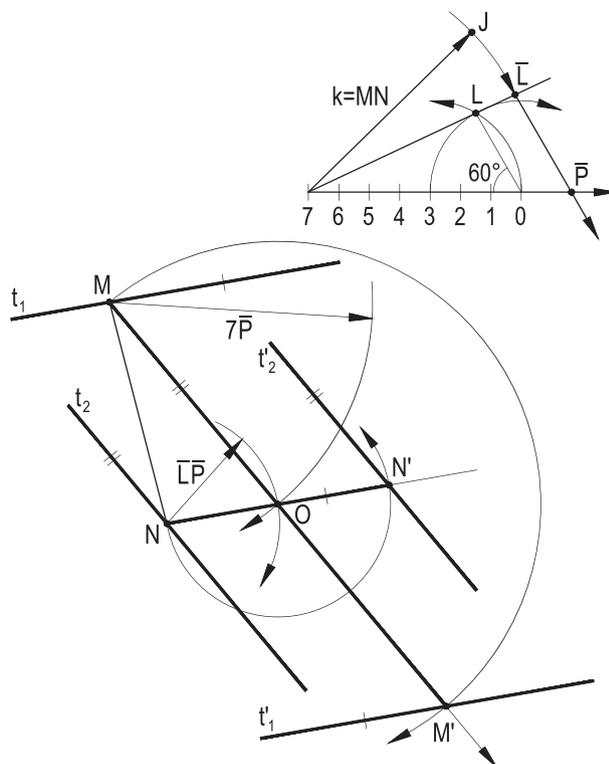


Figura 531

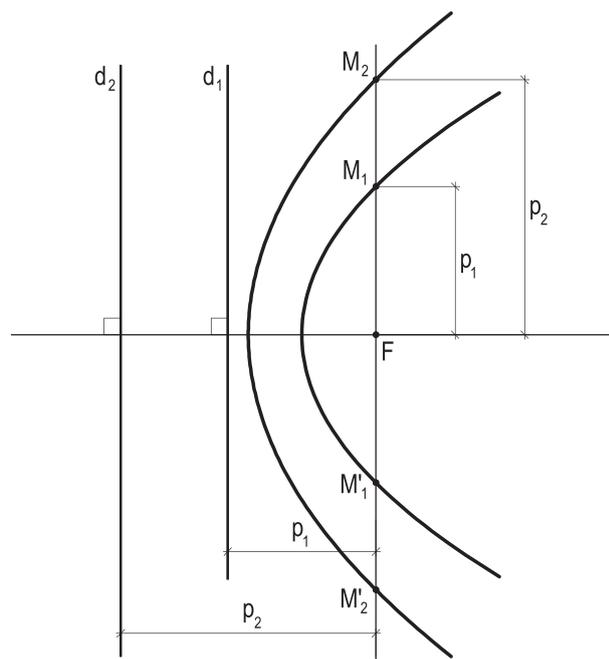


Figura 532

198 – Concordar as retas dadas r e s por um arco de hipérbole, conhecendo seu foco F e o valor $2a$ de seu eixo real.

Resolução: Obtidos os simétricos S e S' de F em relação às retas dadas, as circunferências $(S, 2a)$ e $(S', 2a)$ cortam-se, proporcionando o segundo foco F' , e as retas $F'S$ e $F'S'$ dão os pontos de contato T e T' , que limitam o arco h da hipérbole concordante pedida (Figura 533), construído por pontos.

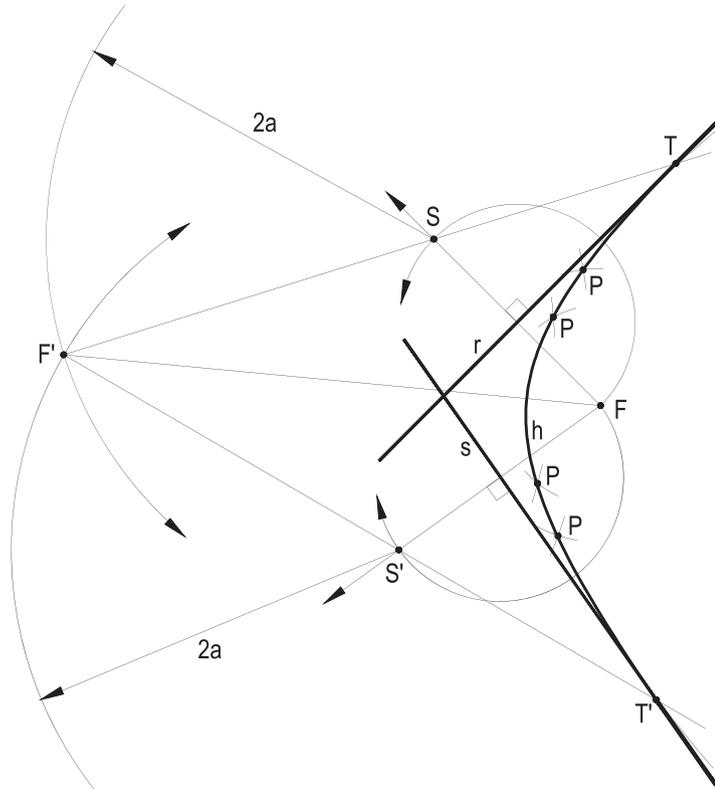


Figura 533

199 – Concordar as retas dadas r e s por um arco de parábola de diretriz d , dada.

Resolução: Obtidas as retas d_1 e d_2 simétricas da diretriz d em relação, respectivamente, a r e a s , obtém-se, por corte, o foco F da parábola, o que traz seu eixo e , seu vértice A , ponto médio do segmento de perpendicular FJ de F a d , J em d (Figura 534), e as perpendiculares por F a r e a s dão, em d , S_1 e S_2 , que proporcionam, com paralelas ao eixo, os pontos de contato T_1 e T_2 , que delimitam o arco da concordância pedida, construído por pontos.

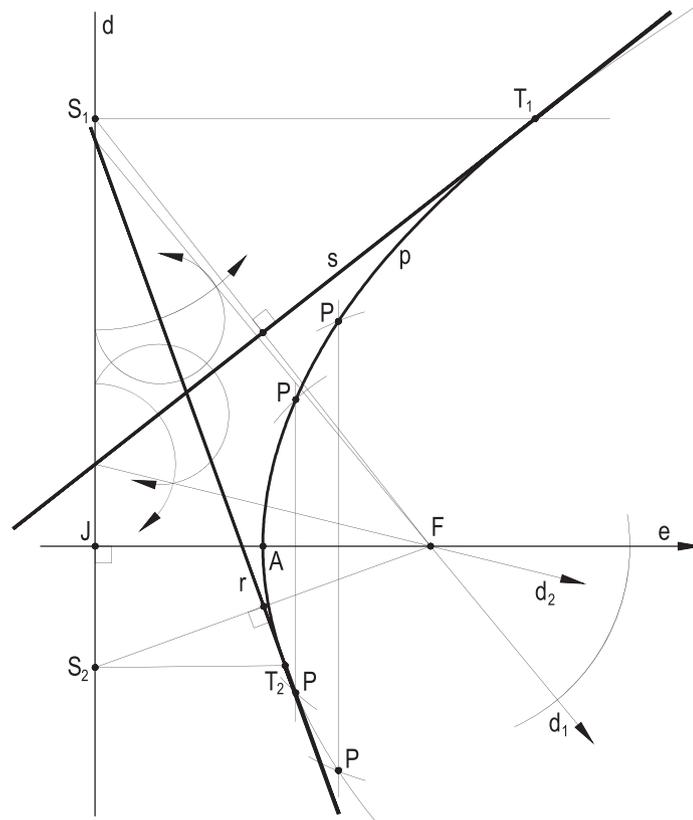


Figura 534

200 – Concordar as retas dadas r e s por um arco de elipse, conhecendo seu foco F , que é, entre os dois focos da curva, o mais próximo do ponto comum às retas r e s . Dada, também, a medida $2a$ do eixo maior da elipse.

Resolução: Determinados os simétricos F_1 e F_2 de F , em relação a r e a s , respectivamente, as circunferências $(F_1, 2a)$ e $(F_2, 2a)$ cortam-se, proporcionando o segundo foco F' da elipse, com o que vem o centro O da curva e, com a circunferência de centro O e raio a , ficam marcados os vértices A e A' do eixo maior. Na mediatriz de FF' , obtêm-se os outros dois vértices B e B' , com a circunferência (F', a) . Os pontos de contato T_1 e T_2 da curva com as retas dadas e demais pontos correntes J proporcionam a construção da elipse (Figura 535), da qual foi escolhido o arco maior $T_1A'T_2$, na concordância que corresponde a convergir as retas dadas.

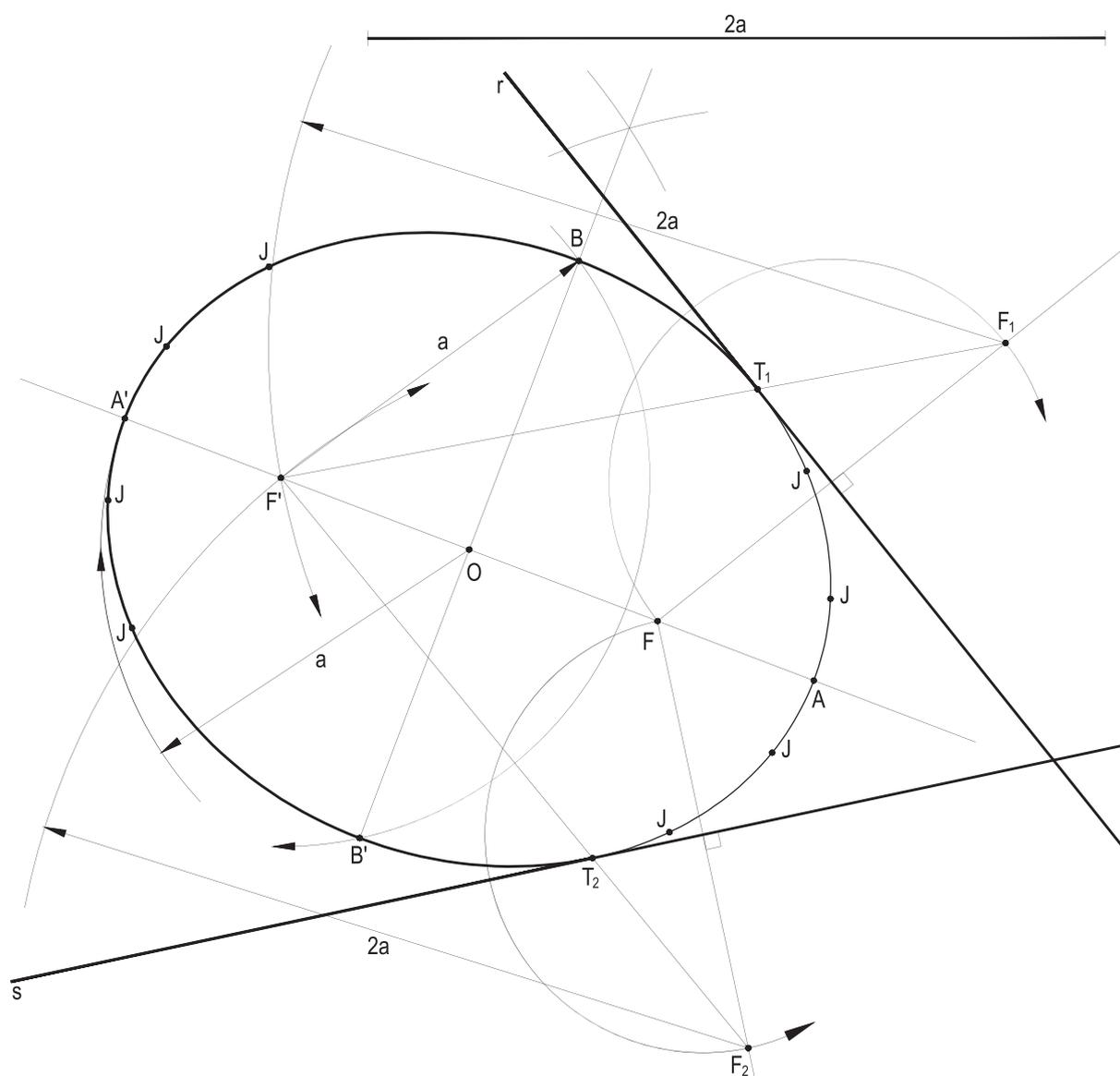


Figura 535

DADOS INTERNACIONAIS DE CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO (CIP)
(CÂMARA BRASILEIRA DO LIVRO, SP, BRASIL)

Almeida, Célio Pinto de

Cônicas / Célio Pinto de Almeida. 2. ed.

Rio de Janeiro : G. Ermakoff Casa Editorial, 2025.

240 p.: il. ; 28 cm.

ISBN 978-65-87730-12-7

1. Geometria plana 2. Seções cônicas I. Título.

25-266018

CDD-516.05

ÍNDICES PARA CATÁLOGO SISTEMÁTICO:

1. Geometria plana : Matemática 516.05

Cibele Maria Dias - Bibliotecária - CRB-8/9427

Este livro foi composto na tipografia Minion pro em
corpo 12,5/17,3, impresso em papel offset 90g/m²,
na gráfica Edelbra, Erechim, RS.